# वर्ग और वर्गमूल
# (Square and Square Root)

अध्याय
**2**



$2^2 = 4$
$5^2 = 25$
$5^2 = 3^2+4^2$
$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{51.84} = 7.2$

**हम सीखेंगे –**
* संख्या का वर्ग
* पूर्ण वर्ग संख्या
* पाइथागोरस त्रिक
* वर्गमूल ज्ञात करना

GE4NVG

## 2.1 भूमिका :–

हमने बहुभुज वाले पाठ में वर्ग के बारे में पढ़ा है। इस पाठ में हमलोग किसी संख्या के वर्ग एवं वर्गमूल के बारे में पढ़ेंगे।

निम्नलिखित संख्याओं का अवलोकन कीजिए।

$1 = 1\times1 = 1^2$
$4 = 2\times2 = 2^2$
$9 = 3\times3 = 3^2$
$16 = 4\times4 = 4^2$
$81 = ?$

उपरोक्त संख्याओं में हमने देखा 16 प्राकृत संख्या 4 को स्वयं से गुणा करने पर मिलता है। अतः 16 प्राकृत संख्या 4 का वर्ग है। इसी प्रकार, 16 एक वर्ग संख्या (Square number) या पूर्ण वर्ग संख्या (Perfect Square Number) है।

**किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, वह उस संख्या का वर्ग होता है।**

इसी प्रकार 9, 16 एवं 25 क्रमशः 3, 4 एवं 5 का वर्ग है।

अतः एक प्राकृत संख्या m यदि $n^2$ के रूप में व्यक्त की जा सकती है, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है तो m वर्ग संख्या या पूर्ण वर्ग संख्या कहलाती है।
नीचे कुछ संख्याओं का वर्ग, सारणी में दिया गया है। जिसमें संख्या एवं उनके वर्ग लिखे गए हैं। जिन्हें आपको याद रखना चाहिए।

| संख्या | संख्या का वर्ग | संख्या | संख्या का वर्ग |
|---|---|---|---|
| 1 | $1^2 = 1$ | 11 | $11^2 = 121$ |
| 2 | $2^2 = 4$ | 12 | $12^2 = 144$ |
| 3 | $3^2 = 9$ | 13 | $13^2 = 169$ |
| 4 | $4^2 = 16$ | 14 | $14^2 = 196$ |
| 5 | $5^2 = 25$ | 15 | $15^2 = 225$ |
| 6 | $6^2 = 36$ | 16 | $16^2 = 256$ |
| 7 | $7^2 = 49$ | 17 | $17^2 = 289$ |
| 8 | $8^2 = 64$ | 18 | $18^2 = 324$ |
| 9 | $9^2 = 81$ | 19 | $19^2 = 361$ |
| 10 | $10^2 = 100$ | 20 | $20^2 = 400$ |

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 289 आदि वर्ग या पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं।
उपरोक्त सारणी में वर्ग संख्याओं के अध्ययन करने से यह ज्ञात होता है कि ये सभी संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती है। इनमें से किसी भी संख्या के इकाई स्थान पर 2, 3, 7, या 8 नहीं आता है।

## 2.2 पूर्ण वर्ग संख्या या वर्ग संख्या के कुछ और गुण

(1) जिस संख्या के इकाई में 2, 3, 7 या 8 रहता है, वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है। जैसे :– 12, 23, 17, 38 आदि पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। क्या 123467 पूर्ण वर्ग संख्या है? सोचिए।

(2) सम संख्याओं का वर्ग सर्वदा सम संख्या होती है।
जैसे :– $4^2 = 16$, $6^2 = 36$ इत्यादि

(3) विषम संख्याओं का वर्ग सर्वदा विषम संख्या होती है।
जैसे :– $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $(11)^2 = 121$ इत्यादि

(4) यदि किसी संख्या के अंत में शून्यों की संख्या विषम हो तो ऐसी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होगी। यदि शून्यों की संख्या सम हो और शून्यों को छोड़कर शेष संख्या पूर्ण वर्ग हो तो संख्या पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

जैसे :– 60, 1000, 400000 इत्यादि पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

400 में दो शून्य है एवं शून्य को छोड़कर संख्या 4 है जो पूर्ण वर्ग संख्या है, इसलिए 400 पूर्ण वर्ग संख्या है लेकिन 500 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अतः 400, 160000, 900 इत्यादि पूर्ण वर्ग संख्या हैं।

(5) यदि एक संख्या के इकाई स्थान पर 1 या 9 है, तब इसकी वर्ग संख्या के अंत में 1 होगा। जैसे – $9^2 = 81$, $21^2 = 441$, $11^2 = 121$ इत्यादि।

(6) यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 6 है तो वह जिस संख्या का वर्ग है, उसका इकाई अंक 4 या 6 होगा।

जैसे :–

$16 = 4^2$
$576 = 24^2$
$2916 = 54^2$
$\Rightarrow$ यहाँ 4, 24, 54 की इकाई में 4 है।

$36 = 6^2$
$1296 = 36^2$
$3136 = 56^2$
$\Rightarrow$ यहाँ 6, 36, 56 की इकाई में 6 है।

(7) निम्नलिखित संख्याओं और उनके वर्गों पर विचार कीजिए :

संख्या में एक शून्य है। → $10^2 = 100$, $40^2 = 1600$, $50^2 = 2500$ ← वर्ग में दो शून्य हैं।

संख्या में दो शून्य हैं। → $100^2 = 10000$, $300^2 = 90000$, $1500^2 = 2250000$ ← वर्ग में चार शून्य हैं।

संख्या में तीन शून्य हैं। → $1000^2 = 1000000$, $2000^2 = 4000000$, $7000^2 = 49000000$ ← वर्ग में छह शून्य हैं।

जरा सोचिए! संख्या में शून्यों की संख्या और उसके वर्ग में शून्यों की संख्या में क्या संबंध है?

अब इन जानकारियों के आधार पर कुछ उदाहरण देखिए –

**उदाहरण 1** :– निम्नलिखित में से किन–किन वर्ग संख्या के इकाई अंक 1 होगी?

(a) $23^2$ (b) $45^2$ (c) $39^2$ (d) $491^2$ (e) $17^2$

**हल :–** जिस संख्या का इकाई अंक 1 या 9 हो तो उसके वर्ग का इकाई अंक 1 होता है। अतः $(491)^2$ तथा $(39)^2$ का इकाई अंक 1 है।

**उदाहरण 2 :–** निम्नलिखित में कौन–सी वर्ग संख्या है और कौन सी विषम?

(a) $23^2$ (b) $34^2$ (c) $56^2$ (d) $21^2$

**हल :–** चूँकि 23 एवं 21 विषम संख्या है और 34 एवं 56 सम संख्या है।
विषम संख्या एवं सम संख्या का वर्ग क्रमशः विषम एवं सम संख्या होती है।
अतः $23^2$ एव $21^2$ विषम संख्या है और $34^2$ एवं $56^2$ सम संख्या है।

**उदाहरण 3 :–** निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्यों की संख्या कितनी होंगी?

(i) 30 (ii) 500

**हल :–** (i) $30^2$ में दो शून्य होंगे। (ii) $500^2$ में चार शून्य होंगे।

### 2.2.1 दी हुई दो संख्याओं के बीच की वर्ग संख्याएँ

(i) 81 और 100 के बीच वर्ग संख्याएँ

चूँकि, $9^2 = 81$ एवं $10^2 = 100$ हैं। 9 और 10 दो क्रमागत प्राकृत संख्याएँ हैं एवं उसके वर्ग क्रमशः 81 और 100 हैं।

