प्रायोगिक ज्यामिति
(Practical Geometry)

अध्याय
13



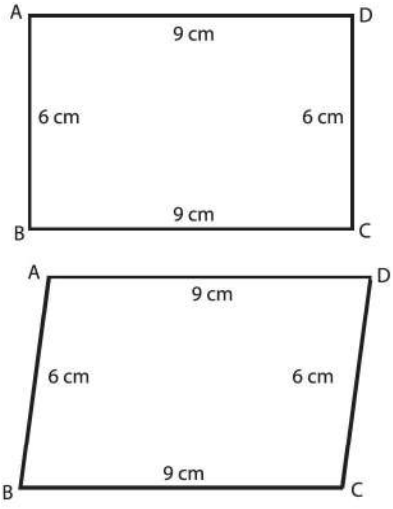
GT4RTH

13.1 भूमिका :–

हम पिछली कक्षा में त्रिभुजों की रचना करना सीख चुके हैं। चूँकि एक त्रिभुज की रचना के लिए तीन मापों का होना पर्याप्त है, तो क्या हमें चतुर्भुज की रचना के लिए चार मापें पर्याप्त होंगी?

प्रयास कीजिए :

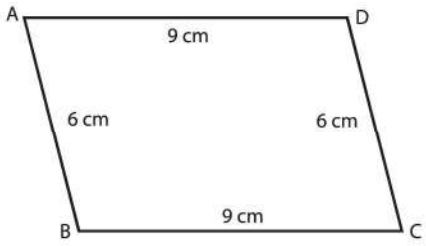
समान लंबाई (मान लीजिए 9 सेमी) वाली तीलियों (Sticks) का एक युग्म लीजिए। अब एक दूसरा समान लंबाई (माना 6 सेमी) वाली तीलियों का युग्म लीजिए। इन्हें आपस में इस प्रकार जोड़िए कि 9 cm लंबाई तथा 6 cm चौड़ाई वाला एक आयत प्राप्त हो जाए। इस आयत का निर्माण 4 मापों के उपयोग से किया गया है।



अब आयत की चौड़ाई के अनुदिश दबाव डालते हैं तो नयी प्राप्त आकृति क्या अभी भी एक आयत है? ध्यान दीजिए कि अब आयत एक समांतर चतुर्भुज

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

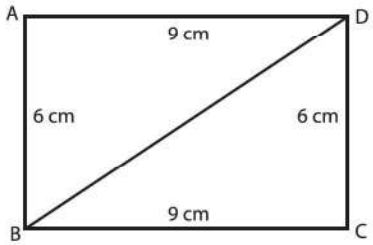
बन गया है। क्या हमने तीलियों की लंबाइयों को बदला है? नहीं, भुजाओं की माप वही रहता है।



नई प्राप्त आकृति को दूसरी दिशा में दबाव डालते हैं तो हमें पुनः एक समांतर चतुर्भुज प्राप्त होता है जो बिल्कुल अलग है परंतु चारों माप वही रहता है।

यह दर्शाता है कि एक चतुर्भुज की चार मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त नहीं हो सकता है। क्या पाँच मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त हो सकता है?

आइए, इस क्रियाकलाप पर पुनः विचार करें। हम प्रत्येक 9 cm लंबाई की दो तीलियों एवं प्रत्येक 6cm लंबाई की दो तीलियों की सहायता से एक आयत की रचना कर चुके हैं। अब BD के बराबर लंबाई वाली एक दूसरी तीली को BD के अनुदिश बाँधते हैं। यदि अब चौड़ाई की ओर दबाव डालते हैं तो क्या आकृति में परिवर्तन होता है?



स्पष्ट है आकृति को खोले बिना परिवर्तन संभव नहीं हो सकता। पाँचवीं तीली के प्रवेश ने आयत को अद्वितीय रूप से स्थिर कर दिया है। अर्थात, कोई दूसरा चतुर्भुज (दी गई भुजाओं की लंबाई के बराबर) अब संभव नहीं है।

अतः हमने देखा कि पाँच मापों से हमें एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त होता है।

परंतु क्या एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना करने के लिए कोई पाँच माप (भुजाओं और कोणों की) पर्याप्त है?

