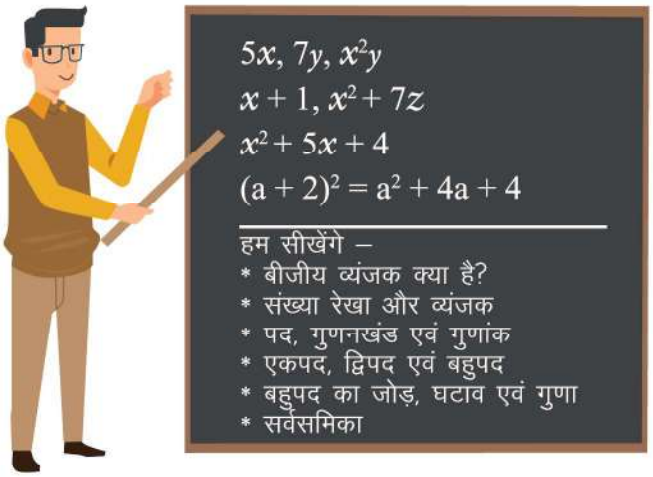
बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ
(Algebric Expression & Identities)

अध्याय
6



GF6832

6.1 व्यंजक :

पिछली कक्षाओं में हम बीजीय व्यंजकों के बारें में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। हम यह भी जानते हैं कि गणितीय संक्रियाओं (+, –, × एवं ÷) का प्रयोग कर चर और अचर संख्याओं को संकलित एवं संयोजित किया जाता है। उदाहरणार्थ– $2x + y$, $p + 9$, $p^2 + 2pq$ इत्यादि। इस प्रकार के संग्रहण व्यंजक हैं।

संग्रहण में पदों की संख्या के अनुसार व्यंजकों को एक पद $(2xy)$, द्विपद $(2x + y)$ और त्रिपद $(x^2 + 2x - 1)$ कहते हैं।

हम जानते हैं कि व्यंजक $x^2 + 2x - 1$ को चर x और अचरों 1 एवं 2 से बनाया गया है।

एकपद – $2xy$, x^2, $2xy$, $2x$, $3xyz$, $2ab^2c$ आदि।

द्विपद – $x+1$, $2xy + 2$, $x^2 - 2$, $4x^2 - 1$ आदि।

त्रिपद – $x^2 + 2xy + y$, $x^2 + 2x - 1$, $m + n - 1$, $x^2 + y^2 + z^2$ आदि।

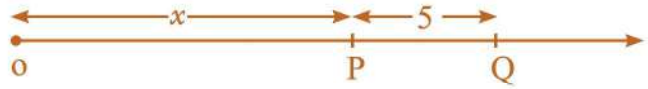
व्यापक रूप में एक या एक से अधिक पद वाले बीजीय व्यंजक बहुपद कहलाते हैं। बीजीय व्यंजक के प्रत्येक चर के घात पूर्ण संख्या होते हैं।

प्रयास कीजिए : A

चर x और y का प्रयोग कर एक चर एवं दो चर वाले पाँच–पाँच बीजीय व्यंजक बनाइए।

6.2 संख्या रेखा और व्यंजक

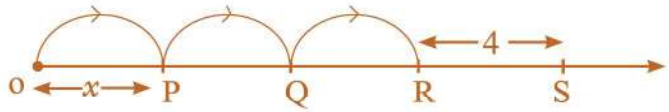
हम संख्या 4, –5, 10 और –11 को संख्या रेखा में निरूपित करना जानते हैं। इसी प्रकार, x+5 को संख्या रेखा में निरूपित कर सकते हैं।



मान लिया संख्या रेखा पर P बिन्दु चर x को सूचित करता है। P संख्या रेखा पर कहीं भी हो सकता है। अब P से 5 इकाई पर स्थित बिन्दु Q, x+5 को निरूपित करेगा।

