घन और घनमूल
(Cube And Cuberoot)

अध्याय
3



$1^3 = 1, 2^3 = 8, 10^3 = 1000$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$

हम सीखेंगे
* पूर्ण घन
* अभाज्य गुणनखण्ड
* घन एवं घनमूल निकालना
* परिमेय संख्या

GEDJX4

3.1 भूमिका

अपने देश भारत का एक महान गणितज्ञ एस० रामानुजन के जीवन से जुड़ी एक कहानी है। एक बार उनसे मिलने एक अन्य प्रसिद्ध गणितज्ञ प्रोफेसर जी० एच० हार्डी एक टैक्सी में आए जिसका नंबर 1729 था। रामानुजन से बात करने के क्रम में, हार्डी ने इस संख्या को नीरस (dull) संख्या बताया। रामानुजन ने तुरंत बताया कि 1729 वास्तव में एक रोचक संख्या है। उन्होंने कहा कि यह एक ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों (Cube) के योग के रूप में दो भिन्न प्रकारों से व्यक्त किया जा सकता है :–

$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$
$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$

तब से इस संख्या 1729 को हार्डी–रामानुजन संख्या (Hardy- Ramanujan Number) कहा जाने लगा।


जी० एच० हार्डी


रामानुजन

हार्डी–रामानुजन संख्या :– 1729 सबसे छोटी हार्डी–रामानुजन संख्या है। इस प्रकार की अनेक संख्याएँ हैं : उनमें से कुछ हैं 4104 (2, 16; 9, 15), 1382 (18, 20; 2, 24)। कोष्ठकों में दी हुई संख्याएँ लेकर इसकी जाँच कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

रामानुजन को संख्याओं से बहुत लगाव था। वे अपने संपूर्ण जीवन में विभिन्न संख्याओं से खेलते थे और संख्याओं से संबंधित रोचक खेल खोजते रहते थे। वे वह संख्या प्राप्त की होंगी जिन्हें दो वर्गों के योग और साथ ही दो घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। घनों के अनेक ऐसे रोचक प्रतिरूप (patterns) हैं। यहाँ हम घनों, घनमूलों (cube roots) तथा इनसे संबंधित अनेक रोचक तथ्यों के बारे में सीखेंगे।

वे आकृतियाँ जिसकी 3 विमाएँ (dimension) होती हैं, ठोस आकृतियाँ कहलाती हैं।

3.2 घन (Cube)

घन शब्द का प्रयोग ज्यामिति में भी किया जाता है। घन एक ऐसी ठोस आकृति है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।

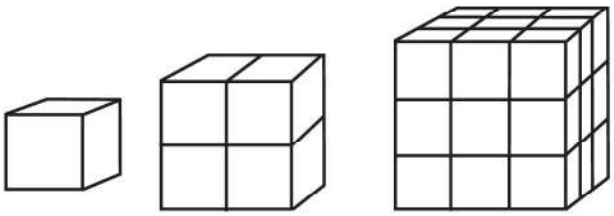
1 cm भुजा वाले कितने घनों से 2 cm भुजा वाला एक घन बनेगा?

1 cm भुजा वाले कितने घनों से 3 cm भुजा वाला एक घन बनेगा?

निम्नलिखित कुछ संख्याओं को देखिए –

$1 = 1\times1\times1 = 1^3$, $8 = 2\times2\times2 = 2^3$,

$27 = 3\times3\times3 = 3^3$, $125 = ?$



आपने देखा 1, 8 एवं 27 ऐसी संख्याएँ हैं जिसे किसी संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करने से प्राप्त होता है।

ऐसी संख्या जो किसी प्राकृत संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करने से प्राप्त होती है, पूर्ण घन (Perfect Cube) या घन संख्याएँ (Cube Numbers) कहलाती हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

सारणी–1		
संख्या (x)	घन	घन (x^3) संख्या
1	1×1×1	$1^3=1$
2	2×2×2	$2^3=8$
3	3×3×3	$3^3=27$
4	4×4×4	$4^3=64$
5	5×5×5	$5^3=125$
6	6×6×6	$6^3=216$
7	7×7×7	$7^3=343$
8	8×8×8	$8^3=512$
9	9×9×9	$9^3=729$
10	10×10×10	$10^3=1000$

* यहाँ 1 से 1000 तक केवल दस पूर्ण घन संख्या हैं।
* सम संख्याओं के घन को देखिए। क्या ये सभी सम हैं?
* विषम संख्याओं के घन को देखिए। क्या ये सभी विषम हैं?

