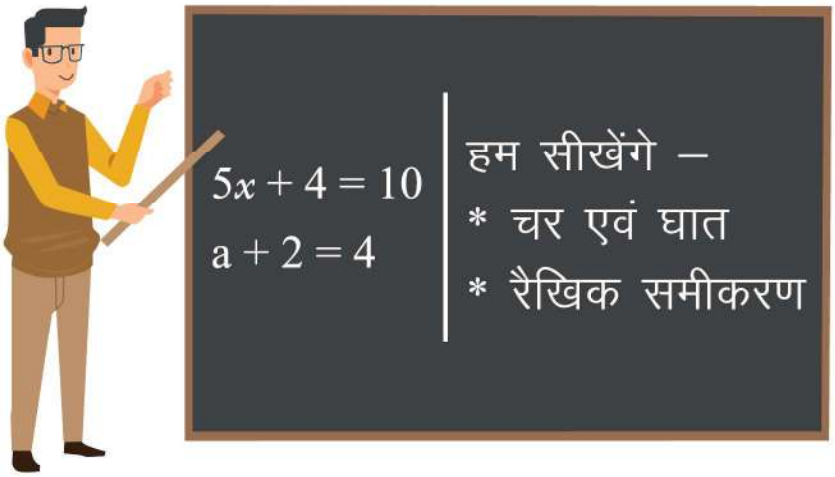
एक चर वाले रैखिक समीकरण
(Linear Equation in One Variable)

अध्याय
8



GFNZ6C

8.1 भूमिका:–

पिछली कक्षाओं में हमने बीजीय व्यंजकों और समीकरणों के बारे में सिखा है। बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं :– $3x, 5x+4, 2xy+3, x^2+y^2, xyz+1, x+y, x^3+1$

उपरोक्त उदाहरणों में से कुछ एक चर तथा कुछ एक से अधिक चर वाले व्यंजक हैं। इनमें से कुछ एक घातीय तथा एक से अधिक घात वाले व्यंजक हैं।

व्यंजक	चर की संख्या	घात
$7x$	1	1
x^2+4	1	2
$4x^3+1$	1	3
$x^4yz - 7y$	3	4

चर (Variable) – चर का अर्थ है विचरण अर्थात जिसका मान स्थिर नहीं होता है हमेशा बदलते रहता है। यह विभिन्न समीकरण के लिए विभिन्न मान देता है। इसे x,y,z,l,m,n आदि से दर्शाते हैं।

समीकरणों के उदाहरण हैं :– $x+10 = 20, p-3 = 7, 3x^2 = 21, 2n+3 = 7, 5y + \frac{4}{3} = \frac{5}{7}$

हम जानते हैं कि समीकरण में बराबर चिन्ह (=) का प्रयोग होता है जबकि व्यंजकों में नहीं होता हैं। । बीजीय व्यंजकों की तरह समीकरण भी एक चर वाले या एक से अधिक चर वाले हो सकते हैं। इनमें से कुछ एक या एक से अधिक घात वाले समीकरण होते हैं।

एक घात वाले समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।

रैखिक समीकरण : $x + 4 = 10$, $\frac{7x}{2} - 5 = 0$, $x + y = 6$

ये रैखिक समीकरण नहीं हैं : $x^2 + 5 = 0$, $x + y^2 = 5$, $z^4 - z^2 - 7 = 0$

इस अध्याय में हम एक चर तथा एक घातांक वाले समीकरणों का हल ज्ञात करना सीखेंगे।

(i) एक बीजीय समीकरण में बराबर चिह्न के दोनों ओर व्यंजक होते हैं। बराबर चिह्न के बाईं ओर के व्यंजक को बायाँ पक्ष (L.H.S) और दाईं ओर के व्यंजक को दायाँ पक्ष (R.H.S) कहते हैं।

$7y + 9 = 23$

यहाँ L.H.S $= 7y+9$
एवं R.H.S $= 23$

(ii) बाएँ पक्ष के व्यंजक का मान दाएँ पक्ष के व्यंजक के मान के सदैव बराबर होते हैं।

चर का वह मान जिससे दोनों पक्षों का मान बराबर हो, वह समीकरण का हल कहलाता है।

8.2 समीकरण को हल करने की विधि :

पहली विधि :– एक समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या (शून्य को छोड़कर) को जोड़ने, घटाने, गुणा या भाग करने से समीकरण के संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

एक सरल समीकरण तराजू के समान होता है। इसे तराजू की सहायता से समझा जा सकता है।

उदाहरण 1 : समीकरण $5x + 4 = 19$ को हल कीजिए :–

हल :

