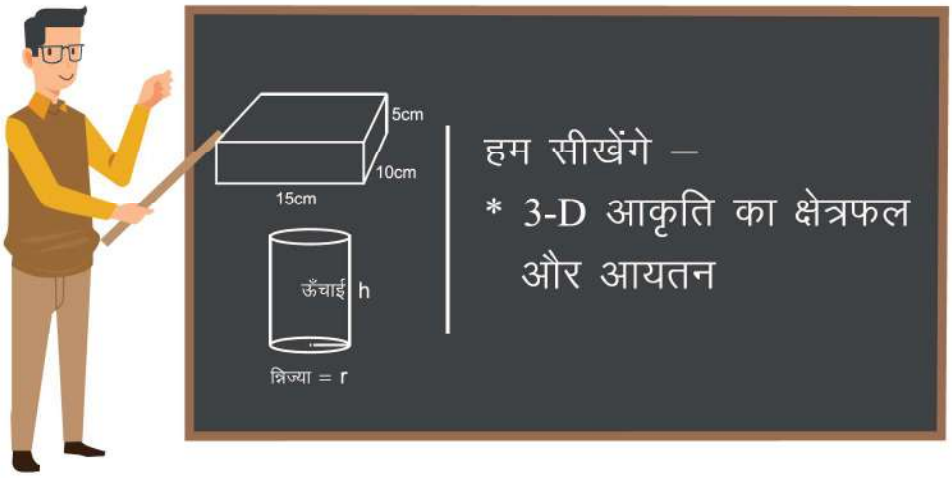
त्रिविमीय (3-D) आकृति का क्षेत्रफल एवं आयतन
(Area and Volume of Three Dimensional Shapes)

अध्याय
15



15.1 भूमिका

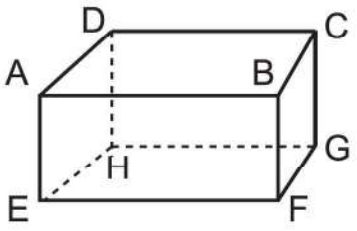
हम द्विविमीय एवं त्रिविमीय आकृतियों से परिचित हैं। हमने विभिन्न द्विविमीय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख लिया है। इस अध्याय में हम विभिन्न त्रिविमीय आकृतियों (ठोस आकार) का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे।

द्विविमीय आकृति
वैसी आकृति जिसकी दो विमाएँ (लम्बाई और चौड़ाई) होती हैं। जैसे – त्रिभुज चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि।

त्रिविमीय आकृति
वैसी आकृति जिसकी तीन विमाएँ (लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई) होती हैं। जैसे– घन, घनाभ, बेलन आदि।

15.2 पृष्ठीय क्षेत्रफल – पृष्ठीय क्षेत्रफल से तातपर्य है सतहों का कुल क्षेत्रफल जिससे वह बना होता है। वह त्रिविमीय आकृति जो छह आयताकार सतहों या पृष्ठों से घिरा हो, घनाभ कहलाता है। इन सतहों या पृष्ठों को घनाभ का फलक कहते हैं। दो फलक जिस रेखा पर मिलती है उस रेखा को किनारा कहते हैं।

चित्र में घनाभ के आयताकार सतह (फलक) ABCD, EFGH, AEFB, DHGC, AEHD, BFGC हैं।
घनाभ के फलकों की संख्या = 6
घनाभ के किनारें – AB, BC, CD, AD, EF, FG, GH, HE, AE, DH, BF, CG हैं।
घनाभ के कुल किनारों की संख्या = 12
घनाभ के शीर्ष – A,B,C,D,E,F,G,H हैं।
घनाभ के शीर्षों की कुल संख्या = 8

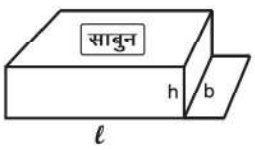


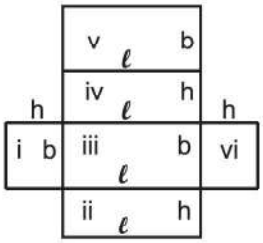
घनाभ के दो आसन्न फलक (सम्मुख फलकों को छोड़कर) एक दूसरे के लम्बवत होते हैं।

15.2.1 घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक घनाभाकार डिब्बा (जैसे–टूथपेस्ट का डब्बा, साबुन का डब्बा) लेते हैं तथा काटकर और खोलकर फैला देते हैं। हमें छह आयताकार सतह की आकृति प्राप्त होती है। छह आयताकार सतहों के क्षेत्रफल का योग, घनाभाकार डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल होता है।

