6 अनुपात एवं समानुपात (Ratio and Proportion)

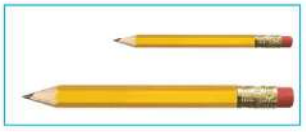
FL626Z

मुख्य अवधारणाएँ

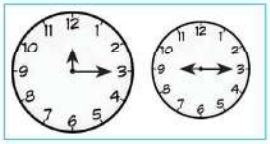
- ★ अनुपात एवं तुल्य अनुपात
- ★ राशियों का समानुपात

4.1. भूमिका :

हमारे दैनिक जीवन में अनेकों ऐसे अवसर आते हैं जब हमें तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है।







उपर्युक्त आकृतियों की तुलना हम छोटा–बड़ा, लंबा–छोटा, धारिता, मोटाई आदि में करते हैं।

यहाँ दी गई बाँस का पौधा और एक ईंख का पौधा की तुलना करने पर हम पाते हैं कि बाँस के पौधे की ऊँचाई, ईंख के पौधे की ऊँचाई से दोगुनी है। इसे हम यह भी कह सकते हैं कि ईंख के पौधे की ऊँचाई, बाँस के पौधे की ऊँचाई से आधी है।



बाँस



ईख

यहाँ बाँस की लम्बाई 10 मी तथा ईख की लम्बाई 5 मी है।

एक अन्य उदाहरण पर हम विचार करते हैं जब 25 केलों को हिना और सन्नी के बीच इस प्रकार बाँटते हैं कि हिना के पास 15 केले और सन्नी को 10 केले मिलते हैं। तब हम कह सकते हैं कि

हिना के पास कुल 25 केलों का $\frac{3}{5}$ भाग = 15 केलें

जबकि सन्नी के पास कुल 25 केलों का $\frac{2}{5}$ = 10 केलें

एक बाल्टी 20 ली एवं दूसरी बाल्टी 15 ली पानी से पूरा–पूरा भरा है। तब हम कहते हैं कि छोटी बाल्टी में पानी की मात्रा बड़ी बाल्टी से 5 ली कम है अथवा बड़ी बाल्टी में पानी की मात्रा छोटी बाल्टी से 5 ली० अधिक है।



20 लीटर बड़ी बाल्टी



15 लीटर छोटी बाल्टी

ऊपर के उदाहरणों में ऊँचाईयाँ, केलों की संख्या एवं पानी की मात्रा को अनुपात के रुप में दर्शाया जा सकता है। इन राशियों को अनुपातों के रूप में इस प्रकार दिखाया जा सकता है।

$$\frac{\text{बाँस के पौधे की ऊँचाई}}{\text{ईख के पौधे की ऊँचाई}} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = 2 : 1$$

$$\frac{\text{हिना के पास केले}}{\text{सन्नी के पास केले}} = \frac{15 \text{ केला}}{10 \text{ केला}} = \frac{3}{2} = 3 : 2$$

$$\frac{\text{बड़ी बाल्टी का जल}}{\text{छोटी बाल्टी का जल}} = \frac{20 \text{ लीटर}}{15 \text{ लीटर}} = \frac{4}{3} = 4 : 3$$

याद रखिए : तुलना करते समय दोनों राशियों के मात्रक समान होने चाहिए। यदि मात्रक समान नहीं हों, तो पहले दोनों के मात्रक को समान करना होगा। अर्थात एक राशि किलोग्राम में तथा दूसरी राशि ग्राम में हो, तो किलोग्राम को ग्राम में बदलना होगा या ग्राम को किलोग्राम में। एक राशि सेमी में तथा दूसरी राशि मीटर में है तो मीटर को सेमी में या सेमी को मीटर में बदलना चाहिए। अनुपात के रूप में लिखे गए राशियों के अभीष्ट उत्तर का कोई मात्रक नहीं होता है। अतः अनुपात केवल संख्याओं के रूप में व्यक्त किया जाता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

उदाहरण : 4 किलोग्राम का 500 ग्राम के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : 4 किलोग्राम = 4 × 1000 ग्राम = 4000 ग्राम

4 किलोग्राम तथा 500 ग्राम का अनुपात $= \frac{4 \text{ किलोग्राम}}{500 \text{ ग्राम}}$

$= \frac{4000 \text{ ग्राम}}{500 \text{ ग्राम}} = \frac{8}{1} = 8 : 1$

उदाहरण : ₹5 का 20 पैसे के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : ₹5 = 5 × 100 पैसे = 500 पैसे

₹5 का 20 पैसे के साथ अनुपात $= \frac{₹5}{20 \text{ पैसे}}$

$= \frac{500 \text{ पैसे}}{20 \text{ पैसे}} = \frac{25}{1} = 25 : 1$

उदाहरण : 60 सेमी का 2 मी के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : 2 मी = 2 × 100 = 200 सेमी