हम जानते हैं कि 9 और 10 के बीच कोई भी प्राकृत संख्या नहीं है। इसलिए 81 से 100 के बीच ऐसी कोई संख्या नहीं होगी जो किसी संख्या का वर्ग होगा।

(ii) 60 एवं 120 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ

चूँकि $60 > 7^2$ और $120 < 11^2$

अतः 60 से 120 के बीच यदि कोई पूर्ण वर्ग संख्या होगी तो वह 7 से बड़ी एवं 11 से छोटी संख्या का वर्ग होगा, यानी 8, 9 या 10 का वर्ग होगा।

अतः $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$

इसलिए, 60 एवं 120 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ 64, 81 एवं 100 होंगी।

(iii) इसी प्रकार 26 से 32 के बीच पूर्ण वर्ग संख्याएँ

चूँकि, $26 > 5^2$ और $32 < 6^2$

अतः 26 से 32 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ 5 एवं 6 के बीच प्राकृत संख्या का वर्ग होगा, लेकिन 5 और 6 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। इसलिए 26 से 32 के बीच पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं होंगी।

**उदाहरण 4 :–** दी हुई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(i) 28 और 42 (ii) 123 और 140

**हल :–** (i) $28 > 5^2$ और $42 < 7^2$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

28 से 42 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ 5 एवं 7 के बीच की प्राकृत संख्याओं का वर्ग होगा। 5 एवं 7 के बीच सिर्फ 6 एक प्राकृत संख्या है और $6^2 = 36$
इसलिए 28 और 42 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्या 36 है।

(ii) $123 > 11^2$ और $140 < 12^2$

11 एवं 12 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। अतः 123 एवं 140 के बीच कोई भी पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

## प्रश्नावली 2.1

(1) निम्नलिखित में कौन–कौन सी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं? कारण सहित बताइए।

(a) 23467 (b) 12433 (c) 400 (d) 1400 (e) 16000 (f) 8100 (g) 7928 (h) 505050

(2) निम्नलिखित में किसका वर्ग सम या विषम संख्या है, बताइए?

(i) 441 (ii) 2704 (iii) 961 (iv) 3249 (v) 5184

(3) निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग की इकाई अंक बताइए–

(i)19 (ii) 21 (iii) 38 (iv) 66 (v) 42

(vi) 333 (vii) 3294 (viii) 3255 (ix) 1237 (x) 400

(4) निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्यों की संख्या बताइए।

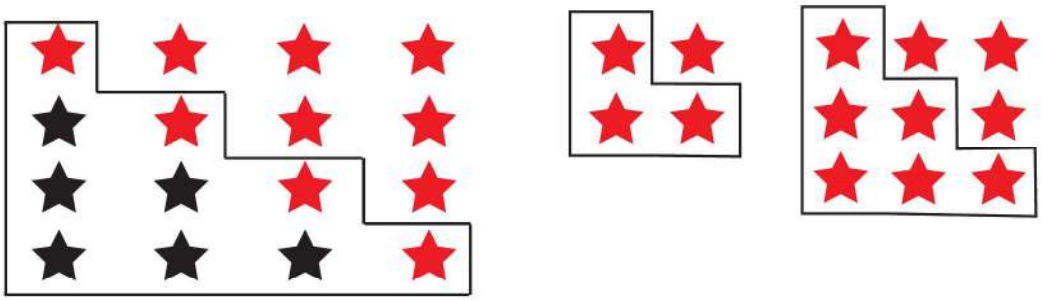
(i)20 (ii) 400 (iii) 1000 (iv) 41

### 2.3 कुछ और रोचक प्रतिरूप

**(i)** हमने कक्षा छह में त्रिकोणीय संख्याओं, जिनके बिंदु प्रतिरूप त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित किए जा सकते हैं, के बारे में पढ़ा है।




यदि हम दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं को जोड़ते हैं तो हमें एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है जैसे $1 + 3 = 4 = 2^2$, $3 + 6 = 9 = 3^2$, $6 + 10 = 16 = 4^2$



**(ii) दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच की संख्याएँ जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।**

$4^2 = 16$ एवं $5^2 = 25$। चूँकि 4 एवं 5 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। अतः 16 एवं 25 के बीच ऐसी कोई संख्या नहीं होगी जो वर्ग संख्या है।

इसका अर्थ हुआ कि 16 से 25 के बीच जितनी भी संख्या है, उसमें कोई भी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

माना $n^2$ एवं $(n+1)^2$ दो क्रमागत पूर्ण वर्ग संख्या है।

इसलिए $n^2$ एवं $(n+1)^2$ के बीच की संख्याएँ $= \{((n+1)^2 - n^2\} - 1$

$= (n^2 + 2n + 1 - n^2) - 1$

$= 2n + 1 - 1$

$= 2n$

अतः $n^2$ एवं $(n+1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ हैं।

अतः हम कह सकते हैं कि दो क्रमागत वर्ग संख्याओं $n^2$ एवं $(n+1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ हैं जो वर्ग संख्या नहीं है।

**(iii) विषम संख्याओं का जोड़**

क्रमागत विषम संख्याओं के योग को देखिए

1(विषम संख्या) $= 1 = 1^2$

$1 + 3$ (पहली दो विषम संख्याओं का योग) $= 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5$ (पहली तीन विषम संख्याओं का योग) $= 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7$(.....) $= 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9$(.....) $= 25 = 5^2$

हमने देखा कि पहली चार विषम संख्याओं का योग $4^2$ है। इसी प्रकार पहली पाँच विषम संख्याओं का योग $5^2$ है।

इस आधार पर हम कह सकते हैं कि पहली $n$ विषम संख्याओं का योग $n^2$ है।
अर्थात $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + n$ विषम संख्याएँ $= n^2$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

**विषम संख्याओं के इस गुण के आधार पर पूर्ण वर्ग संख्याओं के गुण को देखिए।**

25 एक पूर्ण वर्ग संख्या है

चरण 1 :– $25 - 1 = 24$ (25 में पहली विषम संख्या घटाने पर)

चरण 2 :– $24 - 3 = 21$ (उपर्युक्त परिणाम से दूसरी विषम संख्या घटाने पर)

चरण 3 :– $21 - 5 = 16$ (उपर्युक्त परिणाम से तीसरी विषम संख्या घटाने पर)

चरण 4 :– $16 - 7 = 9$ (उपर्युक्त परिणाम से चौथी विषम संख्या घटाने पर)

चरण 5 :– $9 - 9 = 0$ (उपर्युक्त परिणाम से पाँचवीं विषम संख्या घटाने पर)

$\therefore$ **25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9**

प्रक्रिया को दूसरी संख्या के लिए करते हैं।

माना दूसरी संख्या 34 है।

$34 - 1 = 33$

$33 - 3 = 30$

$30 - 5 = 25$

$25 - 7 = 18$

$18 - 9 = 9$

$9 - 11 = -2$

अतः 34 को 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में नहीं लिख सकते हैं लेकिन 25 को 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं।

इस आधार पर हम कह सकते हैं कि–

वैसी प्राकृत संख्या जो 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त नहीं हो सकती, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

### (iv) क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$13^2 = 169 = 84 + 85$

वाह! किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

### (v) दो क्रमागत विषम या सम संख्याओं का गुणनफल

$1\times3 = (2-1)(2+1) = 2^2-1,$

$3\times5 = (4-1)(4+1) = 4^2-1$

$7\times9 = (8-1)(8+1) = 8^2-1$

$11\times13 = (12-1)(12+1) = 12^2-1$

इसी प्रकार,

$24\times26 = (25-1)(25+1) = 25^2-1$

$42\times44 = (43-1)(43+1) = 43^2-1$

- दो क्रमागत विषम संख्याओं का गुणनफल उनके बीच की सम संख्या के वर्ग से 1 कम होता है।
- दो क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल उनके बीच की विषम संख्या के वर्ग से 1 कम होता है।

**उदाहरण 5 :** $53^2$ और $54^2$ के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? यह भी बताइए कि बीच की कितनी प्राकृत संख्याएँ है जो वर्ग संख्या नहीं है ?

