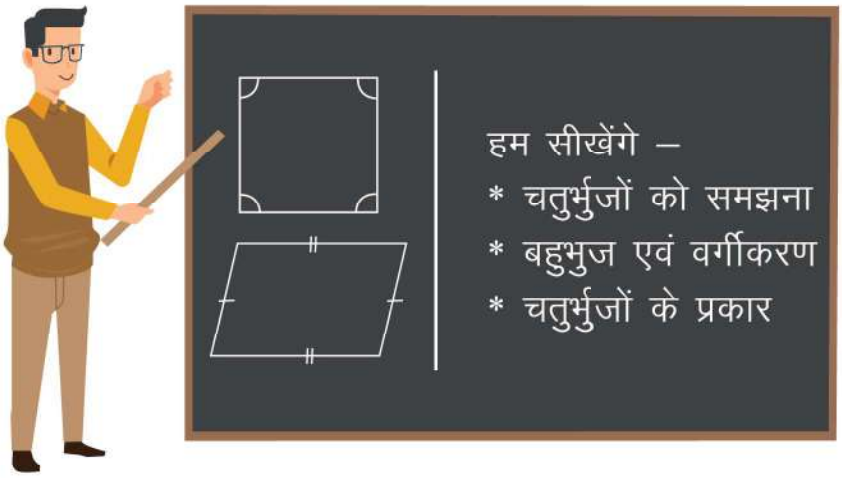
चतुर्भुजों को समझना
(Understanding of Quadrilaterals)

अध्याय
11

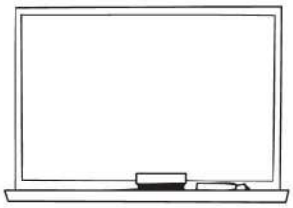


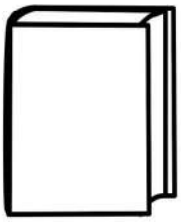
GSKZQ7

11.1 चतुर्भुजों को समझना :–

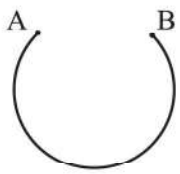
दैनिक जीवन में हम समतल के प्रतिरूप के रूप में अपने आस–पास में बहुत सारी वस्तुओं के सतह से परिचित हैं। मेज की ऊपरी सतह, कागज, श्यामपट्ट आदि समतल के उदाहरण हैं।


(1)

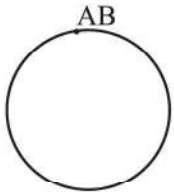

(2)


(3)

एक कागज पर एक बिंदु A से शुरू कर पेन्सिल को बिना हटाए दूसरे बिंदु B तक मिलाते हैं तो हम निम्न प्रकार के समतलीय वक्र (Curve) प्राप्त करते हैं।



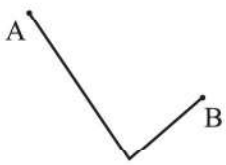
(1)



(2)



(3)



(4)



(5) (6) (7) (8)

हम देखते हैं कि –

आकृति (1), (4) एवं (8) खुली सरल वक्र है।

आकृति (2) एवं (3) सरल बंद वक्र है।

आकृति (5) बंद वक्र जो सरल नहीं है।

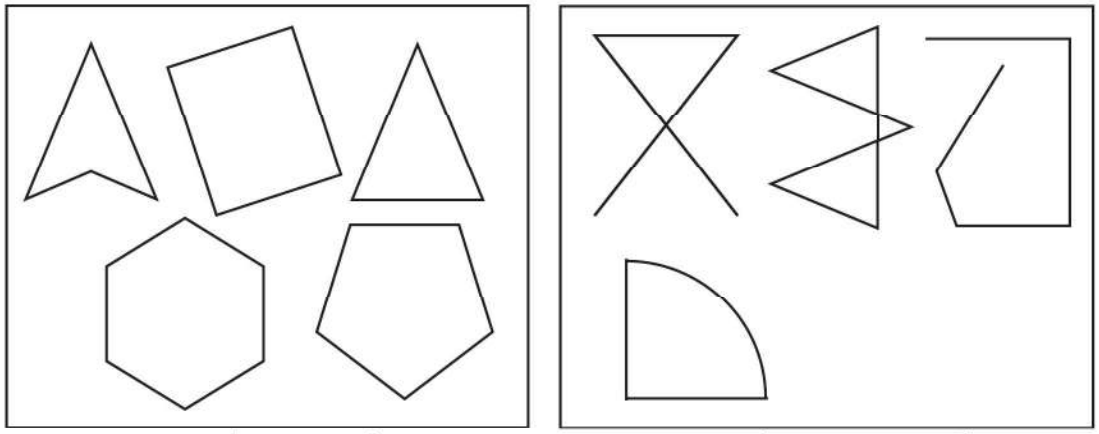
आकृति (6) एवं (7) सरल वक्र नहीं है।

प्रयास कीजिए : A

चार्ट पेपर पर पेन्सिल की सहायता से सरल वक्र, सरल बंद वक्र, खुली वक्र, बंद वक्र जो सरल नहीं हो, तथा जो सरल वक्र नहीं हो आदि की आकृति बनाइए और अपने दोस्तों से चर्चा कीजिए।

11.2 बहुभुज

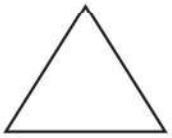
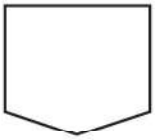
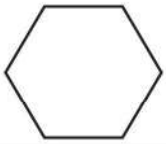
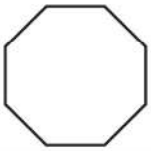
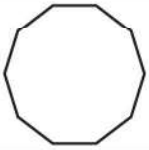
केवल रेखाखंडों से बना सरल बंद वक्र बहुभुज कहलाता है।



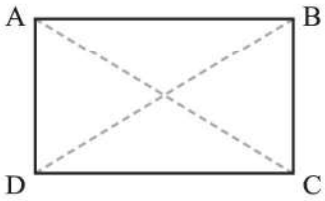
वक्र जो बहुभुज हैं वक्र जो बहुभुज नहीं हैं

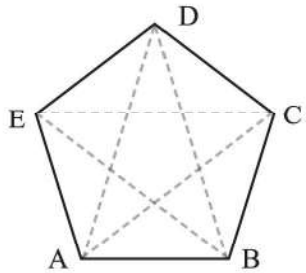
11.2.1 बहुभुजों का वर्गीकरण

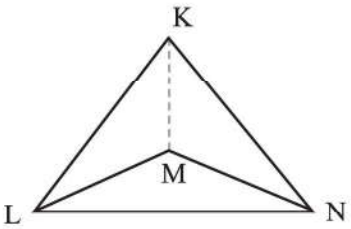
हम बहुभुजों का वर्गीकरण उनकी भुजाओं (या शीर्षों) के अनुसार करते हैं।

भुजाओं या शीर्षों की संख्या	वर्गीकरण	आकृति
3	त्रिभुज Triangle	
4	चतुर्भुज Quadrilateral	
5	पंचभुज Pentagon	
6	षट्भुज Hexagon	
7	सप्तभुज Heptagon	
8	अष्टभुज Octagon	
9	नवभुज Nonagon	
10	दसभुज Decagon	
. . .	. . .	. . .
n	n - भुज	

11.2.2 विकर्ण







किसी बहुभुज (Polygon) का विकर्ण उसके किन्हीं दो शीर्षों (आसन्न शीर्षों को छोड़कर) को जोड़ने से प्राप्त रेखाखंड होता है।

