# संख्याओं के साथ खेलना
# (Playing with Numbers)

अध्याय
**5**



$45 = 4 \times 10 + 5 \times 1$

$729 = 7 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \times 1$

$xyz = 100 \times x + 10 \times y + z \times 1$

हम सीखेंगे –

* संख्याओं का व्यापक रूप एवं सामान्य रूप
* विभाज्यता की जाँच

GEHC1E

## 5.1 भूमिका :

हम पिछली कक्षाओं में संख्या परिवार से परिचित हुए हैं, जैसे प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक आदि। साथ ही विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता की शर्तों का भी हम अध्ययन कर चुके हैं। अब हम संख्याओं से संबंधित कुछ रोचक जानकारी प्राप्त करेंगे।

## 5.2 संख्याओं का व्यापक रूप :

जैसे (i) हम 2 अंकों की एक संख्या 25 लेते हैं जिसे हम विस्तृत रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं $25 = 10 \times 2 + 1 \times 5$

(ii) हम तीन अंकों की एक संख्या 625 लेते हैं जिसे हम विस्तृत रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$625 = 100 \times 6 + 10 \times 2 + 1 \times 5$

इसी तरह बीजीय व्यंजक को भी व्यापक रूप में प्रकट कर सकते हैं जैसे :

$xy = 10 \times x + 1 \times y = 10x + y$

$yx = 10 \times y + 1 \times x = 10y + x$

$xyz = 100 \times x + 10 \times y + 1 \times z = 100x + 10y + z$

$zxy = 100 \times z + 10 \times x + 1 \times y = 100z + 10x + y$

$yzx = 100 \times y + 10 \times z + 1 \times x = 100y + 10z + x$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

**प्रयास कीजिए : A**

(1) निम्नलिखित संख्याओं को व्यापक रूप में लिखिए:

(i) 39 (ii) 50 (iii) 405 (iv) abc (v) bca

(2) निम्नलिखित को सामान्य रूप में लिखिए

(i) $10 \times 0 + 0$ (ii) $100 \times 5 + 10 \times 0 + 2$

(iii) $100 \times d + 10 \times e + f$

## 5.3 संख्याओं से संबंधित रोचक खेल:

### खेल (i) अंकों को पलटना – दो अंकों की संख्या

| राम | श्याम |
|---|---|
| दो अंकों की एक संख्या लिजिए | 65 |
| अब संख्या के अंकों को पलट दीजिए | अच्छा पलटने से 56 प्राप्त हुआ |
| पुराना और नया प्राप्त दोनों संख्याओं का योग निकालिए | ठीक है, 65+56= 121 मिला |
| अब प्राप्त योग को 11 से भाग दीजिए | 121÷11= 11 भागफल हुआ। |
| आपको शेषफल शून्य मिला होगा | सही है, आश्चर्य कैसे आपको मालूम हुआ ? |

**प्रयास कीजिए : B**

जाँच कीजिए कि यदि श्याम ने निम्नांकित संख्याएँ चुनी होती, तो परिणाम क्या होते?

(1) 39 (2) 51 (3) 50 (4) 98

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

**उपर्युक्त पहेली के रहस्य का कारण –**

माना श्याम ने एक संख्या लिया जिसका विस्तृत रूप $10a + b$ है। a और b को पलटने से एक दूसरी संख्या मिली जिसका विस्तृत रूप $10b + a$ है।