संख्याएँ 9261, 15625 और 27000 भी पूर्ण घन संख्या हैं।

अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन नीचे दिए जा रहे हैं :

सारणी–2	
संख्या(x)	घन(x^3)
11	$11^3= 1331$
12	$12^3=1728$
13	$13^3=2197$
14	$14^3=2744$
15	$15^3=3375$
16	$16^3=4096$
17	$17^3=4913$
18	$18^3=5832$
19	$19^3=6859$
20	$20^3=8000$

सारणी–3	
संख्या का इकाई अंक	संख्या के घन का इकाई अंक
0	**0**
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

सोचिए
$(\text{सम})^3 = ?$
$(\text{विषम})^3 = ?$

सारणी से स्पष्ट है कि किसी संख्या के इकाई का अंक 2,3,7,8 है तो उसके घन का इकाई अंक क्रमशः 8,7,3,2 है और यदि किसी संख्या का इकाई अंक यदि 1,4,5,6 एवं 9 है तो उसके घन का इकाई अंक भी यही रहता है।

3.2.1 रोचक प्रतिरूप

1. विषम संख्याओं के योग का निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3$$

क्या यह रोचक नहीं है? योग 10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी?

प्रयास कीजिए -A

1. मान ज्ञात कीजिए।
   (i) $(21)^3$ (ii) $(22)^3$ (iii) $(25)^3$ (iv) $(40)^3$
2. निम्नलिखित संख्याओं के घन का इकाई अंक निकालिए।
   (i) 27 (ii) 254 (iii) 560 (iv) 2545

2. घन और उनके अभाज्य गुणनखंड

कुछ संख्याओं और उनके घनों के निम्नलिखित अभाज्य गुणनखंडों पर विचार कीजिए :

$4 = 2 \times 2$ $\quad 4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$

$6 = 2 \times 3$ $\quad 6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$

$15 = 3 \times 5$ $\quad 15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$

$12 = 2 \times 2 \times 3$ $\quad 12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

स्वयं के घन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार आता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

ध्यान दीजिए कि एक संख्या का प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड उस संख्या के घन के अभाज्य गुणनखंड में तीन बार आता है।

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$

$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

चूँकि 243 के अभाज्य गुणनखंड में 3 का एक त्रिक बनता है और 3×3 शेष रहता है। अतः 243 एक पूर्ण घन नहीं है।

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

उदाहरण 1 :– निम्नलिखित संख्याओं के घन का ईकाई अंक क्या होगा?

(i) 75 (ii) 27 (iii) 859

हल :– (i) 75 का इकाई अंक = 5

अतः घन का इकाई अंक = 5

(ii) 27 का इकाई अंक = 7

अतः घन का इकाई अंक = 3

(iii) 859 का इकाई अंक = 9

अतः घन का इकाई अंक = 9

उदाहरण 2 :– निम्नलिखित में वे संख्याएँ कौन–सी हैं जो पूर्ण घन है? यदि नहीं हैं तो वह छोटी संख्या निकालिए जिससे गुणा करने पर वह पूर्ण घन बन जाए।

(i) 729 (ii) 53240

हल :– (i) $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

729 के गुणनखंडन में अभाज्य गुणनखंड के त्रिक बनते है।

अतः 729 एक पूर्ण घन है।

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

(ii) $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

53240 के अभाज्य गुणनखंड में 5 का त्रिक नहीं बनता है।

इसके लिए 5×5 की जरूरत है।

$\therefore$ वांछित संख्या $= 5 \times 5 = 5^2 = 25$

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 25 है, जिससे 53240 को गुणा करने से गुणनफल पूर्ण घन प्राप्त होगा।

2	53240
2	26610
2	13310
5	6655
11	1331
11	121
11	11
	1

उदाहरण 3 :– क्या 8748 पूर्ण घन है? यदि नहीं तो वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 8748 को भाग देने से भागफल पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल :– $8748 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3$

