1 पूर्णांक (Integers)

मुख्य अवधारणाएँ

- ★ पूर्णांकों की तुलना
- ★ पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन
- ★ पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के गुण
- ★ पूर्णांकों के गुणन एवं इसके गुण
- ★ पूर्णांकों में विभाजन एवं इसके गुण

FJULXR

1.1 भूमिका (Introduction):

कक्षा 6 में हम पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। हम जानते हैं कि पूर्णांक, पूर्ण संख्या एवं ऋणात्मक संख्याओं का एक बड़ा संग्रह है।

प्राकृत संख्या (Natural number)

गणना की संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ कहलाती है, जैसेः 1, 2, 3, 4, 5, . . . इत्यादि सभी प्राकृत संख्याएँ हैं।

पूर्ण संख्या (Whole number)

प्राकृत संख्याएँ शून्य (0) के साथ मिलाकर पूर्ण संख्याओं का संग्रह बनाती है। अतः 0, 1, 2, 3, 4, . . . इत्यादि पूर्ण संख्याएँ हैं।

ऋणात्मक संख्या (Negative number)

$-1, -2, -3, -4, \ldots$ इत्यादि ऋणात्मक संख्याएँ हैं।

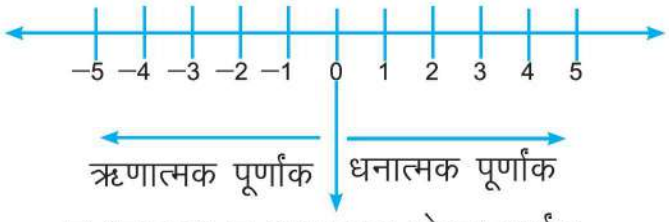
पूर्णांक (Integer)

पूर्ण संख्याएँ, ऋणात्मक संख्याओं के साथ मिलकर संख्याओं का एक संग्रह बनाती है जो पूर्णांक कहलाती है।

अतः $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ इत्यादि पूर्णांक हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

संख्या रेखा पर



ऋणात्मक पूर्णांक | धनात्मक पूर्णांक

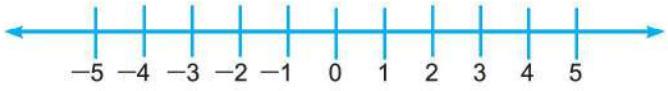
न धनात्मक न ऋणात्मक केवल पूर्णांक

- 1, 2, 3, 4, 5, . . . इत्यादि धनात्मक पूर्णांक हैं।
- –1, –2, –3 ,–4 इत्यादि ऋणात्मक पूर्णांक हैं।
- शून्य एक पूर्णांक है, जो न तो धनात्मक है और न ऋणात्मक।

पिछली कक्षा में हमने संख्या रेखा पर पूर्णाकों का निरूपण, पूर्णांकों का योग एवं व्यवकलन (घटाव) सीखा। यहां हम उनके गुणों के बारे में और अधिक अध्ययन करेंगे।

1.2 पुनरावलोकन (Recapitulation)

हम जानते हैं कि पूर्णाकों को संख्या रेखा पर बिन्दुओं के द्वारा निरूपित किया जा सकता है जैसेः



ऊपर दिखाए गए संख्या रेखा को देखकर, हम निष्कर्ष निकालते हैं –

- सबसे बड़ा कोई पूर्णांक नहीं है। सबसे छोटा कोई पूर्णांक नहीं है।
- संख्या रेखा पर स्थित कोई भी पूर्णांक अपने बाईं ओर के पूर्णांकों से बड़ी होती है।
- संख्या रेखा पर स्थित कोई पूर्णांक अपनी दाईं ओर के पूर्णाकों से छोटी होती है।
- दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच कोई अन्य पूर्णांक नहीं होता है। जैसे : दो क्रमिक पूर्णाकों –5, और –4 के बीच में कोई अन्य पूर्णांक नहीं है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

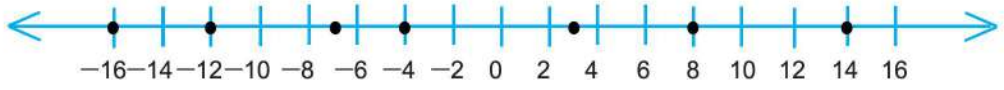
1.2.1 पूर्णांकों की तुलना (Comparison of Integers):

- प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक, प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।
- सभी धनात्मक पूर्णांक, शून्य से बड़ा होता है। सभी ऋणात्मक पूर्णांक शून्य से छोटा होता है।
- संख्या रेखा पर कोई संख्या शून्य से दाईं ओर जितनी अधिक दूरी पर होगी, उतनी ही बड़ी होगी।
- संख्या रेखा पर कोई संख्या शून्य से बाईं ओर जितनी अधिक दूरी पर होगी, उतनी ही छोटी होगी।

अतः किसी संख्या रेखा पर जब हम

- एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।
- एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो बाईं ओर चलते है।
- एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
- एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

उदाहरण : नीचे दी गई संख्या रेखा पर कुछ पूर्णाकों को बिंदुओं से दर्शाया गया है:



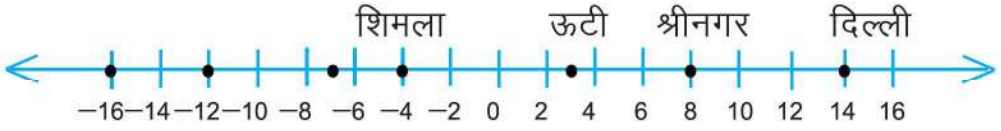
(a) दर्शाए गए पूर्णाकों को आरोही क्रम में लिखिए।

(b) दर्शाए गए पूर्णाकों को अवरोही क्रम में लिखिए ।

हल: (a) आरोही क्रम : −16, −12, −7, −4, 3, 8, 14

(b) अवरोही क्रम : 14, 8, 3, −4, −7, −12, −16

उदाहरण: विभिन्न स्थानों के तापमान को डिग्री सेल्सियस (^{0}c) में निम्नलिखित संख्या रेखा पर दर्शाया गया है।



(a) संख्या रेखा को देखिए और इस पर अंकित स्थानों के तापमान लिखिए।

(b) सबसे गर्म एवं सबसे ठंडा स्थान के तापमानों में क्या अंतर है?

(c) क्या हम कह सकते हैं कि शिमला और श्रीनगर के तापमानों का योग शिमला के तापमान से कम है ?

हल : (a) दी गई संख्या रेखा पर अंकित स्थानों के तापमान इस प्रकार है :

शिमला $\rightarrow$ -4^0c ऊटी $\rightarrow$ 3^0c

श्रीनगर $\rightarrow$ 8^0c दिल्ली $\rightarrow$ 14^0c

(b) सबसे गर्म स्थान दिल्ली का तापमान : 14^0c

सबसे ठंडा स्थान शिमला का तापमान : -4^0c

$\therefore$ दिल्ली और शिमला का तापमानों में अंतर $= 14^0c - (-4^0c)$

$= 14^0c + 4^0c = 18^0c$

(c) श्रीनगर का तापमान $= 8^0c$

शिमला का तापमान $= -4^0c$

श्रीनगर और शिमला के तापमानों का योग $= 8^0c + (-4^0c) = 4^0c$

$\therefore$ शिमला का तापमान $= -4^0c$

अतः श्रीनगर और शिमला के तापमानों का योग शिमला के तापमान से अधिक है।

1.2.2 पूर्णांकों का योग एवं व्यवकलन (Addition and Subtraction of Integers)

1.2.3 पूर्णांकों का योग (Addition of Integers)

पूर्णांकों का योग

(a) दो धनात्मक पूर्णांकों का योग

(b) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग

(c) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांको का योग

(a) दो धनात्मक पूर्णांकों का योग

दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

उदाहरण : (i) $(+4) + (+5)$ (ii) $56 + 73$

हल : $(+4) + (-5) = 4 + 5 = 9$ **हल :** $56 + 73 = 129$

(b) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग

जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर तो हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

उदाहरण : (i) $(-6) + (-7)$ (ii) $(-56) + (-73)$

हल : $(-6) + (-7) = -13$ **हल :** $(-56) + (-73) = -129$

(c) एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योग

जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हम उनके चिह्नों की उपेक्षा करते हुए बड़ी संख्या से छोटी संख्या को घटा देते हैं। फिर बड़ी संख्या के चिह्न को इसके साथ लगा देते हैं।

उदाहरण : (i) $(-4) + 3$ (ii) $(-56) + 73$

हल : $(-4) + 3 = -1$ **हल :** $(-56) + 73 = 17$

1.2.4 योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse)