माना घनाभ की लम्बाई ℓ
चौड़ाई b तथा ऊँचाई h है।



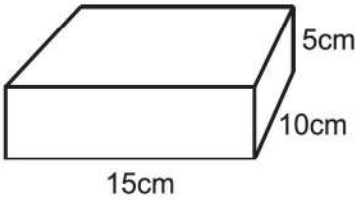


घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल
= छह आयताकार सतहों के क्षेत्रफल का योग
= I का क्षेत्रफल + II का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल + V का क्षेत्रफल + VI का क्षेत्रफल
$= b \times h + \ell \times h + \ell \times b + \ell \times h + \ell \times b + b \times h$
$= bh + \ell h + \ell b + \ell h + \ell b + b h$
$= 2\ \ell b + 2bh + 2\ell h$

घनाम का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\ (\ell b + bh + h\ell)$
जहाँ ℓ = लम्बाई, b = चौड़ाई, h = ऊँचाई

उदाहरण 1 :– एक घनाभाकार साबुन के डिब्बे की लम्बाई = 15 cm, चौड़ाई = 10 cm और ऊँचाई = 5 cm है। डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– एक घनाभाकार साबुन का डिब्बा जिसमें $\ell = 15$ cm, b = 10 cm, h = 5 cm



घनाभाकार डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\ (\ell b + bh + \ell h)$
$= 2\ (15 \times 10 + 10 \times 5 + 5 \times 15)\text{cm}^2$
$= 2\ (150 + 50 + 75)\ \text{cm}^2$
$= 2 \times 275\ \text{cm}^2$
$= 550\ \text{cm}^2$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

प्रयास कीजिए : A

(1) अपने गणित किताब की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई (मोटाई) मापिए और किताब का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(2) दिए गए आकृति का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

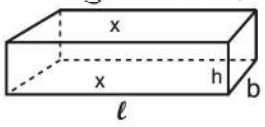


15.4 घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

घनाभ के पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य है घनाभ के ऊपर और नीचे के पृष्ठ को छोड़कर, शेष चार पृष्ठों का क्षेत्रफल।

जैसे – किसी कमरे के चारों दीवारों (छत और फर्श को छोड़कर) का कुल क्षेत्रफल, कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल होता है।

यदि घनाभ की लम्बाई ℓ, चौड़ाई b तथा h ऊँचाई हो, तो



घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

= चारों पार्श्व पृष्ठों का क्षेत्रफल

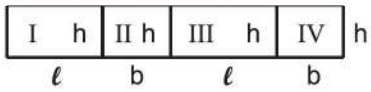
= I का क्षेत्रफल + II का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल

$= \ell \times h + b \times h + \ell \times h + b \times h$

$= \ell h + bh + \ell h + bh$

$= 2\ell h + 2bh$

$= 2(\ell + b)\, h$



घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(\ell + b)\, h$

इस प्रकार हम कह सकते हैं

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

उदाहरण 2 :– एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 12 m, 8m तथा 4m है। घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– घनाभ में $\ell = 12$ m, $b = 8$ m, $h = 4$ m

घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(\ell + b)\, h$

$= 2\,(12 + 8)\text{m} \times 4\text{m} = 2 \times 20 \times 4\ \text{m}^2$

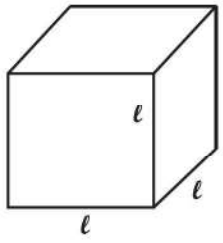
$= 160\ \text{m}^2$

प्रयास कीजिए : B

अपने कक्षा की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई मापिए तथा कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए अर्थात चारों दीवारों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15.2.2 घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

जिस घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर होती है, उसे घन कहते हैं।



लम्बाई = चौड़ाई = ऊँचाई

$\ell = b = h$

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + h\ell)$

घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell \times \ell + \ell \times \ell + \ell \times \ell)$

$= 2(\ell^2 + \ell^2 + \ell^2)$

$= 2(3\ell)^2 = 6\ell^2$

घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6\ell^2$

घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell + \ell) \times \ell = 2 \times 2\ell \times \ell = 4\ell \times \ell = 4\ell^2$

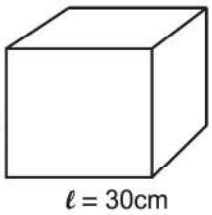
घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\ell^2$

उदाहरण 3 :– 30 cm भुजा वाले घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6\ell^2 = 6 \times 30^2\ \text{cm}^2$

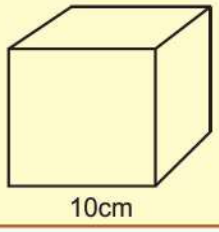
$= 6 \times 900\ \text{cm}^2 = 5400\ \text{cm}^2$

घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\ell^2 = 4 \times 30^2\ \text{cm}^2 = 4 \times 900\ \text{cm}^2 = 3600\ \text{cm}^2$



प्रयास कीजिए : C

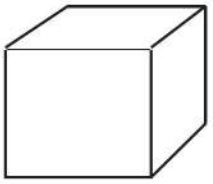
10 m भुजा वाले घन का कुल पृष्ठीय एवं पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उदाहरण 4 :– 864 cm^2 पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल :– घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6\ell^2$

$$864cm^2 = 6\ell^2$$
$$\frac{864}{6}\ cm^2 = \ell^2$$
$$\ell^2 = 144cm^2$$
$$\ell^2 = 12^2cm^2$$
$$\ell = 12cm$$

