5 घातांक और घात (Exponents and Power)

मुख्य अवधारणाएँ

- घातांक
- घातांकों के नियम
- घातांकों के नियमों का प्रयोग
- दशमलव संख्या पद्धति
- बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना।

FKH65C

5.1 भूमिका

मधुमिता आज घर पर भूगोल की पुस्तक पढ़ रही थी। उसकी नजर सूर्य से पृथ्वी की दूरी (Distance) पर पड़ी, जो 1490,597,870,700 मीटर लिखी थी। उसे यह संख्या पढ़ना काफी कठिन लग रहा था। आपको भी इस तरह की बड़ी संख्या मिलती होगी।

जैसे : **पृथ्वी का द्रव्यमान :** 5,972,000,000,000,000,000,000,000 Kg

सूर्य का द्रव्यमान : 1,989,000,000,000,000,000,000,000,000,000 Kg

ऐसी बड़ी–बड़ी संख्याओं को पढ़ना–लिखना और परस्पर तुलना करना कठिन हो जाता है। इस तरह की संख्याओं को हम घातांक (Exponent) का प्रयोग कर लिखने का प्रयास करेंगे। इस अध्याय में हम घातांक एवं इसके प्रयोग के बारे में सीखेंगे।

5.2 घातांक :

घातांक को समझने के लिए निम्न उदाहरण को देखिए।

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 8 \times 5$$

$$(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = 5 \times (-1)$$

यहाँ हम लगातार एक ही संख्या के योग को गुणा के रूप में देख रहे है। इसी प्रकार यदि एक ही संख्या के लगातार गुणन को संक्षेप में लिखना चाहे तो निम्न प्रकार होगा।

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

जहाँ '10' आधार (Base) और '3' घातांक कहलाता है। इसे '10' का घात (Power) 3 या 10 की तीसरी घात पढ़ा जाता है। 10^3 को 1000 का घातांकीय रूप (Exponential form) कहा जाता है।

इसी प्रकार हम 10,000; 1,00,000 आदि संख्याओं को 10 की घात के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त करेंगे।

$10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

अतः 10,000 का घातांकीय रूप 10^4 है।

$1,000,00 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

अतः 1,000,00 का घातांकीय रूप 10^5 है।

अभी तक हमने ऐसी संख्याएँ ही देखी हैं जिनका आधार 10 है। आइए अब उन संख्याओं की घातांकीय रूप के बारे में जानें जिसका आधार 10 नहीं है।

देखिए और समझिए :

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$

$125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

यहाँ 2^3 का अर्थ है 2 का स्वयं से तीन बार गुणा किया जाना। इसमें '2' आधार और '3' इसकी घात है। अतः हम कह सकते हैं कि 8, 2 की तीसरी घात (Third Power) है।

स्मरण रखें :

i) $64 = 8 \times 8 = 8^2$, जो 8 का घात 2 है। इसे 8 का वर्ग (8 Square) भी पढ़ा जाता है।

ii) $64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$, जो 4 का घात 3 है। इसे 4 का घन (4 cube) भी पढ़ा जाता है।

क्या 64 को हम किसी अन्य संख्या के आधार और घात के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं? सोचिए

हम 64 को निम्न प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं :– $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

यहाँ ध्यान दीजिए कि 64 को 8 का वर्ग, 4 का घन और 2 का छठा घात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

क्या दूसरी संख्या को भी आप अलग–अलग आधार एवं घात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ?

अब (-8) को उपरोक्त विधि से लिखने का प्रयास करते हैं :

$-8 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^3$

बताइए $(-2)^6 = ?$

देखिए और समझिए :

$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^5}{3^5}$ या $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-2^5}{3^5}$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

सामान्य रूप में,

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

देखिए और समझिए :

(i) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$ (ii) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

सामान्य रूप में, $a^2 b^3 = a \times a \times b \times b \times b$

इसे a का वर्ग गुणा b का घन पढ़ा जाता है।

124, 328, 525, तथा 1236 को भी विभिन्न संख्या के आधार एवं घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

स्मरण रखें : $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

यहाँ (-1) का घात 4 एक सम संख्या है।

$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

यहाँ (-1) का घात 5 एक विषम संख्या है।

प्रयास कीजिए A

1. मान ज्ञात कीजिए –

(i) 2^6 (ii) 6^3 (iii) 3^5 (iv) 7^4

(v) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ (vi) $(-3)^4$ (vii) $(-2)^3$ (viii) $\left(\frac{-4}{5}\right)^5$