ऊपर दी गई आकृतियों में AC, BD, BE, AD,EC आदि विकर्ण हैं।

*** विकर्णों की संख्या** $= \frac{n(n-3)}{2}$ **, जहाँ n = भुजाओं की संख्या**



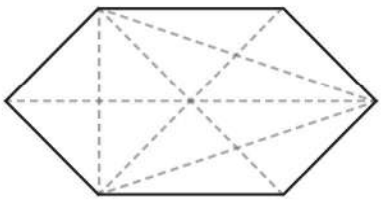


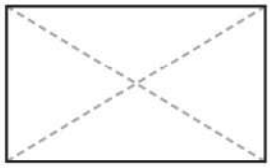
आकृति में एक बंद छायांकित वक्र में अभ्यंतर (Interior) और एक बर्हिभाग (Exterior) दिखाया गया है। हम ये भी जानते हैं कि अभ्यंतर की एक परिसीमा होती है जबकि बहिर्भाग की परिसीमा असीमित होती है। परिसीमा के द्वारा घेरे गए छायांकित अंदर के भाग को अभ्यंतर भाग तथा परिसीमा के बाहर के भाग को बहिर्भाग कहते है।

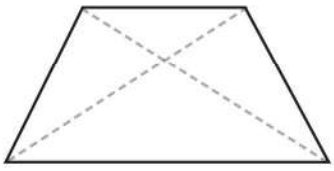
11.2.3 उत्तल और अवतल बहुभुज (Convex and Concave Polygon)

उत्तल बहुभुज (Convex Polygon)

जिस बहुभुज के सभी विकर्ण पूरी तरह बहुभुज के अन्तः भाग में अवस्थित हो उन्हें उत्तल बहुभुज कहा जाता है।



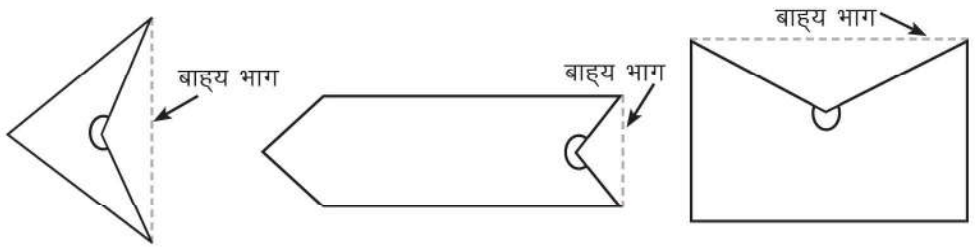




*** प्रत्येक का अंतः कोण** $< 180^0$

अवतल बहुभुज (Concave Polygon)

जिस बहुभुज के एक भी विकर्ण बहुभुज के बर्हिभाग में हो, तो उसे अवतल बहुभुज कहा जाता है।



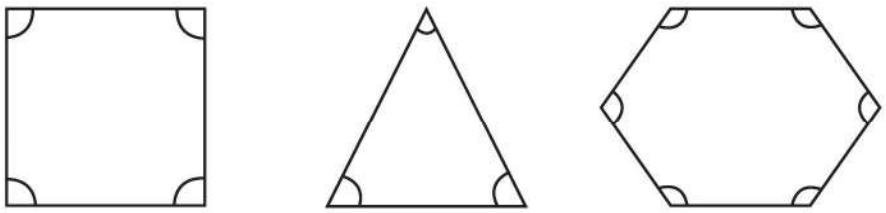
स्पष्ट रूप से, एक उत्तल बहुभुज के विकर्णों का कोई भी भाग उसके बर्हिभाग में नहीं होता है, जबकि अवतल बहुभुज में ऐसा होता है।

*** कम से कम एक अंतः कोण > 180^0**

11.2.4 सम और विषम बहुभुज (Regular and Irregular Polygon) :–

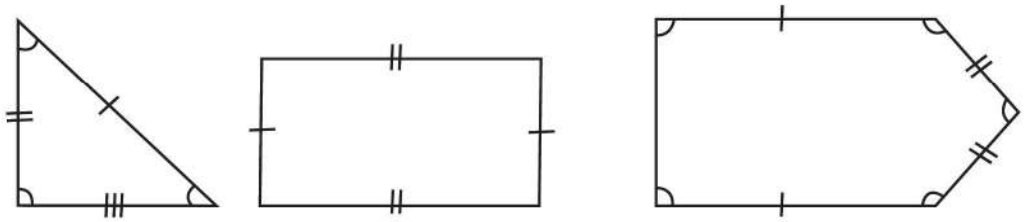
सम बहुभुज :– जिस बहुभुज की सभी भुजाएँ एवं सभी कोण बराबर होते हैं।

उदाहरणः– वर्ग, समबाहु त्रिभुज आदि।



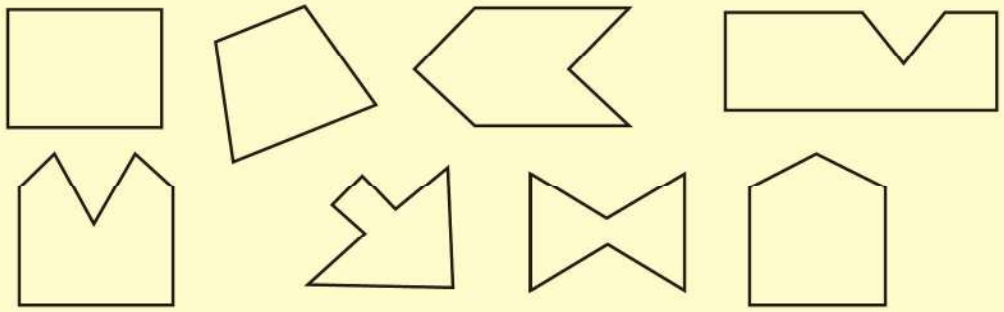
विषम बहुभुज :– जिस बहुभुज की सभी भुजाएँ आपस में बराबर न हों, विषम बहुभुज कहलाते हैं।

उदाहरणः– आयत, समकोण त्रिभुज आदि।

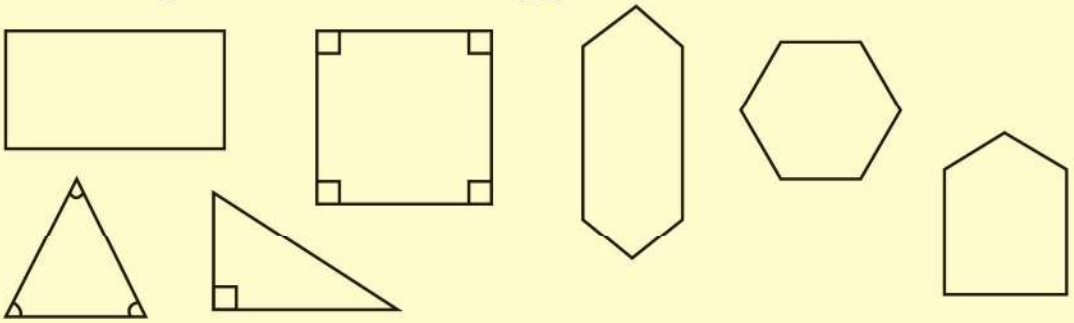


प्रयास कीजिए : B

(i) इन आकृतियों में उत्तल एवं अवतल बहुभुज ज्ञात कीजिए।



(ii) इन आकृति में सम एवं विषम बहुभुज ज्ञात कीजिए।

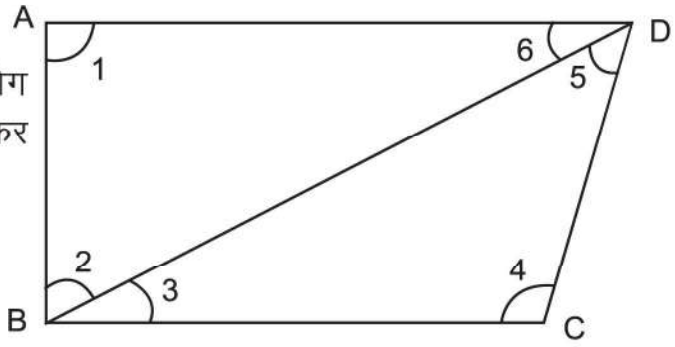


11.3 बहुभुज के अंतःकोणों एवं बाह्यकोणों का गुणधर्म :–

पिछली कक्षाओं में हमलोगों ने त्रिभुज के अंतःकोणों के योग का गुणधर्म पढ़ा था। इसके अनुसार त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है। इसी प्रकार हमलोग चतुर्भुज, पंचभुज आदि के गुणधर्म ज्ञात करेंगे।