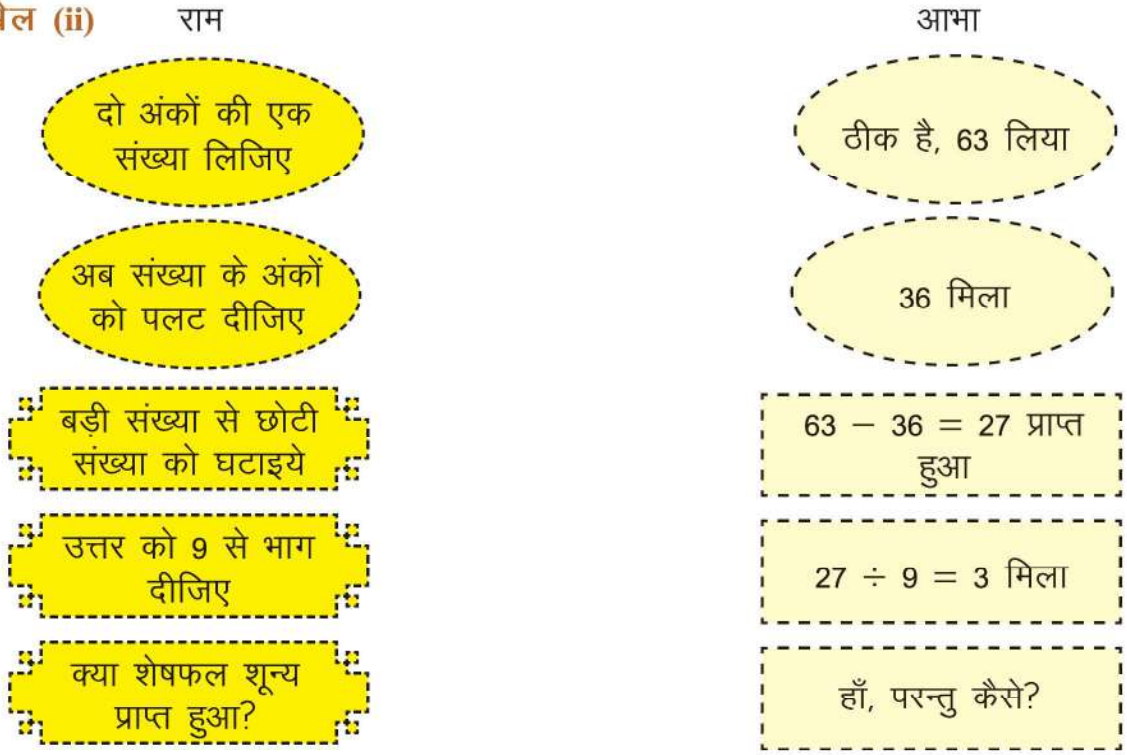
अब, ab और ba का योग $= 10a + b + 10b + a$

$= (10a + a) + (b + 10b)$

$= 11a + 11b = 11(a + b)$

अतः हमने देखा, इसका योग सदैव 11 का गुणज (Multiple) है।

**खेल (ii)**




**प्रयास कीजिए : C**

जाँच कीजिए कि यदि आभा ने उपरोक्त के लिए निम्नलिखित संख्या ली होती तो परिणाम क्या प्राप्त होता?

(1) 70 (2) 26 (3) 95 (4) 49

**उपर्युक्त पहेली के रहस्य का कारण –**

माना कि $10a + b$ एक संख्या है। इसे पलटने से संख्या $10b + a$ प्राप्त होती है।

$\therefore ab = 10a + b$

$ba = 10b + a$

**यहाँ ab का अर्थ a×b नहीं है।**

$= (10a + b) - (10b + a)$
$= (10a - a) + (b - 10b)$
$= 9a - 9b = 9(a - b)$

यह संख्या 9 का गुणज है।

अतः शेषफल सदैव शून्य होगा।

∵ $(10a + b) - (10b + a)$ लेंगे जब $a > b$

$(10b + a) - (10a + b)$ लेंगे जब $b > a$

यदि $a = b$ तो $9\ (a-b) = 9\ (a-a) = 9 \times 0 = 0$

### अंकों को पलटना :– तीन अंकों की संख्या

**खेल (iii)**

श्याम :– (राधिका से) तीन अंकों की एक संख्या लीजिए।

राधिका :– (श्याम से) 156 लिया।

श्याम :– अब उलटे क्रम में इस संख्या को पलट दीजिए।

राधिका :– 651 हुआ।

श्याम :– बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाइए।

राधिका :– 651–156 = 495

श्याम :– इसे 99 से भाग दीजिए।

राधिका :– 495 ÷ 99 = 5 भागफल मिला।

श्याम :– निश्चित रूप से शेषफल शून्य होगा।

राधिका :– वाह!