**हल :–** $n^2$ एवं $(n+1)^2$ के बीच $2n$ प्राकृत संख्याएँ है। यहाँ $n = 53$

अतः $53^2$ एवं $54^2$ के बीच के प्राकृत संख्याएँ $= 2n$

$= 2 \times 53$

$= 106$

ये सभी संख्याएँ वैसी संख्याएँ हैं जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

> दो क्रमागत वर्ग संख्या के बीच कोई भी पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।

अतः $53^2$ एवं $54^2$ के बीच 106 संख्याएँ हैं जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं।

**उदाहरण 6 :** निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं या नहीं? जाँच कर क्रमागत विषम संख्यओं के योग के रूप में लिखिए।

(i) 81 (ii) 14

**हल:** (i) 81

$81-1 = 80$

$80-3 = 77$

$77-5 = 72$

$72-7 = 65$

$65-9 = 56$

$56-11 = 45$

$45-13 = 32$

$32 - 15 = 17$

$17 - 17 = 0$

अतः 81 एक पूर्ण वर्ग संख्या हैं।

$81 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(ii) 14

14–1 = 13

13–3 = 10

10–5 = 5

5–7 =–2 (शून्य नहीं आया।)

अतः 14 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

**उदाहरण 7:** निम्नलिखित संख्याओं को दो क्रमागत पूर्णांकों के योग के रूप में लिखिए:

(i) $21^2$ (ii) $35^2$

**हल :–** (i) $21^2 = 441 = 220 + 221$

(ii) $35^2 = 1225 = 612 + 613$

दो क्रमागत संख्याएँ वर्ग के आधी के अगल–बगल के पूर्णांक है। जैसे $\frac{441}{2} = 220.5$, अगल–बगल के पूर्णांक 220 और 221

**उदाहरण 8 :** योग संक्रिया किए बिना योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17

**हल :–** (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$

(यह क्रमागत 6 विषम संख्याओं के वर्गों का योग है।)

(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 9^2 = 81$

(क्रमागत 9 विषम संख्याओं के वर्गों का योग)

## प्रश्नावली 2.2

(1) योग संक्रिया किए बिना योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

(2) निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? लिखिए।

(i) 43 और 44 (ii) 14 और 15 (iii) 34 और 35

(3) निम्नलिखित संख्याओं को दो क्रमागत पूर्णांकों के योग के रूप में लिखिए।

(i) $23^2$ (ii) $15^2$ (iii) $19^2$

## 2.4 संख्याओं का वर्ग ज्ञात करना

हमने जाना किसी संख्या का वर्ग निकालने के लिए उस संख्या को उसी से गुणा किया जाता है।

जैसे :– $4^2 = 4 \times 4 = 16$, $9^2 = 9 \times 9 = 81$

इस विधि से छोटी संख्याओं का वर्ग निकालना आसान है। परंतु बड़ी संख्याओं का वर्ग निकालना थोड़ा कठिन है। आइए अब दूसरी विधि से वर्ग निकालते हैं।

$$\begin{aligned} 34^2 &= (30+4)^2 \\ &= 30^2 + 2\times30\times4 + 4^2 \quad \{ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \} \\ &= 900 + 240 + 16 \\ &= 1156 \end{aligned}$$

**उदाहरण 9 :** निम्नलिखित संख्याओं का मान गुणा किए बिना ज्ञात कीजिए।

(i) $24^2$ (ii) $52^2$

**हल :** – (i) $24^2 = (20+4)^2$

$$= 20^2 + 2\times20\times4 + 4^2$$
$$= 400 + 160 + 16$$
$$= 576$$

(ii) $52^2 = (50+2)^2$

$$= 50^2 + 2\times50\times2 + 2^2$$
$$= 2500 + 200 + 4$$
$$= 2704$$

### 2.4.1 वर्ग निकालने की कुछ और लघु विधियाँ

**(i) विकर्ण विधि**

विकर्ण तरीका द्वारा किसी संख्या का वर्ग निकालने के लिए निम्नलिखित चरणों का पालन कीजिए।

**चरण 1:** जिस संख्या का वर्ग निकालना है, पहले यह पता कीजिए कि वह कितने अंकों की संख्या है। माना कि वह n अंकों की संख्या है।

**चरण 2:** $(n+1)$ क्षैतिज एवं $(n+1)$ लम्बवत रेखाएँ खींचकर विभिन्न वर्ग बनाइए जिसमें $n^2$ उपवर्ग हो।

**चरण 3:** प्रत्येक उपवर्ग का विकर्ण खींचिए।

**चरण 4:** दी हुई संख्या के अंकों को लम्बवत् रेखा के ऊपर बाईं ओर से लिखिए और क्षैतिज रेखा के बाईं ओर से नीचे की ओर लिखिए।

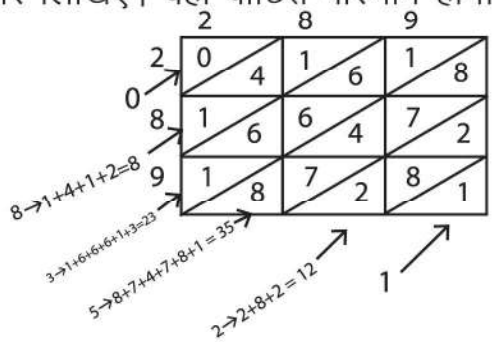
"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

**चरण 5** : वर्ग के बाईं ओर लिखे प्रत्येक अंक को लम्बवत रेखा के ऊपर लिखे अंक से क्रमबद्ध गुणा कीजिए और प्राप्त गुणनफल उसके सापेक्ष उपवर्ग में इस प्रकार लिखिए कि दहाई अंक विकर्ण के ऊपर और इकाई अंक विकर्ण के नीचे लिखी जाए।

**चरण 6** : अब दाईं ओर के सबसे नीचे वाले विकर्ण से शुरू कीजिए। विकर्ण के सारे अंकों को जोड़िए और योगफल के इकाई अंक को लिखिए। यदि कोई दहाई अंक आता है, तो वह ऊपर वाले विकर्ण में जुड़ जाएगा।

**चरण 7** : प्राप्त परिणाम को बाईं ओर से दाईं ओर लिखिए। यही वांछित परिणाम होगा। आइए इस विधि से 289 का वर्ग निकालते हैं।

$\therefore 289^2 = 83521$




### (ii) ऐसी संख्या का वर्ग निकालना जिसका इकाई अंक 5 है।

इस प्रकार की संख्याओं के वर्ग निकालने की विधि कुछ उदाहरण से समझिए।

जैसे :– $35^2$

सबसे पहले इकाई अंक 5 का वर्ग कीजिए।

$5^2 = 25$

अब इकाई को छोड़कर दूसरी संख्या यानी 3 को उसकी परवर्ती संख्या यानी 4 से गुणा कीजिए।

