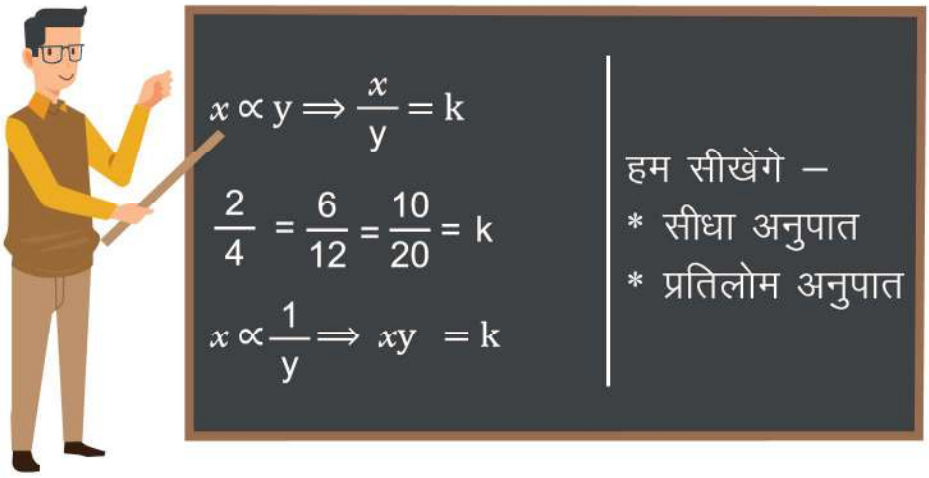
सीधा और प्रतिलोम समानुपात
(Direct and Inverse Proportion)

अध्याय
10



GG7R9H

10.1 भूमिका :

पाँच बच्चों में प्रत्येक को दो–दो टॉफी देना है। हमें दस टॉफी की आवश्यकता होगी। यदि बच्चों की संख्या बढ़ाएँगे तो टॉफियों की संख्या भी बढ़ानी होगी। उदाहरणार्थ –

बच्चों की संख्या	टॉफियों की संख्या
5	10
6	12
7	14
8	16

"बच्चों की संख्या बढ़ रही है तो टॉफियों की संख्या भी बढ़ रही है।

दैनिक जीवन में ऐसे अनेक स्थितियाँ देखने को मिलते हैं जब एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन होती है। इस प्रकार के परिवर्तन को **विचरण** (Variation) कहते हैं। जैसे –

(i) वनभोज में बच्चों की संख्या बढ़ेंगे तो भोजन की मात्रा भी बढ़ाना होगा।

(ii) बैंक में जितनी अधिक धनराशि जमा करेंगे तो उतना ही अधिक ब्याज प्राप्त होगा।

(iii) चाल में वृद्धि होगी तो दूरी तय करने में कम समय लगेगा।

(iv) अधिक व्यक्ति कार्य पर लगाए जाएँगे तो कार्य पूरा होने में कम समय लगेगा।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

10.2 सीधा समानुपात (Direct Proportion) :

यदि 1 कलम का मूल्य ₹ 10 है, तो 2 कलम का मूल्य क्या होगा? यह ₹ 20 है।
इसी प्रकार, हम 3 कलम, 4 कलम या 8 कलम का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

पेन की संख्या	मूल्य (₹)
2	20
4	40
6	60
8	80

ध्यान दीजिए कि जैसे–जैसे कलम की संख्या बढ़ती है, वैसे–वैसे उसके मूल्य में भी इस प्रकार से वृद्धि होती है कि इनका अनुपात (ratio) अचर रहता है।

$$\frac{\text{कलमों की संख्या}}{\text{मूल्य}} = \text{अनुपात}$$

$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$, $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$, $\frac{8}{80} = \frac{1}{10}$

अतः $\frac{x}{y} = k \therefore x = ky$ हो, तो हम कहते हैं कि x तथा y में सीधा या प्रत्यक्ष समानुपात (अनुक्रमानुपाती) का संबंध है।
जहाँ k एक स्थिरांक है।

यदि दो राशियाँ इस प्रकार संबंधित हों कि एक राशि का मान बढ़ने या घटाने से दूसरे राशि का मान उसी अनुपात में बढ़ता या घटता है तो उन दो राशियों को अनुक्रमानुपाती कहते हैं।

स्मरण रखें – जब x और y प्रत्यक्ष रूप से विचरण करता है तब हम $x \propto y$ लिखते हैं।

अन्य उदाहरण – 3.5cm, 7cm, 10.5cm, 14cm त्रिज्या का वृत्त खींचकर प्रत्येक स्थिति में इसकी परिधि निकालते हैं।