अंतःकोणों का गुणधर्म :–

1. किसी भी चतुर्भुज ABCD में कोणों का योग ज्ञात करना हो तो सर्वप्रथम एक विकर्ण खींचकर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँट देंगे।



इस तरह,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 180^0$

$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^0$

दोनों त्रिभुजों का योग करने पर

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^0 + 180^0$

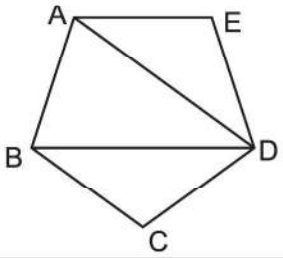
$\angle 1 + (\angle 2 + \angle 3) + \angle 4 + (\angle 5 + \angle 6) = 360^0$

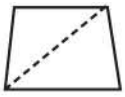
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

इस तरह चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 है।

चतुर्भुज को 2 त्रिभुज में बाँटा गया है। अतः चतुर्भुज के अंतःकोणों का योग=$2\times180^0=360^0$

2. इस पंचभुज में 2 विकर्णों के द्वारा 3 त्रिभुज बनाए जा सकते हैं। अतः पंचभुज के अंतःकोणों का योग = $3\times180^0 = 540^0$ होगा।



आकार						
भुजा	3	4	5	6	7	8
अंतःकोणों का योगफल	180^0	2×180^0 $=360^0$	3×180^0 = 540^0	4×180^0 $=720^0$	5×180^0 $=900^0$	6×180^0 = 1080^0

बहुभुज के बाह्य कोणों का गुणधर्म :–

किसी बहुभुज की एक भुजा को आगे की ओर बढ़ाने से बाह्यकोण बनता है। त्रिभुज के बाह्य कोणों का योग 360^0 होता है।

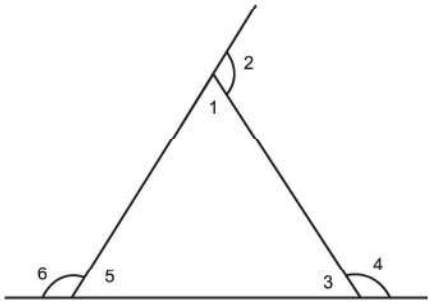
स्मरण करें तो तथ्य ज्ञात होगा कि

(रैखिक युग्म अभिगृहित)

$\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$

$\angle 5 + \angle 6 = 180^0$



योग करने पर

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^0\times3 = 540^0$

$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = 180^0$ (त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180^0 होता है)

$\therefore\ \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 = 540^0 - 180^0 = 360^0$

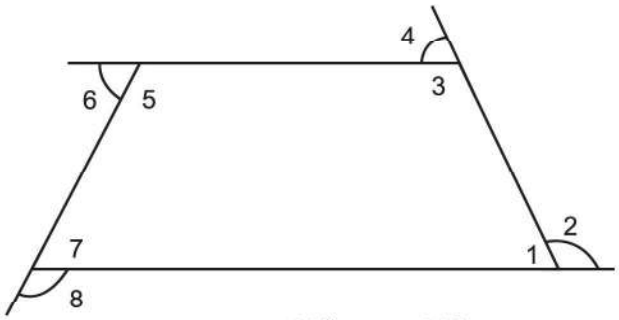
इसी तरह, चतुर्भुजों में देखा जा सकता है कि जितनी भुजाएँ होंगी उतने ही बाह्य कोण होंगे।

$\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$

$\angle 5 + \angle 6 = 180^0$

$\angle 7 + \angle 8 = 180^0$



हम जानते हैं कि

$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 = 360^0$

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 180^0 \times 4 = 720^0$

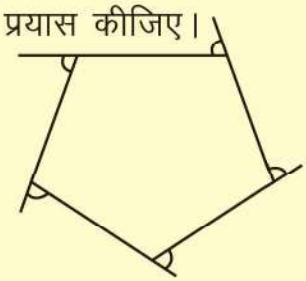
$\therefore \quad \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 + \angle 8 = 720^0 - 360^0 = 360^0$

अतः हम देखते हैं कि चतुर्भुज के सभी बाह्यकोणों का योग 360^0 होता है।

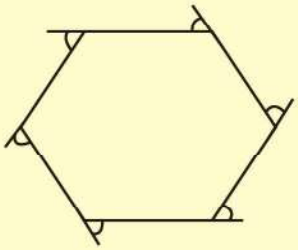
एक बहुभुज की भुजाएँ जितनी भी हो उसके बाह्यकोणों का योग 360^0 ही होगा।

प्रयास कीजिए : C

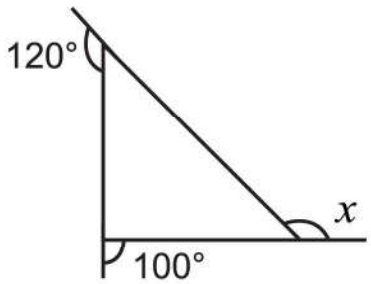
1. पंचभुज के बाह्यकोणों का योग मालूम करने का प्रयास कीजिए।



2. षट्भुज के बाह्यकोणों का योग प्राप्त कीजिए।



उदाहरण 1 : दिए गए त्रिभुज में x का मान ज्ञात कीजिए।



हलः– त्रिभुज में,

$\angle 1 + \angle 2 + x = 360^0$

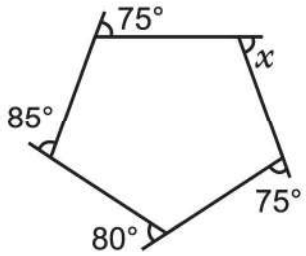
या, $120^0 + 110^0 + x = 360^0$

या, $230^0 + x = 360^0$

$\therefore x = 360^0 - 230^0 = 130^0$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

उदाहरण 2 : चित्र में x का मान निकालें।



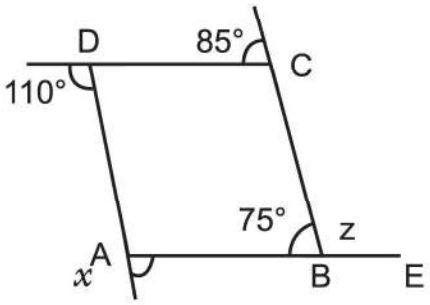
हलः— पंचभूज में,

$75^0 + 85^0 + 80^0 + 75^0 + x = 360^0$

या, $315^0 + x = 360^0$

$\therefore \quad x = 360^0 - 315^0 = 45^0$

उदाहरण 3 : चित्र में $\angle x$ का मान निकालें।



हलः— $\angle CBE = Z$

$\therefore \quad 75^0 + Z = 180^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