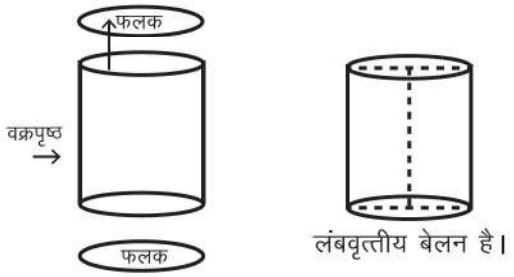


15.2.3 बेलन

हम अपने आसपास बहुत सारे बेलनाकार आकृतियों को देखते हैं जैसे – ट्यूबलाइट, पानी का पाइप, गोल खंभा, रोलर आदि। ये सभी आकृतियाँ लंबवृत्तीय बेलन हैं।

लंबवृत्तीय बेलन उस बेलन को कहते है जिसके वृत्ताकार फलकों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड आधार पर लंब हो।

इस अध्याय में बेलन से तात्पर्य लंबवृत्तीय बेलन से ही है तथा हम लंबवृत्तीय बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन के बारे में अध्ययन करेंगे।

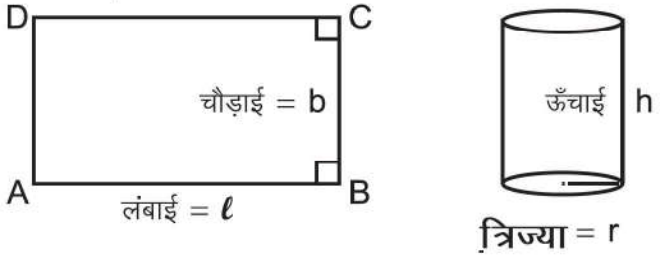


बेलन के एक वक्रपृष्ठ तथा दो वृत्ताकार फलक हैं।

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक आयताकार पेपर ABCD लेते हैं। पेपर को चौड़ाई के अनुदिश इस प्रकार मोड़ते हैं कि भुजाएँ BC और AD एक दूसरे को छूने लगे। इस प्रकार मोड़ने से आयताकार पेपर, बेलन बन जाता है।

माना प्राप्त बेलन की ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या r है।



स्पष्ट रूप से ,

आयत की चौड़ाई = बेलन की ऊँचाई

$b = h$

आयत की लम्बाई = बेलन के वृताकार आधार की परिधि

$\ell = 2\pi r$

बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल $= \ell \times b = 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$



बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × वृत्ताकार आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r (h + r)$

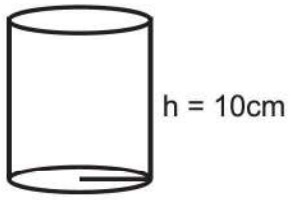
उदाहरण 5 :– एक बेलन की त्रिज्या 14 cm तथा ऊँचाई 10 cm है तो बेलन का वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलन की त्रिज्या $r = 14$ cm तथा ऊँचाई $h = 10$ cm

बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

$= 880 \text{ cm}^2$



बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r (h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 (10+14) \text{ cm}^2$

$= 88 \times 24 \text{ cm}^2$

$= 2112 \text{ cm}^2$

उदाहरण 6 :– बेलन के आधार की परिधि 44 cm तथा ऊँचाई 12 cm हो तो बेलन का वक्र तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

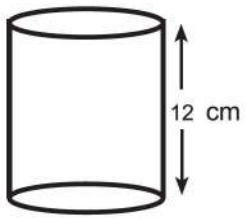
हल :– बेलन की परिधि = 44 cm

$2\pi r = 44 \text{ cm}$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44 \text{ cm}$

$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$

$r = 7 \text{ cm}$



बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 12$

$= 44 \times 12 = 528 \text{ cm}^2$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (12+7) \text{ cm}^2$

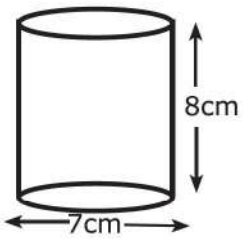
$= 44 \times 19 \text{ cm}^2 = 836 \text{ cm}^2$

उदाहरण 7 :– बेलन का व्यास 7 cm तथा ऊँचाई 8 cm हो तो बेलन का वक्रपृष्ठीय एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलन की त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2}$

$r = \frac{7}{2} \text{ cm}$

$h = 8 \text{ cm}$



बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times 8 \text{ cm}^2 = 176 \text{ cm}^2$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times (8 + \frac{7}{2}) \text{ cm}^2$