60 सेमी का 2 मी के साथ अनुपात $= \frac{60 \text{ सेमी}}{2 \text{ मी}}$

$= \frac{60 \text{ सेमी}}{200 \text{ सेमी}} = \frac{3}{10} = 3 : 10$

प्रयास कीजिए A

1. एक राशि का दूसरी राशि के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

i) 1 किग्रा का 800 ग्राम के साथ ii) 1 घंटा का 40 मिनट के साथ

iii) 40 सेकेण्ड का 1 मिनट के साथ iv) 50 सेमी का 1 मी के साथ।

इन्हें भी जानिए :

1) अनुपात में अभीष्ट उत्तर का कोई मात्रक नहीं होता है।

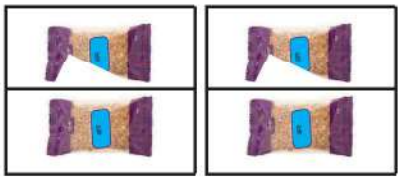
2) दोनों राशियों के मात्रकों को समान करने के लिए हमेशा बड़े मात्रक को छोटे मात्रक में बदलना सुविधाजनक होता है।

1 मी० = 100 सेमी	1 घंटा = 60 मिनट
1 किग्रा = 1000 ग्राम	1 मिनट = 60 सेकेंड
1 लीटर= 1000 मिली	₹1 = 100 पैसे

4.2 तुल्य अनुपात :

स्थिति : 1



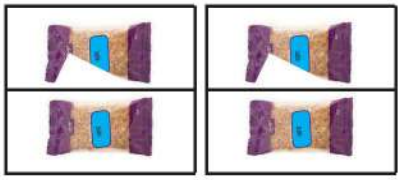


काँच की गोलियों का अनुपात 2 : 3 है जबकि टॉफी का अनुपात 4 : 6 है।

दोनो का अनुपात तुल्य है।

स्थिति :2





यहाँ बॉक्स में रखे काँच की गोलियों का अनुपात 2 : 3 है जबकि टॉफीयों का अनुपात 1 : 3 है।

यहाँ गोली और टॉफी का अनुपात समान नहीं है अर्थात तुल्य नहीं है।

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3} \quad \text{या} \quad \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

क्योंकि दोनों का हर समान है परन्तु अंश अलग–अलग हैं।

सम हर भिन्न में बड़े अंश वाला भिन्न बड़ा होता है।

अनुपातों को भिन्न में लिखकर उसे सम हर भिन्न में बदलते हैं। ऐसा करने पर भिन्नों की तुलना करना आसान हो जाता है।

उदाहरण : ज्ञात कीजिए कि क्या 2 : 3 एवं 3 : 4 तुल्य है?

हल : $2 : 3 = \frac{2}{3}$ एवं $3 : 4 = \frac{3}{4}$

दोनों भिन्नों का हर समान नहीं है। दोनों भिन्नों को सम हर में बदलने पर

3 और 4 का ल०स० $= 3 \times 4 = 12$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

पुनः $$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

दोनों का हर समान है परन्तु अंश समान नहीं है। $8 < 9$

अतः $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ अर्थात् $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$

अतः 2 : 3 एवं 3 : 4 तुल्य नहीं है।

इन्हें भी जानिए –

1) दो अनुपात समान होने पर उसे तुल्य अनुपात कहते हैं।

2) हर समान रहने पर अंश के मान के आधार पर अनुपात बड़ा या छोटा होता है।

3) हर असमान रहने पर पहले इसे समान किया जाता है।

प्रयास कीजिए B

1. निम्नलिखित के दो–दो तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

i) 1 : 2 ii) 2 : 5 iii) 3 : 5 iv) 5 : 7 v) 7 : 11

2. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में कौन–कौन युग्म अनुपात तुल्य है?

i) 3 : 4, 12 : 16 ii) 5 : 7, 3 : 4 iii) 7 : 9, 9 : 11

4.3 राशियों का समानुपात :

दो अनुपातों के तुल्य होने पर वे एक समानुपात बनाते हैं।
इसे ': :' या '=' के चिह्न द्वारा दिखाया जाता है।

उदाहरण : यदि 2 पेंसिल का मूल्य ₹6 है और 5 कटर का मूल्य ₹15 है। इन वस्तुओं की संख्या का अनुपात तथा उन दोनों की कीमतों के अनुपात को समानुपात में दिखाइए?

हल : पेंसिल और कटर के संख्याओं का अनुपात $= 2 : 5 = \frac{2}{5}$

पेंसिल और कटर के मूल्यों का अनुपात $= \frac{₹6}{₹15} = \frac{2}{5} = 2 : 5$

दोनों स्थिति में अनुपात समान है। अतः दोनों अनुपात समानुपात में है।

अतः $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ या $\frac{2}{5} : : \frac{6}{15}$

अर्थात् 2 : 5 : : 6 : 15

उदहारण : 2 किग्रा आलू का मूल्य ₹60 और 5 किग्रा टमाटर का मूल्य ₹15 है। क्या दोनों समानुपात में हैं?