या, $Z = 180^0 - 75^0 = 105^0$

अब, बहुभुज के बाह्यकोण के गुण के अनुसार

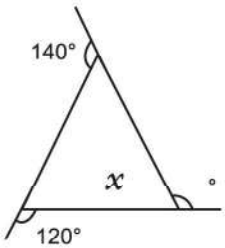
$105^0 + 85^0 + 110^0 + \angle x = 360^0$

या, $300^0 + \angle x = 360^0$

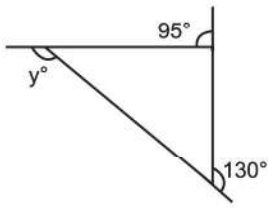
$\therefore \quad \angle x = 360^0 - 300^0 = 60^0$

प्रश्नावली 11.1

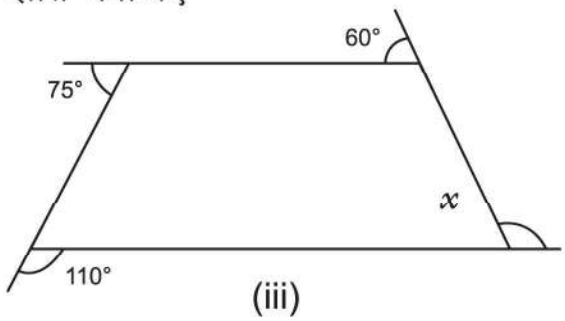
निम्नलिखित प्रत्येक आकृति में x मान का ज्ञात कीजिए



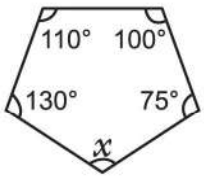
(i)



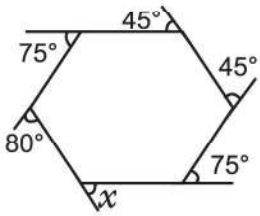
(ii)



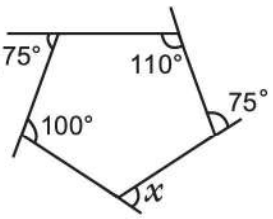
(iii)



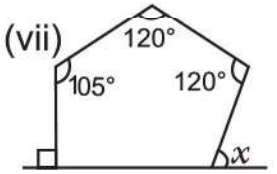
(iv)

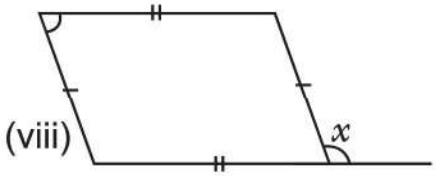


(v)



(vi)





"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

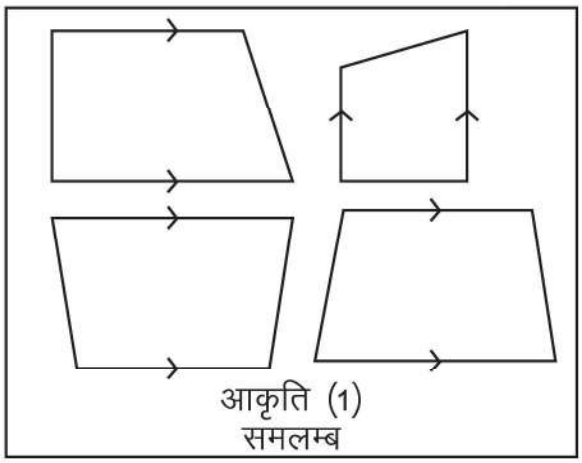
(9) आयत के सभी अंतःकोणों का योग कितना होता है?

(10) वर्ग के सभी बाह्यकोणों का योग कितना होता है?

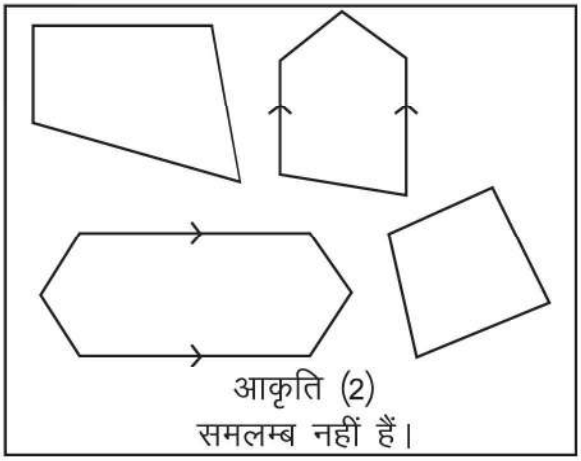
11.4 चतुर्भुजों के प्रकार (Types of Quadrilaterals)

कोणों और भुजाओं की प्रकृति एवं अन्तः संबंध के आधार पर चतुर्भुजों को वर्गीकृत किया जाता है एवं एक विशेष नाम दिया जाता है। जैसे–समलम्ब चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज, आयत और वर्ग इत्यादि।

11.4.1 समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)

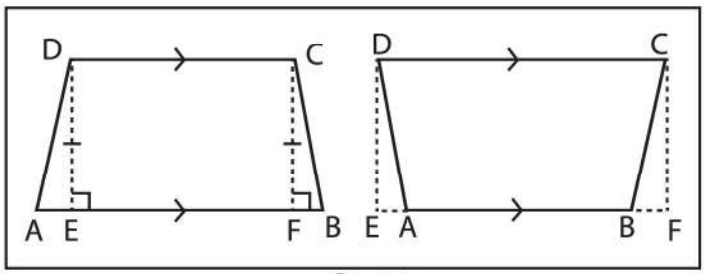


आकृति (1)
समलम्ब



आकृति (2)
समलम्ब नहीं हैं।

आकृति (1) के सभी चतुर्भुजों में आमने–सामने की कोई एक जोड़ी भुजा समान्तर है। यदि चतुर्भुज के विपरीत शीर्ष से समान्तर भुजा में शीर्षलम्ब खींचा जाए तो दोनों शीर्षलम्ब बराबर होंगे, जैसा कि आकृति (3) में दिखाया गया है।



आकृति (3)

चित्र में तीर का निशान समान्तर भुजाओं के लिए दर्शाया गया है।

अर्थात चतुर्भुज ABCD को बराबर शीर्षलम्ब वाला चतुर्भुज (समलम्ब चतुर्भुज) कह सकते हैं।

अतः एक ऐसा चतुर्भुज जिसमें एक जोड़ी भुजा समान्तर हो, समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

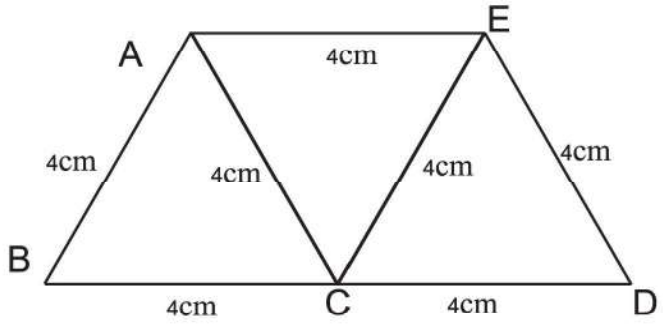
क्रियाकलाप

(i) समलम्ब चतुर्भुज बनाना

आवश्यक सामाग्रीः 3 प्रकार का रंगीन कागज, कार्डबोर्ड, गोंद, कैंची आदि।

रचना विधिः

1. प्रत्येक रंगीन कागज से 4 सेमी भुजा वाले तीन समबाहु त्रिभुज काट लीजिए।
2. चित्र में दिखाए अनुसार तीन त्रिभुज को कार्डबोर्ड में चिपकाइए।
3. प्राप्त चित्र को ध्यान से निरीक्षण कीजिए।
4. प्राप्त आकृति एक समलम्ब चतुर्भुज होगा।



5. क्या आप बता सकते हैं कि यहाँ कौन–सी भुजाएँ समान्तर हैं?