पयास कीजिए :

मोहन के पास एक चतुर्भुज ABCD की पाँच माप है। ये माप AB = 4.8 cm, BC = 4.3 cm, CD = 3.6 cm, AD = 4.2 cm और विकर्ण AC = 6 cm है। क्या वह इन मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज बना सकता है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

13.2 एक चतुर्भुज की रचना

अब हम सीखेंगे कि दी हुई निम्नलिखित मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना कैसे की जा सकती है?

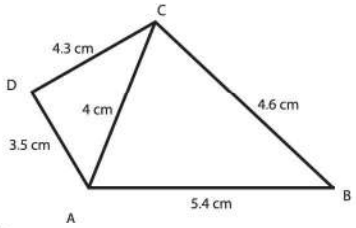
- जब चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हुआ है।
- जब दो विकर्ण और तीन भुजाएँ दी हुई हैं।
- जब दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हुए हैं।
- जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दो कोण दिए हुए हैं।
- जब अन्य विशिष्ट गुण ज्ञात है।

13.2.1 एक चतुर्भुज की रचना, यदि चारों भुजाएँ और एक विकर्ण की लंबाई दी हो।

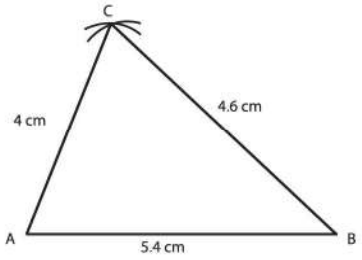
हम इस रचना को एक उदाहरण की सहायता से समझेंगे।

उदाहरण 1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना करें यदि AB = 5.4 cm, BC = 4.6 cm, CD = 4.3 cm, DA = 3.5 cm और विकर्ण AC = 4 cm.

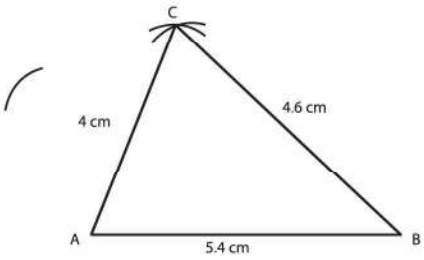
हल : **चरण 1.** पहले हम एक रफ आकृति खींचते हैं।



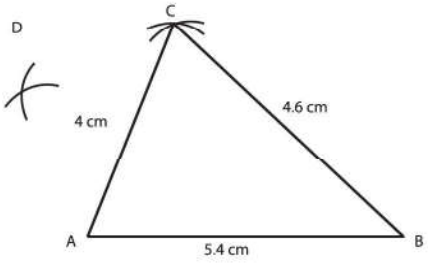
चरण 2. रफ आकृति के आधार पर SSS रचना कसौटी से Δ ABC की रचना कीजिए।



चरण 3. बिंदु C को केन्द्र मानकर 4.3 cm त्रिज्या का चाप खींचिए।

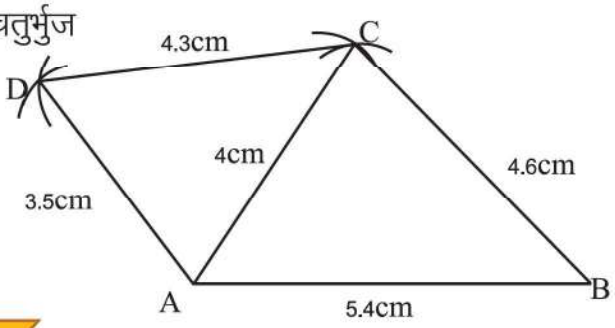


चरण 4. बिंदु A को केंद्र मानकर 3.5 cm त्रिज्या का चाप खींचिए।



"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

चरण 5. बिंदु D दोनों चापों के कटान बिंदु से प्राप्त होगा। इस प्रकार चतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

(i) हमने यहाँ एक चतुर्भुज की पाँच मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना किया। क्या आप सोचते हैं कि चतुर्भुज की किन्हीं पाँच मापों से ऐसी रचना की जा सकती हैं?