हल : आलू तथा टमाटर के वजनों का अनुपात $= \frac{2 \text{ किग्रा}}{5 \text{ किग्रा}} = \frac{2}{5} = 2 : 5$

दोनों के मूल्यों का अनुपात $= \frac{₹60}{₹15} = \frac{4}{1} = 4 : 1$

यहाँ $2 : 5$ एवं $4 : 1$ बराबर नहीं है।

अर्थात $2 : 5 \neq 60 : 15$

अतः दोनों अनुपात समानुपात में नहीं है।

प्रयास कीजिए C

जाँच कर बताइए कि निम्न अनुपात समानुपात में हैं या नहीं?

i) $1 : 5$ और $3 : 15$

ii) $2 : 9$ और $18 : 81$

iii) $15 : 45$ और $5 : 25$

iv) $9 : 27$ और $4 : 12$

राशियों को समानुपात में रख कर हल प्राप्त करना।

उदाहरण : ₹20 में 4 कलमें मिलती हैं। सीता को 12 कलमें खरीदनी है। उसे कितनी रकम देनी होगी?

हल : माना कि सीता को ₹x देना है।

समानुपात के नियम से, कलम का अनुपात = उनके संगत मूल्यों का अनुपात

$$4 : 12 = 20 : x$$

अर्थात् $\frac{4}{12} = \frac{20}{x}$

या $x \times 4 = 20 \times 12$

$\therefore$ $x = \frac{20 \times 12}{4} = 60$

अतः सीता को 12 कलमों के लिए ₹60 देने होंगे।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

दूसरी विधि : ऐकिक नियम द्वारा,

हल: ∵ सीता 4 कलमों के लिए ₹20 चुकाती है।

∴ सीता 1 कलम के लिए $\frac{₹20}{4}$ = ₹5 चुकाएगी।

∴ सीता 12 कलमों के लिए 12 × ₹5 = ₹60 चुकाएगी।

उदाहरण : 3 छाता का मूल्य ₹180 है तो 7 छातों का मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल : समानुपात नियम से,

माना कि 7 छाते का मूल्य ₹x है।

अतः $3 : 7 = 180 : x$

अर्थात $\frac{3}{7} = \frac{180}{x}$

या $x \times 3 = 7 \times 180$

चुँकि $x = \frac{7 \times 180}{3} = 7 \times 60 = 420$

अतः 7 छातों का मूल्य ₹420 है।

ऐकिक नियम से,

∴ 3 छाता का मूल्य ₹180 है

∵ 1 छाता का मूल्य $= \frac{180}{3} =$ ₹60

∵ 7 छाता का मूल्य 60 × 7 = ₹420

उदाहरण–8 एक डब्बे में 5 लाल रंग के तथा 7 हरे रंग के पेंसिल है, तो निम्नलिखित का अनुपात ज्ञात कीजिए ?

i) लाल रंग वाले पेंसिल एवं हरे रंग वाले पेंसिल ।

ii) हरा रंग वाले पेंसिल एवं लाल रंग वाले पेंसिल ।

iii) लाल रंग वाले पेंसिल एवं कुल पेंसिल की संख्या ।

हल: लाल रंग वाले पेंसिल की संख्या = 5

हरे रंग वाले पेंसिल की संख्या = 7

अतः i) $\frac{\text{लाल रंग वाला पेंसिल}}{\text{हरा रंग वाला पेंसिल}} = \frac{5}{7} = 5 : 7$

ii) $\frac{\text{हरा रंग वाला पेंसिल}}{\text{लाल रंग वाला पेंसिल}} = \frac{7}{5} = 7 : 5$

iii) $\frac{\text{लाल रंग वाला पेंसिल}}{\text{कुल पेंसिल}} = \frac{5}{12} = 5 : 12$

प्रश्नावली : 6.1

1) अनुपात ज्ञात कीजिए–

i) 4 का 3 से
ii) 6 किग्रा का 2 किग्रा से
iii) 1 घण्टा का 30 मिनट से
iv) 2 मीटर का 50 सेमी से
v) ₹10 का 100 पैसे से
vi) 50 मिनट का 2 घण्टा से
vii) 1 घण्टा 20 मिनट का 2 घंटा 40 मिनट से
viii) 70 पैसे का ₹7 से

2) एक कक्षा में 45 लड़के तथा 35 लड़कियाँ हैं तो निम्न का अनुपात ज्ञात कीजिए :

i) लड़के की संख्या का लड़कियों की संख्या से
ii) लड़कियों की संख्या का लड़के की संख्या से
iii) लड़के की संख्या का कुल विधर्थियों की संख्या से

3) ललीता की वर्त्तमान आयु 12 वर्ष हैं तथा तनु की वर्त्तमान आयु 8 वर्ष है। तो निम्नलिखित का अनुपात ज्ञात कीजिए :

i) ललीता की वर्त्तमान आयु का तनु की आयु से
ii) तनु की वर्त्तमान आयु का ललीता की आयु से
iii) ललीता की वर्त्तमान आयु का दोनों की आयु के योग से।

4) बिजली का एक खंभा 28 मीटर ऊँचा है और उसकी छाया 16 मी० है। समान स्थितियों में उस पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 12 मीटर है।

5) एक कार 10 लीटर पेट्रोल में 100 किलोमीटर तय करती हैं तो 15 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी?

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"