**प्रयास कीजिए : D**

जाँच कीजिए कि यदि राधिका ने निम्नांकित संख्याएँ चुनी होती, तो परिणाम क्या होता?

(1) 102 (2) 231 (3)789 (4) 500

### उपर्युक्त पहेली के रहस्य का कारण –

हम तीन अंकों की संख्या abcको इस प्रकार लिख सकते हैं।

$abc = 100a + 10b + c$

उलटे क्रम में पलटने से (cba) मिलता है

जिसे ऐसे लिख सकते हैं, $cba = 100c + 10b + a$

स्थिति 1 :– यदि $a > c$ है, तब हम निम्नांकित लेंगे:–

$abc - cba = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

यहाँ abc का अर्थ $a \times b \times c$ नहीं है, बल्कि a का स्थान सैकड़ा, b का स्थान दहाई एवं c का स्थान में हैं।

$= 100(a - c) + 10(b - b) + (c - a) = 100(a - c) - (a - c)$

$= (a - c)\ (100 - 1)$

$= 99\ (a - c)$

स्थिति 2 :– यदि $c > a$ है तब हम निम्नांकित लेंगे:–

$cba - abc = (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)$

$= 100(c - a) + (a - c)$

$= 100(c - a) - (c - a)$

$= (c - a)\ \ (100 - 1)$

$= 99\ (c - a)$

स्थिति 3 :– यदि $c = a$ तब

$abc - cba = aba - aba = 0$

इसलिए प्रत्येक स्थिति में परिणामी संख्या 99 से विभाजित है।

अतः हमेशा शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

**खेल (iv) दिये गये तीन अंकों से तीन अलग–अलग संख्याएँ बनाइए:**

राम :– कोई तीन विभिन्न अंकों को लीजिए।

श्याम :– मैंने तीन अंक 4, 5 और 6 लिया।

राम :– इन तीनों अंकों से चक्रीय क्रम में संख्याएँ बनाइए।

श्याम :– 456, 564, 645 मिले।

राम :– तीनों प्राप्त संख्याओं का योग निकालिए।

श्याम :– 456 + 564 + 645 = 1665 प्राप्त हुआ।

राम :– प्राप्त योग को 111 से भाग दीजिए। शेषफल निश्चित रूप से शून्य होगा।

श्याम :– 1665 ÷ 111 = 15 सही है।

राम :– पुनः उस योग को क्रमशः 3 एवं 37 से भाग दें तो भी शेषफल शून्य ही होगा।

श्याम :– वाह!

**प्रयास कीजिए : E**

जाँच कीजिए कि यदि श्याम ने निम्नांकित संख्याएँ चुनी होती, तो क्या उपरोक्त बातें सही साबित होंगी?

(1) 123 (2) 789 (3)506 (4) 700

**उपर्युक्त पहेली के रहस्य का कारण –**

माना कि वह संख्या abc है।

इसलिए $abc = 100a + 10b + c$ ..... (1)

$bca = 100b + 10c + a$ ..... (2)

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

$cab = 100c + 10a + b$ ..... (3)

समीकरण (1), (2), एवं (3) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$abc + bca + cab = (100a + 10b + c) + (100c + 10a + b) + (100b + 10c + a)$$
$$= 111a + 111b + 111c$$
$$= 111(a + b + c)$$

## 5.4 क्रिप्टेरिद्म (Cryptarithms)

संख्या–पहेली संख्याओं के संक्रियाओं के नियम पर आधारित होती है जिसमें विभिन्न अंकों के लिए भिन्न–भिन्न अक्षरों का प्रयोग करते हैं। यह एक प्रकार का कोड जैसा है। इसमें प्रश्न यह होता है कि प्रयुक्त अक्षर किस अंक के लिए है।