(ii) क्या आप एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कर सकते हैं जिसमें AB = 6 cm, BC = 3 cm, और BD = 7 cm हो? क्यों?

(iii) क्या आप एक सम चतुर्भुज (Rhombus) PQRS की रचना कर सकते हैं जिसमें PQ = 4 cm, विकर्ण PR = 5 cm है? क्यों?

(iv) एक विद्यार्थी एक चतुर्भुज ABCD की रचना करने का प्रयास करता है जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 5 cm, AD = 2 cm और BD = 6 cm है, परंतु वह इसकी रचना नहीं कर सका। कारण बताइए?

प्रश्नावली 13.1

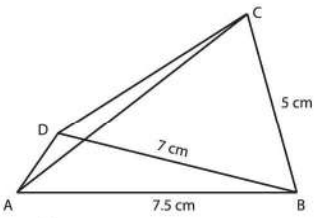
दिये गये मापों से चतुर्भुजों की रचना कीजिए।

1. चतुर्भुज PQRS, जिसमें PQ = 6cm, QR = 4cm, RS = 5cm, PS = 5cm तथा QS = 7.8cm है।
2. चतुर्भुज ABCD, जिसमें AB = 5.5cm, BC = 5cm, CD = 6cm, AD = 4cm तथा AC = 7cm है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

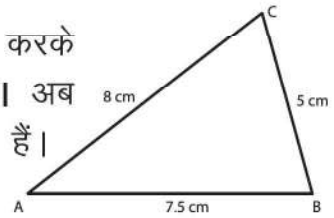
13.2.2 एक चतुर्भुज की रचना कीजिए, यदि दो विकर्ण और तीन भुजाओं की लंबाई दी गई हो। हम इस रचना को एक उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण 2 : एक चतुर्भुज ABCD रचना कीजिए, जिसमें AB = 7.5 cm, BC = 5 cm, CD = 6 cm, विकर्ण AC = 8 cm और विकर्ण BD = 7 cm है।

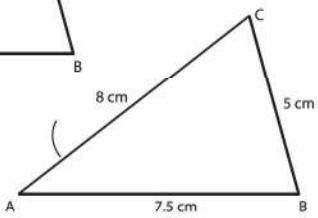


हल : चरण 1. पहले हम एक रफ आकृति खींचते हैं।

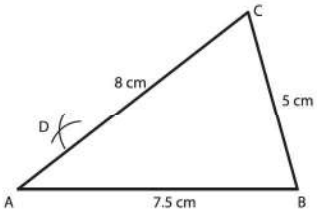
चरण : 2 SSS कसौटी का प्रयोग करके ΔABC की रचना करते हैं। अब हम बिंदु D का पता लगाते हैं।



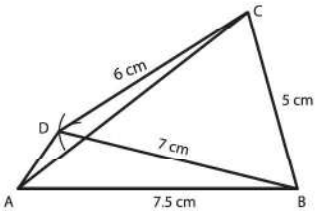
चरण : 3 बिंदु C को केंद्र मानकर 6 CM त्रिज्या का चाप खींचिए।



चरण : 4 बिंदु B को केंद्र मानकर 7 CM त्रिज्या का चाप खींचिए। हमें बिंदु D प्राप्त होता है।



चरण : 5 बिंदु D को A और C से मिलाते हैं। हमें अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

(i) उपर्युक्त उदाहरण में क्या हम पहले ABD खींचकर उसके बाद चतुर्थ बिंदु C को ज्ञात करके चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं?

(ii) क्या आप एक चतुर्भुज ABCD की रचना कर सकते हैं जिसमें AB = 3cm, CD = 3cm, AD = 7.5 cm, AC = 8 cm और BD = 4 cm है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