$5x+4 = 19$

दोनों ओर 4 घटाने पर,

$5x+4-4 = 19-4$

या, $5x = 15$

दोनों ओर 5 से भाग देने पर,

$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$

$$\therefore x = 3$$

अतः $x = 3$ समीकरण का हल है।

उदाहरण 1 :– हल कीजिए $6x + 10 = 22$

हल: $6x + 10 = 22$

दोनों ओर 10 घटाने पर,

$6x + 10 - 10 = 22 - 10$

$6x = 12$

दोनों ओर 6 से भाग देने पर,

$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$

$\therefore x = 2$; (अपेक्षित हल)

जाँच:– L.H.S. $= 6x + 10 = 6 \times 2 + 10 = 22 =$ (R.H.S) (सत्यापित)

उदाहरण 2: हल कीजिए: $15 + \frac{x}{2} = 29$

हल: $15 + \frac{x}{2} = 29$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 29 - 15$ (15 को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 14$

$\Rightarrow x = 14 \times 2$ (दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर)

$\therefore x = 28$ (अपेक्षित उत्तर)

जाँच: L.H.S. $= 15 + \frac{1}{2} \times 28 = 15 + 14 = 29 =$ R.H.S. (सत्यापित)

प्रश्नावली 8.1

(1) हल करें:–

(i) $x + 3 = 5$ (ii) $x + 7 = 12$ (iii) $y + 8 = 6$ (iv) $x - 2 = 6$ (v) $z - 4 = 8$

(vi) $3x = 18$ (vii) $4z = 24$ (viii) $\frac{x}{2} = 7$ (ix) $\frac{p}{7} = 24$ (x) $8 = q + 3$

(xi) $2x - 1 = 3$ (xii) $3t - 4 = 11$ (xiii) $2y + 3 = 9$ (xiv) $11 + 6p = 7$

(xv) $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$ (xvi) $x - \frac{3}{2} = \frac{7}{6}$ (xvii) $2x - \frac{1}{2} = 3$ (xviii) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

(xix) $\frac{x}{4} = \frac{7}{8}$ (xx) $3(x + 2) = 15$

(2) किसी संख्या के दुगुने में 8 जोड़ने पर 32 प्राप्त होता है, वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(3) किसी संख्या के एक तिहाई में $\frac{5}{2}$ घटाने पर $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है, वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(4) दो संख्याओं का योग 35 है। यदि एक संख्या दूसरी संख्या से 5 अधिक है तो दोनों संख्या ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(5) तीन लगातार पूर्णांकों का योग 51 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
(6) 6 के तीन लगातार गुणजों का योग 144 है। गुणजों को ज्ञात कीजिए।
(7) दो संख्याओं का अनुपात 2:5 है और उनका अंतर 21 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
(8) किसी कक्षा में बालक और बालिकाओं की संख्याओं का अनुपात 7:4 है। यदि बालकों की संख्या, बालिकाओं की संख्या से 18 अधिक है तो कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी है?
(9) रीमा और सीमा की वर्तमान आयु का अनुपात 5:7 है। 4 वर्ष बाद दोनों की आयु का योग 32 हो जाएगा तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
(10) रहीम के पिता जी की उम्र रहीम के आयु की छह गुनी है। यदि रहीम के पिता, रहीम से 35 वर्ष बड़े हैं तो दोनों की उम्र ज्ञात कीजिए।
(11) राहुल के पिता की वर्तमान आयु, राहुल के वर्तमान आयु की तिगुनी है। 5 वर्ष के बाद, दोनों की आयु का योग 58 वर्ष हो जाता है। राहुल के पिता की वर्तमान आयु क्या है?
(12) सायरा के पास ₹2 के सिक्कों की संख्या, ₹5 के सिक्कों की संख्या के तीन गनी है। यदि सायरा के पास कुल 60 सिक्के हैं तो उसके पास ₹2 और ₹5 के कितने सिक्के होंगे?
(13) जॉन के गुल्लक में ₹1, ₹2 और ₹5 के सिक्के हैं। उनकी संख्याएँ क्रमशः 5:3:2 के अनुपात में है। यदि गुल्लक में कुल ₹840 है तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
(14) एक आयताकार कमरे की लंबाई, उसकी चौड़ाई की दुगुनी है यदि आयत का परिमाप 48 मीटर है तो कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
(15) एक आयत की परिमाप 13 सेमी. तथा चौड़ाई $\frac{5}{2}$ सेमी. है।आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए।