2. व्यक्त कीजिए –

(i) 625 को आधार 5 के घात के रूप में।

(ii) 512 को आधार 8 के घात के रूप में।

(iii) $\frac{16}{25}$ को घातांक के रूप में।

उदाहरण 1 : 1024 को आधार 2 की घात के रूप में व्यक्त कीजिए :

हल : $1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः $1024 = 2^{10}$

उदाहरण 2 : इनका मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-1)^5$, (ii) $(-3)^3$ (iii) $(-5)^4$ (iv) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

हल : (i) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$= 1 \times 1 \times (-1) = -1$

(ii) $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3)$
$= 9 \times (-3) = -27$

(iii) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$
$= 25 \times 25 = 625$

(iv) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{(7)^2} = \frac{(-2) \times (-2)}{(7) \times (7)} = \frac{4}{49}$

उदाहरण : निम्नलिखित का अभाज्य गुणनखण्ड कर घातांकीय रूप में लिखिए–
(i) 128 (ii) 243

हल : (i) $128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

(ii) $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

प्रश्नावली : 5.1

1) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–
(i) 2^5 (ii) 3^5 (iii) 7^4 (iv) 11^3 (v) 14^3

2) निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए–
(i) $a \times a \times a$ (ii) $a \times a \times b \times b \times b \times b$
(iii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ (iv) $a \times a \times c \times c \times c \times d$

3) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए–
(i) 256 (ii) 121 (iii) 343 (iv) 3125 (v) 2197

4) सरल कीजिए :–
(i) $2^1 \times 5^2 \times 7^2$ (ii) $2^4 \times 3^2$ (iii) $7^2 \times 5^3$
(iv) $(-2)^2 \times (-3)^3$ (v) $5^2 \times (-1)^{10}$ (vi) $3^4 \times (-3)^5$

5) (-2) का घात कितना होने पर परिमाण -32 होगा ?

6) निम्नलिखित का अभाज्य गुणनखण्ड लिखकर घातांकीय रूप में लिखिए–
(i) 405 (ii) 648 (iii) 540 (iv) 3600
(v) 4725 (vi) 1458

एक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम : यदि $\frac{a}{b}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या हो, तो इसका व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ होगा।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

देखिए और समझिए : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ का व्युत्क्रम $= \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

उदाहरण : निम्न संख्या का व्युत्क्रम लिखिए।

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{4}$ (iii) $\left(\frac{5}{11}\right)^6$ (iv) $(-5)^8$

हल : (i) $\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम $= \frac{7}{2}$

(ii) $\frac{-3}{4}$ का व्युत्क्रम $= \frac{4}{-3}$

(iii) $\left(\frac{5}{11}\right)^6$ का व्युत्क्रम $= \left(\frac{11}{5}\right)^6$

(iv) $(-5)^8$ का व्युत्क्रम $= \left(\frac{1}{-5}\right)^8 = \frac{1}{(-5)^8}$

प्रयास कीजिए B

1. निम्नलिखित का व्युत्क्रम लिखिए :

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{11}{17}$ (iii) $\frac{-13}{19}$ (iv) $\frac{7}{-11}$

(v) 7 (vi) -9 (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ (viii) $\frac{1}{(-7)^2}$

5.3 घातांकों के नियम :

5.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

देखिए और समझिए

(i) $3^3 \times 3^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

$3^3 \times 3^4 = (3^1 \times 3^1 \times 3^1) \times (3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1)$

$= 3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1$

$= 3^{1+1+1+1+1+1+1} = 3^{3+4} = 3^7$

अतः $3^3 \times 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$

(ii) $(-2)^4 \times (-2)^2 = [(-2)^1 \times (-2)^1 \times (-2)^1 \times (-2)^1] \times [(-2)^1 \times (-2)^1]$