त्रिज्या (r) (cm में)	परिधि (c) (cm में)
$r_1 = 3.5\text{cm}$	$c_1 = 2\ \pi\ r_1 = 2\times\frac{22}{7}\times 3.5 = 22\text{cm}$
$r_2 = 7\text{cm}$	$c_2 = 2\ \pi\ r_2 = 2\times\frac{22}{7}\times 7 = 44\text{cm}$
$r_3 = 10.5\text{cm}$	$c_3 = 2\ \pi\ r_3 = 2\times\frac{22}{7}\times 10.5 = 66\text{cm}$

स्मरण रखें – जब x और y प्रत्यक्ष रूप से विचरण करता है तब हम $x \propto y$ लिखते हैं।

अन्य उदाहरण –

3.5cm, 7cm, 10.5cm, 14cm त्रिज्या का वृत्त खींचकर प्रत्येक स्थिति में इसकी परिधि निकालते हैं।

त्रिज्या (r) (cm में)	परिधि (c) (cm में)
$r_1 = 3.5cm$	$c_1 = 2\ \pi\ r_1 = 2\times\frac{22}{7}\times3.5 = 22cm$
$r_2 = 7cm$	$c_2 = 2\ \pi\ r_2 = 2\times\frac{22}{7}\times7 = 44cm$
$r_3 = 10.5cm$	$c_3 = 2\ \pi\ r_3 = 2\times\frac{22}{7}\times10.5 = 66cm$

तब, $\frac{r_1}{c_1} = \frac{3.5}{22} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$, $\frac{r_2}{c_2} = \frac{7}{44}$

$\frac{r_3}{c_3} = \frac{10.5}{66} = \frac{105}{660} = \frac{7}{44}$

अतः प्रत्येक स्थिति में $\frac{r}{c} = k$ (स्थिर है)

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या x तथा y अनुक्रमानुपाती हैं–

(i)

x	3	5	7	9	12
y	6	10	14	18	24

(ii)

x	4	7	12	15	16
y	12	21	36	45	48

(iii)

x	3	4	7	8	9
y	15	20	28	32	45

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

उदाहरण 1:– यदि 5 किग्रा टमाटर का मूल्य ₹ 75 है तो 2 किग्रा, 8 किग्रा, 11 किग्रा, तथा 15 किग्रा टमाटर के मूल्यों के लिए एक सारणी बनाइए।

हल:– माना टमाटर का वजन x किग्रा है तथा उसका मूल्य (₹ में) y है।

टमाटर का वजन (x) kg में	2	5	8	11	15
मूल्य (y) ₹ में	y_1	75	y_2	y_3	y_4

यदि टमाटर के वजन में वृद्धि होती है तो उसके मूल्य में भी उसी अनुपात में वृद्धि होगी। अतः यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।

तब, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$, प्रकार के संबंध का उपयोग करेंगे।

(i) $\frac{2}{y_1} = \frac{5}{75}$

$y_1 \times 5 = 2 \times 75$

$y_1 = \frac{2 \times 75}{5} = ₹30$

(ii) $\frac{5}{75} = \frac{8}{y_2}$

$5 \times y_2 = 8 \times 75$

$y_2 = \frac{8 \times 75}{5} = ₹120$

(iii) $\frac{5}{75} = \frac{11}{y_3}$

$y_3 \times 5 = 11 \times 75$

$y_3 = \frac{11 \times 75}{5} = ₹165$

(iv) $\frac{5}{75} = \frac{15}{y_4}$

$y_4 \times 5 = 75 \times 15$

$y_4 = \frac{75 \times 15}{5} = ₹225$

उदाहरण 2:– 10 मीटर ऊँचाई वाले एक झंडे के खंभे की छाया 8 मीटर है। समान स्थितियों में उस बिजली के खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 12 मीटर है।

हल:– माना कि बिजली के खंभे की ऊँचाई x_2 मी है।

वस्तु की ऊँचाई (मी0 में)(x)	10	x_2
छाया की लंबाई (मी0 में) (y)	8	12

चूँकि वस्तु की ऊँचाई जितनी अधिक होगी, उसकी छाया की लंबाई उतनी ही अधिक होगी। अतः यह प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

अतः $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ का उपयोग करने पर।

$$\frac{10}{8} = \frac{x_2}{12}$$

$$x_2 \times 8 = 10 \times 12$$

$$x_2 = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

अतः बिजली के खंभे की ऊँचाई = 15 मीटर है।

प्रश्नावली 10.1

(1) जाँच कीजिए की निम्नलिखित सारणी अनुक्रमानुपाती है या नहीं

(i)

x	2	3	5	8	10
y	6	9	15	24	30

(ii)

x	4	7	18	10	11
y	8	14	16	20	22

(iii)

x	1	3	5	6
y	5	15	20	36

(2) यदि x तथा y अनुक्रमानुपाती है तो निम्न सारणी द्वारा x_1, x_2 तथा y_1 का मान ज्ञात कीजिए।

x	3	x_1	x_2	9
y	12	20	28	y_1

(3) यदि ट्रक 34 लीटर डीजल में 272 किमी की दूरी तय करती है तो ट्रक 24 लीटर डीजल में कितनी दूरी तय करेगी?