इसमें निम्नांकित दो नियम हैं–

(1) अलग–अलग पहेली में प्रत्येक अंक के लिए केवल एक ही अक्षर प्रयोग में लाने हैं।

(2) किसी भी संख्या का पहला अंक शून्य नहीं होना चाहिए। जैसे 21 के जगह पर 021 नहीं लिखना है।

**उदाहरण (1) :–**

$$\begin{array}{r} A\ 2 \\ +\ 3\ B \\ \hline 1\ 2\ 9 \end{array}$$

उपर्युक्त योग में A तथा B का मान निकालिए।

**हलः– चरण 1.** $2 + B = 9$

या, $B = 9 - 2 = 7$

**चरण 2.** $A + 3 = 12$

या, $A = 12 - 3 = 9$



**उदाहरण (2)**

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ A \\ 3\ A\ 4 \\ \hline 8\ 9\ 0 \end{array}$$

उपर्युक्त योग में A का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः–** A + 4 = एक ऐसी संख्या जिसकी इकाई का अंक 0 है। 0 से 9 के बीच A का मान 6 है, जिसे रखने पर 10 प्राप्त होता है।

आगे भी (2 + 1) + A = 9 में A = 6 रखने पर 9 प्राप्त हो जाता है।

इसलिए A का मान 6 होगा।

**उदाहरण (3)**

$$\begin{array}{r} P\ 4 \\ \times\ P\ Q \\ \hline 28\ 08 \end{array}$$

उपरोक्त गुणा में P तथा Q का मान निकालिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

**हल:–** $4 \times Q$ एक ऐसी संख्या जिसकी इकाई स्थान पर 8 है। इस स्थिति में 0 से 9 से बीच में Q का संभव मान 2 तथा 7 है।

**स्थिति 1 :–** यदि Q का मान 2 लेते हैं तब

$$\begin{array}{r} P\,4 \\ \times\quad P\,2 \\ \hline \overline{2\,P\,8} \\ P^2\,\overline{4\,P} \\ \hline P^2\,\overline{6\,P\,8} = 2808 \end{array}$$

या $(10P + 4) \times (10P + 2)$
$= 100P^2 + 40P + 20P + 8$
$= 100P^2 + 10(6P) + 8 = 2808$

$\overline{6\,P}$ के इकाई अंक 0 है, तब P शून्य या 5 हो सकता है। परंतु पहला अंक किसी भी संख्या का शून्य नहीं हो सकता, इसलिए दूसरा संभव मान 5 लेते हैं।

तब $\overline{6\,P} = 6 \times 5 = 30$ का 3 हाथ में है।

तथा $P^2 = 5^2 + 3 = 25 + 3 = 28$

अतः $P = 5$ तथा $Q = 2$

स्थिति 2 :– यदि Q का मान 7 लेते हैं तब

$$\begin{array}{r} P\,4 \\ \times\quad P\,7 \\ \hline \overline{(7P + 2)\,8} \\ P^2\,\overline{4\,P} \\ \hline P^2\,\overline{(11P + 2)\,8} \end{array}$$

या $(10P + 4) \times (10P + 7)$
$= 100P^2 + 40P + 70P + 28$
$= 100P^2 + 10(11P) + 20 + 8$
$= 100P^2 + 10(11P + 2) + 28 = 2808$

हम पाते हैं कि यदि P का मान 4 लेते हैं तो गुणनफल 2068 प्राप्त होता है और यदि P का मान 5 लेते हैं तो गुणनफल 3078 मिलता है। इसलिए P का कोई भी मान 4 तथा 5 के बीच में नहीं हैं क्योंकि 4 एवं 5 के बीच में कोई पूर्ण संख्या नहीं है और P का मान हमेशा पूर्ण संख्या होना चाहिए। अर्थात केवल स्थिति 1 का उत्तर सही है।

अतः $P = 5$ तथा $Q = 2$ है।

## प्रश्नावली 5.1

प्रत्येक प्रश्न में प्रयुक्त अक्षरों का मान कारण सहित निकालिए :