6. यह क्रियाकलाप समद्विबाहु त्रिभुज और विषमबाहु त्रिभुज काटकर दिखाए अनुसार सजाइए और पता कीजिए।

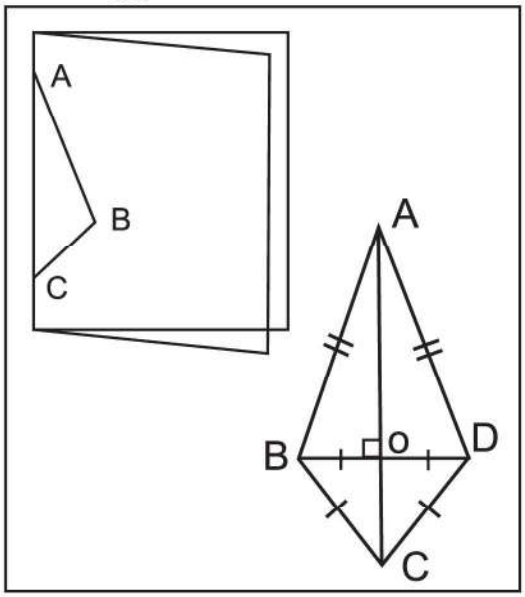
(a) क्या हर स्थिति में समलम्ब चतुर्भुज प्राप्त होता है?

(b) क्या हर स्थिति में असमान्तर भुजाओं की लंबाई बराबर होती है?

(ii) सेट स्क्वेयर की अलग–अलग संख्या लेकर समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए।

11.4.2 पतंग :

आइए, हम एक चार्ट पेपर लेकर बीच से मोड़ लेते हैं। अब इससे आकृति में दिखाए अनुसार ABC एक विषमबाहु त्रिभुज काट लेते हैं। कटे हुए त्रिभुज को खोलने से एक चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है। यह एक विशेष प्रकार का चतुर्भुज है जिसमें दो जोड़ी ऐसी आसन्न भुजाएँ होती हैं जो बराबर होती हैं। इस चतुर्भुज में AB, AD और BC, CD ऐसी ही बराबर आसन्न भुजाएँ हैं।



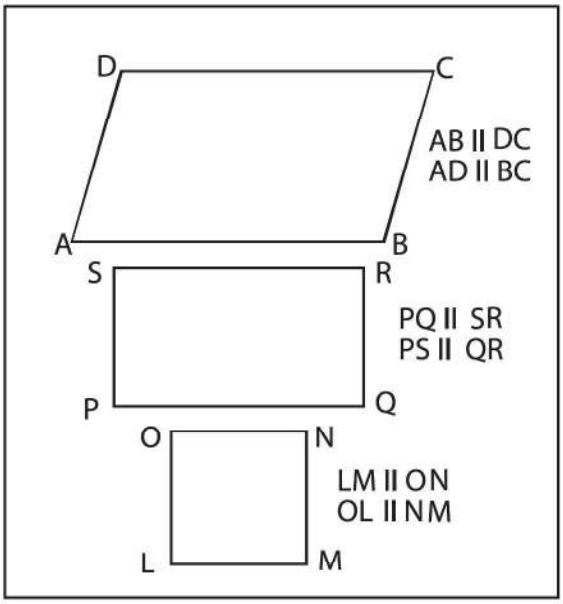
यह विशेष चतुर्भुज पतंग कहलाता है। इसमें AC एवं BD दो विकर्ण है जो एक दूसरे पर लम्ब है

प्रयास कीजिए : D

चार्ट पेपर को मोड़कर सेट स्क्वेयर की मदद से अलग–अलग प्रकार के पतंग बनाइए तथा दोनों विकर्णों के अनुदिश मोड़कर जाँच कीजिए कि क्या वे एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं?

11.4.3 समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

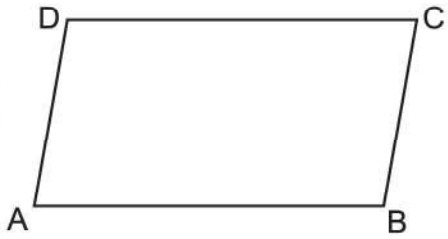
आकृति में इन चतुर्भुजों को ध्यान से देखिए। प्रत्येक चतुर्भुज में आमने–सामने की भुजाएँ समान्तर हैं। अतः जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, ये सभी समान्तर चतुर्भुज हैं।



अर्थात,
ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाएँ समान्तर हों, समान्तर चतुर्भुज कहलाते हैं।

समान्तर चतुर्भुज के अवयव (भाग) (Parts of Parallelogram) :

समान्तर चतुर्भुज में चार भुजाएँ और चार कोण होते हैं। आकृति ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। जिसमें AB और DC तथा AD और BC **सम्मुख भुजाएँ हैं जो आपस में समान हैं।**



∠A का सम्मुख कोण ∠C तथा ∠B का सम्मुख कोण ∠D है।

AB और BC समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजा तथा ∠A और ∠B आसन्न कोण हैं।

आसन्न भुजा : जहाँ एक भुजा समाप्त होती है, वहीं से दूसरी भुजा प्रारंभ होती है तब दोनों आसन्न भुजा कहलाती है। दोनों भुजाएँ एक बिन्दु पर एक दूसरे को काटते हैं।

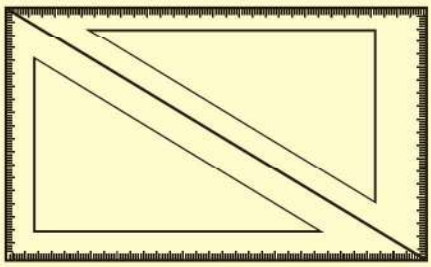
आसन्न कोण : दो कोण एक ही अंत बिन्दु पर बने हों तथा उसमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो तथा जो भुजा उभयनिष्ट नहीं है वे उभयनिष्ट भुजा के दोनों ओर हो। तब यह आसन्न कोण कहलाते हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

प्रयास कीजिए : E

ज्यामितीय बॉक्स में दिए $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ वाले दो सेट स्क्वेयर लेकर इस प्रकार रखिए कि एक समान्तर चतुर्भुज प्राप्त हो जाए।

इस आकृति की सहायता से ऊपर के गुणों का सत्यापन कीजिए।

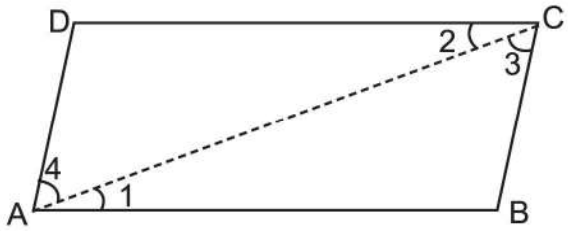


उदाहरण 4 :

आकृति में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध कीजिए की $AB = DC$ एवं $AD = BC$

हल :



दिया है ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ AB II DC तथा AD II BC

विकर्ण AC खींचिए।

हम देखते हैं कि $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (एकांतर कोण)