$= 22 \times \frac{23}{2} \text{ cm}^2 = 253 \text{ cm}^2$

उदाहरण 8 :– एक घनाभाकार कक्ष की आंतरिक माप 12m, 8m तथा 4m है। यदि सफेदी कराने का खर्च ₹5 प्रति वर्ग मी है तो कक्ष की चार दीवारों एवं छत को सफेदी कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल :– कमरे की $\ell = 12 \text{ m}, b = 8 \text{ m}, h = 4 \text{ m}$

कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल + छत का क्षेत्रफल

$= 2(\ell + b)\ h + \ell \times b$

$= 2(12 + 8) \text{ m} \times 4 \text{ m} + 12 \text{ m} \times 8 \text{ m}$

$= 160 + 96 \text{ m}^2 = 256 \text{ m}^2$

$\because 1 \text{ m}^2$ सफेदी कराने का खर्च = ₹5

$\therefore 256 \text{ m}^2$ सफेदी कराने का खर्च $= 256 \times ₹5 = ₹1280$

उदाहरण 9 :– तेल के एक डिब्बे की विमाएँ 26 cm × 26 cm × 45 cm हैं, तो ज्ञात कीजिए

(i) ऐसे 100 डिब्बे बनाने के लिए आवश्यक टीन की चादर का क्षेत्रफल।

(ii) ₹30 प्रति मी की दर से इन डिब्बों को बनाने में लगने वाली टीन की चादर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :– डिब्बे की लंबाई $\ell = 26$ cm

चौड़ाई $b = 26$ cm

ऊँचाई $h = 45$ cm

1 डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$

$= 2(26 \times 26 + 26 \times 45 + 26 \times 45)\ cm^2$

$= 2(676 + 1170 + 1170)\ cm^2$

$= 6032\ cm^2$

$\therefore$ 100 डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 603200\ cm^2$

$= 603200 \times \frac{1}{10000}\ m^2$

$= 60.32\ m^2$

1m = 100 cm

$1\ cm = \frac{1}{100}\ m$

$1\ cm^2 = \frac{1}{10000}\ m^2$

$1\ m^2$ टीन की चादर का मूल्य = ₹30

$60.32\ m^2$ टीन की चादर का मूल्य $= 60.32 \times$ ₹30

= ₹1809.60

उदाहरण 10 :– एक शहर में 1200 बेलनाकार लैंप पोस्ट हैं। जिसमें प्रत्येक लैंप पोस्ट की त्रिज्या 7 cm तथा ऊँचाई 12 m है। ₹8 प्रति m^2 की दर से सभी लैंप पोस्ट के वक्र भाग को पेंट कराने की लागत ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलनाकार लैंप पोस्ट की त्रिज्या $(r) = 7$ cm $= 0.07$ m

ऊँचाई $h = 12$ m

एक लैंप पोस्ट का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.07 \times 12 m^2$

$= 5.28\ m^2$

1200 लैंप पोस्ट का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 5.28 \times 1200\ m^2$

$= 6336\ m^2$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

$\because 1\ m^2$ पर पेंट कराने की लागत $= ₹8$

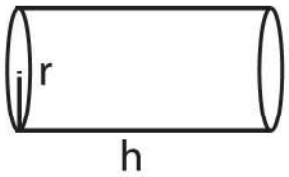
$\therefore 6336\ m^2$ पर पेंट कराने की लागत $= 6336 \times ₹8$

$= ₹50,688$

उदाहरण 11 :– किसी सड़क को समतल करने के लिए एक रोड रोलर को सड़क के ऊपर एक बार घुमने के लिए 750 चक्कर लगाने पड़ते हैं। यदि रोड रोलर का व्यास 84 cm और लंबाई 1 m है तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– रोलर की त्रिज्या $r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{84\,cm}{2}$

$r = 42\ cm = 0.42\ m$



रोलर की लंबाई $h = 1\ m$

रोलर का वक्रपृष्टीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.42\ m \times 1m$

$= 2.64\ m^2$

$\therefore$ 1 चक्कर लगाने पर रोलर द्वारा आच्छादित सड़क का क्षेत्रफल $= 2.64\ m^2$

$\because$ 750 चक्कर में रोलर द्वारा आच्छादित सड़क का क्षेत्रफल $= 750 \times 2.64$

सड़क का क्षेत्रफल $= 1980\ m^2$

उदाहरण 12 :– 21 cm त्रिज्या वाले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $3960\ cm^2$ है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल :– मान लिया बेलन की ऊँचाई $= h$