$3 \times 4 = 12$

अब प्राप्त परिणाम 12 को 25 के बाईं ओर लिखिए।

अतः $35^2 = 1225$

इसी प्रकार, $105^2$

$5^2 = 25$

और $10 \times (10+1) = 10 \times 11 = 110$

$105^2 = 11025$

### (iii) 50 से 59 तक की संख्या का वर्ग

इसे कुछ संख्याओं का वर्ग निकालकर समझिए।

यदि हमें 52 का वर्ग करना है।

सबसे पहले 52 के इकाई अंक का वर्ग करके दो अंकों की संख्या के रूप में लिखिए।

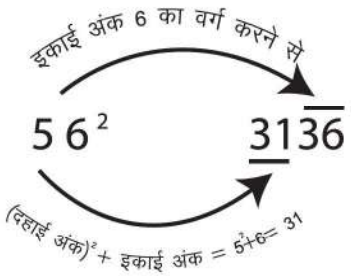
जैसे– $2^2 = 04$

अब 52 के दहाई अंक का वर्ग कीजिए

और उसमें संख्या का इकाई अंक जोड़ दीजिए।

5 का वर्ग कीजिए और 2 जोड़िए यानि $5^2 + 2 = 27$

अतः $52^2 = 2704$




## 2.4.2 वर्ग संख्याओं के कुछ और प्रतिरूप

**(i) संख्याओं के वर्गों का अवलोकन कीजिए 1,11,111,. . . इत्यादि।**

$(1)^2 =$ 1

$(11)^2 =$ 1 2 1

$(111)^2 =$ 1 2 3 2 1

$(1111)^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$(1111111)^2 =$ 1 2 3 2 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1

$(7)^2 =$ 4 9

$(67)^2 =$ 4 4 8 9

$(667)^2 =$ 4 4 4 8 8 9

$(6667)^2 =$ 4 4 4 4 8 8 8 9

$(666666667)^2 =$ 4 4 4 4 4 4 4 4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 9

ऐसी संख्याओं के वर्ग में एक पैटर्न छिपा है। ऐसे पैटर्न का पता लगाइए।

**(ii) तीन वर्गों का योग एक वर्ग के रूप में**

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$

$5^2 + 6^2 + 30^2 = 25 + 36 + 900 = (31)^2$

∴(एक प्राकृत संख्या)² +(ठीक अगली प्राकृत संख्या)² +(दोनों का गुणनफल)² =(तीसरी संख्या+1)²

(iii) $121 = \frac{(22)^2}{1+2+1}$

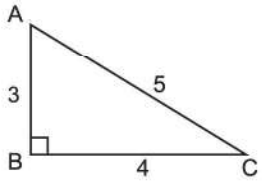
$12321 = \frac{(333)^2}{1+2+3+2+1}$

$123454321 = \frac{(55555)^2}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$

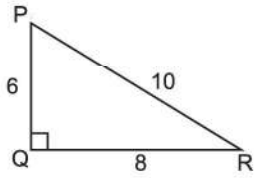
"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

## 2.5 पाइथागोरस त्रिक (Pythagoras Triplet)

$3^2+4^2 = 5^2$




$8^2+6^2 = 10^2$




यहाँ दो समकोण त्रिभुजों से हमें प्रत्येक में तीन प्राकृत संख्याएँ ऐसी मिली, जिसमें दो छोटी संख्याओं के वर्गों का योग तीसरी संख्या के वर्ग के बराबर है।

$3^2+4^2=5^2$ एवं $6^2+8^2=10^2$

क्या आप ऐसी तीन संख्याएँ खोज सकते हैं?

**अतः a, b एवं c तीन ऐसी संख्याएँ जिसमें $a^2+b^2 = c^2$ तब a, b और c समूह पाइथागोरस त्रिक कहलाते हैं।**

बच्चों पाइथागोरस त्रिक को एक सर्वसमिका की मदद से समझिए।

$(a+b)^2 = (a-b)^2 +4ab$

इसी प्रकार, $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 +(2ab)^2$

माना $a = m$ अतः $a^2 = m^2$ और $b^2 = 1^2 = 1$

$\therefore (m^2+ 1)^2 = (m^2-1)^2 +(2m)^2$

अतः $m^2+1$, $m^2-1$, $2m$ एक पाइथागोरस त्रिक है।

इसी प्रकार, $b^2= 4$ या 9 या अन्य वर्ग लेकर अन्य पाइथागोरस त्रिक लिखिए।

**उदाहरण 10 :–** एक पाइथागोरस त्रिक लिखिए, जिसकी सबसे छोटी संख्या 8 है।

**हल :–** माना $m^2-1= 8$

अतः $m^2 = 8+1 = 9$

$m = 3$

इसलिए, $2m = 6$ और $m^2+1= 10$

अतः 6, 8, 10 एक त्रिक है लेकिन 8 सबसे छोटी संख्या नहीं है।

इसलिए, अब मानते हैं कि $2m = 8$

$m = 4$

और $m^2-1= 4^2-1= 15$

$m^2+1 = 4^2+1 = 17$

अतः 8, 15, 17 एक ऐसा त्रिक है जहाँ 8 सबसे छोटी है।

**उदाहरण 11 :–** दो पाइथागोरस त्रिक लिखिए जिनमें से प्रत्येक में एक संख्या 5 है।

**हल :–** $m^2+1= 5$

$m^2= 4$

$m = 2$

इसलिए $m^2-1 = 2^2-1 = 3$

और $2m = 2\times2=4$

अतः 3, 4, 5 एक पाइथागोरस त्रिक है।

इसी प्रकार $m^2+4$, $m^2-4$, $4m$ पाइथागोरस होगा।

माना $m^2-4 = 5$

$m^2 = 9$

$\therefore m = 3$

$m^2+4 = 3^2+4$

$=13$

$4m = 4\times3$

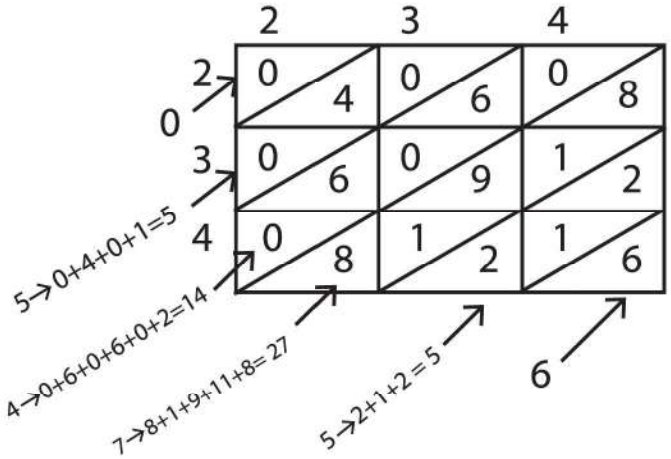
$=12$

अतः 5, 12, 13 एक अन्य पाइथागोरस त्रिक होगा।

> शिक्षक बच्चों को बताएँगे कि $2m = 5$ या $m^2-1= 5$ लेने से m पूर्णांक नहीं मिलेगा।

**उदाहरण 12 :–** निम्नलिखित का वर्ग विकर्ण तरीका से निकालिए।

(i) $234^2$




$\therefore 234^2= 054756 = 54756$

**उदाहरण 14 :–** सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab+b^2$ का उपयोग करके $504^2$ का मान निकालिए।

**हल :–** $504^2$

माना $a = 500,\ b=4$

$\therefore 504^2 = (500+4)^2 = (500)^2 + 2\times500\times4 + 4^2$

$= 250000+4016 = 254016$

**उदाहरण 15 :–** दिए गए प्रतिरूप का उपयोग करते हुए लुप्त संख्याओं को प्राप्त कीजिए:

$1^2+2^2+2^2=3^2$

$3^2+ 4^2 + 12^2= 13^2$

$4^2+ 5^2 + 20^2= (.....)^2$

$6^2+ 7^2 + (.....)^2 = (.....)^2$

**हल :–** आप देखिए कि तीसरी संख्या पहली और दूसरी संख्या का गुणनफल है और चौथी संख्या तीसरी संख्या से 1 अधिक है।

$\therefore \quad 4^2+ 5^2 + 20^2 = 21^2$

और $\quad 6^2+ 7^2 + 42^2 = 43^2$

## प्रश्नावली 2.3

(1) गुणा किए बिना निम्नलिखित वर्गों का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $26^2$ (ii) $34^2$ (iii) $53^2$

(2) विकर्ण तरीका का उपयोग करके निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $234^2$ (ii) $104^2$ (iii) $536^2$

(3) गुणा किए बिना 50 से 59 तक की संख्याओं के वर्ग निकालने की विधि से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $52^2$ (ii) $56^2$ (iii) $57^2$

(4) वर्गों के रूचिकर प्रारूप के गुण के आधार पर निम्नलिखित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ताकि कथन सत्य हो।

(i) $(111111)^2 =$.....

