14 त्रिभुज और इसके गुण
(Triangle and Its Property)

मुख्य अवधारणाएँ

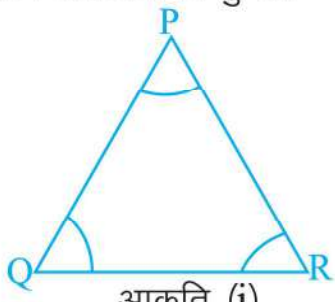
- ✯ त्रिभुज एवं इसके अवयव
- ✯ त्रिभुज की माध्यिकाएँ
- ✯ त्रिभुज की शीर्ष लम्ब
- ✯ त्रिभुज के बाह्य कोण एवं इसके गुण
- ✯ त्रिभुज के प्रकार
- ✯ त्रिभुज के भुजाओं की मापों का गुण

FZ4KXF

14.1 भूमिका

त्रिभुज तीन रेखाओं से बनी एक बंद सरल आकृति है। अर्थात तीन अरैखिक बिन्दु को मिलाने वाली रेखाओं से बनी बंद सरल आकृति त्रिभुज है।

दी गई आकृति (i) में PQR तीन अरैखिक बिन्दु हैं। एक दूसरे को जोड़कर PQR एक बंद आकृति बनी ।



आकृति (i)

i) त्रिभुज PQR में तीन शीर्ष (Vertices) बिन्दु, P, Q, R हैं।

ii) त्रिभुज PQR में तीन भुजाएँ $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$ हैं।

iii) त्रिभुज PQR में तीन कोण $\angle PQR$, $\angle QRP$, $\angle RPQ$ हैं।

एक त्रिभुज में तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं।

14.2 विभिन्न प्रकार के त्रिभुज

पिछली कक्षा में हमने कोणों एवं भुजाओं के आधार पर विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों के बारे में अध्ययन किया है।

14.2.1 कोण के आधार पर त्रिभुज के प्रकार :

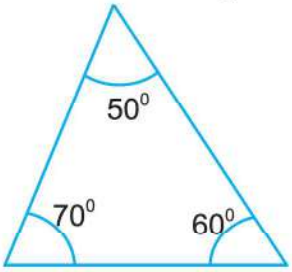
i) न्यूनकोण त्रिभुज (Acute Angle Triangle) :

वैसे त्रिभुज जिसके सभी कोण 90^0 से कम होते हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

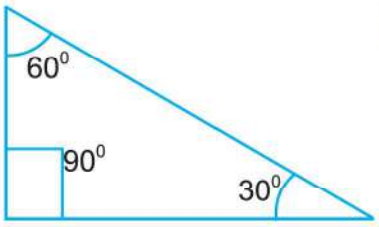
ii) समकोण त्रिभुज (Right Angle Triangle) :
वैसे त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 का होता है।

iii) अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse Angle Triangle) :
वैसे त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 से अधिक होता है परन्तु 180^0 से कम होता है।



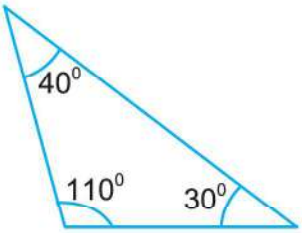
आकृति (i)

(न्यून कोण त्रिभुज)



आकृति (ii)

(समकोण त्रिभुज)



आकृति (iii)

(अधिक कोण त्रिभुज)

आकृति (i) में त्रिभुज के कोण क्रमशः 70^0, 50^0, 60^0 है।
आकृति (ii) में त्रिभुज के कोण क्रमशः 90^0, 60^0, 30^0 है।

आकृति (iii)में त्रिभुज के कोण क्रमशः 110^0, 40^0, 30^0 है।

14.2.2 भुजा के आधार पर त्रिभुज के प्रकार :

i) समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

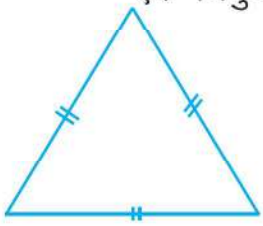
ऐसी त्रिभुज जिसकी सभी भुजाओं की माप बराबर होती है।

ii) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) :

एक त्रिभुज जिसके दो भुजाओं की माप समान होती है।

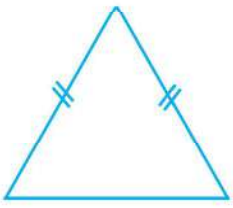
iii) विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle) :

एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ अलग–अलग माप की होती हैं।



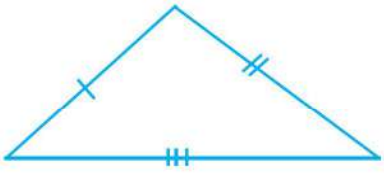
आकृति (i)

(समबाहु त्रिभुज)



आकृति (ii)

(समद्विबाहु त्रिभुज)



आकृति (iii)

(विषमबाहु त्रिभुज)

आकृति (i) समबाहु त्रिभुज के सभी भुजाओं की माप समान है।

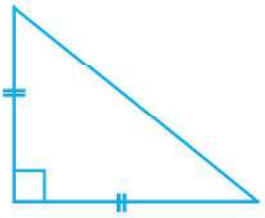
आकृति (ii) में समद्विबाहु त्रिभुज के दो भुजाओं की माप समान है।

आकृति (iii) में विषमबाहु त्रिभुज के भुजाएँ अलग–अलग माप की है।

14.2.3 विशेष प्रकार के त्रिभुज :

i) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज (Isosceles Right AngleTriangle) :

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाओं की माप समान होती है एवं एक कोण समकोण होता है।



इन्हें भी जानें

i) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण बराबर होता है, अर्थात 60^0 का होता है।

ii) समद्विबाहु त्रिभुज के आधार पर बना कोण समान होता है।

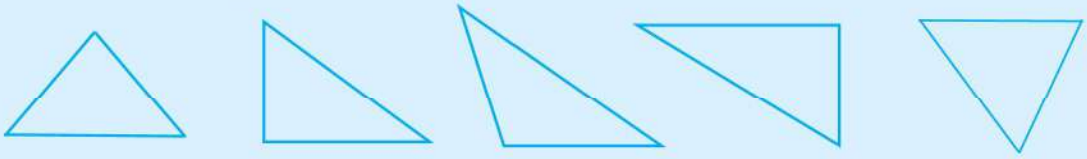
iii) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज में समकोण को छोड़ अन्य दो कोण प्रत्येक 45^0 का होता है।

iv) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा की लंबाई सबसे अधिक होती है।

v) विषमबाहु त्रिभुज के तीनों कोण अलग–अलग माप की होती है।

प्रयास कीजिए A

1) निम्नलिखित त्रिभुजों में न्यून कोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज तथा समकोण त्रिभुज की पहचान कीजिए।

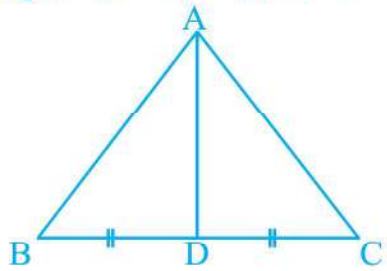


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

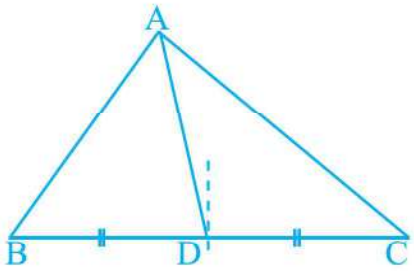
2) तीन अलग–अलग मापों की समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज तथा विषमबाहु त्रिभुज बनाइए।

3) कागज काटकर एक न्यूनकोण त्रिभुज, एक समकोण त्रिभुज एवं एक अधिककोण त्रिभुज बनाइए।

14.3 त्रिभुज की माध्यिकाएँ :



आकृति (i)



आकृति (ii)

आकृति (i) एवं आकृति (ii) में त्रिभुज ABC के रेखाखण्ड BC का मध्य बिन्दु D है।

∵ BD = DC, शीर्ष A से D को मिलाने वाली रेखा खण्ड AD है।

इस तरह AD, ΔABC की माध्यिका है।

त्रिभुज ABC के अन्य दो भुजाएँ AC एवं AB पर माध्यिकाएँ खींचिए।

अतः किसी त्रिभुज की भुजा का मध्य बिंदु से सम्मुख शीर्ष को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की माध्यिका होती है।

इन्हें भी जानें

i) एक त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ हो सकती हैं।

ii) त्रिभुज की माध्यिकाएँ आधार को समद्विभाजित करती हैं।

प्रयास कीजिए B

1) एक त्रिभुज में कितनी माध्यिकाएँ हो सकती हैं?

2) क्या किसी त्रिभुज की माध्यिकाएँ त्रिभुज के बाह्य भाग में खींची जा सकती है?