2	8748
2	4374
3	2187
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

8784 के अभाज्य गुणनखंडन में 2×2 एवं 3 का त्रिक (तीन का समूह) नहीं बन रहे हैं।

अतः 8748 को $2 \times 2 \times 3$ से भाग देने से प्राप्त भागफल पूर्ण घन होगा।

अतः वह सबसे छोटी संख्या $2 \times 2 \times 3 = 12$ है। जिससे 8748 को भाग देने से प्राप्त भागफल एक पूर्ण घन होगा।

उदाहरण 4 :– निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :–

$2^3\text{-}1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$

$3^3\text{-}2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$

$4^3\text{-}3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$

उपर्युक्त प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $51^3\text{-}50^3$

हल :–दिया गया प्रतिरूप

$2^3\text{-}1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$

$3^3\text{-}2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$

$4^3\text{-}3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$

इस आधार पर हम कह सकते हैं

$7^3 - 6^3 = 1 + 7 \times 6 \times 3$

$51^3\text{-}50^3 = 1 + 51 \times 50 \times 3$

उदाहरण 5 :– यदि किसी संख्या को 4 से गुणा किया जाए तो उसका घन कितने से गुणा हो जाएगा।

हल :– यदि किसी संख्या को 4 से गुणा किया जाए तो उसका घन $4^3 = 64$ से गुणा हो जाएगा।

उदाहरण 6 :– एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 cm, 30 cm और 15 cm है। एक घन बनाने के लिए ऐसे कितने घनाभों की आवश्यकता होगी?

हल :– घनाभ का आयतन $= 15\text{cm} \times 30\text{cm} \times 15\text{cm}$

$= (3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5)\text{cm}^3$

$= (2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5})\text{cm}^3$

उपर्युक्त अभाज्य गुणनखंड में केवल एक बार 2 है। इसलिए हमें इसे पूर्ण घन बनाने के लिए $2 \times 2 = 4$ की आवश्यकता होगी।

अतः हमें एक घन बनाने के लिए ऐसे चार घनाभों की आवश्यकता होगी?

उदाहरण 7 :– किस संख्या का घन सम या विषम है ?

(i) 72 (ii) 65 (iii) 37 (iv) 104

हल :– सम संख्या एवं विषम संख्या के घन क्रमशः सम एवं विषम होते हैं।

अतः (i) सम (ii) विषम (iii) विषम (iv) सम

प्रश्नावली–3.1

(1) निम्नलिखित में से कौन–सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं?

(i) 1000 (ii) 3087 (iii) 456533 (iv) 106480 (v) 4608

(2) प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को गुणा करने पर पूर्ण घन प्राप्त होगा।

(i) 256 (ii) 675 (iii) 7803 (iv) 35721 (v) 107811

(3) प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाएगा।

(i) 128 (ii) 192 (iii) 7803 (iv) 24300 (v) 704

(4) एक संख्या को 5 से गुणा करने पर उसका घन कितना गुणा हो जाएगा?

(5) परीक्षित प्लास्टिसिन का एक घनाभ जिसकी भुजाएँ 5 cm, 2 cm और 5 cm हैं। एक घन बनाने के लिए ऐसे कितने घनाभों की आवश्यकता होगी?

(6) निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए।

$1^3 = 1$

$1^3 + 2^3 = (1+2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$

इस आधार पर $1^3 + 2^3 + 3^3 + \text{-------} + 9^3 + 10^3$ का मान निकालिए।

(7) निम्नलिखित घन में कौन सम या विषम है?

(i) 10648 (ii) 46656 (iii) 9261 (iv) 3375

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

3.3 घनमूल (Cube Roots)

यदि किसी घन की एक भुजा 2 cm है तो उसका

आयतन $= 2\text{cm} \times 2\text{cm} \times 2\text{cm} = 8\text{cm}^3$ होगा।

इसी प्रकार किसी घन का आयतन 27cm^3 है तो सोचिए इस घन की भुजा की लंबाई कितनी होगी?

अब हम यह जानना चाहते हैं कि यदि कोई पूर्ण घन संख्या दी गई हो तो ये कैसे निकालेंगे कि यह संख्या किस संख्या का घन है?