8.3 समीकरण हल करना जिनके दोनों ही पक्षों में समान चर हो।

एक पक्ष में चर वाले समीकरण जैसेः $3x-4 = 2$, $16 = y+4$ आदि का मान ज्ञात करना हमने सीखा । अब हम $2x-3 = x+2$ समीकरण का हल करना सीखेंगे जिनके दोनों ही पक्ष में एक ही प्रकार के चर वाले व्यंजक हों।

उदाहरण 03 : हल कीजिएः $5x - 6 = 2x + 15$

हल : (पहली विधि)

$$5x - 6 = 2x + 15$$

$$5x - 6 + 6 = 2x + 15 + 6 \quad \text{(दोनों ओर 6 जोड़ने पर)}$$

$$\Rightarrow 5x = 2x + 21$$

$$5x - 2x = 2x + 21 - 2x \quad \text{(दोनों ओर 2x घटाने पर)}$$

$$\Rightarrow 3x = 21$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3} \quad \text{(दोनों ओर 3 से भाग देने पर)}$$

$$\therefore x = 7$$

दूसरी विधि $5x - 6 = 2x + 15$

$5x = 2x + 15 + 6$ (6 को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

या, $5x - 2x = 21$ ($2x$ को बाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

या, $3x = 21$

या, $x = \frac{21}{3}$ (3 को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

$\therefore x = 7$

प्रयास कीजिए : A

निम्न समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

(i) $3x = 2x + 18$ (ii) $2y = 12 - y$ (iii) $2x - 3 = x + 2$ (iv) $5x + 7 = 2x - 8$

8.4 समीकरण को सरल रूप में बदलना :

उदाहरण 4 : हल कीजिए $\frac{7x + 4}{5} + 1 = \frac{x - 8}{10}$

हल : दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर

$10\frac{(7x + 4)}{5} + 10 \times 1 = 10\frac{(x - 8)}{10}$

या, $2(7x + 4) + 10 = x - 8$

या, $14x + 8 + 10 = x - 8$ (कोष्ठक हटाने पर)

या, $14x - x + 18 = -8$

$13x = -8 - 18 \Rightarrow x = -\frac{26}{13} = -2$

> 10 से गुणा क्यों? क्योंकि 5 और 10 का ल०स० 10 है।

उदाहरण 5 : दो अंकों की संख्या का योग 8 है। यदि अंकों का क्रम बदल दें तो प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 18 अधिक हो जाएगी। दी गई सख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना दो अंकों की संख्या में इकाई का अंक a है।

यहाँ दोनों अंकों का योग 8 हैं।

अतः दहाई का अंक $= 8 - a$

$\therefore$ दो अंकों की संख्या $= 10(8 - a) + a$

$= 80 - 10a + a$

$= 80 - 9a$

$\therefore$ अंको को पलटने से प्राप्त संख्या $= 10(a) + (8 - a)$

$= 10a + 8 - a$

$= 9a + 8$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

प्रश्न से,

$80 - 9a + 18 = 8 + 9a$

$80 + 18 - 8 = 9a + 9a$

या, $90 = 18a$

$\therefore a = \frac{90}{18} = 5$

अतः इकांई का अक $= 5$ र्तथा दहांइ का अक $= 8 - 5 = 3$

अतः संख्या $= 35$

उदाहरण 6 : रमण की आयु हसन की आयु से तीन गुनी है। 10 वर्ष बाद उसकी आयु हसन से दोगुनी हो जाएगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना हसन की वर्तमान आयु x वर्ष है।

$\therefore$ रमण की वर्तमान आयु $= 3x$ वर्ष होगी।

10 वर्ष बाद ,

हसन की आयु $= (x + 10)$ वर्ष

तथा रमण की आयु $= (3x + 10)$ वर्ष होगी

प्रश्न से, $3x + 10 = 2(x + 10)$

या, $3x + 10 = 2x + 20$

या, $3x - 2x = 20 - 10$

$x = 10$

अतः हसन की वर्तमान आयु $= 10$ वर्ष एवं रमण की वर्तमान आयु $= 30$ वर्ष होगी।

प्रश्नावली 8.2

(1) हल करें:–

(i) $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ (iii) $x - \frac{8x}{3} + \frac{5x}{2} = 15$

(iv) $\frac{2x-1}{3} - \frac{6x-2}{5} = \frac{1}{3}$ (v) $\frac{3l-2}{4} - \frac{2l+3}{3} = \frac{2}{3} - l$ (vi) $\frac{2n-3}{2} - \frac{3n-8}{4} = \frac{n+1}{3}$