किसी पूर्णांक a का योज्य प्रतिलोम $(-a)$ है इसके विपरीत $(-a)$ का योज्य प्रतिलोम a होता है। जिसमें $a+(-a) = 0 = -a + a$

उदाहरण : (i) पूर्णांक 8 का योज्य प्रतिलोम (-8) है

क्योंकि, $8 + (-8) = 0$ तथा $(-8) + 8 = 0$

(ii) योज्य प्रतिलोम के कुछ और उदाहरण निम्नलिखित है :

पूर्णांक	योज्य प्रतिलोम	क्योंकि
7	-7	$7 + (-7) = 0$
-7	7	$(-7) + 7 = 0$
$-4a$	$4a$	$(-4a) + 4a = 0$

1.2.5 पूर्णांकों का व्यवकलन (Subtraction of Integers)

व्यवकलन, योग का विपरीत होता है। इसलिए घटाए जाने वाले पूर्णांक के योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ते हैं।

किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए :

$a - b = a + (b \text{ का योज्य प्रतिलोम}) = a + (-b)$

और $a - (-b) = a + [(-b \text{ का योज्य प्रतिलोम})] = a + b$

अतः ऋणात्मक का ऋणात्मक, धनात्मक होता है।

जैसे : $-(-2) = +2$ तथा $-(-11) = +11$ या 11

उदाहरण : (i) $(+5) - (-7)$ (ii) $9 - 4$

हल : $(+5) - (-7) = 5 + 7 = 12$ **हल :** $9 - 4 = 9 + (-4) = 5$

उदाहरण : रिक्त स्थानों में उपर्युक्त संकेतों $>, <$ या $=$ भरिए।

(i) $8 - 4 \square -3$ (ii) $0 \times 4 \square 0 + 4$

(iii) $(-5) + (-3) \square (-5) - 3$

हल : (i) $8 - 4 \square -3$

$\because 8 - 4 = 4$ और $4 > -3$

$\therefore 8 - 4 \boxed{>} -3$

(ii) $0 \times 4 = 0$ और $0 + 4 = 4$

$\therefore 0 < 4$

$\therefore 0 \times 4 \boxed{<} 0 + 4$

(iii) $(-5) + (-3) = -8$ और $(-5) - 3 = -8$

$\therefore -8 = -8$

$\therefore (-5) + (-3) \boxed{=} (-5) - 3$

प्रश्नावली 1.1

1) निम्नलिखित पूर्णांकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(i) $-20, 15, 3, 0, -4, 5$ (ii) $-37, 34, -102, 0, -52, -4, -5, 7$

2) निम्नलिखित पूर्णांकों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(i) $20, -2, 0, -5, 15, 11$ (ii) $-31, 121, -99, 54, 0, -3$

3) उपर्युक्त संकेतों $>$, $<$ या $=$ से निम्नलिखित रिक्त स्थानों को भरिए।

(i) $(-8) + (-5)$ ☐ $(-8) - 5$

(ii) $(-3) + 7\ (-12)$ ☐ $17 - 8 + (-19)$

(iii) $39+(-24) - (-15)$ ☐ $36 + (-52) - (-36)$

(iv) $(-201) + 79 + 63$ ☐ $(-299) + 189 + 51$

(v) $14 - 5 + 6$ ☐ $15 + 9-2$

4) निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए एक पैटर्न पता कीजिए एवं इनको पूरा कीजिए।

(i) $7, 3, -1, -5, \ldots, \ldots, \ldots,$

(ii) $-2, -4, -6, -8, \ldots, \ldots, \ldots,$

(ii) $15, 10, 5, 0, \ldots, \ldots, \ldots,$

(iv) $-11, -8, -5, -2, \ldots, \ldots, \ldots,$

(v) $-5, -4, -3, -2, \ldots, \ldots, \ldots,$

5) किसी मायावी वर्ग में प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ एवं विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। बताइए निम्नांकित में कौन सा वर्ग एक मायावी वर्ग है?

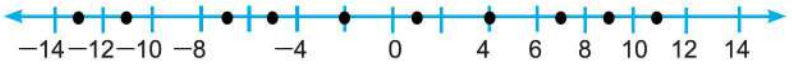
5	−1	−4
−5	−2	7
0	3	−3

A

1	−10	0
−4	−3	−2
−6	4	−7

B

6) निम्नलिखित संख्या रेखा पर पूर्णांकों के साथ कुछ बिंदु अंकित किए गए हैं।



(a) उपर्युक्त संख्या रेखा पर पूर्णाकों के अलावे कुछ बिन्दुओं को अंकित किया गया है। प्रत्येक बिन्दु के लिए उचित संख्या (पूर्णांक) लिखिए।

(b) अंकित बिन्दुओं का पूर्णांक संख्याओ को आरोही क्रम में लिखिए।

(c) अंकित बिन्दु का पूर्णांक संख्या लिखकर अवरोही क्रम में लिखिए।

7) पूर्णाकों 8, −5, 3, 0, −7, −4 को आरोही में क्रमबद्ध कीजिए। अपने उत्तर की जाँच करने के लिए इन्हें एक संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

8) किसी प्रश्नोत्तरी में सही उत्तर के लिए धनात्मक अंक दिए जाते हैं और गलत उत्तर के लिए ऋणात्मक अंक दिए जाते हैं। यदि जाँच उत्तरोतर चक्करों (round) में जैकी द्वारा प्राप्त किए गए अंक क्रमशः 15, −5, −10, 25 और 20 थे, तो बताइए अंत में उसके अंकों का योग कितना था?

9) रविवार को श्रीनगर का तापमान -5^0C था सोमवार को तापमान कम 3^0C कम हो गया। सोमवार को श्रीनगर का तापमान कितना था ? मंगलवार को तापमान 2^0C बढ़ गया। मंगलवार का श्रीनगर का तापमान कितना था?

10) मनोज अपने बैंक खाते में ₹5000 जमा करता है और अगले दिन इसमें से ₹2674 निकाल लेता है। यदि खाते में से निकाली गई राशि को ऋणात्मक संख्या से निरूपित किया जाता है तो खाते में जमा की गई राशि को आप कैसे निरूपित करेंगे ? निकासी के बाद मनोज के खाते की शेष राशि ज्ञात कीजिए।

11) सीमा बिंदु A से पूर्व की ओर बिंदु B तक 20 किलोमीटर की दूरी तय करती है। उसी सड़क के अनुदिश बिंदु B से वह 35 किलोमीटर की दूरी पश्चिम की ओर तय करती है। यदि पूर्व की ओर तय की गई दूरी को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है। तो पश्चिम की ओर तय की गई दूरी को आप कैसे निरूपित करेंगे? बिंदु A से उसकी अंतिम स्थिति को किस पूर्णांक से निरूपित करेंगे।

1.3 पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के गुण (Properties of addition and Subtraction of Integers) :

1.3.1 योग का संवृत गुण (Closure Property of Addition) :

हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग सदैव एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरण के लिए 14 + 25 = 39 यह गुण पूर्ण संख्याओं के योग संवृत कहलाता है।

इस अध्याय में हम देखेंगे कि क्या यह गुण पूर्णांकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं? दो पूर्णांकों a और b के लिए :

एक पूर्णांक (a)	दूसरा पूर्णांक (b)	योग (a+b)	क्या योगफल एक पूर्णांक है ?
3	4	3 + 4 = 7	हाँ
3	−4	3 + (−4) = −1	हाँ
−10	3	(−10) + 3 = −7	हाँ
−23	−10	(−23) + (−10) = −33	हाँ

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों का योग सदैव एक पूर्णांक होता है। इसलिए हम कहेंगे कि पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत (closed) होते हैं। अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए (a + b) एक पूर्णांक होता है।

1.3.2 व्यवकलन का संवृत गुण : (Closure Property of Subtraction)

हम जानते हैं कि जब हम एक पूर्ण संख्या को दूसरी पूर्ण संख्या में घटाते हैं तो उनका अंतर सदैव एक पूर्ण संख्या नहीं होती है। उदाहरण के लिए :

(a) 6 − 4 = 2 जो एक पूर्ण संख्या है।

(b) 4 − 6 = −2 जो एक पूर्ण संख्या नहीं है।

इसलिए हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत गुण का पालन नहीं करती है।

क्या यह कथन पूर्णांकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं? जब एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाते हैं तो क्या होता है? क्या उनका अंतर भी एक पूर्णांक होता है? आइए पूर्णांकों के कुछ युग्म लेकर इसकी सत्यता की जाँच करते हैं। दो पूर्णांक a और b के लिए :

एक पूर्णांक (a)	दूसरा पूर्णांक (b)	अंतर (a–b)	क्या परिणाम एक पूर्णांक है ?
9	7	9–7= 2	हाँ
7	9	7–9 = –2	हाँ
13	–21	13–(–21) = 34	हाँ
–6	–11	–6 –(–11) = 5	हाँ
–33	0	(–33) – 0 = –33	हाँ

उपर्युक्त सारणी में क्या पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म हमें प्राप्त होता है जिसका अंतर पूर्णांक नहीं है? अर्थात् जब एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाते है तो उसका अंतर एक पूर्णांक होता है। पूर्णांक का यह गुण व्यवकलन का संवृत गुण कहलाता है। दूसरे शब्दों में, पूर्णांक व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत होते हैं।

अर्थात् यदि a और b दो पूर्णांक हैं तो a – b भी एक पूर्णांक होता है।

आप उपर्युक्त से भिन्न किन्ही अन्य दो पूर्णोंकों का अंतर ज्ञात कर व्यवकलन के संवृत गुण जांच सकते हैं।

1.3.3. योग का क्रमविनिमेय गुण (Commutative Property of Addition)

हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है।

उदाहरण : 3 + 5 = 5 + 3 = 8

दूसरे शब्दों में पूर्ण संख्याओं के लिए योग क्रमविनिमेय होता है।

क्या पूर्णांकों के लिए भी योग क्रमविनिमेय होता है?