$= (-2)^1 \times (-2)^1 \times (-2)^1 \times (-2)^1 \times (-2)^1 \times (-2)^1$

$= (-2)^{1+1+1+1+1+1} = (-2)^{6} = (-2)^6$

अतः $(-2)^4 \times (-2)^2 = (-2)^{4+2} = (-2)^6$

प्रत्येक का आधार (–2) है और घातांकों का योग $= 4 + 2 = 6$

अतः व्यापक रूप से हम देखते हैं कि $a^m \times a^n = a^{m+n}$

जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

ध्यान दें : $2^2 \times 3^2$ में घातांकों को नहीं जोड़ सकते हैं क्योंकि यहाँ आधार एक समान नहीं है।

प्रयास कीजिए C

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए :–

(i) $2^5 \times 2^7$ (ii) $7^3 \times 7^2$ (iii) $P^5 \times P^8$ (iv) $y^3 \times y^7$

5.3.2 एक ही आधार वाली घातांकों का विभाजन

देखिए और समझिए :

$7^5 \div 7^2$ का मान ज्ञात करें।

हल : $7^5 \div 7^2 = \dfrac{7^5}{7^2}$

$= \dfrac{7^1 \times 7^1 \times 7^1 \times 7^1 \times 7^1}{7^1 \times 7^1}$

$= 7^1 \times 7^1 \times 7^1 = 7^3$

इस प्रकार, $7^5 \div 7^2 = 7^{5-2} = 7^3$

व्यापक रूप में, अगर a कोई शून्येतर पूर्णांक हो तब, $\mathbf{a^m \div a^n = a^{m-n}}$ होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ है तथा $m > n$ है।

प्रयास कीजिए D

निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिएः–

(i) $5^3 \div 5^2$ (ii) $7^{15} \div 7^3$ (iii) $9^{12} \div 9^2$ (iv) $3^2 \div 3^n$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

5.3.3 एक घात की घात :

उदाहरण : $(2^2)^3$ और $(3^3)^2$ को हल कीजिए।

हल : $(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$

$= 2^{2+2+2} = 2^{3\times 2} = 2^6$

$(3^3)^2 = 3^3 \times 3^3$

$= 3^{3+3} = 3^{2\times 3} = 3^6$

किसी शून्येतर पूर्णांक (a) के लिए $(a^m)^n = a^{mn}$ होता है।

जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

उदाहरण : बताइए कौन बड़ा है? $(2^5)^2$ या $(2^5) \times 2$

हल : $(2^5)^2 = 2^5 \times 2^5 = 32 \times 32 = 1024$ है।

तथा $(2^5) \times 2 = 32 \times 2 = 64$

$\therefore 1024 > 64$, अतः $(2^5)^2 > (2^5) \times 2$

प्रयास कीजिए E

1) हल कीजिए एवं उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए –

(i) $(5^2)^4$ (ii) $(7^3)^2$ (iii) $(7^{20})^2$ (iv) $(2^3 \times 2)^5$

2) कौन बड़ा है?

(i) $(7^3)^2$ या $(7^3) \times 2$ (ii) 3×2^3 एवं $2^5 \times 2$

5.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन : आइए देखें समान घातांक किन्तु विभिन्न आधार वाले संख्याओं की घातों का गुणन

$2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 = 6^2$

इसी प्रकार, $a^3 \times b^3 = a \times a \times a \times b \times b \times b$

$= (a \times b)\ (a \times b) \times (a \times b)$

$= (ab)^3 = a^3\ b^3$

शून्येतर पूर्णांक a एवं b के लिए $a^m \times b^m = (ab)^m$, जहाँ m एक पूर्ण संख्या है

प्रयास कीजिए F

$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग कर इन्हें हल कीजिए–

(i) $5^2 \times 3^2$ (ii) $3^5 \times 5^5$ (iii) $(-2)^3 \times (-5)^3$ (iv) $4^5 \times (-7)^5$

उदाहरण: निम्नलिखित पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :–

(i) $(2 \times 5)^2$ (ii) $(3a)^4$ (iii) $(-5q)^3$

हल : (i) $(2 \times 5)^2 = (2 \times 5) \times (2 \times 5)$

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2 = 10^2$

(ii) $(3a)^4 = (3a) \times (3a) \times (3a) \times (3a)$

$= 3a \times 3a \times 3a \times 3a = 3^4 \times a^4 = (3a)^4$

(iii) $(-5q)^3 = (-5q) \times (-5q) \times (-5q)$

$= -5q \times -5q \times -5q = (-5q)^3 \times q^3 = -125q^3$

5.3.5 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यान से देखिए–

(i) $\frac{3^3}{5^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

(ii) $\frac{4^5}{5^5} = \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^5$