(2) हल कीजिए –

(i) $5(y-3) = 3(2y+1)$ (ii) $15(x-4) - 2(x-9) + 5(x+6) = 0$

(iii) $4(2z-3)+3 = 2(z+3)-3(z+1)$ (iv) $0.5x-(0.8- 0.2x) = 0.2-0.3x$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(3) मंगल एक संख्या सोचता है। उसमें 5 घटाकर परिणाम को 8 से गुणा करता है। अब जो परिणाम मिलता है, वह सोची गई संख्या की तिगुनी है। वह सोची गई संख्या ज्ञात कीजिए।

(4) दो अंकों वाली एक संख्या का दहाई अंक, ईकाई अंक की तीन गुनी है। इस संख्या में, इसके अंकों को बदलकर प्राप्त संख्या को जोड़ने पर 88 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

(5) दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का येाग 9 है। इस संख्या के अंकों के स्थान बदलकर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 27 अधिक है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।

(6) मोना की माँ की आयु, मोना की आयु की तिगुनी है। 12 वर्ष के बाद मोना की माँ की आयु, मोना की आयु की दुगनी हो जाएगी। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।

(7) अभय के पिता की आयु, अभय की आयु की तिगुनी है। 10 वर्ष पहले अभय के पिता की आयु, अभय की आयु के पाँच गुनी थी। दोनों की आयु ज्ञात कीजिए।

(8) विद्यालय से कुछ बच्चे पिकनिक मनाने गए हुए थे। उनमें से आधे बच्चे खेल रहे थे, एक तिहाई घुम रहे थे तथा शेष 14 बच्चे खाना बना रहे थे। पिकनिक के लिए कितने बच्चे गए थे?

(9) आयताकार विद्यालय परिसर की लंबाई और चौड़ाई का अनुपात 5:3 है। विद्यालय परिसर के चारों ओर बाँस का घेरा लगाने में ₹15 प्रति मीटर की दर से कुल ₹ 4800 खर्च हुए। विद्यालय परिसर की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

10) संख्या 40 को दो भागों में इस प्रकार बाँटें कि पहली संख्या का $\frac{1}{5}$ भाग दूसरी संख्या के $\frac{1}{3}$ भाग के बराबर हो।

8.5 रैखिक रूप में बदल जाने वाले समीकरण

उदाहरण 7 : हल कीजिए $\frac{5x-7}{4x+1} = \frac{6}{5}$

हल : ध्यान दीजिए यह समीकरण रैखिक नहीं है क्योंकि इसके बाएँ पक्ष में व्यंजक रैखिक नहीं है। इस समीकरण को रैखिक में बदलने के लिए वज्र–गुणन विधि का उपयोग करेंगे।

$$\frac{5x-7}{4x+1} = \frac{6}{5}$$

या, $5(5x - 7) = 6\ (4x + 1)$

या, $25x - 35 = 24x + 6$

या, $25x - 24x = 6 + 35$

$\therefore\ x = 41$

उदाहरण 8 : किसी भिन्न का अंश, हर से 5 अधिक है। यदि अंश में 1 जोड़ दिया जाए तो हमें $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है तो भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल : माना हर x है तो भिन्न का अंश $x + 5$ होगा।

$\therefore$ भिन्न $= \frac{x+5}{x}$

प्रश्न से, $\frac{x+5+1}{x} = \frac{3}{2}$

या, $\frac{x+6}{x} = \frac{3}{2}$

या, $2(x + 6) = 3x$

या, $2x + 12 = 3x$

या, $12 = 3x - 2x$

$\therefore x = 12$

अतः भिन्न $= \frac{12+5}{12} = \frac{17}{12}$

प्रश्नावली 8.3

1. सरल कीजिए –

(i) $\frac{5x-3}{2x} = 2$ (ii) $\frac{y}{y+15} = \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{8z}{7-3z} = 5$

(iv) $\frac{2x+5}{3x+4} = 3$ (v) $\frac{3y+4}{2-6y} = \frac{-2}{5}$

2. सरल कीजिए –

(i) $5(x + 4) = 9(4x - 5)$ (ii) $7(2y - 5) + 2(5y + 1) + 9(y + 8) = 0$

3. सोनू और मोनू की वर्तमान आयु का अनुपात 4:5 है। 5 वर्ष बाद उनके आयु का अनुपात 5:6 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

4. एक परिमेय संख्या का हर, अंश से 4 अधिक है। यदि अंश और हर प्रत्येक में एक जोड़ दिया जाए तो $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है। वही परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

5. एक परिमेय संख्या का अंश, उसके हर से 8 अधिक है। यदि अंश में 17 जोड़ दिया जाए तथा हर में 1 घटा दिया जाए तो हमें $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"