प्रश्नावली 13.2

1 दिए गए मापों से चतुर्भुजों की रचना कीजिए–

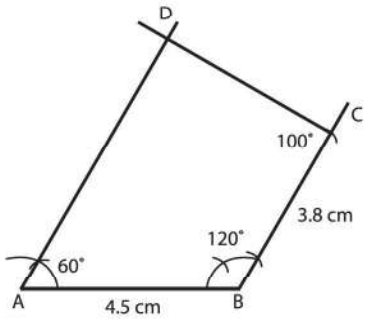
1. चतुर्भुज ABCD, जिसमें AB = 5.7cm, BC = 6.5cm, CD = 4.5cm, AC = 5.7cm तथा BD =7cm है।
2. चतुर्भुज KLMN, जिसमें LM = 4.5cm, MN = 5cm, KN = 5.5cm, एवं दो विकर्ण KM= 5.5cm एवं LN = 7cm है।
3. चतुर्भुज EFGH, जिसमें EF = 5.2cm, FG = 6.5cm, EH = 7.5cm, EG= 7.5cm एवं HF = 8.5cm है।

13.2.3 एक चतुर्भुज की रचना जब दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोणों की माप दी हो।

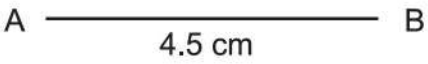
उदाहरण 3 : एक चतुर्भुज ABCD की रचना करें यदि AB = 4.5 cm , $\angle ABC = 120^0$, BC =3.8 cm, $\angle BCD = 100^0$, $BAD = 60^0$

हल :

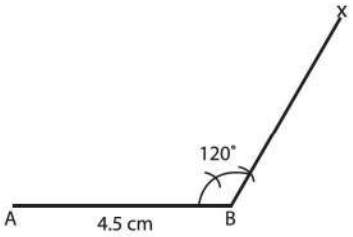
चरण : 1 पहले हम दिए गए मापों से एक रफ आकृति खींचते हैं।



चरण : 2 AB = 4.5cm खींचते हैं।

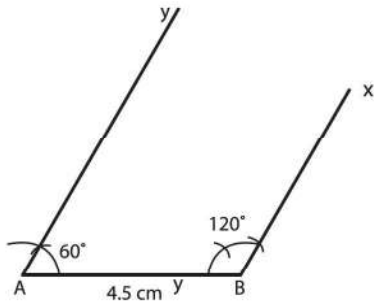


चरण : 3 बिंदु B पर $\angle ABX = 120^0$ बनाते हैं।

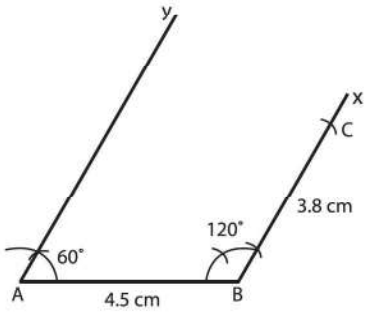


"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

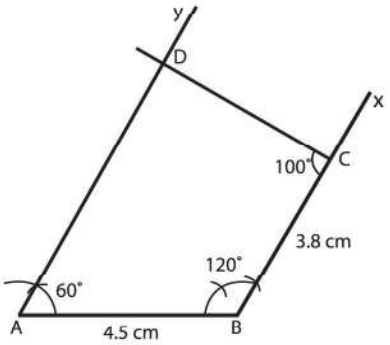
चरण : 4 बिंदु A पर $\angle BAY = 60^0$ बनाते हैं।



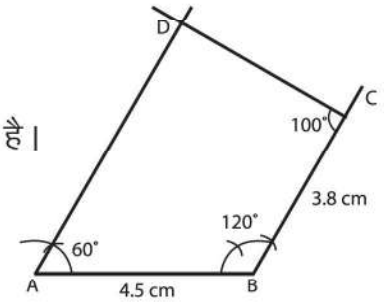
चरण : 5 बिंदु B को केंद्र मानकर BC = 3.8 cm कोई चाप खींचते हैं। यह C बिंदु है।



चरण : 6 बिंदु C पर $\angle BCD = 100^0$ बनाइए।



चरण : 7 सरल रेखा AY पर बिंदु D प्राप्त होता है। इस प्रकार चतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।



"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

प्रयास कीजिए :

उदाहरण 3. में यदि $\angle A = 90^0$, $\angle C = 120^0$ कर देने पर चतुर्भुज ABCD की रचना हो सकती है या नहीं कारण दें।