(i) $\begin{array}{r} P \\ +P \\ +P \\ \hline QP \end{array}$

(ii) $\begin{array}{r} 3\,1\,A \\ +\,1\,A\,3 \\ \hline 5\,0\,1 \end{array}$

(iii) $\begin{array}{r} 4\,5 \\ +3\,P \\ \hline Q\,2 \end{array}$

(iv) $\begin{array}{r} 8\,P \\ +\,9\,9 \\ \hline R\,Q\,6 \end{array}$

(v) $\begin{array}{r} 6\,P\,Q \\ +\,P\,Q\,7 \\ \hline 1\,2\,4\,5 \end{array}$ (vi) $\begin{array}{r} P\,Q \\ \times\,P\;3 \\ \hline 5\,7\,P \end{array}$ (vii) $\begin{array}{r} 2\,A \\ \times\,A \\ \hline 1\,2\,A \end{array}$ (viii) $\begin{array}{r} P\,Q \\ \times\quad 3 \\ \hline R\,P\,Q \end{array}$

(ix) $\begin{array}{r} PQ \\ \times\quad 6 \\ \hline QQQ \end{array}$ (x) $\begin{array}{r} Q\,P \\ \times\;P\,Q \\ \hline Q\,R\,Q \end{array}$ (xi) $\begin{array}{r} P\;Q \\ \times\quad 6 \\ \hline R\;6\;8 \end{array}$ तथा $Q - P = 1$

## 5.5 विभाज्यता की जाँच :

कक्षा 6 में आप पढ़ चुके हैं इस प्रकार विभिन्न भाजकों से विभाज्यता की जाँच की जाती है। जैसे– 2, 3, 4, 6, 9, 11 से विभाजन

अब इस अध्याय में इनके ''जाँच कैसे''? पर चर्चा करेंगे।

### 5.5.1 2 से विभाज्यता :

हम जानते है कि कोई प्राकृत संख्या सम होगी जब इसकी इकाई का अंक 2, 4, 6, 8 एवं 0 हो।

एक प्राकृत संख्या विषम होती है, यदि इसकी इकाई का अंक 1, 3, 5, 7 या 9 हो।

**पूर्व में सिखे गए 2 की विभाज्यता के नियम अनुसार :–**

यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।

अब हम इसकी जाँच करेंगे।

किसी भी संख्या ..... cba को ..... $+100c+10b+a$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसके पहले दो पद 100c और 10b संख्या 2 विभाज्य हैं, क्योंकि 100 और 10 संख्या 2 से विभाज्य है। अब जब दी गई संख्या 2 से विभाज्य है, तो इकाई a भी 2 से विभाज्य होना चाहिए और यह तब संभव है जब $a = 0, 2, 4, 6$ या 8 हो।

### 5.5.2 3 और 9 से विभाज्यता :

आइए, कोई संख्या, मान लीजिए 3453 लें।

प्रसारित रूप $= 3\times1000+4\times100+5\times10+3$

इसे निम्न प्रकार से लिखने पर,

$3\times(999+1)+4\times(99+1)+5\times(9+1)+3$

$= 3\times999+4\times99+5\times9+(3+4+5+3)$.....समी$^0$ (1)

हम देखते हैं कि संख्या 3 या 9 से तभी विभाज्य होगी, यदि $(3+4+5+3)$ संख्या 3 या 9 से विभाज्य हो।

हम देखते है कि (3+4+5+3)=15 से 3 विभाज्य है परंतु 9 से विभाज्य नहीं है।
फिर, यदि (3+4+5+3) में इकाई अंक 3 के स्थान पर 6 लेने पर योगफल 3+4+5+6 =18 हो रहा है जो 3 एवं 9 दोनो संख्या से विभाज्य होता है।
इस प्रकार, यदि संख्या cba है, तो

$$100c+10b+a = 99c+9b+(a+b+c) = 9(11c+b) + (a+b+c)$$

यहाँ देखिए,

9(11c+b), 3 और 9 दोनों से विभाज्य है।

अतः 3 या 9 की विभाज्यता तभी संभव है, जब 9(a+b+c) 3 और 9 दोनों से विभाज्य हो।

**उदाहरण :— 1.** 23463 की 3 और 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

**हल :—** 23463 के अंकों का योग = 2+3+4+6+3 = 18 है।
जो 3 और 9 दोनों से विभाज्य है।
18÷3 = 6, 18÷9 = 2

अतः स्पष्टतः संख्या 23463, 3 और 9 से विभाज्य है।

### 5.5.3 4 से विभाज्यता

हम जानते है कि यदि किसी संख्या के इकाई और दहाई से बनने वाली संख्या 4 से विभाज्य है तो वह पूरी संख्या 4 से विभाजित होगी।