(4) यदि 16 पेंसिल का मूल्य ₹64 है तो 144 रु में कितने पेंसिल खरीदे जाएँगे?

(5) यदि 8 किग्रा चीनी का मूल्य ₹240 है तो ₹330 में कितनी चीनी खरीदी जाएगी?

(6) एक कार की औसत चाल 40 किमी प्रति घंटा है। कार 1 घंटा 15 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी?

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(7) सीता आधा घंटा में 250 शब्द टाइप करती है। 500 शब्दों को टाइप करने में उसे कितना समय लगेगा?

(8) मोइन के पास एक सड़क का मानचित्र है। इसके पैमाने में 1सेमी की दूरी 14 किमी की वास्तविक दूरी निरूपित करती है। ज्ञात कीजिए 126 किमी की दूरी के लिए कितने सेमी का पैमाना प्रयुक्त होगा?

(9) एक दर्जन केले का मूल्य ₹30 है। ₹360 में कितने दर्जन केले मिलेंगे?

(10) एक नल 420 बोतल पानी 4 घंटे में भरती है। 6 घंटा में कितने बोतल पानी भरे जाएँगे?

10.3 प्रतिलोम अनुपात (Inverse Proportion)

दो राशियाँ इस प्रकार बदलते हैं कि यदि एक राशि में वृद्धि होती है तो दूसरी राशि में कमी होती है, तथा एक में कमी होने पर दूसरी में वृद्धि होती है। जैसे – जब किसी काम पूरा करने के लिए पर अधिक व्यक्ति लगाए जाते हैं तो वह काम कम समय में पूरा हो जाता है। इसी प्रकार यदि चाल बढ़ा दी जाती है तो एक निश्चित दूरी तय करने में कम समय लगता है।

आदमी की संख्या	5	10	15	20	25
कार्य समाप्त होने के दिन	30	15	10	7.5	6

किसी कार्य को पूर्ण करने में यदि आदमी की संख्या में वृद्धि होती है तो कार्य समाप्ति का दिन घट जाता है।

एक आदमी 30 किमी की दूरी पैदल, दौड़कर, साइकिल और मोटर साइकिल द्वारा तय करने में लगा समय निम्न है–

साधन	पैदल	दौड़कर	साइकिल	मोटर साइकिल
चाल (किमी प्रति घंटा)	2	3	5	10
लिया गया समय (घंटा में)	15	10	6	3

2 किमी प्रति घंटा की चाल से पैदल चलने पर दूरी 15 घंटा में पूरी कर ली जाती है। 3 किमी प्रति घंटा की चाल दौड़ता से चलने पर यह दूरी 10 घंटा में पूरी होती है। अतः चाल के बढ़ने पर निश्चित दूरी को तय करने का समय घटता है।

यहाँ चाल 2 किमी प्रति घंटा से बढ़कर 3 किमी प्रति घंटा होता है तो इसकी वृद्धि का अनुपात 2 : 3 है जबकि इसके संगत लिये गए समय का अनुपात 15 घंटा से घटकर 10 घंटा है जिसका अनुपात 15 : 10 अर्थात 3 : 2 है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

इस प्रकार, दोनों अनुपात 2 : 3 तथा 3 : 2 परस्पर प्रतिलोम हैं।

$2 \times 15 = 3 \times 10 = 30$

$3 \times 10 = 5 \times 6 = 30$

$5 \times 6 = 10 \times 3 = 30$

यदि चाल को x तथा समय को y से निरूपित किया जाए तो

$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = x_4 y_4 = k$ (स्थिर)

अतः जब दो राशियाँ x तथा y प्रतिलोम अनुपात में होते हैं तो उन्हें $x \propto \frac{1}{y}$ लिखा जाता है।
अनुपात की बराबर में बदलने पर, $x = \frac{k}{y}$ जहाँ k एक स्थिरांक है।

$\Rightarrow xy = k$

*** प्रतिलोम अनुपात को व्युत्क्रमानुपात भी कहते है।**

प्रयास कीजिए : C

निम्न सारणियो मे कौन–कौन से चरो के युग्म प्रतिलोम अनुपात मे है?