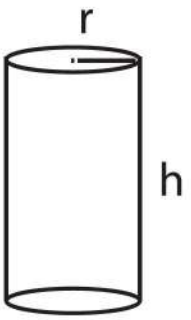
त्रिज्या $r = 42\ cm$

बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h+r)$

$3960\ cm^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21\ (h+21)\ cm$

$h + 21\ cm = \frac{3960 \times 7}{2 \times 22 \times 21} = 30\ cm$

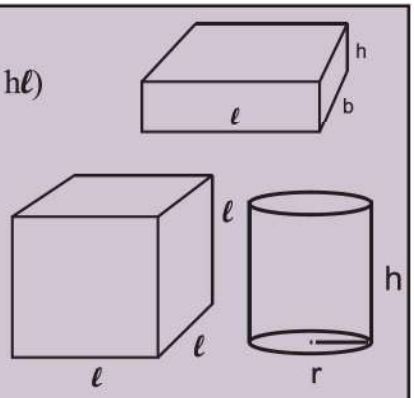
$h = 30\ cm - 21\ cm = 9\ cm$



अतः बेलन की ऊँचाई $= 9\ cm$

याद रखिए –

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 2(\ell b + bh + h\ell)$
घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 2(\ell + b)h$
घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 6\ell^2$
घन का पार्श्व पष्ठीय क्षेत्रफल	$= 4\ell^2$
बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 2\pi rh$
बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 2\pi r(h + r)$



प्रश्नावली 15.1

(1) घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(a) लम्बाई = 10 cm चौड़ाई = 8 cm ऊँचाई = 6 cm

(b) लम्बाई = 2.5 m चौड़ाई = 1.4 m ऊँचाई = 3 m

(2) घन का पार्श्व एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा –

(a) 5 cm हो। (b) 20 cm हो। (c) 11 m हो। (d) 1.2 m हो।

(3) बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(a) त्रिज्या = 7 cm ऊँचाई = 20 cm

(b) त्रिज्या = 3.5 m ऊँचाई = 1.4 m

(c) व्यास = 14 cm ऊँचाई = 15 cm

(d) आधार की परिधि = 88 cm ऊँचाई = 25 cm

(e) आधार की परिधि = 176 cm ऊँचाई = 16 cm

(4) चॉक के एक डिब्बे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 16 cm, 8 cm और 6 cm है। डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(5) एक घनाभाकार टिन के डिब्बे की लंबाई 30 cm, चौड़ाई 40 cm और ऊँचाई 50 cm है। ₹20 प्रति m^2 की दर से ऐसे 20 डिब्बे बनाने के लिए आवश्यक टिन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(6) 80 cm × 48 cm × 24 cm माप वाले एक सुटकेस को तिरपाल के कपड़े से ढँकना है। ऐसे 100 सुटकेसों को ढँकने के लिए 96 cm चौड़ाई वाले कितने मीटर लंबे तिरपाल के कपड़े की आवश्यकता होगी ?

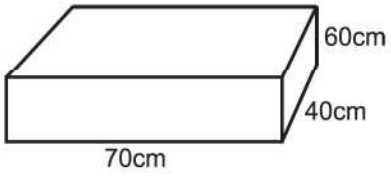
"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

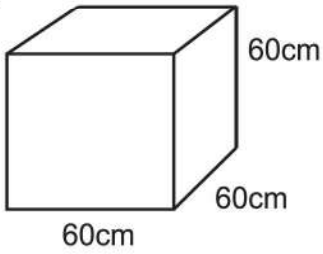
(7) एक कमरा 5 मी लंबा, 4 मी चौड़ा और 3 मी ऊँचा है। इसकी दीवारों और छत पर ₹25 प्रति वर्ग मी की दर से पेन्ट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

(8) ऊपर से खुले धातु के घनाभाकार डिब्बे की विमाएँ 20 cm × 16 cm × 14 cm हैं। ऐसे 10 डिब्बे बनाने के लिए आवश्यक धातु की शीट का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

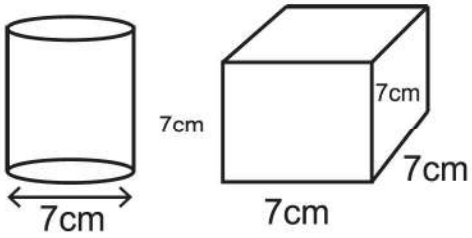
(9) 600 सेमी^{2} पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

(10) निम्न आकृति में एक घनाभाकार एवं एक घनाकार डिब्बे दर्शाये गये हैं। किस डिब्बे को बनाने के लिए कम सामग्री की आवश्यकता होगी?





(11) दी गई दो आकृतियाँ किस प्रकार एक समान है और किस प्रकार एक दूसरे से भिन्न है? किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है?