**जाँच :—**

माना 124, एक 3 अंकीय संख्या है जिसका इकाई और दहाई से बनी संख्या 24 है जो 4 से विभाज्य है। अतः पूरी संख्या 124 भी 4 से विभाजित होगी।
सामान्य रूप में लिखने पर,

100c+10b+a

यहाँ, 10b+a दो अंकीय भाग 4 से विभाजित होने पर ही 100c+10b+a भी 4 से विभाजित होगा।

### 5.5.4 6 से विभाज्यता

हम जानते है कि यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से पूर्णतः विभाज्य हो तो वह संख्या 6 से भी विभाजित होगा।

**उदाहरण :–** 6234 को 2 एवं 3 से विभाजित करने पर यह पूर्णतः विभाज्य है चूँकि, इस संख्याा के इकाई अंक सम संख्या 4 है और इसके अंको का योग यथा : 6+2+3+4 = 15 है जो 3 से विभाज्य है।

हम देखते है कि 6, 2 और 3 का गुणज यह ऐसे कहें कि 6 का गणनखंड 2 तथा 3 है तो जो संख्या 2 और 3 से विभाज्य हो वह 6 से भी विभाजित होगा।

### 5.5.5 5 और 10 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या के इकाई अंक 0 हो तो वह संख्या 10 से विभाज्य होगी। तथा यदि किसी संख्या के इकाई अंक 0 या 5 हो तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी।

इस प्रकार माना यदि कोई संख्या cba जो ....+100c+10b+a के रूप में प्रसारित रूप में लिखा गया हो तो चूँकि यह 10,100,... 10 से विभाज्य हैं, इसलिए 10b, 100c, ... भी 10 से विभाज्य होगें तथा यही बाद में 5 से भी विभाज्य होगें, क्योंकि 10 = 5x2 है।

### 5.5.6 11 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या के सभी समस्थान वाले अंको का योग तथा विषम स्थान वाले अंको का योग का अंतर 0 या 11 से विभाज्य हो तो वह संख्या 11 विभाज्य होती है। आइए, इस कथन की जाँच के लिए 1 संख्या 72391 लेते है

अब, संख्या 72391 को उपरोक्त कथन के अनुसार विन्यासित कर संक्रिया करने पर,

$7+3+1 = 11$

फिर $2+9 = 11$

$\therefore$ अंतर $= 11-11 = 0$

सामान्य रूप में देखने पर,

एक तीन अंको की संख्या abc को 100a+10b+c के रूप में लिखिए।

अब,

$100a+10b+c$
$= 99a+a+11b-b+c$
$= 99a+11b+(a-b+c)$
$= 11(9a+b)+(a-b+c)$

यदि संख्या abc, 11 से विभाज्य है तो (a-b+c) भी 11 से विभाज्य होगी।

जैसेः–

121 में,

$(1+1)-2 = 2-2 = 0$

और $100a+10b+c$ से तुलना करने पर,

$= 11(9x1+2)+(1-2+1)$

$= 11x11+0$

$= 121$; (सत्यपित)

## प्रश्नावली 5.2

1. यदि तीन अंकों की संख्या $72x$, 9 से विभाज्य है, तो $x$ का मान क्या है?
2. यदि $7x675$ एक पाँच अंकीय संख्या है, 11 से विभाज्य है तो $x$ का मान क्या है?
3. 2436585 की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।
4. 3375 की 5 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।
5. 1848 की 4 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।