दो पूर्णांक a और b के लिए :

(a)	(b)	(a+b)	(b+a)	क्या (a+b) = (b+a)?
–4	9	(–4) + 9 = 5	9+(–4) = 5	हाँ
5	–6	5 +(–6) = –1	(–6) +5 = –1	हाँ
–3	–8	(–3)+(–8) = –11	(–8)+(–3) = –11	हाँ

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

उपर्युक्त सारणी में हमने देखा कि पूर्णांकों का क्रम बदल देने से उनके योगफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है। पूर्णांकों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। अतः पूर्णांकों के लिए योग क्रमविनिमय होता है। दूसरे शब्दों में, किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए :

$$(a+b) = (b+a)$$

1.3.4 व्यवकलन का क्रमविनिमेय गुण (Commutative Property of Subtraction)

हम जानते हैं कि व्यवकलन पूर्ण संख्याओं के लिए क्रमविनिमेय नहीं होता है।

(i) $5 - 3 \neq 3 - 5$ (ii) $8 - 0 \neq 0 - 8$

क्या यह क्रमविनिमेय गुण पूर्णांकों के लिए भी है?

आइए इसे जानने के लिए पूर्णांकों के कुछ युग्म लेते हैं। मान लीजिए a और b कोई दो पूर्णांक हैं।

(a)	(b)	(a−b)	(b−a)	क्या (a−b)=(b−a) है?
5	−3	5 − (−3) = 8	(−3) −5 = −8	नहीं
−3	2	(−3) − 2 = −5	2 −(−3) = 5	नहीं
−6	−8	(−6) + (−8) = 2	(−8) + (−6) = −2	नहीं
−11	0	(−11) −0 = −11	0 − (−11) = 11	नहीं
7	−7	(7) − (−7) = . . .	(−7) − 7 = . . .	. . .

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि, $a-b \neq b-a$

अतः हम कह सकते हैं कि व्यवकलन पूर्णाकों के लिए क्रमविनिमेय नहीं है।

1.3.5 योग का साहचर्य गुण (Associative Property of Addition)

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए योग साहचर्य हैं।

उदाहरण : $(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$

तथा $5 + (7 + 3) = 5 + 10 = 15$

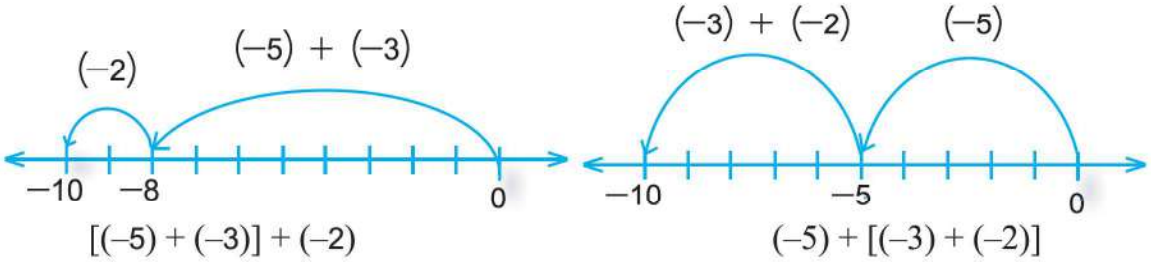
अतः $(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$

अर्थात् संख्याओं का किसी क्रम में समूह बनाकर जोड़ने से समान योगफल प्राप्त होता है। यहाँ हम जानेंगे कि क्या पूर्णांकों के लिए योग सहचारी (Associative) होता है? आइए निम्नलिखित उदाहरणों को देखते हैं।

कोई तीन पूर्णांक –3, –2, एवं –5 को लेते हैं।

क्या $[(-5) + (-3)] + (-2) = (-5) + [(-3) + (-2)]$ है?

संख्या रेखा पर इन पूर्णांकों के योग को देखते हैं।



इन दोनों स्थितियों में हमें –10 प्राप्त होता है।

अतः $[(-5) + (-3)] + (-2) = (-5) + [(-3) + (-2)]$

इसी प्रकार, (–6), (–8) और 5 को लीजिए।

$[(-6) + (-8)] + 5 = (-14) + 5 = -9$

और $(-6) + [(-8) + 5] = (-6) + (-3) = -9$

$\therefore\ [(-6) + (-8)] + 5 = (-6) + [(-8) + 5]$

पुनः –3, 1 और –7 को लीजिए।

$(-3)+[1 + (-7)] = -3 + \ldots = \ldots$

तथा $[(-3) + 1] + (-7) = -2 + \ldots = \ldots$

क्या $(-3) + [1 + (-7)] = [(-3) + 1] + (-7)$ हैं? जाँच कीजिए।

अतः पूर्णांकों के लिए योग सहचारी होता है। दूसरे शब्दों में, पूर्णांकों a, b और c के लिए कह सकते हैं कि

$$\mathbf{a + (b + c) = (a + b) + c}$$

1.3.6 व्यवकलन का साहचर्य गुण (Associative Property of Subtraction)

क्या पूर्णांकों के लिए व्यवकलन भी सहचारी (Associative) होता है?

आइए हम तीन पूर्णांकों 3 ,(–4) , और (–5) को लेते हैं।

$[3-(-4)]-(-5)=[3+4]-(-5)=7-(-5)=7+5=12$

तथा, $3-[(-4)-(-5)]=3-[(-4)+5]=3-1=2$

अतः $[3-(-4)]-(-5) \neq 3-[(-4)-(-5)]$

अत : हम कह सकते हैं कि यदि a, b और c तीन पूर्णांक हो, तो

$$a-(b-c) \neq (a-b)-c$$

1.3.7 योज्य तत्समक (Additive identity)

पूर्ण संख्याओं में हमने देखा कि जब हम किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। यहाँ शून्य पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक है।

जैसेः $1+0=1$, $18+0=18$

अब हम जानेंगे कि क्या शून्य, पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है?

निम्नलिखित को देखिए और खाली जगहों को भरिए।

(i) $(-6)+0=-6$ (ii) $0+(-6)=-6$

(iii) $(-13)+0=\ldots$ (iv) $0+(-47)=\ldots$

(v) $0+(-83)=\ldots$ (vi) $0+\ldots=-69$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि शून्य, पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है। अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a+0=a$ या $0+a=a$

उदाहरण : ऐसे दो पूर्णांक युग्म लिखिए जिनका

(a) योग –3 हो। (b) अंतर –7 हो।

हल : (a) (i) $(-1)+(-2)=-3$ (ii) $(-5)+2=-3$

(b) (i) $(-4)-3=-7$ (ii) $(-5)-2=-7$

उदाहरण : एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके योग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

(i) शून्य (ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक

(iii) दोनों पूर्णांकों से छोटी एक पूर्णांक (iv) दोनों पूर्णांकों से बड़ी एक पूर्णांक

हल : (i) -5 और 5 $[\because (-5) + 5 = 0]$

(ii) 3 और -5 $[\because 3+(-5) = -2]$

(iii) -3 और -4 $[\because (-3)+(-4) = (-7)$, जो दोनों पूर्णांकों -3 और -4 से छोटी है$]$

(iv) 3 और 4 $[\because 3+4 = 7$, जो दोनों पूर्णांको 3 और 4 से बड़ी है $]$

उपर्युक्त प्रश्नों के कई उत्तर प्राप्त किए जा सकते हैं।

उदाहरण : रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) $14 + \ldots = (-30) + 14$ (ii) $(-57) + \ldots = -57$