(12) 4 m त्रिज्या तथा 3 m ऊँचाई वाले एक बंद बेलनाकार टंकी किसी धातु से बनी है। उसे बनाने के लिए आवश्यक धातु की मात्रा ज्ञात कीजिए।

(13) एक भवन में 25 बेलनाकार खंभे हैं। पिलर की त्रिज्या 28 cm तथा ऊँचाई 8 m है ₹10 प्रति m^2 की दर सभी खंभों के वक्र भाग को पेंट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।

(14) 1.2 m लम्बाई वाले रोड रोलर का व्यास 84 cm है यदि किसी मैदान को समतल करने के लिए रोड रोलर को एक बार घूमने के लिए 500 चक्कर लगाने पड़ते हैं। मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

(15) एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 cm और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 528 cm^2 है।

15.3 आयतन

किसी ठोस (त्रिविमीय वस्तु) द्वारा घेरे गए स्थान की मात्रा को आयतन कहते हैं। जैसे – किसी कमरे में संदूक रखा हुआ है, वह संदूक कमरे में जितना स्थान घेरता है वह स्थान उस संदूक का आयतन होता है। कमरे का भी आयतन होता है। हम कह सकते हैं कि कमरे का आयतन संदूक के आयतन की तुलना में ज्यादा है। अब प्रश्न आता है कि आयतन की माप कैसे करेंगे?

आपको याद होगा कि किसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं तथा आकृतियों को इकाई वर्गों में विभाजित करते हैं। उसी प्रकार ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे तथा ठोस को इकाई घनों में विभाजित करेंगे।

आयतन का मात्रक

आयतन का मात्रक घन इकाई या $(\text{इकाई})^3$ होता है। जैसे – घन सेमी, घन मीटर, घन मिली मीटर (संक्षेप में सेमी^3, मी^3, मिमी^3)

1 घन मीटर $= 1 \text{ मी} \times 1 \text{ मी} \times 1 \text{ मी} = 1 \text{ मी}^3$

$= 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} = 1000000 \text{सेमी}^3$

1 घन सेमी $= 1 \text{ सेमी} \times 1 \text{ सेमी} \times 1 \text{ सेमी} = 1 \text{ सेमी}^3$

$= 10 \text{ मिमी} \times 10 \text{ मिमी} \times 10 \text{ मिमी} = 1000 \text{ मिमी}^3$

तरल का आयतन मापने के लिए लीटर (L) या मिलीलीटर (ml) मात्रक का उपयोग करते हैं।

1 सेमी^3 = 1000 मिलीलीटर (ml)

1000मिलीलीटर = 1 लीटर (L)

1 मीटर^3 = 1000 लीटर (L)

15.3.1 घनाभ का आयतन

एक घनाभ की लंबाई 7 सेमी, चौड़ाई 4 सेमी तथा ऊँचाई 3 सेमी है। घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

घनाभ का आयतन = 1 सेमी भुजा वाले घन की संख्या

1 पंक्ति में घनों की संख्या = 7

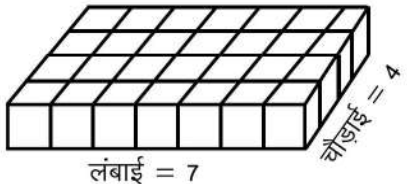
1 सतह में घनों की संख्या = 4 पंक्ति में घन की संख्या

$= 7 \times 4$

घनाभ में घनों की संख्या = 3 सतह में घन की संख्या

घनाभ का आयतन $= 7 \times 4 \times 3$

$= 84$ घन इकाई



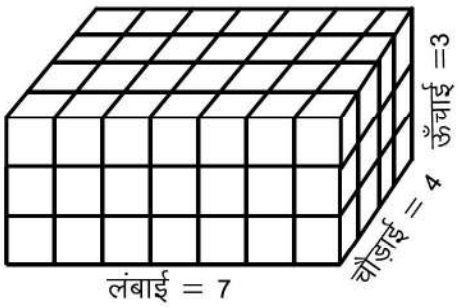
(एक सतह में $7 \times 4 = 28$ ईकाई घन है।)

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

यदि लंबाई = ℓ, चौड़ाई = b, ऊँचाई = h, आयतन = V

घनाभ का आयतन $V = (\ell \times b) \times h$

= (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई



घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

15.3.2 घन का आयतन

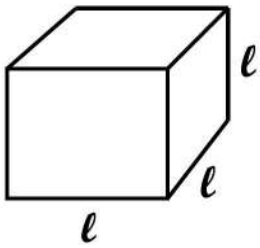
चूँकि घन एक ऐसा घनाभ है जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई तीनों बराबर होती है।

लंबाई = चौड़ाई = ऊँचाई = भुजा

घन का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

= भुजा × भुजा × भुजा

= $(\text{भुजा})^3$



यदि घन की भुजा ℓ हो तो

घन का आयतन $V = \ell^3$

15.3.3 बेलन का आयतन

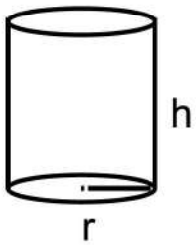
हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल है। इसी प्रकार हम बेलन का आयतन भी ज्ञात कर सकते है। घनाभ के समान बेलन का आधार और शीर्ष एक–दूसरे के सर्वांगसम एवं समांतर है। वक्र पृष्ठ आधार पर लंब है।

यदि बेलन के आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h हो तो

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

= $\pi r^2 \times h$

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$



वृत्ताकार आधार का क्षेत्रफल = πr^2

उदाहरण 13 :– घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी लंबाई 8 m, चौड़ाई 6 m और ऊँचाई 3.5 m है।