3) एक त्रिभुज बनाइए और इसके सभी माध्यिकाओं को दिखाइए।

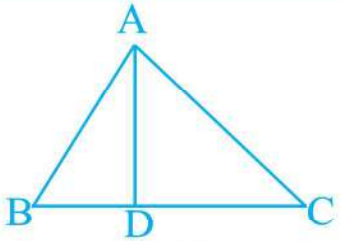
4) सोचिए और बताइए :

- त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक दूसरे को कितने बिन्दुओं पर काट सकती हैं?
- त्रिभुज की भुजा के किस बिन्दु पर से माध्यिकाएँ खींची जा सकती हैं?

14.4 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब :

आकृति (i) एक त्रिभुज ABC खींचिए। शीर्ष A से सम्मुख भुजा BC की दूरी पता लगाइए।

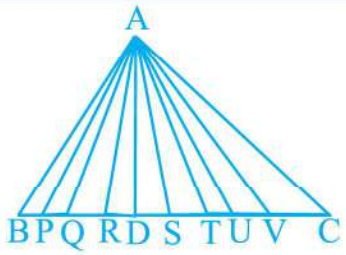
इसके लिए लम्बाई मापक स्केल का उपयोग कीजिए।



आकृति (i)

त्रिभुज एवं इसके गुण

आकृति (ii) एक त्रिभुज के शीर्ष बिंदु से सम्मुख भुजा पर कई रेखाखण्ड खींची जा सकती है।

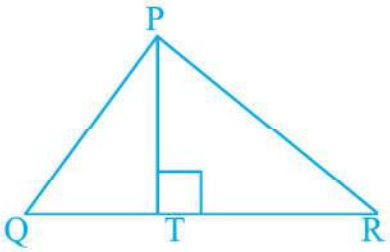


आकृति (ii)

दी गई आकृति (ii) में ΔABC के शीर्ष A से सम्मुख भुजा BC पर कई रेखाखण्ड AP, AQ, AR, AD, AS, AT, AU एवं AV खींची गयी है। यहाँ A से BC पर खींची गई सबसे छोटी रेखाखण्ड AD है, जो त्रिभुज ABC की ऊँचाई है।

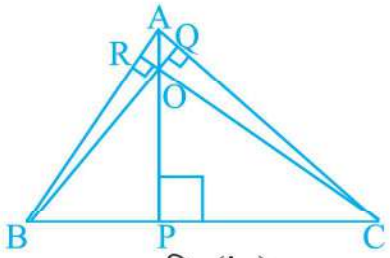
आकृति (iii) ΔPQR में शीर्ष P से सम्मुख भुजा QR पर रेखाखण्ड PT लम्ब है।

PT, ΔPQR की ऊँचाई है।



आकृति (iii)

आकृति (iv) ΔABC में A से $\overline{AP}$, B से $\overline{BQ}$ तथा C से $\overline{CR}$ सम्मुख भुजाएँ क्रमशः $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ एवं $\overline{AB}$ पर शीर्ष लम्ब है।



आकृति (iv)

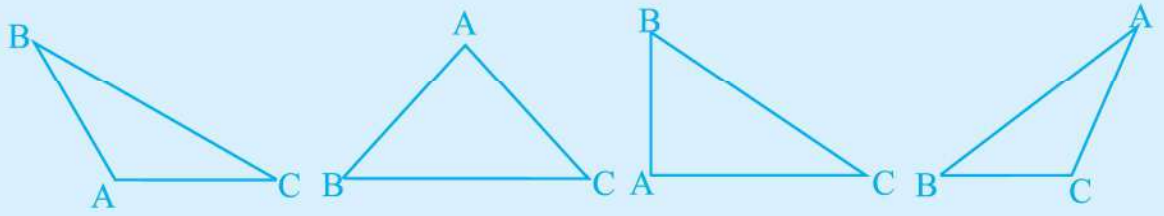
इन्हें भी जानें

- त्रिभुज के किसी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उस त्रिभुज का शीर्षलम्ब कहलाता है।
- एक त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब हो सकते हैं।
- त्रिभुज के तीनों शीर्षलम्ब केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

प्रयास कीजिए C

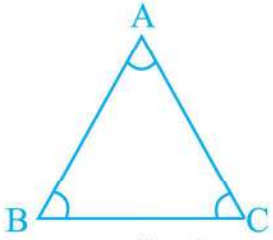
1. कागज काटकर न्यून कोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज एवं अधिक कोण त्रिभुज बनाकर उसमें शीर्षलम्ब दिखाइए।
2. वैसे त्रिभुजों का नाम लिखिए जिसमें कम से कम एक माध्यिका एवं शीर्षलम्ब एक ही रेखाखण्ड होता है।