(iii) $15 + \ldots = 0$ (iv) $(-70) + \ldots = 20 + (-70)$

हल : (i) $14 + (-30) = (-30) + 14$ (ii) $(-57) + 0 = -57$

(iii) $15 + (-15) = 0$ (iv) $(-70) + 20 = 20 + (-70)$

उदाहरण : दो पूर्णांकों का योग -11 है। यदि उनमें से एक पूर्णांक 7 हो, तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया कि दूसरा पूर्णांक a है, तब

$7 + a = -11$

$a = (-11) - 7 = -11 - 7 = -18$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

उदाहरण : कोई पूर्णांक a और (-6) का अंतर -3 है। a का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $a - (-6) = -3$

$a + 6 = -3 = (-3) + (-6) = -9$

प्रश्नावली 1.2

1) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-17) + 35$ (ii) $(-13) - (-7)$

(iii) $18 - (+4)$ (iv) $(-21) + 0$

(v) $(-6) + 4 - (-3)$ (vi) $8 - 3 - (-8)$

(vii) $24 + (-105) + 215 - (-15)$ (viii) $23 + (-5) + (-11) - (-2)$

2) एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए, जिसका

(i) योग 7 है (ii) अंतर –10 है

(iii) योग 0 है (iv) अंतर 7 है

3) एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके अंतर से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

(i) शून्य (ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक

(iii) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक (iv) कोई एक पूर्णांक से बड़ा

4) निम्नलिखित को लिखिए।

(i) एक ऐसा ऋणात्मक पूर्णांक युग्म जिसका योग –8 है।

(ii) एक ऐसा ऋणात्मक पूर्णांक युग्म जिसका अंतर 8 है।

(iii) एक ऐसा पूर्णांक युग्म जिसका योग 0 है।

5) किसी प्रश्नोत्तरी के तीन उत्तरोत्तर चक्करों (Round) में टीम A द्वारा प्राप्त किए अंक –30, 10, 0, थे। टीम B द्वारा प्राप्त किए गए अंक 10, 2, –30 थे। किस टीम ने अधिक अंक प्राप्त किया? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है?

6) निम्नलिखित कथनों में खाली जगहों को भरिए।

(a) $(-3)+(-8) = (-8)+\ldots$ (b) $(-21)+\ldots = -60$

(c) $(-58)+(-86) = \ldots+(-58)$ (d) $(-97)+\ldots = -97$

(e) $35+\ldots = 0$ (f) $-(-67) = \ldots$

(g) $[(-13)+27]+(-31) = (-13)+[27+\ldots]$

7) दो पूर्णांकों का योग -16 है। एक पूर्णांक 36 है, दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

8) दो पूर्णांक a और (-7) का अंतर 5 है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

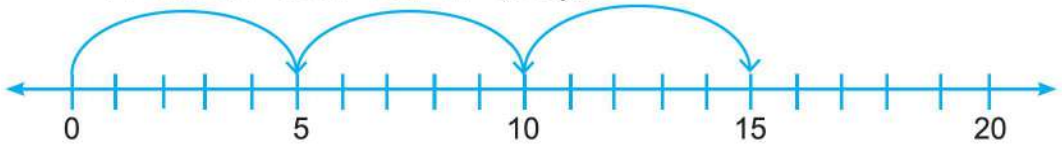
9) यदि $a = -5$, $b = -7$, $c = 6$, तो सत्यापित कीजिए $(a+b)+c = a+(b+c)$

10) यदि $a = -9$, और $b = -4$, सत्यापित कीजिए $(a-b) \neq (b-c)$

1.4 पूर्णांकों का गुणन (Multiplication of Integers)

1.4.1 दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणन (Multiplication of two Positive Integers)

निम्नलिखित संख्या रेखा को देखिए।



उपरोक्त संख्या रेखा से $5 + 5 + 5 = 15$ है।

इसे हम इस रूप में लिख सकते हैं। $3 \times 5 = 15$

इसी प्रकार $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 6 \times 3 = 18$

दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल सदैव एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

व्यापक रूप $a \times b = ab$

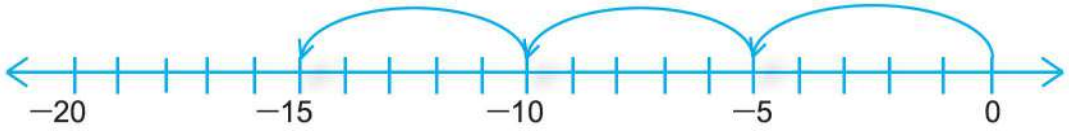
उदाहरण : (a) $(+8) \times (+7)$ (b) 11×4

हल : $(+8) \times (+7) = 8 \times 7 = 56$ $11 \times 4 = 44$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

1.4.2 एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन (Multiplication of a positive integer and a negative Integer)

इस संख्या रेखा को देखिए



उपरोक्त संख्या रेखा से हम पाते हैं कि

$(-5) + (-5) + (-5) = -15$ है

परन्तु इसे हम इस रूप में भी लिख सकते हैं :

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5) = -15$$

इसी प्रकार, $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 4 \times (-3) = -12$

प्रयास कीजिए : A

संख्या रेखा का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए :–

(a) 3×5 (b) $7 \times (-2)$ (c) 6×1 (d) $4 \times (-6)$

संख्या रेखा का उपयोग किए बिना एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल :

उदाहरण – $3 \times (-5) = -(3 \times 5) = -15$

इसी प्रकार $4 \times (-3) = -(4 \times 3) = -12$

$6 \times (-6) = \ldots = \ldots$

$10 \times (-23) = \ldots = \ldots$

प्रयास कीजिए : B

ज्ञात कीजिए :

(a) 6×15 (b) $9 \times (-11)$ (c) 7×12 (d) $12 \times (-22)$

उदाहरण : -3×5 ज्ञात कीजिए

इसे ज्ञात करने के लिए नीचे पैटर्न को समझिए।

$3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 \quad = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 \quad = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 \quad = 5 - 5$

अब $-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 \quad = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$

हम पहले ही ज्ञात कर चुके हैं कि $3 \times (-5) = -15$

अतः हम पाते हैं कि $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

इसी प्रकार के पैटर्न का उपयोग कर हम

$(-4) \times 3 = -12 = 4 \times (-3)$

$(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को गुणा करने पर हमे एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। व्यापक रूप में $a \times (-b) = -ab = (-a) \times b$

जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक को गुणा करते हैं, तो हमें सदैव एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$

प्रयास कीजिए : C

1) पैटर्न का उपयोग करते हुए निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

(a) $(-5) \times 4$ (b) $(-3) \times 7$ (c) $(-2) \times 9$

2) जाँच कीजिए कि क्या नीचे के कथन सत्य हैं?

(a) $(-5) \times 4 = 5 \times (-4)$ (b) $3 \times (-7) = (-3) \times 7$

(c) $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ (d) $3 \times (-8) = (-3) \times 8$

1.4.3 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन (Multiplication of two negative Integers) :

उदाहरण : $(-3) \times (-2)$ ज्ञात कीजिए ।

निम्नलिखित पैटर्न को समझिए।

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3) = -12 + 3$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3) = -9 + 3$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3) = -6 + 3$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3) = -3 + 3$

अब $-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

अतः $(-3) \times (-2) = 6$ (6 एक धनात्मक पूर्णांक है।)

प्रयास कीजिए

(a) $(-4) \times 5$ से शुरू करते हुए $(-4) \times (-5)$ ज्ञात कीजिए।

(b) $(-6) \times 3$ से शुरू करते हुए $(-6) \times (-5)$ ज्ञात कीजिए।

याद रखिए :

$(+) \times (+) = +$

$(+) \times (-) = -$

$(-) \times (+) = -$

$(-) \times (-) = +$

जब हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को गुणा करते हैं, तो हमें सदैव एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। व्यापक रूप $(-a) \times (-b) = a \times b$

1.4.4 तीन या अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल (Multiplication of three or more negative integers) :

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। यदि तीन ऋणात्मक पूर्णांकों को गुणा किया जाए तो गुणनफल क्या होगा? उसी प्रकार चार, पाँच या उससे अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा? चर्चा कीजिए ।

इन्हें जानने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

(a) $(-5) \times (-3) = 15$

(b) $(-5) \times (-3) \times (-2) = [(-5) \times (-3)] \times (-2) = 15 \times (-2) = -30$

(c) $(-5) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-5) \times (-3)] \times [(-2) \times (-1)] = 15 \times 2 = 30$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

(a) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(b) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

(c) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(d) पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

अतः यदि गुणा किये जाने वाले ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम (दो, चार, इत्यादि) है, तो गुणनफल धनात्मक होता है। गुणा किये जाने वाले ऋणात्मक पूर्णांक की संख्या विषम (तीन, पाँच इत्यादि) है, तो गुणनफल ऋणात्मक होता है।