$AC = AC$ विकर्ण उभयनिष्ठ है।

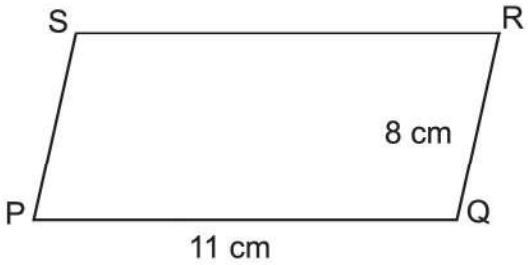
$\Delta ABC \cong \Delta ADC$ (त्रिभुज की ASA सर्वांगसमता कसौटी से)

सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं।

अतः $AB = CD$ एवं $AD = BC$

उदाहरण 5 :

समान्तर चतुर्भुज PQRS का परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल :

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होते हैं।

$\therefore$ $PQ = RS = 11$ cm और $QR = PS = 8$ cm

अतः समान्तर चतुर्भुज PQRS का परिमाप $= PQ + QR + RS + PS$

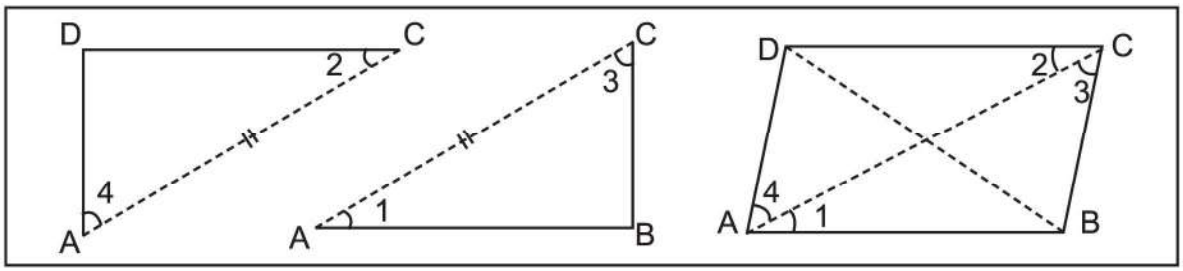
$= 11\text{cm} + 8\text{cm} + 11\text{cm} + 8\text{cm}$

$= 38\text{cm}$

11.4.4 समान्तर चतुर्भुज के कोण :

हमने समान्तर चतुर्भुज के भुजाओं का अध्ययन किया। हम पाते हैं कि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

यदि $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण हैं।



आकृति से स्पष्ट है कि $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (एकांतर अंतःकोण बराबर)

तथा $AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta ABC \cong ADC$ (ASA सर्वांगसमता कसौटी से)

सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर है।

इसी प्रकार $+A = +C$

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$ होगा।

गुण : समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण (Adjacent angle of parallelogram) :

यहाँ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\angle A$ और $\angle B$ आसन्न कोण हैं।

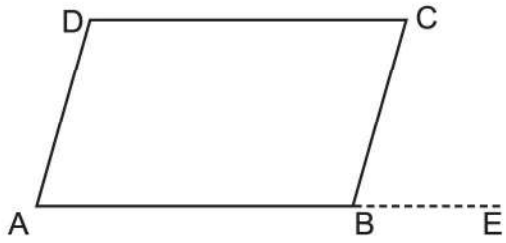
AB II CD है तथा BC तिर्यक रेखा है।

$\therefore m\angle A = m\angle CBE$ (संगत कोण)

हम देखते हैं कि $\overleftrightarrow{AE}$ पर B एक बिन्दु है।

$\therefore m\angle ABC + m\angle CBE = 180^0$ है।

$\therefore m\angle ABC + m\angle A = 180^0$ होगा



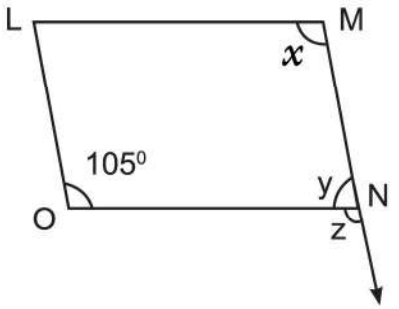
(रैखिक युग्म अभिगृहीत)

अतः $\angle A$ और $\angle ABC$ सम्पूरक कोण (Suplementary angle) हैं।

गुण : समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण सम्पूरक होते हैं।

उदाहरण 6 :

आकृति में LMNO एक समान्तर चतुर्भुज है।
x,y,z का मान ज्ञात कीजिए।



हल : LMNO एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle O = 105^0 = x$ (सम्मुख कोण)

$\angle O$ और y समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण हैं।

$\therefore$ $\angle O + y = 180^0$ (आसन्न कोण)

$\therefore$ $105^0 + Y = 180^0$

या $Y = 180^0 - 105^0 = 75^0$

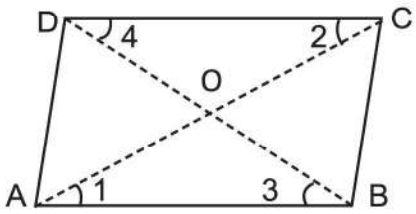
पुनः $Y + Z = 180^0$ (रैखिक युग्म)

$75^0 + Z = 180^0$

$\therefore Z = 180^0 - 75^0 = 105^0$

समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण (Diagonals of parallelogram) :

आइए समान्तर चतुर्भुज ABCD पर विचार करते हैं। चतुर्भुज के विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं। $\because$ AB//DC , AD//BC



अब हम Δ OAB और Δ ODC पर ध्यान देते हैं।

$\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$ (एकांतर कोण)

AB = CD (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर है)

$\therefore$ Δ OAB $\cong$ Δ ODC (त्रिभुज की ASA सर्वांगसमता से)

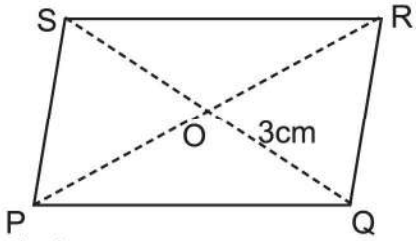
$\therefore$ OA = OC तथा OB = OD प्राप्त होता है।

अतः O, विकर्ण AC और BD का मध्य बिन्दु है।

समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। साधारणतया समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर नहीं होते हैं।

उदाहरण 7 :

PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। OQ = 3 cm तथा PR की लम्बाई QS से 2 cm अधिक है, तो OP की लम्बाई क्या होगी?



हल :

विकर्ण PR और QS एक दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं।

∴ OQ = 3 cm = OS

∴ QS = 3 cm + 3 cm = 6 cm

अब, PR = QS + 2 cm

∴ PR = 6 cm + 2 cm = 8 cm

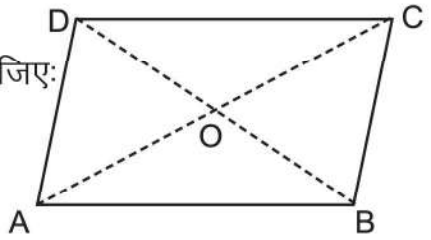
∴ $OP = \frac{1}{2} PR = \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$