अतः OQ, x+5 को निरूपित करता है तथा यह बिन्दु निश्चित रूप से x के दाईं ओर होगा।

इसी प्रकार, व्यंजक $3x$+4 की स्थिति संख्या रेखा पर देखते हैं।



संख्या रेखा पर मूल बिन्दु O से P की दूरी x को निरूपित करता है। बिन्दु P, Q और R बराबर दूरी पर तीन बिन्दु हैं।

अतः O से R की दूरी O से P की दूरी का तीन गुना है। इसलिए OR, $3x$ को निरूपित करेगा तथा बिन्दु S बिन्दु R के दाईं ओर 4 इकाई दूरी पर स्थित है। अतः OS की दूरी व्यंजक $3x$+4 को निरूपित करेगा।

6.3 समान एवं असमान पद

समान चर और घात एवं विभिन्न संख्यात्मक गुणांक वाले व्यंजक समान पद कहलाते हैं। जैसे $-2x$, $3x$, $\frac{4}{7}x$, $20x$ इत्यादि समान पद हैं। यहाँ व्यंजकों का संख्यात्मक गुणांक 2, 3, $\frac{4}{7}$ एवं 20 है।

इन सभी का चर मान x तथा संख्यात्मक मान भिन्न–भिन्न है। इसी प्रकार $5xy$, $5x^2y$, $5xy^2$, 3mn, 2mnp, इत्यादि असमान पद हैं।

अतः समान चर एवं घात रहने पर समान पद एवं असमान चर रहने पर असमान पद कहलाते हैं।

प्रयास कीजिए : B

(1) निम्नलिखित व्यंजक के संख्यात्मक गुणांक लिखिए:

(i) x^2 (ii) $7xy$ (iii) $-\frac{5}{4}x^2$ (iv) 5abc

(2) निम्न को एकपद, द्विपद एवं त्रिपद में वर्गीकृत कीजिए:

(i) $x+4y$ (ii) x^2+x-5 (iii) $12-\frac{x}{5}$ (iv) x^2+7xy

(3) निम्नलिखित में कौन–कौन से पद समान है?

(i) $\frac{5x}{4}$ (ii) $7x+y$ (iii) $\frac{3}{4}x+5$ (iv) $5x^2$ (v) $-7x^5$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(4) इन व्यंजकों को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए:
(i) 5x (ii) x+2

6.4. बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन :

हम बीजीय व्यंजकों को जोड़ना एवं घटाना क्षैतिज विधि (Horizontal method) एवं स्तम्भ विधि (Column method) द्वारा सीख चुके हैं।

उदाहरणार्थ, $3xy + 2x + 3$ और $4x - 3xy + 4$ को हम इस प्रकार जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{r} 3xy + 2x + 3 \\ -3xy + 4x + 4 \\ \hline 0 \quad + \quad 6x + 7 \end{array}$$

उदाहरण 1 : व्यंजक $x^2-2xy+y^2$, $3xy-x^2+3$ और $x^2+2xy+y^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए:

हल:

$$\begin{array}{r} x^2- 2xy +y^2 \\ - x^2+3xy \quad +3 \\ + x^2+2xy +y^2 \\ \hline x^2+3xy+2y^2 +3 \end{array}$$

उदाहरण 2 : $8m^2+3n^2+1$ में से $3m^2- n^2- 4$ घटाइए।

हल:

$$\begin{array}{r} 8m^2 + 3n^2+1 \\ 3m^2 - n^2 - 4 \\ \hline - \quad + \quad + \\ \hline 5m^2 + 4n^2 +5 \end{array}$$

उदाहरण 3 : $a-b+ab$, $b-c+bc$ और $c-a+ac$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: $(a-b+ab)+(b-c+bc)+ c-a+ac$

$= a-b+ab + b-c+bc + c-a+ac$

$= a-a-b+ b-c + c +ab+bc+ac$ (समान पदों को व्यवस्थित करने पर)

$= ab+bc+ac$

उदाहरण 4 : $12a-9ab+5b-3$ में से $4a-7ab+3b+12$ घटाइए।

हल: $12a-9ab+5b-3 - (4a-7ab+3b+12)$

$= 12a-9ab+5b-3 - 4a+7ab-3b-12$ (कोष्ठक हटा कर चिह्न परिवर्तित करने पर)