एक विशेष स्थिति

उपरोक्त निष्कर्षों के आधार पर निम्नलिखित कथनों एवं परिणामी गुणनफलों पर विचार कीजिए।

$(-1) \times (-1) = 1$ [ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम (2) है]

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$ [ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम (3) है]

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$ [ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम (4) है]

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$ [ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम (5) है]

उदाहरण : गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(a) $(-2) \times (+3) \times (-4)$ (b) $(-4) \times (-4) \times (-4)$

हल : (a) $(-2) \times (+3) \times (-4) = (-2 \times 3) \times (-4) = (-6) \times (-4) = 24$

(b) $(-4) \times (-4) \times (-4) = [(-4) \times (-4)] \times (-4) = 16 \times (-4) = -64$

या $(-4) \times (-4) \times (-4) = -(4 \times 4 \times 4) = -64$

उदाहरण : गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(a) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times \ldots$ 7 बार

(b) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times \ldots$ 8 बार

हल : (a) दिए गए गुणनफल में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम है, अतः इनका गुणनफल ऋणात्मक होगा।

$\therefore (-2) \times (-2) \times (-2) \times \ldots$ 7 बार

$= -$ (2 × 2 × 2 . . . 7 बार) $= -128$

(b) दिए गए गुणनफल में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम है अतः इनका गुणनफल धनात्मक होगा।

$\therefore (-2) \times (-2) \times (-2) \times \ldots$ 8 बार

$= 2 \times 2 \times 2 \ldots$ 8 बार $= 256$

उदाहरण : गुणनफल का चिह्न क्या होगा? यदि हम 10 धनात्मक एवं 201 ऋणात्मक पूर्णांकों को एक साथ गुणा करते हैं।

हल : धनात्मक पूर्णांकों की संख्या चाहे जितनी भी हो गुणनफल के चिह्न पर इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। यहाँ ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या 201 है जो विषम है। विषम ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल ऋणात्मक होता है। अतः दिया गया गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक होगा।

प्रयास कीजिए : E

(1) गुणनफल $(-9) \times (-5) \times (-6) \times (-3)$ धनात्मक है जबकि
$(-9) \times (-5) \times 6 \times (-3)$ ऋणात्मक है क्यों?

(2) आठ ऋणात्मक एवं पाँच धनात्मक पूर्णांकों के गुणनफल का चिह्न क्या होगा?

(3) गुणनफल निकालिए।

(a) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times \ldots$ (18 बार)

(b) $(-4) \times (-5) \times 3 \times (-1) = \ldots$

1.5 पूर्णांकों के गुणन के गुण (Properties of Multiplication of Integers)

1.51 गुणन का संवृत गुण (Closure property for Multiplication)

हमने देखा कि पूर्णांक, योग एवं व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत होते हैं। क्या यह गुणन के अन्तर्गत भी संवृत हैं? दो पूर्णांक a और b के लिए

a	b	a×b	क्या परिणाम एक पूर्णांक है ?
(-7)	5	$(-7) \times 5 = -35$	हाँ
(-20)	(-3)	$(-20) \times (-3) = 60$	हाँ
-7	-8	$(-7) \times (-8) = \ldots$	. . .
12	-30	$12 \times (-30) = \ldots$	. . .
0	-11	$0 \times (-11) = \ldots$	. . .

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट हैं कि **पूर्णांक गुणन के अंतर्गत संवृत होते हैं।**

सभी पूर्णांकों a और b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

1.5.2 गुणन की क्रमविनिमेयता (Commutative Property of Multiplication)

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है। क्या पूर्णांकों के लिए भी गुणन क्रमविनिमेय है? कोई दो पूर्णांक a और b लीजिए एवं इनके गुणन की क्रमविनिमेयता की जाँच इस प्रकार कीजिए :

a	b	a × b	b × a	क्या a × b = b × a है?
2	−3	2 × (−3) = −6	(−3) × 2 = −6	हाँ : 2 × (−3) = (−3) × 2
−5	4	(−5) × 4 = −20	4 × (−5) = −20	हाँ : (−5) × 4 = 4 × (−5)
−15	−12	(−15) × (−12) =.....	(−12) × (−15) = . . .	. . .
0	−57	0 × (−57) =.....	(−57) × 0 = . . .	. . .
11	−12	11 × (−12) =.....	(−12) × 11 = . . .	. . .

उपर्युक्त उदाहरण से हम पाते हैं कि पूर्णांक के लिए गुणन क्रमविनिमेय है।

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए $a \times b = b \times a$

अन्य पूर्णांक युग्मों को लेकर उक्त कथन का सत्यापन कीजिए।

1.5.3 गुणन का साहचर्य गुण (Associative Property of multiplication)

तीन पूर्णांकों −3, −4 और 5 के लिए

क्या $[(-3) \times (-4)] \times 5 = (-3) \times [(-4) \times 5]$ हैं?

आइए दोनों स्थितियों को देखते है।

स्थिति–1: $[(-3) \times (-4)] \times 5 = 12 \times 5 = 60$

स्थिति–2: $(-3) \times [(-4) \times 5], = (-3) \times (-20) = 60$

अतः $[(-3) \times (-4)] \times 5 = (-3) \times [(-4) \times 5]$

इस प्रकार, क्या $[6 \times (-7)] \times 2 = 6 \times [(-7) \times 2]$ है?

स्थिति–1 : $[6 \times (-7)] \times 2 = (-42) \times 2 = -84$

स्थिति–2 : और $6 \times [(-7) \times 2] = 6 \times (-14) = -84$

अतः $[6 \times (-7)] \times 2 = 6 \times [(-7) \times 2]$

उपरोक्त उदाहरणों से ज्ञात होता है कि पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णांक को किसी भी क्रम में गुणा करने से समान गुणनफल प्राप्त होता है। यह गुण पूर्णांक के लिए गुणन का साहचर्य गुणधर्म कहलाता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

1.5.4 वितरण गुण (Distributive Property)

योग पर गुणन का वितरण (Multiplication over addition):

पूर्ण संख्याओं के लिए योग पर गुणन के वितरण नियम से हम जानते हैं कि

$3 \times (4 + 5) = (3 \times 4) + (3 \times 5)$ होता है।

क्या यह पूर्णांक के लिए भी सत्य है?

आइए, कुछ पूर्णांकों की सहायता से इसकी जाँच करते हैं।

उदाहरण : $(-2) \times (3 + 5) = (-2) \times 3 + (-2) \times 5$,

हल : $(-2) \times (3 + 5) = (-2) \times 8 = -16$

जाँच $(-2) \times 3 + (-2) \times 5, = (-6) + (-10) = -16$

अतः $(-2) \times (3 + 5) = (-2) \times 3 + (-2) \times 5$,

उदाहरण : $(-18) \times [7 + (-4)] = [(-18) \times 7] + [(-18) \times (-4)]$

हल : $(-18) \times [7 + (-4)] = (-18) \times 3 = -54$

और $[(-18) \times 7] + [(-18) \times (-4)] = (-126) + 72 = -54$

अतः $(-18) \times [7 + (-4)] = [(-18) \times 7] + [(-18) \times (-4)]$

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट हैं कि पूर्णांक के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है।

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

व्यवकलन पर गुणन का वितरण (Multiplication over Subtration)

क्या $3 \times (4 - 5) = (3 \times 4) - (3 \times 5)$ है?

आइए इसकी जाँच करते हैं।

स्थिति–1 : $3 \times (4 - 5) = 3 \times (-1) = -3$

स्थिति–2 : $(3 \times 4) - (3 \times 5) = 12 - 15 = -3$

अतः $3 \times (4 - 5) = 3 \times 4 - 3 \times 5$

आइए अब इसकी जाँच कीजिए ।

क्या $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$?

$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times [(-4) + 6] = (-5) \times 2 = -10$

और $[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$

अतः $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$ सत्य है।

उपरोक्त उदाहरण से हम कह सकते हैं कि पूर्णांक के लिए व्यवकलन पर भी गुणन का वितरण नियम लागू होता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

प्रयास कीजिए

1) निम्नलिखित की जाँच कीजिए

i) क्या $10 \times [5+(-2)] = (10 \times 5) + [10 \times (-2)]$ है ?

ii) क्या $(-15) \times [(-7) + (-1)] = [(-15) \times (-7)] + [(-15) \times (-1)]$ है?