(ii) $(666666667)^2 =$.....

(iii) $7^2 +8^2 +56^2 = (.....)^2$

(iv) $12345654321 = \dfrac{(.....)^2}{1+2+3+.....+3+2+1}$

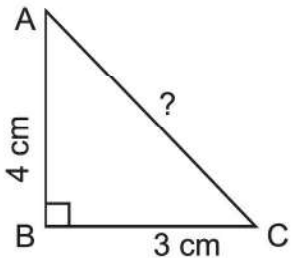
(5) (i) एक पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए जिसमें छोटी संख्या 10 है।

(ii) एक पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए जिनमें से एक संख्या 6 हो।

## 2.6 वर्गमूल (Square Root) : एक परिचय

अभी तक हमने किसी संख्या का वर्ग निकालना सीखा। मान लीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के आधार एवं लम्ब की माप क्रमशः 3 cm एवं 4 cm है।

पाइथागोरस प्रमेय से,




$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

$AC^2 = 25$,

सोचिए AC की लम्बाई क्या होगी?

हमें एक ऐसी संख्या खोजनी होगी जिसका वर्ग 25 है।

उसी प्रकार यदि किसी वर्ग का क्षेत्रफल $16cm^2$ है।

अतः (भुजा)$^2$ = 16

इस प्रकार भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए ऐसी संख्या ज्ञात करनी होगी जिसका वर्ग 16 है।

हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में हमें ऐसी संख्या ज्ञात करनी थी जिसका वर्ग हमें ज्ञात था।

**अब दो स्थिति पर ध्यान देते हैं:**

**स्थिति i :–**

$x + 3 = 8$ (अर्थात् ऐसी संख्या जिसमें 3 जोड़ने से 8 प्राप्त होता है।)

**स्थिति ii :–**

$x \times 4 = 8$ (अर्थात् ऐसी संख्या जिसे 4 से गुणा करने पर 8 प्राप्त होता है।)

पहली स्थिति में $x$ का मान निकालने के लिए योग संक्रिया का प्रतिलोम व्यवकलन (घटाना) का उपयोग करेंगे।

अतः $x = 8 - 3 = 5$

दूसरी स्थिति में $x$ का मान गुणा के प्रतिलोम (भाग) की सहायता लेंगे।

$x = 8 \div 4 = 2$

इसी प्रकार वर्ग का प्रतिलोम वर्गमूल है।

आइए देखिए –

$2^2 = 4$ अतः 4 का वर्गमूल 2 है।

$3^2 = 9$ अतः 9 का वर्गमूल 3 है।

**विचार कीजिए –**

$2 \times 2 = 2^2 = 4$ इस आधार पर हम कह सकते हैं कि 4 का वर्गमूल 2 है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

$(-2) \times (-2) = (-2)^2 = 4$, यह कथन भी सत्य है तो क्या 4 का वर्गमूल (–2) है?
इस अध्याय में हमलोग किसी प्राकृत संख्या के केवल धनात्मक वर्गमूल ही लेंगे।
अतः $\sqrt{9} = 3$(–3 नहीं), $\sqrt{16} = 4$(–4 नहीं)

धनात्मक वर्गमूल को $\sqrt{\ }$ संकेत से व्यक्त करते हैं।
किसी धनात्मक पूर्णांक n का वर्गमूल = $\sqrt{n}$

### 2.6.1 वर्गमूल निकालने की विधियाँ :

**आइए अब वर्गमूल निकालने की अलग–अलग विधियों का अध्ययन करेंगे।**
हम जानते हैं कि 1+3+5+7+9 = 25 (प्रथम पाँच विषम संख्याओं का योग = $5^2$)
25 का वर्गमूल के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया पर विचार कीजिए।
(i) 25–1 = 24 (ii) 24–3 = 21 (iii) 21–5 = 16 (iv) 16–7 = 9 (v) 9–9 = 0
हमने देखा कि 25 से क्रमागत विषम संख्याओं को क्रमवार घटाने से, पाँचवीं बार में शून्य आता है।
अतः हम कह सकते हैं कि $\sqrt{25} = 5$
इस प्रक्रिया से बड़ी वर्ग संख्या का वर्गमूल निकालना एक कठिन और लम्बी प्रक्रिया है।

**उदाहरण 16 :–** घटाने की संक्रिया के द्वारा निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
(a) 121 (b) 49

**हल :–** (a) 121
क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर
(i) 121–1 = 120 (ii) 120–3 = 117 (iii) 117–5 = 112 (iv) 112–7 = 105
(v) 105–9 = 96 (vi) 96–11 = 85 (vii) 85–13 = 72 (viii) 72–15 = 57
(ix) 57–17 = 40 (x) 40–19 = 21 (xi) 21–21 = 0
11 वीं बार में शून्य प्राप्त हुआ। अतः $\sqrt{121} = 11$

(b) 49
क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर
(i) 49–1 = 48 (ii) 48–3 = 45 (iii) 45–5 = 40 (iv) 40–7 = 33
(v) 33–9 = 24 (vi) 24–11 = 13 (vii) 13–13 = 0
7 वीं बार में शून्य प्राप्त हुआ।
अतः $\sqrt{49} = 7$

### 2.6.2 अभाज्य गुणनखंडन के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

अब हमलोग वर्गमूल निकालने की एक अन्य विधि पर विचार करें। हमने पिछली कक्षाओं में अभाज्य गुणनखंड द्वारा दी हुई संख्या का ल० स० निकालना सीखा है।

मान लीजिए यदि हमें 324 का वर्गमूल निकालना हो।

| | |
|---|---|
| 2 | 324 |
| 2 | 162 |
| 3 | 81 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| | 3 |

तब 324 को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखते हैं।

$324 = 2\times2\times3\times3\times3\times3$

अभाज्य गुणनखंड से प्राप्त संख्याओं का जोड़ा बनाते हैं।

$324 = \underline{2\times2} \times \underline{3\times3} \times \underline{3\times3}$

$\therefore\ 324 = (2\times3\times3)^2$

अब 324 को $2\times3\times3$ के वर्ग के रूप में लिख सकते हैं।

अतः $\sqrt{324} = 2\times3\times3 = 18$

जरा सोचिए – क्या सारी संख्याएँ अभाज्य संख्याओं के युगम (Pair) के रूप में लिखी जा सकती हैं?