$= 12a-4a+5b-3b - 9ab+7ab-3-12$ (समान पदों को व्यवस्थित करने पर)

$= 8a +2b-2ab-15$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

प्रश्नावली 6.1

(1) निम्नलिखित व्यंजक के संख्यात्मक गुणांक लिखिए:

(a) xy (b) $-7x^2$ (c) $3xy$ (d) $-\frac{3}{4}x$ (e) $-12x^2$ (f) $7xy$ (g) $-xyz$ (h) $2ab$

(2) निम्न को एकपद, द्विपद एवं त्रिपद में वर्गीकृत कीजिए:

(a) $2x-2$ (b) $3x^2y$ (c) x^2+y^2-1 (d) $12-2p$ (e) $-3y^2$ (f) $4x^2-x+1$ (g) x^2y

(h) $2l-1$ (i) $l+m-1$ (j) $2x^2y^2$

(3) निम्नलिखित में कौन–कौन से समान पद हैं?

(a) $3x$ (b) $-4xy$ (c) $-5x$ (d) $\frac{3}{4}x^2y$ (e) $+12x$ (f) $8xyz$ (g) $6x^2$ (h) $-2x$

(4) इन व्यंजकों को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए:

(a) $2x$ (b) $x+5$ (c) $4x+3$ (d) $x-5$

(5) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(a) $x-3$ और $12+2x$ का योगफल..... है।

(b) $3x-1$ और .....का योगफल $3x+3$ है।

(c) व्यंजक x^2-1 और $1-x^2$ का योगफल ..... है।

(6) निम्नलिखित को जोड़ें:

(a) $2-a$, $x+3$ और $3x$ (b) $a^2+b^2+c^2$, $a^2-b^2-c^2$ और a^2+b^2+2ab

(c) l^2+m^2, m^2+n^2 और l^2+n^2 (d) a^2-ab, b^2-bc और c^2-ca

(7) (a) $3x^2-9xy+3$ में से $x^2+7xy-1$ घटाइए।

(b) $a^2-2ab+b^2$ और $a^2+2ab+b^2$ के योगफल में से $3a^2+3b^2$ घटाइए।

(c) $l^2+m^2+n^2+2lm+2mn+2ln$ में से कितना घटाया जाए कि $l^2+m^2+n^2$ प्राप्त हो?

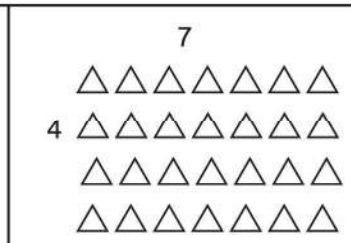
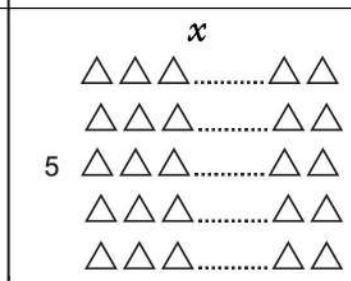
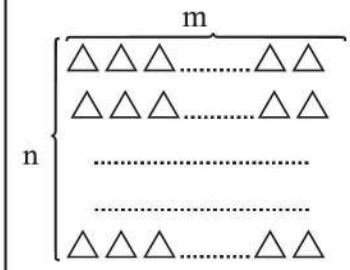
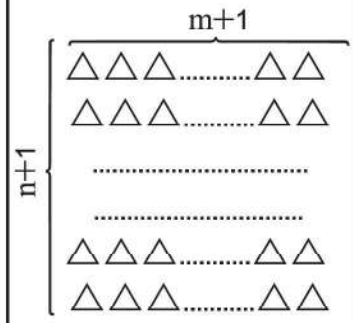
6.5. बीजीय व्यंजकों का गुणा :

हम जान चुके हैं कि गुणन की क्रिया लगातार योग की ही क्रिया है।

$3+3+3+3 = 4\times3$, $x+x+x+x+x = 5x$, $y+y+y+y+y+y = 6y$

आइए हम इसे इन प्रतिरूपों से गुणन को समझने का प्रयास करते हैं:

क्र.स.	त्रिभुजों का प्रतिरूप	1 पंक्ति में △ की संख्या	पंक्तियों की संख्या	त्रिभुजों की कुल संख्या
i	4 △△△△ 3 △△△△ △△△△	4	3	$4+4+4 = 3\times4$

ii		7	4	$7+7+7+7 = 4\times7$
iii		x	5	$x+x+x+x+x = 5\times x$
iv		m	n	m+m+m-----+m(n बार) $= n\times m$
v		m+1	n+1	(m+1)+(m+1)+..... (n+1)बार = (n+1) (m+1)

ऊपर के प्रतिरूप में हम देखते हैं कि (i) के पंक्ति में त्रिभुजों की संख्या को पंक्ति की संख्या से गुणा करने पर गुणनफल 3×4 प्राप्त होता है। (iii) में प्रत्येक पंक्ति में x त्रिभुजों को पंक्ति की संख्या 5 से गुणा करते हैं तो गुणनफल $5\times x$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार (iv) में प्रत्येक पंक्ति के m त्रिभुजों की संख्या को पंक्ति की संख्या n से गुणा करते हैं, तो गुणनफल $n\times m$ प्राप्त होता है।

(v) प्रत्येक पंक्ति में एक Δ बढ़ाने पर प्रत्येक पंक्ति में Δ की संख्या (m+n) तथा पंक्तियों की संख्या 1 बढ़ाने पर कुल पंक्तियों की संख्या (n+1) है। अब त्रिभुजों की संख्या (m+1) और पंक्तियों की संख्या (n+1) को गुणा करने पर गुणनफल (n+1) (m+1) प्राप्त होता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

6.6. बहुपदों का गुणा :

6.6.1 दो एकपदियों का गुणा

निम्नलिखित पर विचार करते हैं :

(i) $4 \times x = 4x$ $(x+x+x+x = 4x)$

(ii) $a \times 2b^2 = a \times 2 \times b \times b = 2ab^2$ (एकपद)

(iii) $4m \times (-m^2n) = 4 \times m \times m \times m \times (-n) = -4m^3n$ (एकपद)

(iv) $3xy \times 5x^2 = 3 \times x \times y \times 5 \times x \times x = (3 \times 5) \times (x \times x \times x) \times y = 15x^3y$ (एकपद)

(v) $4x^2 \times 6y^2$

$= 4 \times x \times x \times 6 \times y \times y$

$= (4 \times 6) \times (x \times x) \times (y \times y)$

$= 24x^2y^2$ (एकपदी)

> दो या दो से अधिक एकपद का गुणनफल एकपद होता है।

(vi) $3lm \times m^2 \times (-2l^2)$

$= 3 \times l \times m \times m \times m \times (-2) \times l \times l$

$= \{3 \times (-2)\} \times (l \times l \times l) \times (m \times m \times m)$

$= -6l^3m^3$

> गुणनफल का गुणांक दोनों पदों के गुणांक का गुणनफल होता है।

> किसी पद चिह्न (+,–) को उस पद के संख्यात्मक गुणांक के साथ लिया जाता है, जैसे: $-2l^2 = (-2) \times l^2$

आइए दो एकपद के गुणन के लिए एक गुणन सारणी बनाते हैं:

×	x^2	$-2xy$	$5y^2$
xy	x^3y	$-2x^2y^2$	$5xy^3$
$-x^2$	$-x^4$	$2x^3y$	$-5x^2y^2$

प्रयास कीजिए : C

(1) निम्नलिखित एकपद को गुणा कीजिए:

(a) $2x^2$ एवं xy (b) $-3xy$ एवं xy (c) $3p^2q$, pq एवं p^2 (d) $4m^2$, $3n^2$ एवं mn (e) $3x$, $-2x^2$ एवं 0

(f) abc, a^2 एवं b2

(2) निम्नलिखित एकपदी व्यंजकों को गुणाकर गुणनफल का गुणांक बताइए:

(a) $3xy$, x^2y और $-x$ (b) a^2b, $\frac{2}{3}a$ और $\frac{1}{2}ab$ (c) $10lmn$, m^2 और $10l^2n^2$ (d) xy, $-xy$ और x^2

(3) गुणन सारणी को पूरा कीजिए:

×	mn	$-2m^2$	$-lm$	l^2
$3m^2$				
$-mn$				
$-4n^2$				

6.6.2 एकपदी को बहुपदी से गुणाः

हम संख्याओं के वितरण गुण को जान चुके हैं

$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$ यहाँ एक पद का द्विपदी या त्रिपदी, बहुपदों के साथ गुणन क्रिया में यह गुण उपयोगी साबित होगा।

आइए, $2x$ का गुणा $2x + 2y$ से करते हैं:

$2x\times(2x+2y)$

$= 2x\times2x + 2x\times2y$

$= 4x^2 + 4xy$

> एकपद $2x$ को द्विपदी के प्रत्येक पद $2x$ एवं $2y$ से गुणा करते हैं।

उदाहरण 1 : $-3m$ को $(-m^2+2n)$ से गुणा कीजिए।

हल : $-3m\ (-m^2+2n)$

$= -3m\times(-m^2)+(-3m)\times2n$ (वितरण नियम के उपयोग से)

$= 3m^3+(-6mn)$

$= 3m^3-6mn$

उदाहरण 2 : $5xy$ को $2x-2y+1$ से गुणा कीजिए।

हल : $5xy\times(2x-2y+1)$

$= (5xy\times2x)-(5xy\times2y)+5xy\times1$ (वितरण नियम के उपयोग पर)

$= 10x^2y-10xy^2+5xy$

उदाहरण 3 : $-x^2$ को x^2+2x-1 से गुणा कीजिए।

हल : $-x^2\times(x^2+2x-1)$

$= -x^2\times x^2 - x^2\times2x+x^2\times1$ (वितरण नियम के उपयोग पर)

$= -x^4-2x^3+x^2$

प्रयास कीजिए : D

(1) निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(a) $2l_2$ और $l+m$ (b) $2x$ और $-3x+3y$ (c) $-x^2$ और $(2x+2y-2)$ (d) $3l_2+m+n$ और $-m$

(2) निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए एव $a-1$ और $b=0$ के लिए गुणनफल का मान निकालिए:

(a) $a\times(a+b)$ (b) $2a$ और $a-b+1$ (c) $a^2 - b^2 + 2ab$ और ab

6.6.3 द्विपदी को द्विपदी से गुणा करनाः

हम द्विपदी $(a+b)$ और $(a+b)$ लेकर इसके गुणन पर विचार करते हैं।

$(a+b) \times (a+b)$
$= a\times(a+b) + b\times(a+b)$
$= a^2 + ab + ab + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$ (समान पद को जोड़ने पर)

वितरण नियम के अनुसरण करते हुए (a+b) के प्रत्येक पद को (a+b) के प्रत्येक पद से करते है।

उदाहरण 4 : $(x-4)$ को $(3x+3)$ से गुणा कीजिए।

हल : $(x-4) \times (3x+3)$
$= x\times(3x+3) - 4\times(3x+3)$ (वितरण नियम के उपयोग से)
$= 3x^2 + 3x - 12x - 12$
$= 3x^2 - 9x - 12$ (समान पदों को घटाने पर)

उदाहरण 5 : $(a^2 + 2b^2)$ को $(5a - 3b)$ से गुणा कीजिए।

हल : $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b)$
$= a^2\times(5a - 3b) + 2b^2\times(5a - 3b)$
$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$ (सभी असमान पद हैं।)

6.6.4 द्विपदी को त्रिपदी से गुणाः

द्विपदी और त्रिपदी बहुपदों का गुणनफल ज्ञात करने मे वितरण नियम उपयोगी है। यहाँ भी द्विपदी के प्रत्येक पद को त्रिपदी के प्रत्येक पद से गणा करते है।