प्रश्नावली 13.3

1. दिए गए मापों से चतुर्भुजों की रचना कीजिए

(i) चतुर्भुज MNOP जिसमें
MN = 6.5 cm, MP = 4.5cm
$\angle M = 60^0$, $\angle N = 90^0$
$\angle O = 120^0$

(ii) चतुर्भुज ABCD जिसमें
AB = 4 cm, BC = 6.5 cm
$\angle A = 90^0$ $\angle B = 75^0$
$\angle C = 110^0$

(iii) समांतर चतुर्भुज PQRS जिसमें
PQ = 6 cm, QR = 5 cm
$\angle P = 55^0$, $R = 110^0$ एवं $\angle S = 90^0$

(iv) आयत PQRS जिसमें
PQ = 6 cm और QR = 8 cm है।

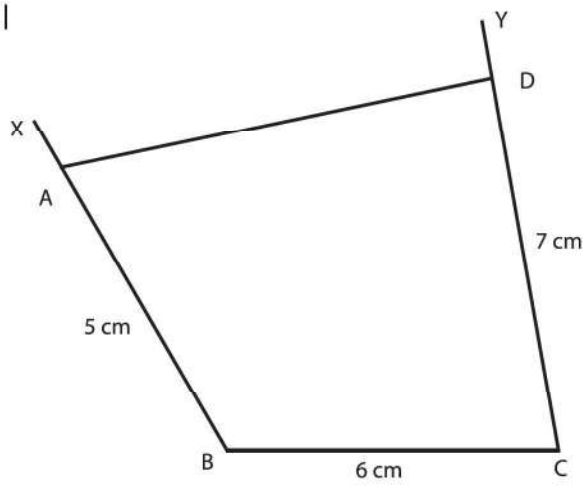
13.2.4 एक चतुर्भुज की रचना, जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दों कोणों की माप दी हो।

इस प्रकार के चतुर्भुज के अंतर्गत जब हम एक रफ आकृति बनाते हैं। उनके बीच के कोणों को विशेष रूप से ध्यानपूर्वक देखेंगे।

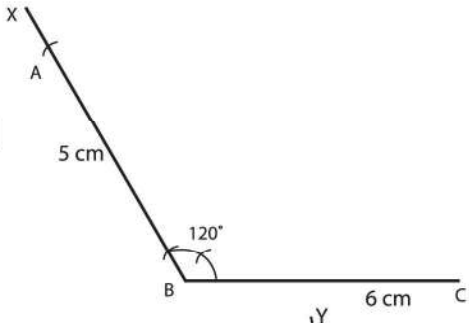
उदाहरण 4: एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जहाँ AB = 5cm, BC= 6 cm, CD = 7cm और $\angle B = 120^0$ तथा $\angle C = 80^0$ है।

हल :

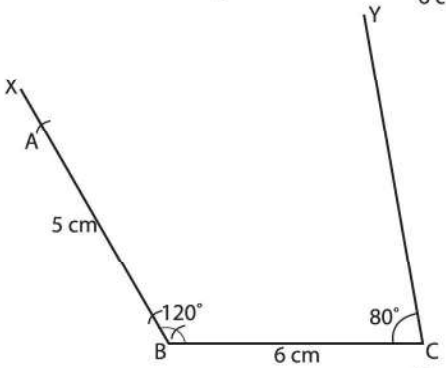
चरण : 1 हम एक रफ आकृति खींचते हैं जिससे हमें यह पता चल सके कि रचना को हम कैसे प्रारंभ कर सकते हैं। तब हम चारों बिंदुओं का पता लगाने की योजना बना सकते हैं।