हल :– घनाभ की लंबाई $\ell = 8\text{m}$, चौड़ाई $b = 6\text{m}$ ऊँचाई $h = 3.5\text{m}$

घनाभ का आयतन $= \ell \times b \times h$

$= (8 \times 6 \times 3.5)\ \text{m}^3$

$= 168\ \text{m}^3$

उदाहरण 14 :– 9 cm भुजा वाले घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :– घन का आयतन $=$ (भुजा)$^3 = (9)^3 = 729\ \text{cm}^3$

उदाहरण 15 :– बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3.5cm तथा ऊँचाई 40cm है।

हल :– बेलन की त्रिज्या $r = 3.5\ \text{cm}$, ऊँचाई $h = 40\ \text{cm}$

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 40$

$= 1540\ \text{cm}^3$

उदाहरण 16 :– एक लंबवृतीय बेलन का व्यास 21 cm तथा ऊँचाई 10 cm है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलन की त्रिज्या $r = \frac{21}{2}\ \text{cm}$ ऊँचाई $= 10\ \text{cm}$

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 10\ \text{cm}^3$

$= 3465\ \text{cm}^3$

उदाहरण 17 :– एक बेलन के आधार की परिधि 44 cm तथा ऊँचाई 15 cm है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलन के आधार की परिधि $= 44\ \text{cm}$

$2\pi r = 44\ \text{cm}$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$

त्रिज्या $r = 7\ \text{cm}$

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

ऊँचाई = 15 cm

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 7cm \times 7cm \times 15cm$

$= 2310\ cm^3$

उदाहरण 18 :– एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 15 cm चौड़ाई 12 cm और आयतन 900 cm^3 है।

हल :– घनाभ का आयतन = 900 cm^3

$\ell \times b \times h = 900\ cm$

$h = \frac{900}{\ell \times b}$

$= \frac{900}{15 \times 12} = 5\ cm$

उदाहरण 19 :– 6 m × 4 m × 3 m के एक कमरे में 20 cm भुजा वाले कितने घनाकार बॉक्स रखे जा सकते हैं?

हल :– एक घनाकार बॉक्स का आयतन = (भुजा)^3

$= (20\ cm)^3$

$= (\frac{20}{100}\ m)^3 = 0.008\ m^3$

कमरे का आयतन = $\ell \times b \times h$

$= 6\ m \times 4\ m \times 3\ m$

$= 72\ m^3$

मान लिया कमरे में n बॉक्स रखे जा सकते हैं।

n × 1 बॉक्स का आयतन = कमरे का आयतन

$n = \frac{\text{कमरे का आयतन}}{\text{1बॉक्स का आयतन}} = \frac{72}{0.008} = \frac{72 \times 1000}{8}$

= 9000 बॉक्स

उदाहरण 20 :– एक बेलन का आयतन 1.54 m^3 तथा उसका व्यास 140 cm है, तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

हल :– बेलन की त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2}$

$$r = \frac{140}{2}\ \text{cm} = 70\ \text{cm} = \frac{70}{100}\ \text{cm}$$

$$r = 0.7\ \text{m}$$

बेलन का आयतन $= 1.54\ \text{m}^3$

$$\pi r^2 h = 1.54$$

$$\frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times h = 1.54$$

$$22 \times 0.07 \times h = 1.54$$

$$h = \frac{1.54}{22 \times 0.07}$$

$$h = 1\ \text{m}$$

बेलन की ऊँचाई $= 1\ \text{m}$

उदाहरण 21 :– 44 cm × 18 cm माप के आयताकार पेपर को उसकी चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर एक बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

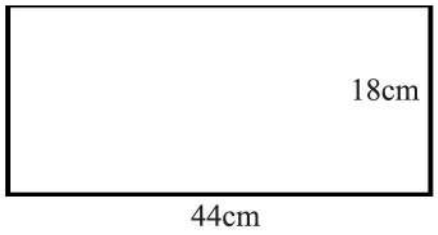
हल :– बेलन के आधार की परिधि = आयताकार पेपर की लंबाई

$$2\pi r = 44$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

$$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$$

$$r = 7\ \text{cm}$$



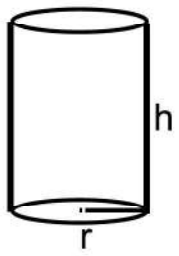
बेलन की ऊँचाई = आयताकार पेपर की चौड़ाई

$$h = 18\ \text{cm}$$

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 18\ \text{cm}^3$$

$$= 2772\ \text{cm}^3$$



उदाहरण 22 :– 3.5 m त्रिज्या तथा 16 m गहरा कुआँ खोदने में निकाली गई मिट्टी का आयतन ज्ञात कीजिए। कुएँ से निकाली गई मिट्टी को 25 m × 16 m माप के एक प्लॉट पर बिछाने से बने चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