हम $2a+b$ और $a^2 + 2ab - 2$ के गुणन पर विचार करते हैं।
$(2a+b) \times (a^2 + 2ab - 2)$
$= 2a \times (a^2 + 2ab - 2) + b\times (a^2 + 2ab - 2)$ (वितरण नियम के उपयोग से)
$= 2a^3 + 4a^2b - 4a + a^2b + 2ab^2 - 2b$
$= 2a^3 + 5a^2b + 2ab^2 - 4a - 2b$ (समान पदों को संकलित कर जोड़ने पर)

उदाहरण 6 : $(x+y-2)$ को $(x-y)$ से गुणा कीजिए।

हल : $(x+y-2) \times (x-y)$ (क्रम विनिमेय नियम $a \times b = b \times a$)
$= (x-y) \times (x+y-2)$
$= x\times(x+y-2) - y\times(x+y-2)$
$= x^2 + xy - 2x - xy - y^2 + 2y$ (विपरीत चिह्न वाले समान पदों को विलोपित करने पर)
$= x^2 - 2x - y^2 + 2y$

जोड़ एवं घटाव की संक्रिया की भाँति बहुपद के गुणन की संक्रिया को **स्तम्भ विधि** से किया जा सकता है।

उदारहणार्थ, $2x+2y$ को $x-y$ से

$$\begin{array}{l} 2x+2y \\ \times\ x-y \\ \hline 2x^2+2xy \quad (x \text{ से } 2x+2y \text{ को गुणा करने पर}) \ x\times(2x+2y)= 2x^2+2xy \\ +\ \ -2xy-2y^2 \quad (-y \text{ से } 2x+2y \text{ को गुणा करने पर} -y\ (2x+2y)= -2xy-2y^2 \\ \hline 2x^2-2y^2 \quad \text{(विपरीत चिह्न वाले समान पदों को विलोपित करने पर)} \end{array}$$

उदाहरण 7 : स्तम्भ विधि से व्यंजक $9a^2 + 6ab + 1$ और $a-b$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{l} 9a^2 + 6ab + 1 \quad (a-b \text{ के पद } a \text{ से } 9a^2 + 6ab + 1 \text{ के प्रत्येक पद को गुणा करने पर }) \\ \times\ a-b \\ \hline 9a^3+ 6a^2 b + a \quad (-b \text{ से } 9a^2 + 6ab + 1 \text{ के प्रत्येक पद को गुणा करने पर}) \\ +\ \ -9a^2 b - 6ab^2 - b \\ \hline 9a^3 - 3a^2 b - 6ab^2 + a - b \end{array}$$

प्रश्नावली 6.2

(1) दिये गये युग्मों को गुणा कीजिए

(a) $3p$ और $2q$ (b) $7a^2$ और $-3a$ (c) $5mn$ और $2mn$ (d) m^2 और $(m+n)$

(e) $-y$ और $(x^2 + y^2)$ (f) l^2 और (l^2-m^2)

(2) नीचे सारणी में कुछ आयतों की लंम्बाई एवं चौड़ाई दी गई है। आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सारणी को पूरा कीजिए।

क्र.सं.	लंबाई	चौड़ाई	आयत का क्षेत्रफल
(i)	$2a$	$3b$	------
(ii)	$3x^2y$	xy	------
(iii)	$5lm$	$l-2$	------
(iv)	$7a^2b^2$	$3c^2$	------
(v)	$(x+y)$	$2y$	------

(3) गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(a) $a+2$ और $a-2$ (b) $l-m$ और $2l^2-3m^2$ (c) $xy+yz$ और $(x-y)$

(d) $2a+3b$ और $a^2+ 2ab + b^2$ (e) $(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2)$ और $4(a^2-\frac{2}{3}b^2)$ (f) $p^2 - q^2$ और p^2+q^2

(4) निम्नलिखित का गुणनफल स्तम्भ विधि से ज्ञात कीजिए:

(a) $x+4$ और $3x$ (b) $a^2+ ab$ और $a+b$ (c) $5l-5m-n$ और $2l+2n$

(d) $a^2+ab+ b^2$ और $a-b$

(5) निम्नलिखित को सरल कीजिए:

(i) $(a^2 - 4)(a+b) + 5$ (ii) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (iii) $(x+y)(2x + y)+(x+2y)(x - y)$

(iv) $(a+b+ c)(a+b- c)$ (v) $(a+b)(c- d)+(a- b)(c+d)+2(ac+bd)$

(6) एक आयत की लंम्बाई $2(x+y)$ तथा चौड़ाई $3(x-y)$ है। आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(7) एक घनाभ की लम्बाई $(a+b)$ चौड़ाई $(a+2)$ एवं ऊँचाई $(a-b)$ इकाई है। घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए। $a = 2$ और $b = -1$ के लिए आयतन का मान ज्ञात कीजिए।

(8) $(a+b)(2a-3b+c) - (2a-3b)c$ को सरल कीजिए और $a = 0$, $b = -1$ और $c = 2$ के लिए मान ज्ञात कीजिए।

6.7 सर्वसमिकाएँ (Identities)

सर्वसमिका $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$ में चर का मान 5 रखने पर हम पाते हैं।

बायाँ पक्ष (LHS) $=(x+2)(x+3) = (5+2)(5+3) = 7\times8 = 56$

दायाँ पक्ष (RHS) $= x^2+5x+6 = (5^2)+ 5\times5+6 = 25+25+6 = 56$

यहाँ हम पाते हैं कि बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष का मान बराबर है। अर्थात $x = 5$ के लिए समिका का L.H.S = R.H.S है। अब आगे चर के अन्य मान लेकर एक सारणी बनाते हैं।

x का मान	बायाँ पक्ष $= (x+2)(x+3)$	दायाँ पक्ष $= x^2+5x+6$
0	$(0+2)(0+3) = 6$	$0+0+6 = 6$
1	$(1+2)(1+3) = 12$	$(1)^2+5\times1+6 = 12$
-1	$(-1+2)(-1+3) = 2$	$(-1)^2+5\times(-1)+6 = 2$
2	$(2+2)(2+3) = 20$	$(2)^2+5\times2+6 = 20$
-2	$(-2+2)(-2+3) = 0$	$(-2)^2+5\times(-2)+6 = 0$

सारणी से स्पष्ट है कि x के इन सभी मानों के लिए $(x+2)(x+3)$ और x^2+5x+6 का मान बराबर है।

अतः x के अन्य कोई भी मान के लिए

$$(x+2)(x+3) = x^2+5x+6 \text{ होगा}$$

अतः ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य (संतुष्ट) होती है, सर्वसमिका कहलाती है।

इसलिए $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$ एक सर्वसमिका है।

एक समीकरण अपने चर के कुछ निश्चित मानों के लिए सत्य होता है, यह सभी मानों के लिए सत्य नहीं होता है।

उदाहरणार्थ : $x+2 = 12$ सर्वसमिका नहीं समीकरण है क्योंकि यह केवल $x = 10$ के लिए सत्य है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

6.8 कुछ मानक सर्वसमिकाएँ :

(1) व्यंजक (a+b) और (a + b) के गुणनफल पर चर्चा करते हैं।

$(a+b) \times (a+b)$ या $(a+b)^2$

$= a(a + b) + b(a + b)$ (वितरण नियम के उपयोग से)

$= a^2 + ab + ba + b^2$ $\quad (ba = ab)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

अतः $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ _____ I

अतः $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्वसमिका है तथा a और b के सभी मानों के लिए सर्वसमिका का LHS = RHS होगा।

(2) इसी प्रकार (a–b) (a –b) या $(a - b)^2$ का गुणनफल

$(a - b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$ (वितरण नियम के उपयोग से)

$= a^2 - ab - ba + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

अतः $\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ _____ II

(3) अब (a+b) (a –b) के गुणनफल पर विचार करते हैं:

$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ba - b^2$ (विपरीत चिह्न वाले समान पदों को विलोपित करने पर)

$= a^2 - b^2$

अतः $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ _____ III

सर्वसमिका I, II और III मानक सर्वसमिकाएँ हैं। इन सर्वसमिकाओं का उपयोग व्यंजकों के गुणन एवं गुणनखण्डन में व्यापक रूप से किया जाता है तथा एक व्यापक सर्वसमिका प्राप्त करते हैं।

$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$

$= x^2 + xb + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

अतः $\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$ _____ IV

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

उदाहरण 8 : सर्वसमिका का उपयोग कर $(a+2)^2$ को सरल कीजिए?