जैसे – 84

अतः $84 = 2\times2 \times 3\times7$

हमने देखा कि अभाज्य संख्या 3 एवं 7 के युग्म नहीं बन पा रहे हैं।

अतः 84 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

> 84 को किस छोटी संख्या से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग बनेगा?

| | |
|---|---|
| 2 | 4900 |
| 2 | 2450 |
| 5 | 1225 |
| 5 | 245 |
| 7 | 49 |
| | 7 |

**उदाहरण 17 :–** 4900 का वर्गमूल निकालिए।

**हल :–** $4900 = \underline{2\times2} \times \underline{5\times5} \times \underline{7\times7}$

अतः $\sqrt{4900} = 2\times5\times7 = 70$

**उदाहरण 18 :–** 80 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए?

| | |
|---|---|
| 2 | 80 |
| 2 | 40 |
| 2 | 20 |
| 2 | 10 |
| | 5 |

**हल :–** $80 = 2\times2\times2\times2\times5$

अभाज्य गुणनखंड में 5 का युग्म नहीं है।

अतः 80 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

**उदाहरण 19 :–** क्या 5040 का एक पूर्ण वर्ग संख्या है? यदि नहीं तो वह छोटी संख्या निकालिए जिससे 5040 को गुणा करने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या हो जाए तथा प्राप्त संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

**हल :–** $5040 = \underline{2\times2} \times \underline{2\times2} \times \underline{3\times3} \times 5 \times 7$

5040 के अभाज्य गुणनखंड के अनुसार हम देखते हैं कि 5 एवं 7 युग्म में नहीं है। अतः 5040 को $5\times7 = 35$ से गुणा करके 5040 के अभाज्य गुणनखंड में सारी अभाज्य गुणनखंड युग्म बनाएँगे।

| | |
|---|---|
| 2 | 5040 |
| 2 | 2520 |
| 2 | 1260 |
| 2 | 630 |
| 3 | 315 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| | 7 |

अतः वांछित संख्या = 35

$5040 \times 35 = 176400$

अतः 5040 का सबसे छोटा गुणज 176400 होगा जो एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

और $\sqrt{176400} = \underline{2\times2} \times \underline{2\times2} \times \underline{3\times3} \times \underline{5\times5} \times \underline{7\times7}$

$= 2\times2\times3\times5\times7$

$= 420$

**उदाहरण 20 :–** वह छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 6300 को भाग देने से प्राप्त भागफल एक पूर्ण वर्ग संख्या हो जाएँ तथा भागफल का वर्गमूल निकालिए।

**हल :–** $6300 = 2\times2\times3\times3\times5\times5\times7$

6300 के अभाज्य गुणनखंड में 7 का युग्म नहीं है।

अर्थात 6300 को 7 से विभाजित करने पर $6300 \div 7 = 900$

और $900 = 2\times2\times3\times3\times5\times5$

$=(2\times3\times5)^2$, जो एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

| | |
|---|---|
| 2 | 6300 |
| 2 | 3150 |
| 3 | 1575 |
| 3 | 525 |
| 5 | 175 |
| 5 | 35 |
| | 7 |

अतः सबसे छोटी संख्या 7 है और

$\sqrt{900} = 2\times3\times5 = 30$

**उदाहरण 21 :–** सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक संख्या 6, 9, 15 और 40 से विभाजित हो जाए।

**हल :–** सबसे पहले वह छोटी संख्या निकालिए जो 6, 9, 15 और 40 से विभाजित होती है। इसके लिए ल०स० निकालिए।

| | |
|---|---|
| 2 | 360 |
| 2 | 180 |
| 2 | 90 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$6 = 2\times3$

$9 = 3\times3$

$15 = 3\times5$

$40 = 2\times2\times2\times5$

$\therefore$ 6, 9, 15 और 40 का ल०स० $= 2\times2\times2\times3\times3\times5 = 8\times9\times5 = 360$

अभाज्य गुणनखंड से,

$360 = 2\times2\times3\times3\times2\times5$

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 के युग्म नहीं हैं। अतः 360 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं।

पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त करने के लिए $2\times5 = 10$ से गुणा करना पड़ेगा।
अतः वर्ग संख्या $= 360\times10 = 3600$

**उदाहरण 22 :–** गोला मध्य विद्यालय में कक्षा viii के विद्यार्थियों ने उरी हमले के शहीदों के लिए सेना के खाते में ₹ 7056 जमा किए। प्रत्येक विद्यार्थियों ने उतने ही रुपए दान में दिए जितने कक्षा में विद्यार्थी थे। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

**हल :–** माना कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या $= x$

अतः एकत्र की गई राशि $= x^2$

$\therefore x^2 = 7056$

$= \sqrt{7056}$

$= \sqrt{(2\times2)} \times (2\times2) \times (3\times3 \times (7\times7)$

$= 2\times2\times3\times7 = 84$

अतः विद्याार्थियों की संख्या $= 84$

**उदाहरण 23 :–** दो संख्याओं का गुणनफल 17424 है। यदि एक संख्या दूसरी संख्या से नौ गुणी हैं दोनों संख्याएँ क्या है?

**हल :–** माना एक संख्या $= x$

दूसरी संख्या $= 9x$

अतः $x \times 9x = 17424$

या, $9x^2 = 17424$

या, $x^2 = \frac{17424}{9}$

या, $x^2 = 1936$

या, $x = \sqrt{1936}$

$= \sqrt{2\times2} \times 2\times2 \times 11\times11$

$= 2\times2\times11 = 44$

एक संख्या $= 44$, दूसरी संख्या $= 44\times9 = 396$

(i) यदि किसी संख्या का इकाई अंक 2, 3, 7 या 8 हो तो उसका वर्गमूल कोई प्राकृत संख्या नहीं होती है।
(ii) ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल प्राकृत संख्या नहीं होती है।
(iii) यदि किसी संख्या का वर्गमूल पूर्ण प्राकृत संख्या है तो उसके वर्गमूल का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होगा।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

## प्रश्नावली 2.4

(1) बार–बार घटाने की विधि से 121 एवं 196 का वर्गमूल निकालिए।

(2) अभाज्य गुणनखंड विधि से निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल निकालिए।

(i) 400 (ii) 144 (iii) 1764 (iv) 8100 (v) 7744 (vi) 2025 (vii) 5184 (viii) 8281

(3) निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को गुणा करने पर यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(i) 1458 (ii) 1100 (iii) 147 (iv) 1620 (v) 2800

(4) निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को भाग देने पर वह एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। ज्ञात की गई संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(i) 2925 (ii) 396 (iii) 3645 (iv) 2800 (v) 9408

(5) वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रत्येक संख्या से विभाजित हो।

(i) 8, 12, 15 एवं 20 (ii) 4, 9, 10

(6) एक विद्यालय में कक्षा 8 के सभी विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री राष्ट्रीय कोष में ₹1764 दान में दिए। प्रत्येक विद्यार्थी ने उतने ही रुपये दान में दिए जितने कक्षा में विद्यार्थी थे। कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(7) समशूल ने एक विद्यालय में विद्यार्थियों के बीच टॉफियाँ बाँटी। टॉफी बाँटने के लिए विद्यार्थियों को पंक्तियों में खड़ा किया गया, प्रत्येक पंक्ति में उतने ही विद्यार्थी हैं जितनी पंक्तियों की संख्या है। यदि शमशूल ने कुल 12544 टॉफी बाँटी तो पंक्तियों की संख्या और विद्यार्थियों की कुल संख्या निकालिए।

(8) एक आयत का क्षेत्रफल 1764 $cm^2$, यदि आयत की लम्बाई इसकी चौड़ाई की चार गुनी है तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

### 2.6.3 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

अभाज्य गुणनखंड विधि से किसी बड़ी संख्या का वर्गमूल निकालना एक लंबी एवं कठिन प्रक्रिया है। इसलिए अब हमलोग दीर्घ विभाजन विधि से वर्गमूल निकालना सीखेंगे।

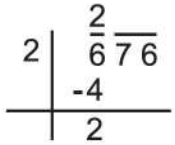
अब दीर्घ विभाजन विधि द्वारा 676 का वर्गमूल निकालिए।

**चरण 1** :– इकाई स्थान से शुरू करते हुए प्रत्येक युग्म पर बार लगाइए।

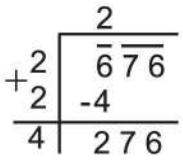
यदि अंकों की संख्या विषम है तो बाईं ओर एक अंक पर बार लगाइए। $\overline{6}\,\overline{76}$