प्रश्नावली 11.2

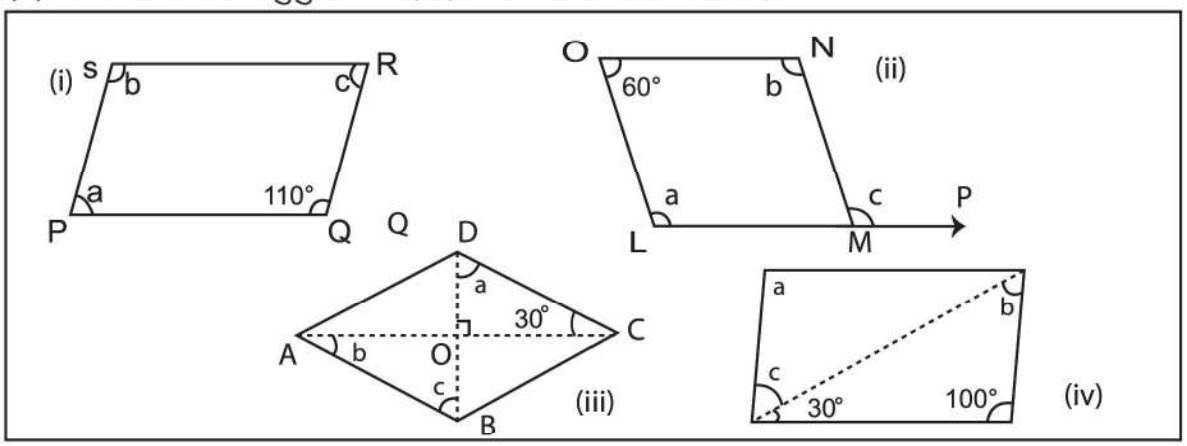
(1) आकृति में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
समान्तर चतुर्भुज के गुणों के आधार पर निम्न को पूरा कीजिए:

(a) AD = ... (b) OA = ...

(c) ∠ABD = ... (d) ∠DAB + ∠ABC = ...



(2) निम्न समान्तर चतुर्भुजों में a, b, c का मान ज्ञात कीजिए:



(3) क्या चतुर्भुज ABCD निम्न स्थिति में समान्तर चतुर्भुज हो सकता है?

i. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$

ii. AB = DC = 6 cm, AD = 4 cm BC = 5 cm

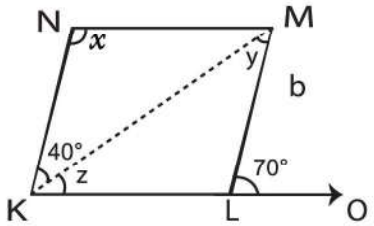
iii. $\angle A + \angle B = 180^0$



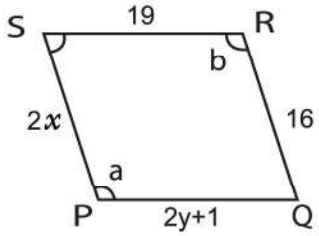
(4) एक समान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न कोण का अनुपात 6 : 3 है, तो चतुर्भुज के सभी कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

(5) यदि एक समान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न कोण बराबर हैं, तो सभी कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

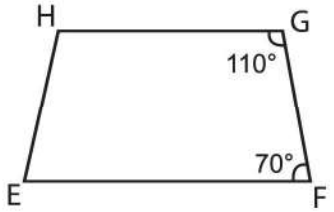
(6) आकृति में KLMN एक समान्तर चतुर्भुज है। x, y, z का मान क्या होगा?



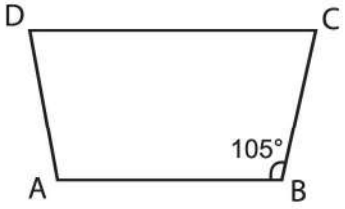
(7) निम्न आकृति समान्तर चतुर्भुज हैं। क्या आप x और y का मान ज्ञात कर सकते हैं?



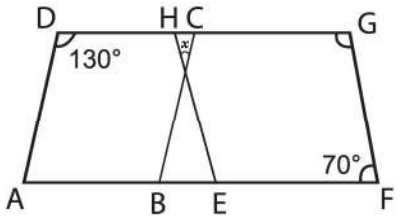
(8) आकृति में क्या यह एक समलम्ब चतुर्भुज है? इसकी कौन–कौन सी भुजाएँ समान्तर हैं?



(9) आकृति में AB II CD है तो $\angle C$ का मान क्या होगा?



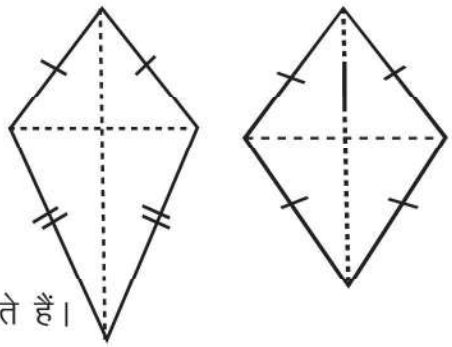
(10) दी गई आकृति में ABCD और EFGH दोनों समान्तर चतुर्भुज हैं, x का मान ज्ञात कीजिए।



कुछ विशिष्ट समान्तर चतुर्भुज (Special parallelograme)

11.4.5 समचतुर्भुज (Rhombus) :

हम जान चुके हैं कि पतंग के दो जोड़ी आसन्न भुजाएँ बराबर होती हैं तथा विकर्ण एक दूसरे पर लम्ब होते हैं। अब विचार कीजिए कि पतंग के चारों भुजाएँ समान लम्बाई की हो तो क्या होगा?



हमें एक विशेष चतुर्भुज मिलता है, जिसे समचतुर्भुज कहते हैं।

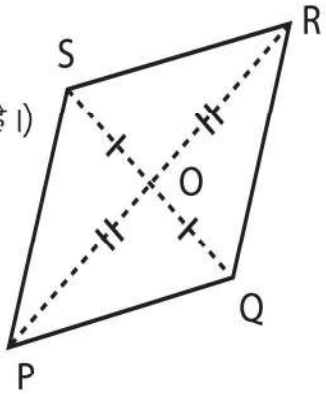
समचतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती है।

चूँकि समचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती हैं, इसलिए यह एक समान्तर चतुर्भुज भी है।

समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लम्ब समद्विभाजक होते हैं।

> समचतुर्भुज में समान्तर चतुर्भुज एवं पतंग दोनों के गुण होते हैं।

PQRS एक समचतुर्भुज है इसलिए PQRS एक समांतर चतुर्भुज भी है। अतः विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।



अर्थात OP = OR और OQ = OS

$\triangle$ OPS और $\triangle$ OSR में

OP = OR (PR और QS एक दूसरे के समद्विभाजक है।)

OS उभयनिष्ठ है।

PS = SR (आसन्न भुजाएँ बराबर)

$\therefore$ $\triangle$ POS $\cong$ $\triangle$ ROS है। (S-S-S सर्वांगसमता)

सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं।

$\therefore$ $m\angle POS = m\angle ROS$

$\therefore$ $m\angle POS + m\angle ROS = 180^o$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

या, $m\angle POS + m\angle POS = 180^0$

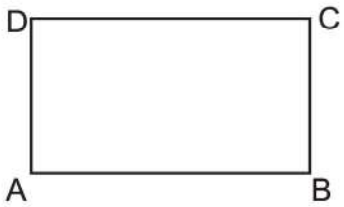
या, $2m\angle POS = 180^0$

या, $m\angle POS = \frac{180^0}{2}$

$\therefore m\angle POS = 90^0$

समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लम्ब समद्विभाजक होते हैं।

11.4.6 आयत (Rectangle)



आइए, अब एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज ABCD पर विचार करते हैं जिसका आसन्न कोण बराबर है।

चूँकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ AB = CD और AD = BC (सम्मुख भुजाएँ)

तथा $\angle A + \angle B = 180^0$ (समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण का युग्म)