हल: $(a+2)^2 = a^2 + 2 \times a \times 2 + 2^2$ (सर्वसमिकाओं I के उपयोग से)

$= a^2 + 4a + 4$

हल: (a) $(103)^2 = (100+3)^2$

$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 3 + (3)^2$

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

(b) $(96)^2 = (100-4)^2$

$= (100)^2 - 2 \times 100 \times 4 + (4)^2$

$= 10000 - 800 + 16 = 9216$

(c) $(110)^2 = (100+10)^2$

$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 10 + (10)^2$

$= 10000 + 2000 + 100 = 12100$

उदाहरण 9 : सर्वसमिका का उपयोग कर $(2x+3y)$ और $(2x-3y)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए?

हल : $(2x+3y) \times (2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2$ (सर्वसमिका III के उपयोग से)

$= 4x^2 - 9y^2$

उदाहरण 10 : निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

हल : (a) $(92)^2 - (8)^2$ (b) 107×93

(a) $(92)^2 - (8)^2 = (92+8)(92-8)$ (सर्वसमिका III के उपयोग से)

$= 100 \times 84 = 8400$

(b) $107 \times 93 = (100+7)(100-7)$ (सर्वसमिका III के उपयोग से)

$= (100)^2 - (7)^2$

$= 10000 - 49 = 9951$

उदाहरण 11 :

निम्नलिखित को ज्ञात करने के लिए $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ का उपयोग कीजिए:

(a) 501×502 (b) 96×103

हल: (a) $501 \times 502 = (500+1) \times (500+2)$

$= (500)^2 + (1+2) \times 500 + 1 \times 2$

$= 250000 + 3 \times 500 + 2$

$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(b) $96 \times 103 = (100-4) \times (100+3)$
$= (100)^2 + (-4+3) \times 100 + (-4) \times 3$
$= 10000 + (-1) \times 100 - 12$
$= 10000 - 100 - 12$
$= 10000 - 112$
$= 9888$

प्रश्नावली 6.3

(1) निम्नलिखित का गुणनफल प्राप्त करने के लिए उचित सर्वसमिका का उपयोग कीजिए:

(a) $(x + 5)(x+5)$ (b) $(2x+y)(2x + y)$ (c) $(7a-5)(7a - 5)$ (d) $(3x-2y)(3x - 2y)$

(e) $(6x+4)(6x - 4)$ (f) $(x-7b)(x+7b)$ (g) $(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})$ (h) $(3x-5)(3x + 5)$

(2) सर्वसमिका का उपयोग कर निम्नलिखित को सरल कीजिए:

(a) $(5a - 3b)^2$ (b) $(l+2m)^2$ (c) $(4x- 3y)^2$ (d) $(9a-7b)^2$ (e) $(2x+1)(2x- 1)$ (f) $(a- 2b)(a+2b)$

(g) $(x^2+ y^2)(x^2- y^2)$ (h) $(b- 7)^2$ (i) $(106)^2$ (j) $(91)^2$ (k) 297×303 (l) 1.05×9.5

(3) सरल कीजिए:

(a) $(7m - 8n)^2+(7m + 8n)^2$ (b) $(p-q)^2 + (p+q)^2 + 2pq$ (c) $(ab+ bc)^2 - 2ab^2c$

(d) $(4m+5n)^2 + (4m+5n)^2$

(4) दिखलाइए कि:

(a) $(3x + 7)^2- 84x = (3x - 7)^2$ (b) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ (c) $(x-y)(x+y) + (y- z)(y+z)+ (z-x)(z+x) = 0$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"