1.5.5 शून्य का गुणात्मक गुण (Multiplicative Property of Zero)

हम जानते है कि जब किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है तो परिणाम शून्य ही प्राप्त होता है।

अर्थात् $5\times0 = 0,\ 0\times5 = 0$

$17\times0 = 0,\ 0\times17 = 0$

ऋणात्मक पूर्णांक को शून्य से गुणा करते है एवं देखते है कि क्या परिणाम प्राप्त होता है :–

$(-3)\times 0 = 0,\ 0\times(-3) = 0 \quad \therefore \quad (-3)\times 0 = 0\times(-3) = 0$

$(-4)\times 0 = 0,\ 0\times(-4) = 0 \quad \therefore \quad (-4)\times 0 = 0\times(-4) = 0$

उपरोक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि एक पूर्णांक और शून्य (0) का गुणनफल शून्य (0) होता है।

व्यापक रूप में किसी भी पूर्णांक के लिए : $a\times0=0\times a=0$ या $-a\times0=0\times-a=0$

1.5.6 गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity)

हम जानते है कि पूर्ण संख्याओं के लिए 1 गुणात्मक तत्समक है। क्या 1 पूर्णांक के लिए भी गुणात्मक सत्समक है?

आइए इसे जानने के लिए पूर्णांक को 1 से गुणा करते है

$(-3)\times1=-3$	$1\times(-3)=-3$	$(-3)\times1=1\times(-3)=-3$
$6\times1=6$	$1\times6=6$	$6\times1=1\times6=6$
$(-1)\times1=-1$	$1\times(-1)=-1$	$(-1)\times1=1\times(-1)=-1$

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि जब एक पूर्णांक को 1 से गुणा किया जाता है तो हमें वही पूर्णांक प्राप्त होता है।

अर्थात् 1 पूर्णांक के लिए भी गुणात्मक तत्समक है।

अतः किसी भी पूर्णांक a के लिए : $a\times1=1\times a=a$

1.5.7 गुणन के कुछ आसान तरीके (Some Easy Ways of Multiplication)

(a) $(-25)\times67\times4$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(-25)\times67\times4$ [गुणन का क्रमविनिमेय गुण]

$=[(-25)\times4]\times67$ [गुणन का साहचर्य गुण]

$=(-100)\times67=-6700$

उदाहरण : 17×12 ज्ञात कीजिए।

हल : 17×12 को हम $17 \times (10 + 2)$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

$\therefore \quad 17 \times 12$

$= 17 \times (10 + 2)$

$= (17 \times 10) + (17 \times 2)$ [गुणन के वितरण गुण का प्रयोग]

$= 170 + 34 = 204$

उदाहरण : उपर्युक्त गुणों का उपयोग करते हुए निम्न का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $(-23) \times 52$ (b) $9 \times (-13) \times 10$

हल: (a) $(-23) \times 52$

$= (-23) \times [50+2]$

$= (-23) \times 50 + (-23) \times 2$

[गुणन के वितरण गुण का प्रयोग]

$= (-1150) + (-46) = -1150 - 46 = -1196$

हल: $9 \times (-13) \times 10$

$= [\ 9 \times (-13)] \times 10$

[गुणन का साहचर्य गुण]

$= (-117) \times 10 = -1170$

उदाहरण : गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(a) $(-16) \times (-10) \times 9$ (b) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 6$

हल (a) $(-16) \times (-10) \times 9$

$= (-16) \times (-10) \times 9 = [(-16) \times 9] \times (-10)$

$= (-144) \times (-10) = +1440$

(b) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 6$

$= (-20) \times [(-2) \times (-5)] \times 6 = (-20) \times 10 \times 6$

$= [(-20) \times 10)] \times 6 = (-200) \times 6 = -1200$

उदाहरण : सत्यापित कीजिए : $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

हल : बायां पक्ष $18 \times [7 + (-3)] = 18 \times 4 = 72$

दायां पक्ष $[18 \times 7] + [18 \times (-3)] = 126 + (-54) = 72$

$\therefore \quad 18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

उदाहरण : दस प्रश्नों वाले एक कक्षा जाँच में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिए जाते हैं। प्रयत्न नहीं किए गये प्रश्नों के लिए शून्य अंक दिया जाता है।

(a) मोहन चार प्रश्नों का सही और छः प्रश्नों का गलत उत्तर देता है। उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?

(b) हिना ने कुल सात प्रश्न हल किये हैं उसमें से दो का उत्तर सही है और पाँच का उत्तर गलत। उसे कितने अंक प्राप्त हुए हैं?

हल : (a) $\because$ 1 सही उत्तर के लिए प्राप्त अंक = 5

$\therefore$ 4 सही उत्तर के लिए प्राप्त अंक $= 5 \times 4 = 20$

$\because$ 1 गलत उत्तर के लिए प्राप्त अंक $= -2$

$\therefore$ 6 गलत उत्तर के लिए प्राप्त अंक $= (-2) \times 6 = -12$

इसलिए, मोहन द्वारा प्राप्त अंक $= 20 - 12 = 8$

(b) हिना के 2 सही उत्तरों के लिए प्राप्त अंक $= 5 \times 2 = 10$

तथा उसको पाँच गलत उत्तर के लिए प्राप्त अंक $= (-2) \times 5 = -10$

अतः हिना द्वारा कुल प्राप्त अंक $= 10 - 10 = 0$

उदाहरण : भूमि की सतह से ऊपर की दूरी को धनात्मक पूर्णांक और पृथ्वी से नीचे की दूरी को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित करते हैं तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(a) एक लिफ्ट किसी खान कूप में 5 मीटर प्रति मिनट की दर से नीचे आता है। तो एक घण्टें बाद उसकी स्थिति क्या होगी ?

(b) यदि वह भूमि से 15 मीटर ऊपर से नीचे जाना शुरू करता है तो 45 मिनट बाद उसकी स्थिति क्या होगी?

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

हल : (a) लिफ्ट नीचे की ओर जा रहा है, इसलिए इसके द्वारा तय की गई दूरी का ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जायेगा।

$\because$ 1 मिनट में लिफ्ट की स्थिति में परिवर्त्तन $= -5$ मीटर

$\therefore$ 60 मिनट बाद लिफ्ट की स्थिति में परिवर्त्तन $= -5 \times 60 = 300$मी

एक घण्टे बाद लिफ्ट भूमि की सतह से 300 मीटर नीचे होगा।

(b) $\because$ 45 मिनट में लिफ्ट की स्थिति में परिवर्त्तन $= -5 \times 45 = -225$ मी

$\therefore$ लिफ्ट की अंतिम स्थिति $= -225 + 15 = -210$ मी

अर्थात लिफ्ट भूमि की सतह से 210 मी नीचे होगा।

प्रश्नावली –1.3

1) निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए–

(a) $2 \times (-1)$

(b) $(-1) \times 222$

(c) $(-21) \times (-40)$

(d) $(-432) \times (-1)$

(e) $(-18) \times 0 \times (-13)$

(f) $(-12) \times (-11) \times 10$

(g) $9 \times (-3) \times (-5)$

(h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

2) निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए –

(a) $7 \times [(-4 + 3)] = [7 \times (-4)] + [7 \times 3]$

(b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

(c) $(-9) \times [10 - (-3)] = [(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$

3) गुणनफल का चिह्न क्या होगा, यदि निम्नलिखित को एक साथ गुणा करते हैं?

(a) आठ ऋणात्मक पूर्णांक एवं तीन धनात्मक पूर्णांक

(b) पन्द्रह ऋणात्मक पूर्णांक एवं दस धनात्मक पूर्णांक

(c) (-1) को बारह बार

(d) (-1) को $2m$ बार, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

4) इनका (–1) के साथ गुणनफल क्या होगा?

(a) –22 (b) 17 (c) 0 (d) 1

5) उचित गुणों का उपयोग करते हुए गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

(a) $(-8) \times 9 + 9 \times (-2)$

(b) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$

(c) $8 \times 53 \times (-125)$

(d) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$

(e) $(-31) \times 102$

(f) $(-57) \times (-19) + 57$

(g) 15×98

(h) $(-18) \times (-49)$

6) किसी हिमीकरण (ठंडा) प्रक्रिया में, कमरे के तापमान को 40^0c से 5^0c प्रति घण्टे की दर से कम करने की आवश्यकता है। इस प्रक्रिया के शुरू होने के 10 घण्टे बाद कमरे का तापमान क्या होगा ?

7) किसी परीक्षा में कुल 15 प्रश्न हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक और गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिये जाते हैं।

(a) सरस्वती सभी प्रश्नों को हल करती है, परन्तु उसके उत्तर में से केवल 9 सही हैं। उसे कुल कितने अंक प्राप्त हुए ?

(b) सविता के 5 उत्तर सही और शेष गलत है। उसे कुल कितने अंक प्राप्त हुए?