अब $\angle A = \angle B$ है।

$\therefore$ $\angle A = \angle B = 90^0$

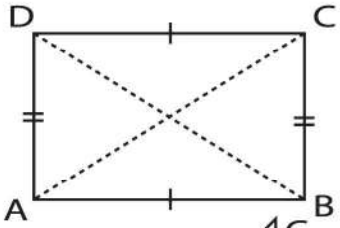
$\therefore$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण 90^0 (समकोण) का होता है, यह एक विशेष समान्तर चतुर्भुज आयत कहलाता है।

एक समान्तर चतुर्भुज, जिसका प्रत्येक कोण समकोण होता है, आयत कहलाता है।

गुणः आयत के विकर्ण बराबर लम्बाई के होते हैं।

इस अवधारणा की पुष्टि के लिए ABCD एक समान्तर चतुर्भुज (आयत) लेते हैं जिसका प्रत्येक कोण समकोण है।



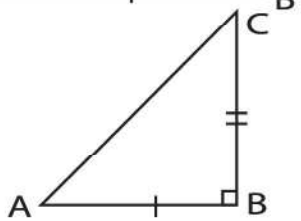
अब ΔABC और ΔABD को

देखने पर पता चलता है कि

क्योंकि AB = AB (उभयनिष्ठ है)

BC = AD (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख भुजा)

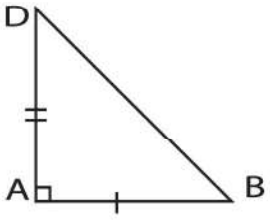
$\angle B = \angle A = 90^0$



अर्थात AC = BD (जो आयत के विकर्ण हैं)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है (SAS के द्वारा)

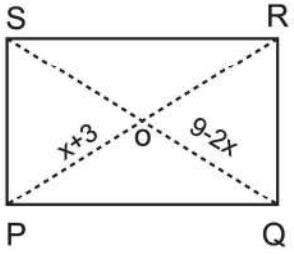
आयत के विकर्ण बराबर लंबाई के होते हैं।



समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण अलग–अलग लम्बाई के हो सकते हैं।

उदाहरण 8 :

दिए गए आकृति में,



PQRS एक आयत है, इसके विकर्ण PR और QS एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि आयत के विकर्ण बराबर होते हैं।

दिए गए आकृति में,

$\therefore$ PR = QS

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ PR = $\frac{1}{2}$ QS

या, OP = OQ

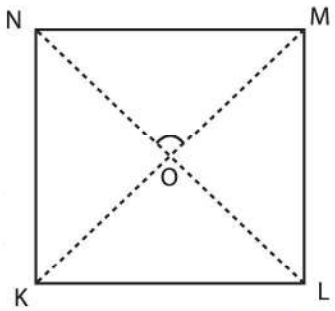
$\therefore$ $x + 3 = 9 - 2x$

या, $x + 2 = 9 - 3$ (समान पदों को पक्षांतरित करने पर)

या, $3x = 6$

$\therefore$ $x = 3$

11.4.7 वर्ग (Square)



आयत की एक विशेष स्थिति – जब इसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं, वर्ग कहलाता है। एक वर्ग में आयत के सभी गुण होते हैं। आयत में विकर्ण का एक दूसरे पर लम्ब होना आवश्यक नहीं होता है। लेकिन वर्ग में विकर्ण एक दूसरे पर लम्ब समद्विभाजक होते हैं।

वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली 11.3

(1) निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य :

(a) सभी वर्ग आयत होते हैं।

(b) सभी समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होते हैं।

(c) सभी वर्ग समचतुर्भुज होते हैं।

(d) सभी पतंग समचतुर्भुज नहीं होते हैं।

(e) सभी समलम्ब समान्तर चतुर्भुज होते हैं।

(f) सभी वर्ग समलम्ब होते हैं।

(g) सभी वर्ग समान्तर चतुर्भुज नहीं होते हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

(2) दिखाइए कैसे एक वर्ग

(i) एक चतुर्भुज है। (iii) एक समचतुर्भुज है।

(ii) एक आयत है। (iv) एक समलम्ब है।

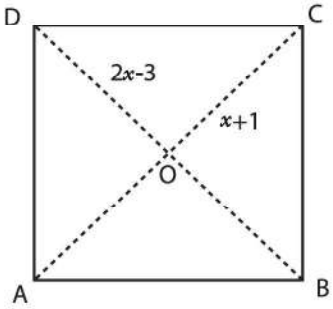
(3) क्या आप इन चतुर्भुजों के नाम बता सकते हैं, जिसके विकर्ण

(i) एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(ii) एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते हैं।

(iii) बराबर हैं।

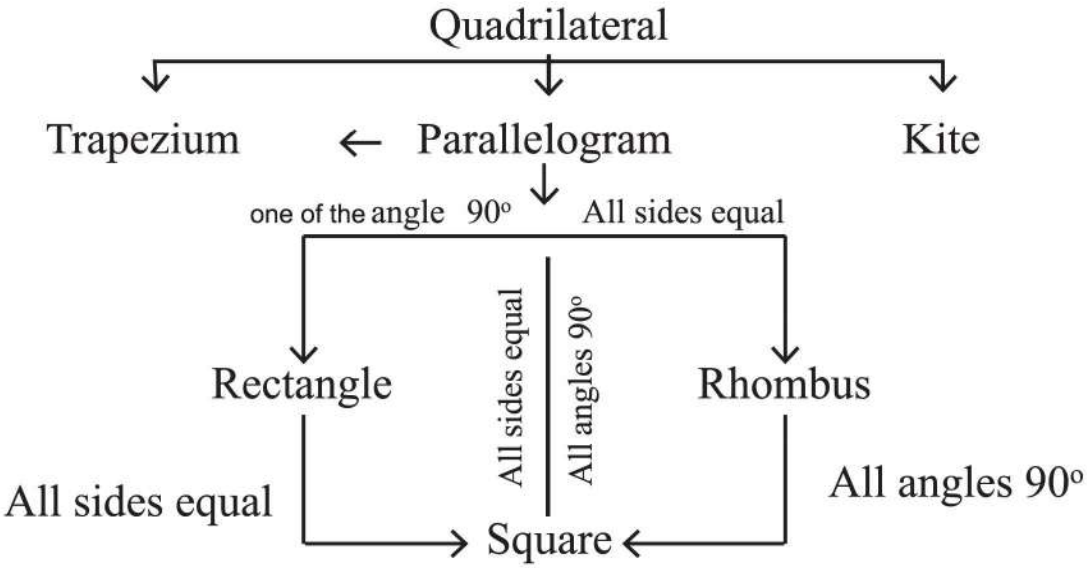
(4) आकृति में ABCD एक वर्ग है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हम जानते है:

गुणधर्म (Properties)	समांतर चर्तु०	आयत	सम. चर्तु०	वर्ग
विकर्ण एवं दूसरे को समद्विभाजित करते हैं	✓	✓	✓	✓
विकर्ण बराबर होते हैं।	–	✓	–	✓
विकर्ण एक–दूसरे पर लम्ब होते है	–	–	✓	✓
प्रत्येक विकर्ण दो समरूप त्रिभुज का निर्माण करता है।	✓	✓	✓	✓
विकर्णों चार बराबर त्रिभुज बनाती हैं।	✓	✓	✓	✓
विकर्णें चार समरूप त्रिभुज बनाती है।	–	–	✓	✓
विकर्णें शीर्ष कोण को समद्विभाजित करता है।	–	–	✓	✓

NOTE


Quadrilateral
Trapezium
Parallelogram
Kite
one of the angle 90°
All sides equal
Rectangle
All sides equal
All angles 90°
Rhombus
All sides equal
All angles 90°
Square