**चरण 2** :– वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका वर्ग सबसे बाईं तरफ के बार के नीचे

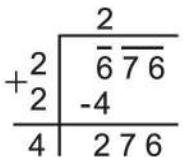
लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($2^2 < 6 < 3^2$)। सबसे बाईं बार के नीचे भाज्य (यहाँ 6) के साथ भाजक और भागफल के रूप में इस संख्या को लीजिए। भाग कीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए (इस स्थिति में 2 है।)



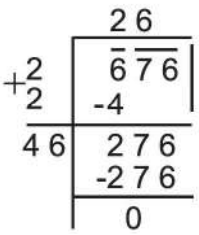

**चरण 3** :– अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखिए। (इस स्थिति में 76 है)। अतः अगली भाज्य 276 होगी।




**चरण 4** :– भाजक में उसी अंक को जोड़िए और इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखिए।




**चरण 5** :– रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाइए और वहाँ लिखिए। यही अंक भागफल का अगला अंक होगा। अब नये भाजक को इस संभावित अंक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल भाज्य से कम या बराबर होगा। इस स्थिति में $45 \times 5 = 225$ चूँकि $46 \times 6 = 276$, अतः नया अंक 6 होगा।




**चरण 6** :– क्योंकि शेषफल 0 है और दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है,

अतः $\sqrt{676} = 26$

> जरा सोचिए
> $\sqrt{\overline{6}\overline{7}\overline{6}} = 26$
> बार की संख्या = 2
> वर्गमूल में अंकों की संख्या = 2

**उदाहरण 24** :–

निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल में अंकों की संख्या की गणना के बिना ज्ञात कीजिए।

(i) 133225 (ii) 10609

**हल** :– (i) $\overline{1}\overline{3}\overline{3}\overline{2}\overline{2}\overline{5}$

बार की संख्या = 3

अतः वर्गमूल में अंकों की संख्या = 3

(ii) 10609

बार की संख्या = 3, अतः वर्गमूल में अंकों की संख्या = 3

**उदाहरण 25** :– वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) 12544 (ii) 20657025

**हल:–** (i)

```
        1 1 2
      ---------
1   | 1 25 44
    (-)1
    ---------
21  |   25
    (-)21
    ---------
222 |  444
    (-)444
    ---------
        000
```

अतः $\sqrt{12544} = 112$

> पहले चरण में भागफल 1, दूसरे चरण में भागफल 11 हैं। इसलिए भाजक क्रमबद्ध 2(1का दुगुना) और 22 (11का दुगुना) है।

(ii)

```
          4 5 4 5
        -----------
4     | 20 65 70 25
      (-)16
      -----------
85    |  4 65
      (-)4 25
      -----------
904   |  40 70
      (-)36 16
      -----------
9085  |  45425
      (-)45425
      -----------
          00000
```

$\therefore \sqrt{20657025} = 4545$

> भाजक निम्न विधि से भी जाना जा सकता है।
> 4+4=8
> 85+5=90
> 904+4=908
> शिक्षक विस्तृत रूप में बताएँ।

**उदाहरण 26 :–** वह छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 3250 में से घटाने पर पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

**हल :–** दीर्घ विभाजन से यह ज्ञात होता है कि शेषफल 1 है।
अतः $57^2$, 3250 से 1 कम है।
अर्थात 3250 में यदि हम 1 घटा देते हैं तो प्राप्त संख्या $57^2$ हो जाएगा।
अतः वांछित पूर्ण संख्या = 3250–1 = 3249
अतः $\sqrt{3249} = 57$

```
        5 7
      ---------
5   | 32 50
    (-)25
    ---------
107 |   7 50
  7 | (-) 7 49
    ---------
114 |   x x 1
```

**उदाहरण 27 :–** तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या बताइए, जो पूर्ण वर्ग हो।

**हल :–** तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999
चूँकि शेषफल 38 इसलिए $31^2$, 999 से 38 कम है।
वांछित पूर्ण वर्ग संख्या = 999 – 38 = 961
अतः $\sqrt{961} = 31$

```
        3 1
      -------
3   | 9 99
    (-) 9
    -------
61  |   99
    (-) 61
    -------
62  |   38
```

**उदाहरण 28 :–** वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 6412 में जोड़ने पर एक पूर्ण

वर्ग संख्या प्राप्त हो। उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

**हल :–** यहाँ शेषफल = 12

यहाँ, $80^2 < 6412$

अगली पूर्ण वर्ग संख्या $= 81^2 = 6561$

अतः अभीष्ट संख्या $= 81^2 - 6412$

$= 6561 - 6412$

$= 149$

अतः $\sqrt{6561} = 81$

```
      8 0
    ------
8 | 64 12
    64
  ------
160 | xx 12
        00
  ------
160 |    12
```

**उदाहरण 29 :–** चार अंकों की सबसे छोटी संख्या बताइए, जो पूर्ण वर्ग हो।

**हल :–** चार अंकों की सबसे छोटी संख्या = 1000

शेषफल = 39

यहाँ, $31^2 < 1000$

अगली पूर्ण संख्या $= 32^2 = 1024$

अतः चार अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या = 1024

```
      3 1
    ------
3 | 10 00
      9
  ------
61 |  1 00
       61
  ------
62 |   39
```

### 2.6.4 दशमलव संख्या का वर्गमूल

संख्या $\sqrt{51.84}$ पर विचार कीजिए।

**चरण 1 :–** दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए पूर्ण संख्या पर सामान्य रूप से बार लगाइए। (अर्थात् 51) दशमलव भाग पर भी पहले दशमलव स्थान से प्रारंभ करके बार लगाइए और सामान्य रूप से आगे बढ़ते जाइए।

**चरण 2 :–** अब इसी तरह से आगे बढ़ते हैं। 51 पर बार सबसे बाईं ओर है और $7^2 < 51 < 8^2$, संख्या 7 को भाजक के रूप में लीजिए और सबसे बाईं बार के नीचे की संख्या भाज्य के रूप में लीजिए (अर्थात 51) भाग दीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए।

```
      51.84
      ------
    7 |
      ------
7 | 51.84
    -49
  ------
    |  2
```

**चरण 3 :–** शेषफल 2 हैं अगली बार के नीचे की संख्या अर्थात 84 शेषफल के दाएँ लिखिए, 284 प्राप्त कीजिए।

**चरण 4 :–** भागफल को दोगुना कीजिए और दाईं तरफ रिक्त स्थान के साथ लिखिए पहले 84 दशमलव भाग में था। अतः भागफल में दशमलव रखिए।

**चरण 5 :–** हम जानते हैं कि $142 \times 2 = 284$, अतः नई संख्या 2 है। भाग दीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए।

```
      7.2
      ------
    7 |
      ------
7 | 51.84
  (-)49
  ------
142 | 284
  (-)284
  ------
    |  0
```

**चरण 6** :– अतः शेषफल 0 है। अतः $\sqrt{51.84} = 7.2$

**उदाहरण 30** :– 477.4225 का वर्गमूल निकालिए।

$\therefore \sqrt{477.4225} = 21.85$

| | | |
|---|---|---|
| | | 21.85 |
| 2 | | 4 77. 42 25 |
| +2 | (-)4 | |
| 41 | | 77 |
| +1 | (-)41 | |
| 428 | | 3642 |
| +8 | (-)3424 | |
| 4365 | | 21825 |
| +5 | (-)21825 | |
| 4370 | | 0 |