8) एक खाद कम्पनी को यूरिया खाद बेचने पर ₹8 प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और डी०ए०पी० खाद बेचने पर ₹5 प्रति बोरी की दर से हानि होती है।

(a) किसी महीने में वह कम्पनी 2000 बोरियाँ यूरिया और 3000 बोरियाँ डी० ए० पी० बेचती है उसका लाभ या हानि निकालें ?

(b) बेची गई डी०ए०पी० की बोरियों की संख्या 3200 हो, तो कम्पनी को यूरिया की कितनी बारियाँ बेचनी चाहिए, ताकि उसे न तो लाभ हो न हानि?

9) निम्नलिखित गुणा सारणी को पूरा कीजिए :

×	–2	4	–1
0			
–3			
5			

×	–2	3	0	–7
–1				
0				
–3				
4				

10) रिक्त स्थानों को भरिए

(a) $(-7) \times$ .....$= 42$ (b) $11 \times$ .....$= -99$

(c) $(-81) \times$ .....$\times 15 = 0$ (d) $(-8) \times$ .....$= -8$

(e) $(-37) \times$ .....$= -37$ (f) $(-27) \times$ .....$= 27$

(g) $(-8) \times (-9) = (-9) \times$ ..... (h) .....$\times (-7) = -56$

(i) $3 \times [(-7) + 51] = 3 \times (-7) + 3 \times$ ..... (j) $(-9) \times$ .....$= 0$

1.6 पूर्णांकों का विभाजन (Division of Integers)

हम जानते हैं कि विभाजन, गुणा की विपरीत संक्रिया है।

उदाहरण : $3 \times 4 = 12$

$\therefore \quad 12 \div 4 = 3$ तथा $12 \div 3 = 4$

इसी प्रकार, $6 \times 4 = 24$

इसलिए, $24 \div 4 = 6$ तथा $24 \div 6 = 4$

उपर्युक्त के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन (भाग) कथन होते हैं। क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है?

निम्न सारणी को देखिए और समझिए:

गुणन कथन	संगत भाग कथन
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2, \quad (-12) \div 2 = (-6)$
$(-3) \times 5 = (-15)$	$(-15) \div (-3) = 5, \quad (-15) \div (5) = -3$
$(-7) \times (-8) = 56$	$56 \div (-7) = 8, \quad 56 \div (-8) = -7$
$(-3) \times (-7) =$	
$(-9) \times 3 =$	
$5 \times (-8) =$	

उपरोक्त के आधार पर हम कह सकते हैं कि पूर्णांक संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन (भाग) भी सत्य है।

प्रयास कीजिए : G

ज्ञात कीजिए ।

(i) $90 \div (-45)$ (ii) $125 \div (-25)$ (iii) $(-64) \div 8$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम पाते हैं कि –

$(-12) \div 2 = -6$, $(-15) \div 5 = -3$, $(-32) \div 4 = -8$ इत्यादि

तथा $56 \div (-8) = -7$, $21 \div (-3) = -7$, $56 \div (-7) = -8$ इत्यादि

अतः हम कह सकते हैं कि जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से अथवा एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते है और उसके बाद भागफल के पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांक a और b के लिए,

$$\mathbf{a \div (-b) = (- a) \div b,} \text{ जहाँ } b \neq 0$$

उदाहरण : इसकी जाँच कीजिए

(a) क्या $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$ हैं ?

(b) क्या $(72) \div (-9) = (-72) \div 9$ हैं ?

हल : (a) $(-48) \div 8 = -6$

और $48 \div (-8) = -6$

$\therefore (-48) \div 8 = 48 \div (-8)$

(b) $72 \div (-9) = -8$

और $(-72) \div 9 = -8$

$\therefore (72) \div (-9) = (-72) \div 9$

उपर्युक्त उदाहरणों से, अतः $(-12) \div (-6) = 2$, $(-15) \div (-3) = 5$, इत्यादि।

स्पस्ट है कि एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके बाद भागफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) लगा देते हैं और इस तरह हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो ऋणात्मक पूर्णांकों a और b के लिए –

$$\mathbf{-a \div (-b) = (-a) \div -b, = a \div b,} \text{ जहाँ } b \neq 0$$

उदाहरण : ज्ञात कीजिए : (a) $(-45) \div (-9)$ (b) $(-20) \div (-4)$

हल : (a) $(-45) \div (-9)$

$= 45 \div 9 = 5$

(b) $(-20) \div (-4)$

$= 20 \div 4 = 5$

प्रयास कीजिए : H

ज्ञात कीजिए ।

(i) $(-36) \div (-4)$ (ii) $(-201) \div (-3)$ (iii) $(-78) \div 6$ (iv) $85 \div (-17)$

पूर्णांकों के भाग के गुण (Properties of Division of Integers)

भाग का संवृत गुण (Closure Property of Division)

हम देख चुके हैं कि पूर्णांक, योग, व्यवकलन एवं गुणन के अंतर्गत संवृत हैं। क्या पूर्णांक भाग के अंतर्गत भी संवृत हैं? कोई दो पूर्णांक a और b के लिए :

a	b	$a \div b$	क्या परिणाम एक पूर्णांक है?
-6	-3	$(-6) \div (-3) = 2$	हाँ
-3	-6	$(-3) \div (-6) = \frac{1}{2}$	नहीं
9	-2	$9 \div (-2) = -\frac{9}{2}$	नहीं
3	-8	$3 \div (-8) =$	.....
-10	5	$(-10) \div 5 =$	.....

उपर्युक्त सारणी स्पष्ट है कि यदि a और b दो पूर्णांक हैं, तो $a \div b$ पूर्णांक हो भी सकता है अथवा नहीं भी।

अतः हम कह सकते हैं कि पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है।

भाग की क्रम विनिमेयता (Commutativity in Division)

हम देख चुके हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है। क्या पूर्णांकों के लिए भी भाग क्रम विनिमेय है? कोई दो पूर्णांक a और b लेकर इसकी जाँच कीजिए।

$a \div b$	$b \div a$	क्या $a \div b = b \div a$ है ?
$5 \div 3 = \frac{5}{3}$	$3 \div 5 =$	नहीं, $(5 \div 3) \neq (3 \div 5)$
$(-8) \div (-4) = 2$	$(-4) \div (-8) = \frac{1}{2}$	नहीं, $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$
$(-9) \div 3 =$.....	$3 \div (-9) =$ $\frac{3}{5}$	....., ...
$(-20) \div (5) =$.....	$(5) \div (-20) =$.....	....., ...

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि पूर्णांकों के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है। व्यापक रूप में किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए : $\mathbf{a \div b \neq b \div a}$

भाग की साहचर्यता (Associativity of Division)

क्या $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-16) \div [4 \div (-2)]$ है ?

हम जानते हैं कि $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

और $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

अतः $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

अतएव, पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य नहीं है।

अतः $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ जहाँ a, b और c पूर्णांक हैं।

पूर्ण संख्याओं की तरह, किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग देना अर्थहीन है।

जैसे $5 \div 0$, $(-3) \div 0$, $0 \div 0$ इत्यादि सभी परिभाषित नहीं है।

अर्थात्, किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a \div 0$, परिभाषित नहीं है।

पूर्ण संख्याओं की तरह शून्य को किसी शून्येतर पूर्णांक से भाग देने पर शून्य ही प्राप्त होता है।

जैसे :– $0 \div 2 = 0$ $0 \div (-5) = 0$ इत्यादि।

अर्थात्, किसी भी पूर्णांक a के लिए, $0 \div a = 0$, $a \neq 0$ है।

हम जानते हैं कि किसी पूर्ण संख्या को 1 से भाग देने पर हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

हम जानते हैं कि $[(-16) \div 4\ ] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

और $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

अतः $[(-16) \div 4\ ] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

अतएव, पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य नहीं है।

अतः $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ जहाँ a, b और c पूर्णांक हैं।

पूर्ण संख्याओं की तरह, किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग देना अर्थहीन है।

जैसे $5 \div 0$, $(-3) \div 0$, $0 \div 0$ इत्यादि पारिभाषित नहीं है।

अर्थात्, किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a \div 0$, पारिभाषित नहीं है।

- पूर्ण संख्याओं की तरह शून्य को किसी शून्येतर पूर्णांक से भाग देने पर शून्य ही प्राप्त होता है।

जैसे $0 \div 2 = 0$ $0 \div (-5) = 0$ इत्यादि।

अर्थात्, किसी भी पूर्णांक a के लिए, $0 \div a = 0$, $a \neq 0$ है।

हम जानते हैं कि किसी पूर्ण संख्या को 1 से भाग देने पर हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। क्या यह कथन पूर्णांकों के लिए भी सत्य है? इन्हें देखिए –

$5 \div 1 = 5$ $(-7) \div 1 = -7$ $(-25) \div 1 = -25$

$17 \div 1 =$ ..... $(-27) \div 1 =$ ..... $(-54) \div 1 =$ .....