व्यापक रूप में, $a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

जहाँ a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक है तथा m एक पूर्ण संख्या है।

प्रयास कीजिए

1) $a^m \div b^m$ का प्रयोग कर निम्नलिखित को हल कीजिए–

(i) $7^3 \div 3^3$ (ii) $11^{10} \div 7^{10}$ (iii) $p^{15} \div q^{15}$ (iv) $5^6 \div (-2)^6$

2) निम्नलिखित का प्रसार कीजिए –

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)^6$ (ii) $\left(\frac{s}{t}\right)^{10}$ (iii) $\left(\frac{-3}{11}\right)^9$

शून्य घातांक वाली संख्याएँ

निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यान से देखिए –

$\frac{2^3}{2^3}$, $4^5 \div 4^5$, $a^6 \div a^6$

उदाहरणों से स्पष्ट है कि प्रत्येक का परिणाम 1 है।

क्या इनका परिणाम घातांक के रूप में लिखा जा सकता है?

देखिए और समझिए :

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 1$$

$\frac{2^3}{2^3} = 2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$ (घातांकों के नियमों का प्रयोग करने पर)

अतः $2^0 = 1$

क्या इसी प्रकार $3^0 = 1$, $4^0 = 1$, $5^0 = 1$, $6^0 = 1$, . . . है?

अब $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

साथ ही $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$

अतः $a^0 = 1$ (जहाँ a एक शून्येतर पूर्णांक है।)

अतः हम कह सकते हैं कि किसी भी शून्येतर संख्या पर घात 0 हो तो उसका मान 1 होता है।

5.4 घातांकों के नियमों के कुछ अनुप्रयोग

उदाहरण : $9 \times 9 \times 9 \times 9$ को आधार '3' लेते हुए घातांकीय रूप में लिखिए।

हल : $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$

फिर $9 = 3 \times 3 = 3^2$

अतः $9^4 = (3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$ $\{(a^m)^n = a^{mn}$ का प्रयोग$\}$

उदाहरण : हल कर घातांकीय रूप में लिखिए–

(i) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^5$ (ii) $\left\{\left(-3\right)^5\right\}^3$ (iii) $\left(3^2\right)^5 \times \left(3^4\right)^2$

(iv) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (v) $(2^{20} \div 2^{12}) \times 2^3$

हल: (i) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

(ii) $\left\{\left(-3\right)^5\right\}^3 = \left(-3\right)^{5\times3} = \left(-3\right)^{15}$

(iii) $\left(3^2\right)^5 \times \left(3^4\right)^2 = 3^{2\times5} \times 3^{4\times2} = 3^{10} \times 3^8 = 3^{18}$

(iv) $3^2 \times 3^4 \times 3^8 = 3^{2+4+8} = 3^{14}$

(v) $(2^{20} \div 2^{12}) \times 2^3 = \left(\frac{2^{20}}{2^{12}}\right) \times 2^3 = \{(2)^{20-12}\} \times 2^3$

$= 2^8 \times 2^3 = 2^{8+3} = 2^{11}$

उदाहरण : (i) $\frac{12^3 \times 3^4 \times 2^2}{6^3 \times 4^2 \times 6^4}$ (ii) $\frac{36 \times 5^2 \times t^4}{6^2 \times t^3}$

(iii) $\frac{2^3 \times a^2 \times 7a^4}{a^4 \times 8 \times a^3}$ (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5$

हल : (i) $\frac{12^3 \times 3^4 \times 2^2}{6^3 \times 4^2 \times 6^4} = \frac{(2\times6)^3 \times 3^4 \times 2^2}{6^3 \times (2\times2)^2 \times (2\times3)^4}$

$= \frac{2^3 \times 6^3 \times 3^4 \times 2^2}{6^3 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^4 \times 3^4} = \frac{2^3}{2^2 \times 2^4}$

$= \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{2^{6-3}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(ii) $\frac{36 \times 5^2 \times t^4}{6^2 \times t^3} = \frac{6^2 \times 5^2 \times t^4}{6^2 \times t^3} = 5^2 \times t = 25t$