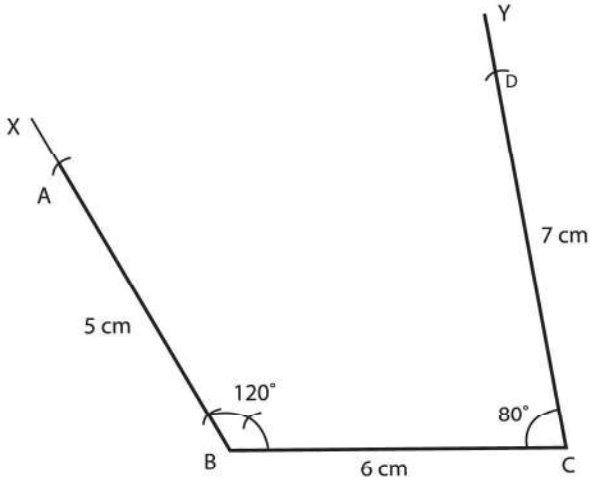
चरण : 2 बिंदु B पर BC = 6 cm लेकर प्रारंभ कीजिए। BX के अनुदिश 120^0 का कोण बनाइए। BX पर 5 cm की दूरी पर बिंदु A को अंकित कीजिए। अब हमें बिंदु B, C और A प्राप्त हो गए हैं।



चरण : 3 चतुर्थ बिंदु D, CY पर कहीं स्थित है जो भुजा BC के साथ 80^0 का कोण बनाता है। BC पर स्थित बिंदु C पर $\angle BCY = 80^0$ बनाइए।

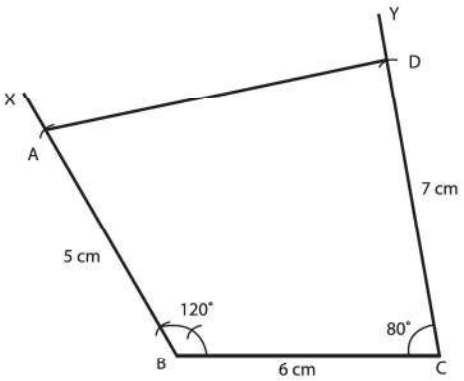


चरण : 4 C को केन्द्र मानकर और 7 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। यह CY को D पर प्रतिच्छेद करती है ।



चरण : 5 चतुर्भुज ABCD को पूर्ण कीजिए।

ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

(i) उपरोक्त उदाहरण में, हमने सर्वप्रथम BC खींची। इसके स्थान पर दूसरे अन्य प्रारंभ बिंदु और कौन–से हो सकते हैं?

(ii) हमने अभी तक चतुर्भुजों की रचना के लिए कोई पाँच मापों का प्रयोग किया। क्या एक चतुर्भुज की रचना करने के लिए पाँच मापों के अलग–अलग समुच्चय (अभी तक देखे गए मापों के अतिरिक्त) हो सकते हैं?

(iii) निम्नलिखित समस्याएँ प्रश्नों के उत्तर देने में आपकी सहायता कर सकती हैं।

(a) चतुर्भुज ABCD जिसमें AB = 5 cm, BC = 5.5 cm, CD = 4 cm, AD = 6cm और $\angle B = 80^0$ है।

(b) चतुर्भुज PQRS जिसमें PQ=4.5 cm, $\angle P=70^0$, $\angle Q= 100^0$, $\angle R= 80^0$ और $\angle S= 110^0$ है।

आप स्वयं कुछ और उदाहरणों की रचना कीजिए और एक चतुर्भुज की रचना के लिए आँकड़ों की पर्याप्तता/अपर्याप्तता ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 13.4

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए यदि AB =5 cm, AD = 2.5 cm, BC= 3 cm, $\angle A= 60^0$ और $\angle B = 45^0$ है।

2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.2 cm, BC = 3.6cm, CD = 4.8 cm, $\angle B = 30^0$ और $\angle C = 150^0$ है।

3. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए यदि PQ =6 cm, QR = 7 cm, PS= 5 cm, $\angle P= 120^0$ और $\angle Q = 90^0$ है।

4. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, AD = 3.5 cm, $\angle A = 75^0$ और $\angle B = 120^0$ है।

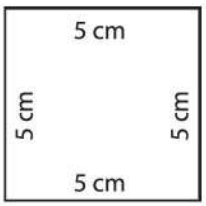
13.2.5 कुछ विशिष्ट स्थितियाँ

हमने एक चतुर्भुज की रचना के लिए हमने पाँच मापों का प्रयोग किया। क्या किसी ऐसे चतुर्भुज की रचना की जा सकती है जिसकी मापों की संख्या इन मापों की संख्या से कम हो? निम्नलिखित उदाहरण ऐसी ही विशिष्ट स्थितियों को जाँचते हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