**उदाहरण 31** :– 0.00002025 का वर्गमूल निकालिए।

| | | |
|---|---|---|
| | | 0.0045 |
| 0 | | 0. 00 00 20 25 |
| 0 | 0 | |
| 4 | | 00 0020 |
| +4 | | 16 |
| 85 | | 425 |
| +5 | | (-)425 |
| 90 | | 0 |

$\therefore \sqrt{0.00002025} = 0.0045$

**उदाहरण 32** :– एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 979.69 मी$^2$ है। खेत की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

**हल** :– माना वर्गाकार खेत की लम्बाई = $x$ मी

वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल = 979.69 मी$^2$

अतः $x^2$ = 979.69 मी$^2$

$x = \sqrt{979.69}$ मी$^2$

= 31.3 मी

अतः वर्गाकार खेत की भुजा की लम्बाई = 31.3 मी

| | | |
|---|---|---|
| | | 31.3 |
| 3 | | 9 79.69 |
| +3 | (-)9 | |
| 61 | | 79 |
| +1 | (-)61 | |
| 623 | | 1869 |
| +3 | (-)1869 | |
| 626 | | 0000 |

**उदाहरण 33 :–** एक विद्यालय में 3481 विद्यार्थी हैं। खेल शिक्षक उन्हें पंक्ति एवं स्तंभ में इस प्रकार खड़ा रखना चाहते हैं कि पंक्तियों की संख्या स्तंभ की संख्या के बराबर हो। पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

**हल :–** माना पंक्तियों की संख्या $= x$

अतः स्तंभों की संख्या $= x$

इसलिए विद्यार्थियों की संख्या $= x \times x$

$= x^2$

प्रश्नानुसार $x^2 = 3481$

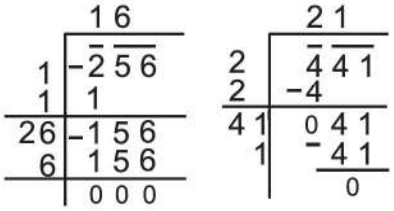
अर्थात $x = \sqrt{3481}$

$= 59$

∴पंक्तियों की संख्या = 59

### 2.6.5 भिन्न संख्या का वर्गमूल

$\frac{256}{441}$ का वर्गमूल निकालिए।




**चरण 1 :–** यदि दिया हुआ भिन्न मिश्रित भिन्न हो तो उसे उचित भिन्न में बदलिए।

**चरण 2 :–** अंश एवं हर के अलग–अलग वर्गमूल निकालिए।

**चरण 3 :–** एक ऐसा भिन्न लिखिए जिसका अंश और हर क्रमशः दिए हुए भिन्न के अंश और हर का वर्गमूल हो अर्थात् $\frac{16}{21}$

इसी प्रकार, $\sqrt{\frac{256}{441}} = \frac{16}{21}$

**उदाहरण 34 :–** $\frac{243}{867}$ का वर्गमूल निकालिए।

**हल :–** दिया हुआ भिन्न

$= \frac{81}{289}$ (अंश एवं हर को उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 से विभाजित करने पर)

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{289} = 17,$ अतः $\sqrt{\frac{81}{289}} = \frac{9}{17}$

**उदाहरण 35 :–** 2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

**हल :–**

| | 1.4142 |
|---|---|
| 1 | 2. 00 00 00 00 |
| +1 | 1 |
| 24 | 100 |
| +4 | 96 |
| 281 | 400 |
| +1 | 281 |
| 2824 | 11900 |
| +4 | 11296 |
| 28282 | 60400 |
| +2 | 56564 |
| 28284 | 3856 |

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142$

$= 1.414$

(दशमलव के तीन स्थानों तक)

**उदाहरण 36 :–** $\sqrt{15625}$ का मान निकालिए और इसका उपयोग करके निम्नलिखित का मान निकालिए।

(i) $\sqrt{1562500}$ (ii) $\sqrt{156.25}$ (iii) $\sqrt{1.5625}$

**हल:–**

| | 125 |
|---|---|
| 1 | 1 56 25 |
| 1 | (–)1 |
| 22 | 56 |
| 2 | (–)44 |
| 245 | 1225 |
| | (–)1225 |
| | 0 |

$\therefore \sqrt{156.25} = 125$

(i) $\sqrt{1562500} = \sqrt{15625} \times \sqrt{100} = 125 \times 10 = 1250$

(ii) $\sqrt{156.25} = \sqrt{\frac{15625}{100}} = \frac{\sqrt{15625}}{100} = \frac{125}{10} = 12.5$

(iii) $\sqrt{1.5625} = \sqrt{\frac{15625}{10000}} = \frac{\sqrt{15625}}{100} = \frac{125}{100} = 1.25$

## प्रश्नावली 2.5

(1) निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए :–

(i) 289 (ii) 676 (iii) 1225 (iv) 1024 (v) 5776

(vi) 7921 (vii) 1369 (viii) 3481 (ix) 99856 (x) 18769

(2) निम्नलिखित दशमलव संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 51.84 (ii) 31.36 (iii) 655.36 (iv) 0.7225 (v) 2.809

(3) मान ज्ञात कीजिए –

(i) $\sqrt{196x16}$ (ii) $\sqrt{441x121}$ (iii) $\sqrt{\frac{169}{8100}}$ (iv) $\sqrt{\frac{196}{361}}$ (iv) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$

(4) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के न्यूनतम संख्या कितनी घटाई जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए:

(i) 1989 (ii) 3250 (iii) 2361 (iv) 26535 (v) 16160

(5) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कम से कम कितना जोड़ा जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए:–

(i) 252 (ii) 1825 (iii) 1750 (iv) 4931

(6) चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या निकालिए जो पूर्ण वर्ग हो।

(7) छह अंकों की सबसे छोटी संख्या बताइए जो पूर्ण वर्ग हो।

(8) एक आयत की लम्बाई, चौड़ाई की छह गुणी है। यदि क्षेत्रफल 6144 $cm^2$ है तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

(9) किसी समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$

(a) यदि AB = 6 cm, BC = 8 cm है तो AC ज्ञात कीजिए।

(b) यदि AC = 13 cm, BC = 5 cm है तो AB ज्ञात कीजिए।

(10) एक माली के पास 1030 पौधे हैं। इन पौधों को वह इस प्रकार लगाना चाहता है कि पंक्तियों की संख्या और स्तंभों की संख्या समान रहे। इसके लिए कम से कम और कितने पौधों की आवश्यकता है।

(11) एक विद्यालय में 630 विद्यार्थी हैं। खेल शिक्षक ने अभ्यास के लिए इन्हें इस तरह से खड़ा किया गया कि पंक्तियों की संख्या और स्तंभों की संख्या समान रहे। इस व्यवस्था को बनाने में कितने विद्यार्थियों को बाहर जाना होगा?

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(12) $\frac{3}{7}$ का वर्गमूल दशमलव के चार स्थानों तक निकालिए।

(13) $10\frac{2}{3}$ का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

(14) 3 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

(15) $\sqrt{16384}$ का मान निकालिए और इसका उपयोग करके $\sqrt{163.84} + \sqrt{1.6384}$ का मान निकालिए।

## हमने क्या सीखा?

(1) एक प्राकृत संख्या m को $n^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जहाँ n एक प्राकृत संख्या है, m एक वर्ग संख्या है। $\therefore \quad n^2 = m$

(2) सभी वर्ग संख्याओं के अंत इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।

(3) वर्ग संख्याओं के अंत में शून्य की संख्या सम होती है।

(4) वर्गमूल, वर्ग की एक प्रतिलोम क्रिया है।

(5) एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं। धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{\ }$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ $3^2 = 9$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ होता है।

(6) किसी धनात्मक संख्याएँ a एवं b के लिए

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$