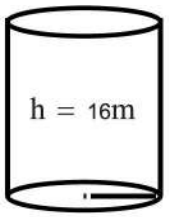
हल :– बेलनाकार कुआँ की त्रिज्या $r = 3.5\ m = \frac{7}{2}\ m$

गहराई $h = 16\ m$

बेलनाकार कुआँ का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 16\ m^3$

$= 616\ m^3$



चबूतरे का आयतन = बेलनाकार कुएँ का आयतन

$\ell \times b \times h = 616\ m^3$

$25 \times 16 \times h = 616$

$h = \frac{616}{400}$

$h = 1.54\ m$

चबूतरे की ऊँचाई = 1.54 m



प्रश्नावली 15.2

1. घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

(a)	लंबाई = 6 m	चौड़ाई = 3 m	ऊँचाई = 2 m
(b)	लंबाई = 12 m	चौड़ाई = 9 m	ऊँचाई = 5 m
(c)	लंबाई = 60 m	चौड़ाई = 4.5 m	ऊँचाई = 30 m
(d)	लंबाई = 6 m	चौड़ाई = 4.5 m	ऊँचाई = 4 m

2. घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा की माप नीचे दी गई है।

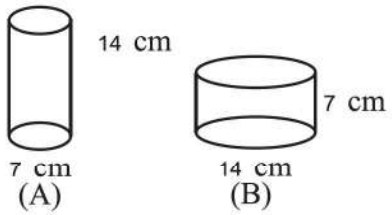
(a) 7 cm (b) 12 cm (c) 50 cm (d) 1.5 m

3. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

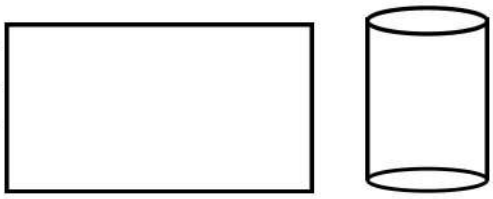
(a)	त्रिज्या = 7 cm	ऊँचाई = 7 cm
(b)	व्यास = 20 cm	ऊँचाई = 21 cm
(c)	व्यास = 7 cm	ऊँचाई = 60 cm
(d)	आधार की परिधि = 11 cm	ऊँचाई = 4 cm
(e)	आधार की परिधि = 88 cm	ऊँचाई = 25 cm

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"

4. एक घनाभ का आयतन 168 m^3 है तथा आधार का क्षेत्रफल 28 m^2 है। घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक घनाभाकार लकड़ी के टुकड़े का आयतन 189 cm^3 है। यदि इसकी लंबाई और ऊँचाई क्रमशः 7 cm तथा 4.5 cm हो, तो चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
6. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 8 m, 6.5 m, और 3.5 m, है। कमरे में स्थित हवा का आयतन ज्ञात कीजिए।
7. एक घनाभ की विमाएँ 60 cm × 54 cm × 30 cm है। इस घनाभ के अंदर 6 cm भुजा वाले कितने छोटे घन रखे जा सकते हैं?
8. 56 cm × 0.4 m × 0.25 m माप वाले कार्टुन बॉक्स में 7 cm × 5 cm × 2.5 cm माप की कितनी साबुन की टिकिया रखी जा सकती है?
9. यदि किसी घन के प्रत्येक किनारे को तिगुना कर दिया जाए तो
   (i) इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितना गुना वृद्धि होगी?
   (ii) इसके आयतन में कितना गुना वृद्धि होगी?
10. बेलन A का व्यास 7 cm और ऊँचाई 14 cm है। बेलन B का व्यास 14 cm और ऊँचाई 7 cm है। दोनों में से किसका आयतन अधिक है? जाँच कीजिए कि क्या अधिक आयतन वाले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी अधिक है?



11. एक बेलनाकार टैंक की क्षमता 5632 m^3 है। यदि इसके आधार पर व्यास 16 m है, तो टैंक की गहराई ज्ञात कीजिए।
12. 20 cm चौड़ाई वाले एक आयताकार पेपर को उसकी लंबाई के अनुदिश मोड़कर 7 cm त्रिज्या वाला एक बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।



13. एक आयताकार सीट जिसकी लंबाई 22 cm तथा चौड़ाई 8 cm है, को उसके लंबाई के अनुदिश मोड़कर बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
14. एक दूध के बेलनाकार टैंकर की त्रिज्या 1.5 m तथा लंबाई 7 m है। टैंकर में अधिकतम कितना लीटर दूध रखा जा सकता है? (1 घन मीटर =1000 लीटा)
15. 7 m व्यास वाला एक कुआँ 20 m गहरा खोदा गया, जिसमें से निकली मिट्टी को 14 m लंबाई तथा 11 m चौड़ाई वाले आयताकार क्षेत्र में समान रूप से फैलाकर एक चबूतरा बनाया गया है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2019-2020"