उदाहरण 5 : 5सेमी भुजा वाले एक वर्ग की रचना कीजिए।

हल : यहाँ हमें ऐसा प्रतीत होता है केवल एक ही माप दी हुई है।



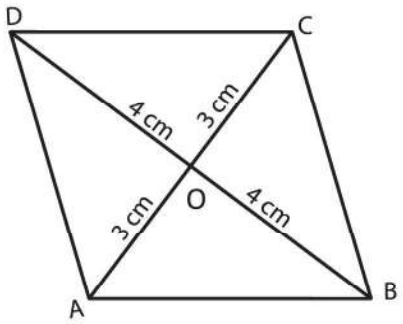
जबकि हमारे पास और बहुत–सी जानकारियाँ हैं क्योंकि यह आकृति एक विशेष चतुर्भुज की है, जो वर्गाकार है। हम जानते हैं कि इसका प्रत्येक कोण एक समकोण है एवं सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।

यह SAS कसौटी के उपयोग से ΔABC खींचने में हमें सहायता करता है। तदुपरांत बिंदु D का बड़ी आसानी से पता लगाया जा सकता हैं एवं दी हुई मापों से हम स्वयं एक वर्ग की रचना करते हैं।

उदाहरण 6 : क्या एक सम चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है जहाँ AC=6 cm और BD=8 cm हो? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल : समचतुर्भुज की केवल दो मापें (विकर्ण) दी हुई हैं। चूँकि यह एक सम चतुर्भुज है। इसके गुणों से हम और सहायता प्राप्त कर सकते हैं।

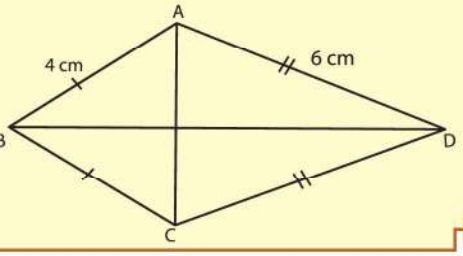
सम चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लंब समद्विभाजक होते हैं। अतः सर्वप्रथम AC = 6 cm खींचिए और तदुपरांत इसके लंब समद्विभाजक की रचना कीजिए। दोनों एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। खींचे गए समद्विभाजक को बिंदु O से दोनों ओर 4cm लंबाई वाली त्रिज्या लेकर काटिए। अब हम बिंदु B तथा बिंदु D प्राप्त करते हैं। बिंदु A से D, D से C, C से B तथा B से A को मिलाने पर हमें समचतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रयास कीजिए :

(1) आप एक आयत PQRS की रचना कैसे करेंगे यदि आप केवल PQ और QR की लंबाई जानते हैं?

(2) एक पतंग ABCD (बगल की आकृति जैसा) की रचना कीजिए यदि BD = 8 cm, AB = 4 cm, और AD = 6 cm है। रचना के दौरान आपने पतंग के कौन से गुणों का प्रयोग किया?



प्रश्नावली 13.5

1. निम्नलिखित आकृतियों की रचना कीजिए –

   (i) एक वर्ग ABCD जिसमें BC = 6cm है।

   (ii) एक समचतुर्भुज जिनके विकर्णों की लंबाई 6cm और 8cm है।

   (iii) एक आयत जिसकी आसन्न भुजाएँ 4cm और 7cm है।

   (iv) एक समांतर चतुर्भुज PQRS जिसमें PQ = 6cm और QR = 7cm है। क्या यह अद्वितीय है?

हमने क्या चर्चा की?

1. पाँच मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त हो सकता है।

2. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है, यदि उसकी चार भुजाओं की लंबाइयाँ और एक विकर्ण दिया हुआ हो।

2. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है, यदि उसके दो विकर्ण और तीन भुजाएँ दी गई हों।

3. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है, यदि उसकी दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोणों की माप ज्ञात हो।

4. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना तभी की जा सकती है, जब उसकी तीन भुजाएँ और बीच के दो कोण दिए हुए हों।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"