3. दिए गए त्रिभुज में BC भुजा पर सम्मुख शीर्ष से शीर्ष लम्ब खींचिए।



आकृति (i) आकृति (ii) आकृति (iii) आकृति (iv)

14.4.1 त्रिभुज के अंतः कोण :

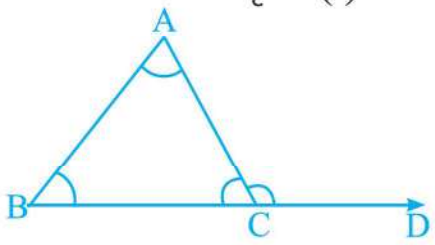


आकृति (i)

आकृति (i) में त्रिभुज ABC के तीन कोण हैं। ∠BAC, ∠ABC तथा ∠BCA है। ये सभी ΔABC के अंतः कोण हैं।

14.4.2 त्रिभुज के बाह्य कोण :

ΔABC आकृति (ii) की भुजा BC को आगे की ओर D तक बढ़ाया गया। इस प्रकार ΔABC के बहिर्भाग में ∠ACD स्थित है।
इसे ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण कहा जाता है। स्पष्ट है कि ∠ACB तथा ∠ACD परस्पर संलग्न कोण है। जो ΔABC के C बिन्दु पर स्थित है।



आकृति (ii)

त्रिभुज के अन्य दो आन्तरिक कोण ∠CAB तथा ∠ABC बाह्य ∠ACD के दो अंतः अभिमुख कोण है।

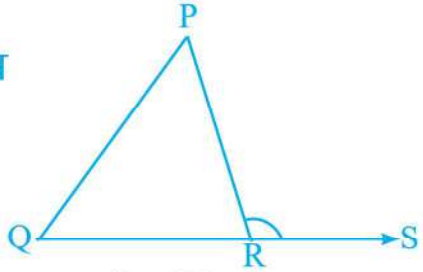
अतः किसी त्रिभुज के किसी भुजा को यदि आगे की ओर बढ़ाया जाता है तो इस प्रकार बहिर्भाग में बना कोण बाह्य कोण कहलाता है।

इन्हें भी जानें:

किसी त्रिभुज में अधिक से अधिक छः बाह्य कोण बनाये जा सकते हैं।

14.4.3 त्रिभुज के बाह्य कोण एवं अंतः अभिमुख कोणों में संबंध :

आकृति (iii) में त्रिभुज PQR में $\overline{QR}$ को S तक एक ही ओर आगे बढ़ाया गया। जिसमें ∠PRS एक बाह्य कोण है।



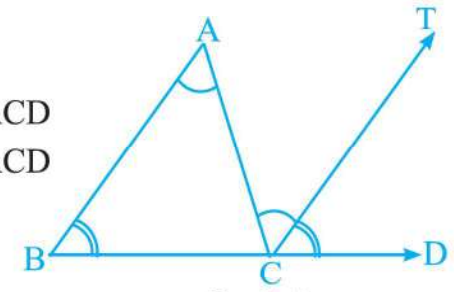
आकृति (iii)

बाह्य कोण ∠PRS के दो अंतः अभिमुख कोण ∠P तथा ∠Q

को काट कर एक दूसरे के साथ मिलाकर बाह्य कोण ∠PRS में रखते हैं। ये दोनों कोण, ∠PRS को पूर्णतया आच्छादित कर देते हैं। अर्थात् ∠RPQ तथा ∠PQR का योग ∠PRS के बराबर है।

क्रियाकलाप :

आकृति (iv) एक त्रिभुज ABC लेकर उसमें एक बाह्य ∠ACD बनाइए। कोण मापक की सहायता से कोण ∠A, ∠B, ∠ACD को मापिए।



आकृति (iv)

◊ आप क्या पाते हैं?

◊ क्या पहले किये गये कार्य की पुष्टि करती है?

◊ क्या $m\angle A + m\angle B = m\angle ACB$?

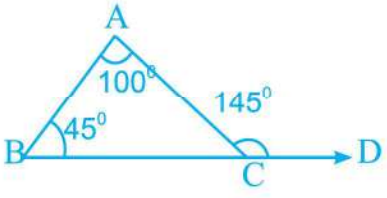
अपने शिक्षक से चर्चा कीजिए।

इस तरह के क्रियाकलाप अन्य विभिन्न प्रकार के त्रिभुज यथा न्यून कोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज या अधिक कोण त्रिभुज लेकर और उसमें बाह्य कोण बनाइए एवं इस क्रियाकलाप को दुहराइए।