(iii) $\frac{2^3 \times a^2 \times 7a^4}{a^4 \times 8 \times a^3} = \frac{2^3 \times a^2 \times 7a^4}{a^4 \times 2^3 \times a^3} = \frac{7}{a}$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{2^5}{5^5} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$

प्रश्नावली : 5.2

(1) घातांक के नियमों का प्रयोग कर हल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $2^3 \times 2^4 \times 2^8$ (ii) $7^{15} \div 7^{10}$ (iii) $t^9 \times t^5$

(iv) $(7^2)^3 \times 7^3$ (v) $a^5 \times a^6$ (vi) $(2^{20} \div 2^{18}) \times 2^2$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

2) घातांक के नियमों का प्रयोग करते हुए, हल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $(2^3)^4$ (ii) $625 \div (5^4)$ (iii) $(2^3 \times 2)^3$ (iv) $\left(\frac{a^6}{a^3}\right) \times a^4$

(v) $(2^3 \times 2)^0$ (vi) $\frac{4^8 \times a^8 \times b^8}{4^5 \times a^5 \times b^2}$ (vii) $2^0 \times 3^0 \times 2^0$

(viii) $(1000)^0 \div (1^0)$ (ix) $3^2 \times 3 \times 27$ x) $5^2 \times 5 \times 5^0$

3) घातांक के नियमों का प्रयोग कर हल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) 625×27 (ii) 36×64 (iii) 729 (iv) 1024

4) निम्नलिखित प्रत्येक को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\frac{(-3)^7 \times (-1)^5}{3^4 \times 3^2}$ (ii) $\frac{3^6 \times t^5 \times p^3}{3^2 \times 2^2 \times t^3 \times p^2}$

(iii) $\frac{5^7 \times 6^2}{5^3 \times 2^2 \times 3}$ (iv) $\frac{27 \times a^2 \times b^2 \times c^3}{3^2 \times a \times b \times c}$

5.5 दशमलव संख्या पद्धति और घातांक

इस अनुभाग में हम किसी संख्या को 10 की घातों का प्रयोग करते हुए घातांकीय रूप में व्यक्त करना सीखेंगे।

उदाहरण : 45621

हल : $45621 = 4 \times 10{,}000 + 5 \times 1000 + 6 \times 100 + 2 \times 10 + 1$

$= 4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

यहाँ, $10{,}000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$, $10^0 = 1$

ध्यान दीजिए कि किस प्रकार 10 के घातांक अधिकतम मान 4 से घटते–घटते 0 तक आ जाते हैं।

प्रयास कीजिए H

निम्नलिखित संख्याओं को 10 की घातों में घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 71294 (ii) 16254 (iii) 217874 (iv) 530002

5.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना –

विज्ञान, प्रौद्योगिकी के साथ ऐसी कई परिस्थितियाँ आती हैं, जहाँ बहुत बड़ी संख्या का उपयोग होता है। जैसे– पृथ्वी से सूर्य की दूरी, पृथ्वी से चंद्रमा की दूरी, पृथ्वी का द्रव्यमान, ब्रहमाण्ड में तारों की संख्या, प्रकाश की गति आदि। इन्हें पढ़ने और लिखने में कठिनाई होती है। उदाहरण के तौर पर निर्वात में प्रकाश की गति 3,00,000 किमी प्रति सेकेण्ड या 3,00,000,000 मी प्रति सेकेण्ड लगभग है। इसी प्रकार पृथ्वी का द्रव्यमान भी लगभग 59,76,000,000,000,000,000,000,000 Kg है। ऐसी बड़ी संख्याओं को सुविधापूर्वक लिखने के लिए हम 10 की आधार वाले घातंकीय रूप में लिखते हैं। जैसे– निर्वात में प्रकाश की गति 30×10^7 मीटर प्रति सेकेण्ड। इसी प्रकार पृथ्वी का द्रव्यमान 5.976×10^{24} Kg होता है।

निम्नलिखित को देखिए :

$39 = 3.9 \times 10 = 3.9 \times 10^1$

$390 = 3.9 \times 100 = 3.9 \times 10^2$

$3900 = 3.9 \times 1000 = 3.9 \times 10^3$

$39000 = 3.9 \times 10000 = 3.9 \times 10^4$ इत्यादि।

यहाँ 39, 390, 3900, 39000 को मानक रूप (Standard form) में व्यक्त किया गया है।

वास्तव में, किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका मानक रूप कहा जाता है।