(i)

x	13	11	7	5	3
y	4	6	10	12	15

(ii)

x	15	12	10	6	3
y	4	5	6	10	20

उदाहरण 6 :– यदि x तथा y प्रतिलोम अनुपात मे है तो निम्न सारणी द्वारा x_1, x_2, y_1 तथा y_2 का मान ज्ञात कीजिए।

x	12	16	x_1	x_2	48
y	8	y_1	4	16	y_2

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

हलः— चूँकि x तथा y प्रतिलोम अनुपात में हैं।

(i) $12 \times 8 = 16 \times y_1$

$y_1 = \frac{12 \times 8}{16} = 6$

(ii) $12 \times 8 = x_1 \times 4$

$x_1 = \frac{12 \times 8}{4} = 24$

(iii) $12 \times 8 = x_2 \times 16$

$x_2 = \frac{12 \times 8}{16} = 6$

(iv) $12 \times 8 = 48 \times y_2$

$y_2 = \frac{12 \times 8}{48} = 2$

उदाहरण 7:— 45 आदमी किसी कार्य को 49 दिन में समाप्त करते हैं तो 35 आदमी उसी कार्य को कितने दिन में समाप्त करेंगे?

हलः—

आदमी की संख्या	45	35
दिनों की संख्या	49	x

माना कि 35 आदमी किसी कार्य को x दिन में पूरा करते हैं।
यदि आदमी की संख्या घटेगा तो कार्य ज्यादा दिन में समाप्त होंगे।

$45 \times 49 = 35 \times x$

$x = \frac{45 \times 49}{35} = 63$

अतः 35 आदमी कार्य को 63 दिन में समाप्त करेंगे।

उदाहरण 8:— यदि 14 मजदूर एक दीवार को 45 घंटा में बनाते हैं तो उसी दीवार को 35 घंटा में बनाने के लिए कितने मजदूर की आवश्यकता होगी?

हलः—

मजदूर की संख्या	14	x
घंटों की संख्या	45	35

चूँकि, समय बढ़ने पर मजदूर कम लगेंगे।

$14 \times 45 = x \times 35$

$x = \frac{14 \times 45}{35} = 18$

अतः मजदूरों की संख्या =18

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

उदाहरण 9:– 6 नल एक हौज को 12 घंटों में भरते हैं तो 9 नल द्वारा हौज कितने घंटों में भरी जाएगी ?

हल:–

नल की संख्या	6	9
समय (घंटा में)	12	x

चूँकि, नलों की संख्या बढ़ेंगे तो हौज को भरने में कम समय लगेगा।

$$6 \times 12 = 9 \times x$$

$$x = \frac{6 \times 12}{9} = 8$$

अतः घंटों की संख्या = 8

प्रश्नावली 10.2

(1) निम्न सारणी में दबाव तथा आयतन के आँकड़े दिए गए हैं। दवाब और आयतन एक–दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होते है

दिए गए सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए।

दबाव (x)	50	60	x_1	100	x_2
आयतन (y)	12	y_1	8	y_2	4

(2) निम्न सारणी में वृक्ष की लं०(x) तथा उसकी छाया की लं०(y) में व्युत्क्रमानुपाती का संबंध है। रिक्त स्थानों को भरिए।

वृक्ष की लं०(x)	40	20	x_1	10	x_2
छाया की लं०(y)	y_1	15	5	y_2	40

(3) एक कार 40 किमी प्रति घंटा की चाल से एक निश्चित दूरी तय करने में 3 घंटा समय लगाती है। यदि कार की चाल 60 किमी प्रति घंटा हो तो उसी दूरी को तय करने में लगा समय निकालए।

(4) एक बैलगाड़ी 12 किमी प्रति घंटा की चाल से चलकर एक निश्चित दूरी 45 मिनट में पूरा करता है। 20 मिनट में उसी दूरी को पूरा करने के लिए किस चाल से चलना होगा?

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(5) 20 पंप एक हौज को 12 घंटे में खाली करते हैं। यदि हौज को 4 घंटे में खाली कराना है तो कितने पंपों की आवश्यकता होगी?

(6) 150 व्यक्ति एक भवन का निर्माण 45 दिन में करते हैं। उसी भवन को 18 दिन में बनाने के लिए कितने व्यक्ति की आवश्यकता होगी?

(7) खाने की वस्तुओं का भण्डार 250 व्यक्तियों के लिए 6 सप्ताह तक पर्याप्त है। वही भण्डार 150 व्यक्तियों के लिए कितने दिनों तक पर्याप्त होगा?

(8) सोमी 8 किमी प्रति घंटा की चाल से स्कूल जाती है। वह 20 मिनट में स्कूल पहुँचती है। यदि वह 16 मिनट में स्कूल पहुँचना चाहे तो उसे किस चाल से चलना होगा?

(9) एक ठेकेदार एक पंचायत भवन 8 महीना में बनाने का ठेका लिया। ठेकेदार के पास 210 मजदूर थे। उससे 6 महीना में ही काम समाप्त करने के लिए कहा गया तो उसे कितने और मजदूर काम पर रखने होंगे?

(10) 45 व्यक्ति किसी काम को 13 दिन में करते हैं। उसी काम को 39 व्यक्ति कितने दिन में समाप्त करेंगे?

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"