"$(6)^3 = 216$

जैसा कि आप जानते हैं 'वर्गमूल ज्ञात करना' वर्ग करने की संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है। इसी प्रकार 'घनमूल (Cuberoot) ज्ञात करने की संक्रिया घन (Cube) ज्ञात करने की संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।

चूँकि $3^3 = 27$ इसलिए हम कह सकते हैं कि 27 का घनमूल 3 है। घनमूल को '$\sqrt[3]{\ }$' से व्यक्त करते हैं।

अतः $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{125} = 5$

3.3.1 घनमूल ज्ञात करने की कुछ विधियाँ

I. अभाज्य गुणनखंड विधि

इस विधि द्वारा किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए उस संख्या को अभाज्य गुणनखंड करते हैं। समान अभाज्य संख्या के त्रिक बनाते हैं, फिर प्रत्येक त्रिक से एक–एक संख्या लेकर उन संख्याओं को गुणा करते हैं।

74088 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

सबसे पहले 74088 का अभाज्य गुणनखंड करेंगे।

अतः $74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

हमने देखा अभाज्य गुणनखंड 2, 3 एवं 7 के त्रिक बनते हैं।

इसलिए $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

II. किसी घन संख्या का घनमूल : एक अन्य विधि

यदि आपको यह ज्ञात है कि दी हुई संख्या एक घन संख्या है, तो उसका घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधि का प्रयोग किया जा सकता है :

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

चरण 1 कोई घन संख्या, मान लीजिए 857375 है तथा उसके सबसे दाईं ओर के अंक से प्रारंभ करते हुए, तीन–तीन अंकों के समूह बनाइए।

857 375
↓ ↓
दूसरा समूह पहला समूह

चरण 2 पहला समूह '375' आपको वांछित घनमूल के इकाई का अंक देगा।

संख्या 375 का अंतिम (इकाईका) अंक 5 है। हम जानते हैं कि 5 किसी संख्या के इकाई के स्थान पर तब आता है जब उसके घनमूल के इकाई का अंक 5 होता है। इस प्रकार हमें घनमूल के इकाई का अंक 5 प्राप्त होता है।

चरण 3 अब दूसरे समूह 857 को लीजिए।

हम जानते हैं कि $9^3 = 729$ तथा $10^3 = 1{,}000$ साथ ही, $729 < 857 < 1{,}000$ हम छोटी संख्या 729 के इकाई के अंक को वांछित घनमूल के दहाई के अंक के रूप में लेते हैं।

अत : $\sqrt[3]{857375} = 95$ हमें प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 :– अभाज्य गुणनखंडन से 91125 का घनमूल निकालिए।

हल : अभाज्य गुणनखंडन से

$$91125 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$$

$$\sqrt[3]{91125} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$= 3 \times 3 \times 5 = 45$$

उदाहरण 9 :– 84672 को किस सबसे छोटी संख्या से गुणा किया जाए ताकि गुणनफल पूर्ण घन संख्या बन जाए। प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल निकालिए।

हल : अभाज्य गुणनखंडन से

$$84672 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 7 \times 7$$

84672 के अभाज्य गुणनखंड में 7 का त्रिक नहीं बन रहा है, त्रिक बनाने के लिए एक 7 की कमी है।

वांछित संख्या $= 7$

प्राप्त गुणनफल $= 84672 \times 7$

$= 592704$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7$

अत : $\sqrt[3]{592704} = \sqrt[3]{\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7}}$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 7 \quad = 84$

> जरा सोचिए वह कौन सी छोटी संख्या है जिससे 84672 को भाग देने से भागफल पूर्ण घन बन जाए?

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

उदाहरण 10 :– 150 में कौन-सी

(i) संख्या जोड़ी जाए ताकि प्राप्त संख्या पूर्ण घन संख्या बन जाए। प्राप्त संख्या का घनमूल निकालिए।

(ii) संख्या घटाई जाए ताकि प्राप्त संख्या पूर्ण घन संख्या बन जाए। प्राप्त संख्या का घनमूल निकालिए।

हल :– चूँकि $5^3 < 150 < 6^3$ या $125 < 150 < 216$

(i) 150 से बड़ी सबसे पूर्ण घन संख्या 216 है।

अतः 150 में जोड़ी जाने वाली वांछित संख्या $= 216 - 150 = 66$

प्राप्त संख्या $= 150 + 66 = 216$

अतः $\sqrt[3]{216} = 6$

(ii) 150 में घटाई जाने वाली वांछित संख्या $= 150 - 125 = 25$

प्राप्त संख्या $= 150 - 25 = 125$

अतः $\sqrt[3]{125} = 5$

उदाहरण 11 :– निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल आकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) 32768 (ii) 857375