अतः $a \div 1 = a$

- किसी शून्येतर पूर्णांक को उसी पूर्णांक से भाग देने पर 1 प्राप्त होता है।

जैसे $12 \div 12 = 1$ $(-8) \div (-8) = 1$ इत्यादि।

अर्थात्, किसी भी पूर्णांक a के लिए, $\mathbf{a \div a = 1,\ a \neq 0}$ है।

- क्या किसी पूर्णांक को –1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है? इन्हें देखिए :

$8 \div (-1) = -8$ $-11 \div (-1) = 11$ $17 \div (-1) = -17$

$(-21) \div (-1) =$ ..... $42 \div (-1) =$ ..... $(-57) \div (-1) =$ .....

अतः किसी पूर्णांक को –1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

प्रयास कीजिए : I

जाँच कीजिए ।

(a) क्या $6 \div (4 \div 2) = (6 \div 4) \div 2$ है?

(b) क्या (i) $1 \div a = 1$ हैं ? (ii) $a \div (-1) = -a$ हैं ? (a पूर्णांक है)

उदाहरण : निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $14 \div (-2)$ (b) $(-20) \div 4$ (c) $(-84) \div (-7)$ (d) $0 \div (-15)$
(e) $30 \div 0$ (f) $13 \div [(-3) + 2]$ (g) $[(-36) \div 12] \div 3$

हल : (a) $14 \div (-2) = \frac{14}{-2} = \frac{-14}{+2} = -7$

(b) $(-20) \div 4 = \frac{-20}{4} = -5$

(c) $(-84) \div (-7) = \frac{-84}{-7} = \frac{84}{7} = 12$

(d) $0 \div (-15) = \frac{0}{-15} = 0$

(e) $30 \div 0$ = अर्थहीन (पारिभाषित नहीं)

(f) $13 \div [(-3) + 2] = 13 \div (-1) = \frac{13}{-1} = \frac{-13}{1} = -13$

(g) $[(-36) \div 12] \div 3 = (-36 \times \frac{1}{12}) \div 3 = (-3) \div 3 = -3 \times \frac{1}{3} = -1$

उदाहरण : सत्यापित कीजिए :

$a \div (b + c) = (a \div b) + (a \div c)$ यदि $a = 12, b = -4, c = 2$

हल : $a \div (b + c) = 12 \div [(-4) + 2] = 12 \div (-2) = -6$

और $(a \div b) + (a \div c) = [12 \div (-4)] + [12 \div 2] = (-3) + 6 = 3$

अतः $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$

उदाहरण : दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से 10^0c ऊपर था। यदि यह आधी रात तक 2^0C प्रति घंटे की दर से कम होता है तो किस समय तापमान शून्य से 8^0C नीचे होगा? 12 बजे रात का तापमान क्या होगा?

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

हल : $(+10^0C)$ और (-8^0C) तापमान में अंतर

$$= [10 - (-8)]^0C = (10 + 8)^0C = 18^0C$$

प्रति घंटे तापमान में गिरावट $= 2^0C$

0^0C से 8^0C तक तापमान के गिरने में लगा कुल समय

$$= \frac{\text{तापमान में कुल अंतर}}{\text{एक घंटे में तापमान में गिरावट}} = \frac{18}{2} \text{ घंटा} = 9 \text{ घंटा}$$

इसलिए 0^0c से 8^0c नीचे तापमान अपराह्न 9 बजे होगा।

अब आधी रात का तापमान $= 10^0C - (2 \times 12)^0C$ नीचे

$$= 10^0C - 24^0C = -14^0C$$

प्रश्नावली 1.4

1) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $(-28) \div 7$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-56) \div (-8)$

(d) $(-29) \div 29$ (e) $15 \div [(-4)+3]$ (f) $0 \div (-11)$

(g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$ (h) $[(-6) \times 5] \div [(-2)+1]$ (i) $0 \div (-11)$

2) रिक्त स्थानों को भरिए –

(a) $18 \div (-2) =$ ..... (b) $(-21) \div$ ..... $= -3$

(c) $(-203) \div$ ..... $= 1$ (d) $222 \div$ ..... $= 222$

(e) ..... $\div (-1) = 75$ (f) $0 \div 99 =$ .....

(g) $(-48) \div$ ..... $= 4$ (h) ..... $\div 6 = -5$

(i) $(-87) \div$ ..... $= 1$ (j) $[8 \times 3] \div [(-6) \times 2] =$ .....

3) निम्नलिखित में से कौन–सा कथन सत्य है कौन असत्य?

(a) $(-10) \div 0 = 0$ (b) $0 \div (-8) = 0$ (c) $0 \div 0 = 0$

(d) $(-25) \div (-1) = 25$ (e) $(-17) \div 1 = -17$ (f) $(6 \div 3) = (3 \div 6)$

4) **सत्यापित कीजिए :**

(i) **यदि** $a = 3$, $b = -2$, $c = 4$ हो तो

$a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$

(ii) **यदि** $a = -10$, $b = 1$, $c = 1$ हो तो

$a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$

5) **पाँच ऐसे पूर्णांक युग्म (a, b) लिखिए, ताकि** $a \div b = -3$ **हो ।**

जैसे – एक युग्म (6, –2) है, क्योंकि $6 \div (-2) = (-3)$ है।

6) एक कक्षा जाँच में प्रश्नों के प्रत्येक सही उत्तर के लिए (+3) अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिए जाते हैं और किसी प्रश्न को हल करने का प्रयास नहीं करने पर कोई अंक नहीं दिया जाता है।

(i) शिवानी ने 20 अंक प्राप्त किए। यदि उसके 12 उत्तर सही पाए जाते हैं, तो उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है ?

(ii) मोहिनी को (–5) अंक प्राप्त होते हैं, जबकि उसके 7 उत्तर सही पाए जाते हैं। उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है?

7) कोई दुकानदार एक कलम बेचने पर ₹ 1 का लाभ अर्जित करता है और अपने पुराने स्टॉक की पेंसिलों को बेचते हुए 40 पैसे प्रति पेंसिल की हानि उठाता है, तो

(i) अक्टूबर माह में उसने ₹5 की हानि उठाई। इस अवधि में 45 कलम बेची बताइए, इस अवधि में उसने कितनी पेंसिलें बेची?

(ii) नवम्बर महीने में उसे न लाभ हुआ न हानि हुई। यदि इस महीने में उसने 70 कलमें बेची, तो उसने कितनी पेंसिलें बेची ?

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

पूर्णांक

मुख्य बातें :

⇒ संख्याएँ . . ., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, . . . पूर्णांक हैं।

⇒ शून्य एक पूर्णांक है, जो न तो धनात्मक है और न ऋणात्मक है।

⇒ शून्य सभी धनात्मक पूर्णांकों से छोटा एवं सभी ऋणात्मक पूर्णांकों से बड़ा है।

यदि x और y पूर्णांक हैं, जहाँ $x > y$ तब $x < -y$

जैसे : $19 > 13$ और $-19 < -13$

⇒ पूर्णांक योग, व्यवकलन एवं गुणन के अंतर्गत संवृत हैं।

⇒ पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है।

⇒ पूर्णांकों के लिए योग तथा गुणन क्रम विनिमेय है।

⇒ पूर्णांकों के लिए व्यवकलन तथा भाग क्रम विनिमेय नहीं है।

⇒ शून्य, पूर्णांकों के लिए योज्य तत्समक है।

⇒ पूर्णांक a तथा −a एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम है, यदि $a + (-a) = 0$

⇒ 1 पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक है।

⇒ किसी पूर्णांक तथा 0 का गुणनफल 0 होता है।

⇒ पूर्णांकों का योग एवं गुणन साहचर्य हैं।

यदि a, b एवं c पूर्णांक है तो $(a + b) + c = a + (b + c)$

तथा $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

⇒ पूर्णांकों के लिए योग एवं व्यवकलन पर गुणन वितरण है।

यदि a, b एवं c पूर्णांक है तो $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

तथा $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$

⇒ दो ऋणात्मक या धनात्मक पूर्णांकों का भागफल सदैव धनात्मक होता है।

⇒ एक धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांक का भागफल सदैव ऋणात्मक होता है।

⇒ पूर्णांक a के लिए : (i) $a \div 0 =$ परिभाषित नहीं है। (ii) $a \div 1 = 1$ है।

⇒ किसी भी पूर्णांक a के लिए (i) $0 \div a = 0$ (ii) $a \div a = 1$ है।

⇒ ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने पर उसका गुणनफल धनात्मक होता है, जबकि संख्या विषम होने पर उसका गुणनफल ऋणात्मक होता है।