उदाहरण : $6785 = 6.785 \times 1000$

$= 6.785 \times 10^3$

यहाँ 6.785 दशमलव संख्या है और 10 का घात 3 है। यह 6785 का मानक रूप है। किसी भी संख्याओं की मानक रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

- सूर्य से पृथ्वी की दूरी = 149,000,000,000 मी(लगभग = 1.49×10^{11} मी
  (149,597,870,700 मी वास्तविक दूरी)
- सूर्य का द्रव्यमान = 1,989,000,000,000,000,000,000,000,000 Kg
  = 1.989×10^{30} Kg
- यूरेनस का द्रव्यमान = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 Kg
  = 8.68×10^{25}

इस प्रकार मानक रूप में लिखी गई संख्या, अधिक अंकों में लिखी गई संख्या की अपेक्षा पढ़ने, लिखने और तुलना करने में सरल और सुविधाजनक होती है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

क्या सूर्य और शनि ग्रह के बीच की दूरी, सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी को मानक रूप में लिख सकते हैं ? लिखिए।

उदाहरण : निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 2969 (ii) 1396.7 (iii) 7,987,000 (iv) 68.96

हल : (i) $2969 = 2.969 \times 1000 = 2.969 \times 10^3$

(ii) $1396.7 = 1.3967 \times 1000 = 1.3967 \times 10^3$

(iii) $7987000 = 7.987 \times 1000000 = 7.987 \times 10^6$

(iv) $689.6 = 6.896 \times 100 = 6.896 \times 10^2$

स्मरण रखिए : दशमलव बिन्दु से बाईं ओर के अंकों की संख्या गिनकर, उसमें से 1 घटाकर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है। जिसे मानक रूप में प्रयोग किया जाता है। हम इस बिन्दु की कल्पना, संख्या की दाएँ सिरे पर कर लेते हैं। यहाँ से बाईं ओर अंकों की संख्या 11 है। इसलिए मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, 10 का घातांक $11-1 = 10$ है। इसलिए इसके मानक रूप में 10 का घातांक $4-1 = 3$ है।

प्रश्नावली : 5.3

1) निम्नलिखित संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखिए :

(i) 15934, (ii) 798763, (iii) 17803, (iv) 67453, (v) 43721

2) निम्नलिखित प्रसारित रूपों में से प्रत्येक के लिए एक संख्या ज्ञात कीजिए :

(i) $7 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

(ii) $3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

(iii) $8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

(iv) $5 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

3) निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए :

(i) 7867.9 (ii) 6,000,000,000 (iii) 7,809,764

(iv) 28045 (v) 5481867 (vi) 7886.65

4) बॉक्स में दी गई सूचनाओं में आने वाली संख्याओं को मानक रूप में लिखकर अवरोही क्रम में लिखिए :

क्र० सं०	ग्रहों का नाम	द्रव्यमान (किग्रा में) लगभग
1	बुध	330,000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
2	शुक्र	4,870, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
3	पृथ्वी	5,980, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
4	मंगल	642, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
5	वृहस्पति	1,900, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
6	शनि	569, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
7	अरूण	8,6980, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000
8	वरूण	102, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000

5) बॉक्स में दी गई सूचनाओं में आने वाली संख्याओं को मानक रूप में लिखकर आरोही क्रम में लिखिए :

क्र०सं०	विश्व के मरूस्थल	क्षेत्रफल (वर्ग किमी)
1	कालाहारी, दक्षिण अफ्रीका	932,400
2	थार, भारत	199,430
3	गिबसन, ऑस्ट्रेलिया	155,400
4	ग्रेट विक्टोरिया, ऑस्ट्रेलिया	647,500
5	सहारा, उत्तर अफ्रीका	8,598,800

आइए गूगल को जानें:

एक गूगल में 1 के बाद 100 शून्य होते हैं। इसे मानक रूप में लिखिए और कक्षा में चर्चा कीजिए। इससे और बड़ी संख्याओं को क्या कहते हैं?

स्मरण रखने योग्य तथ्य

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$; जहाँ $a \neq 0$ है एवं $m > n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^m \times b^m = (ab)^m$
5. $a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$; जहाँ $a \neq 0$ है
6. $a^0 = 1$; जहाँ $a \neq 0$ है
7. $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$ और $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$