हल :– (i) दी हुई संख्या $= \underline{32}\ \underline{768}$

पहला समूह = 768

पहला समूह का इकाई अंक 8 है। अतः पहले समूह के घनमूल का इकाई अंक 2 होगा।

अतः दी हुई संख्या के घनमूल का इकाई अंक = पहले समूह के घनमूल का इकाई अंक = 2

दूसरा समूह = 32

$3^3 < 32 < 4^3$

छोटी संख्या = 3

छोटी संख्या का इकाई अंक = दी हुई संख्या के घनमूल का दहाई अंक = 3

अत : $\sqrt[3]{32768} = 32$

(ii) दी हुई संख्या $= \underline{857}\ \underline{375}$

पहला समूह = 375

इसका इकाई अंक = 5

∴ इसके घनमूल का इकाई अंक 5 होगा।

अतः दी हुई संख्या के घनमूल का इकाई अंक = पहला समूह के घनमूल का इकाई अंक = 5

दूसरा समूह = 857

$9^3 < 857 < 10^3$

छोटी संख्या = 9

अतः दी हुई संख्या के घनमूल का दहाई अंक = छोटी संख्या का इकाई अंक = 9

$\therefore \sqrt[3]{857375} = 95$

उदाहरण 12 :– यदि किसी घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई 1:2:3 अनुपात में है। घनाभ का आयतन 3072 m^3 है। घनाभ के लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई की गणना कीजिए।

हल : घनाभ के लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 1:2:3 है।

माना लम्बाई = x m

चौड़ाई = $2x$ m

ऊँचाई = $3x$ m

∴ घनाभ का आयतन = 3072 m^3

$\Rightarrow x \times 2x \times 3x = 3072\ m^3$

$\Rightarrow 6x^3 = 3072$

$\Rightarrow x^3 = 3072/6$

$\Rightarrow x^3 = 512$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{512}$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}}$

$\therefore x = 2 \times 2 \times 2 = 8$ m

अतः लम्बाई = x m = 8 m

चौड़ाई = $2x$ m = 2×8 m = 16 m

उँचाई = $3x$ m = 3×8 m = 24 m

प्रश्नावली 3.2

(1) अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 512 (ii) 729 (iii) 27000 (iv) 4913 (v) 157464

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(2) आकलन द्वारा निम्नलिखित पूर्ण संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 1331 (ii) 6859 (iii) 12167 (iv) 32768 (v) 35937

(3) तीन संख्याएँ 2:3:4 अनुपात में है यदि तीनों संख्याओं के घनों का योग 99000 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(4) वह छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 69120 को गुणा करने से प्राप्त संख्या पूर्ण घन संख्या बन जाए। प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(5) 26244 को कौन–सी सबसे छोटी संख्या से विभाजित किया जाए ताकि भागफल पूर्ण घन संख्या बन जाए। उस भागफल का घनमूल निकालिए।

(6) 794 में कौन–सी

(i) सबसे छोटी संख्या जोड़ी जाए ताकि योगफल पूर्ण घन संख्या बन जाए। प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल निकालिए।

(ii) सबसे छोटी संख्या घटाई जाए ताकि प्राप्त संख्या पूर्ण घन संख्या बन जाए। प्राप्त संख्या का घनमूल निकालिए।

3.3.2 ऋणात्मक पूर्ण घन संख्या का घनमूल

$$(-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x)$$

अतः $\sqrt[3]{(-x)^3} = -x$

उदाहरण 13 : –1728 का घनमूल निकालिए।

हल : सबसे पहले 1728 का अभाज्य गुणनखंड कीजिए

अतः $1728 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

इसलिए $\sqrt[3]{-1728} = \sqrt[3]{(-1) \times 1728}$

$= \sqrt[3]{(-1)^3} \times \sqrt[3]{1728}$

$= (-1) \times \sqrt[3]{1728}$

$= (-1) \times 12$

$= -12$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

3.3.3 परिमेय संख्याओं का घनमूल

अब परिमेय संख्याओं का घनमूल निकालते हैं।

जिस क्रम में हमने परिमेय संख्याओं का वर्गमूल निकाला उसी क्रम में घनमूल निकालेंगे।

$\frac{1331}{4096}$ का घनमूल निकालते हैं।

$$\sqrt[3]{\frac{1331}{4096}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{4096}}$$

1331 का अभाज्य गुणनखंड करते हैं।

$1331 = 11 \times 11 \times 11$

$\therefore \sqrt[3]{1331} = 11$

अब हर 4096 का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं।

$4096 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$

$\therefore \sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

अतः $\sqrt[3]{\frac{1331}{4096}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{4096}} = \frac{11}{16}$

उदाहरण 14 :– आकलन द्वारा निम्नलिखित पूर्ण संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(i) - 175616 (ii) $\frac{10648}{12167}$ (iii) $\frac{-2197}{9261}$ (iv) $\frac{4096}{-2197}$ (v) $\frac{-3375}{-2744}$ (vi) 32.768

हल :– (i) अभाज्य गुणनखंडन से

$175616 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7$

$\sqrt[3]{175616} = \sqrt[3]{\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

$\sqrt[3]{-175616} = \sqrt[3]{(-1)^3 \times 175616}$

$= (-1) \times \sqrt[3]{175616}$

$= (-1) \times 56 = -56$

(ii) $\sqrt{\frac{10648}{12167}} = \frac{\sqrt[3]{10648}}{\sqrt[3]{12167}}$

$= \frac{\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 11 \times 11}}{\sqrt[3]{23 \times 23 \times 23}}$

$= \frac{2 \times 11}{23} = \frac{22}{23}$

2	10648
2	5324
2	2662
11	1331
11	121
11	11
	1

23	12167
23	529
	23

(iii) $\sqrt[3]{\frac{-2197}{9261}} = \frac{-\sqrt[3]{2197}}{\sqrt[3]{9261}}$

$= \frac{-\sqrt[3]{13 \times 13 \times 13}}{\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7}}$

$= \frac{-13}{21}$

13	2197
13	169
	13

3	9261
3	3087
3	1029
7	343
7	49
	7

(iv) $4096 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$

$2197 = 13 \times 13 \times 13$

$\sqrt[3]{\frac{4096}{-2197}} = \frac{\sqrt[3]{4096}}{\sqrt[3]{-2197}}$

$= \frac{\sqrt[3]{2\times2\times2 \times 2\times2\times2 \times 2\times2\times2 \times 2\times2\times2}}{-\sqrt[3]{13 \times 13 \times 13}}$

$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{-13}$

$= \frac{16}{-13} \quad = \frac{-16}{13}$

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

13	2197
13	169
	13

(v) $\sqrt[3]{\frac{-3375}{-2744}} = \frac{-\sqrt[3]{3375}}{-\sqrt[3]{2744}}$

$= \frac{\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5}}{\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7}}$

$= \frac{3 \times 5}{2 \times 7} \quad = \frac{15}{14}$

2	2744
2	1372
2	686
7	343
7	79
	7

3	3375
3	1125
3	375
5	125
5	25
	5

(vi) $\sqrt[3]{32.768} = \sqrt[3]{\frac{32768}{1000}}$

$= \frac{\sqrt[3]{32768}}{\sqrt[3]{1000}}$

$= \frac{\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}}{\sqrt[3]{10 \times 10 \times 10}}$

$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{10}$

$= \frac{32}{10} = 3.2$

2	32768
2	16384
2	8192
2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

प्रश्नावली 3.3

(1) अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 125 (ii) 2744000 (iii) -1331 (iv) - 32768 (v) $\frac{27}{64}$ (vi) $\frac{-19683}{24389}$

(2) निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल निकालिए।

(i) 0.001728 (ii) 0.003375 (iii) 32.768

(3) तीन संख्याओं के घनों का योग 0.334125 है। यदि संख्याएँ 2:3:4 में हैं तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(4) एक घन का आयतन $\frac{24389}{729}$ मी^{3} है। घन की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

(5) 32768 का घनमूल ज्ञात कीजिए और इसका उपयोग करके $\sqrt[3]{32.768} + \sqrt[3]{0.032768}$ का मान निकालिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"