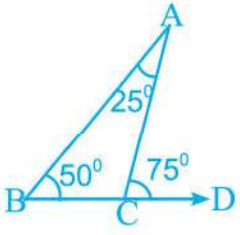
प्रत्येक स्थिति में हम पाएँगे कि किसी त्रिभुज में बाह्य कोण, उसके अभिमुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

सत्यापन कर दिखाइए कि किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अंतः अभिमुख कोणों के योगफल के बराबर होता है।

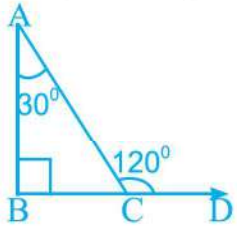
व्याख्या : ABC के BC भुजा को D तक बढ़ाई गई है। ∠ACD इसका बाह्य कोण है।



स्थिति (i)



स्थिति (ii)



स्थिति (iii)

कोण मापक की सहायता से ΔABC के कोण ∠ACD, ∠ABC तथा ∠BACको नापते हैं। प्रत्येक स्थिति में ∠ABC तथा ∠BAC का योगफल प्राप्त करते हैं।

इसे सारणी के रूप में इस प्रकार लिखते हैं।

आकृति	m∠ABC	m ∠ BAC	m ∠ABC + m ∠BAC	m ∠ACD	निष्कर्ष
स्थिति (i)	45^o	100^o	$45^0 + 100^0 = 145^0$	145^0	m∠ABC + m ∠ BAC = m ∠ACD
स्थिति (ii)	50^o	25^o	$50^0 + 25^0 = 75^0$	75^0	m∠ABC + m ∠BAC= m ∠ACD
स्थिति (iii)	90^o	30^o	$90^0 + 30^0 = 120^0$	120^0	m∠ABC + m ∠BAC= m ∠ACD

प्रत्येक स्थिति में हम पाते हैं कि $m\angle ABC + m\angle BAC = m\angle ACD$

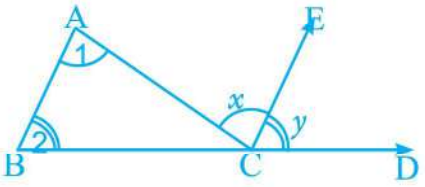
अतः किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अंतः अभिमुख कोणों के योगफल के बराबर होता है।

दूसरी विधि (तर्कपूर्ण विधि) :

दिया गया है कि ABC एक त्रिभुज है जिसमें ∠ACD एक बाह्य कोण है।

दिखाना है कि $m\angle ACD = m\angle CAB + m\angle ABC$

शीर्ष C से CE, भुजा BA के समानान्तर एक रेखा खींचा।



स्थिति (v)

माना कि $\angle CAB = \angle 1, \angle ABC = \angle 2, \angle ACE = \angle x, \angle ECD = \angle y$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle x$ (एकान्तर कोण है, BA // CE, AC एक तिर्यक रेखा है।)

तथा $\angle 2 = \angle y$ (पुनः BA // CE , BD या एक तिर्यक रेखा है।)
(संगत कोण बराबर होता है)

स्पष्ट है कि $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

$m\angle ACD = \angle x + \angle y$

अतः $\angle 1 + \angle 2 = m\angle ACD$

अतः $m\angle ACD = m\angle CAB + m\angle ABC$

किसी त्रिभुज के बाह्य कोण और उसके दोनों अंतः अभिमुख कोणों के बीच यह संबंध त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण से समझा जा सकता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

त्रिभुज एवं इसके गुण

प्रयास कीजिए D

i) एक त्रिभुज बनाकर सभी संभावित बाह्य कोण दिखाइए।

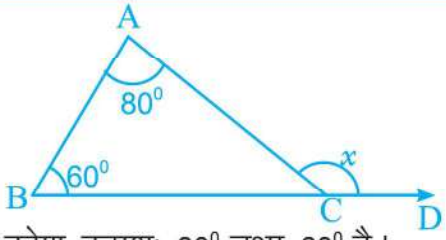
ii) त्रिभुज के एक शीर्ष पर अधिक से अधिक कितने बाह्य कोण बना सकते हैं?

iii) किसी त्रिभुज के एक बाह्य कोण और उसके संलग्न अंतः कोण के योग के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

iv) एक त्रिभुज का बाह्य कोण 70^0 है। क्या इसके दो सम्मुख अंतः कोणों का योग 70^0 का हो सकता है?

v) किसी त्रिभुज के दो सम्मुख अंतः कोणों की माप 70^0 एवं 80^0 है। उसके बाह्य कोण की माप ज्ञात कीजिए।

उदाहरण : दिये गये आकृति में बाह्यकोण का मान ज्ञात कीजिए।



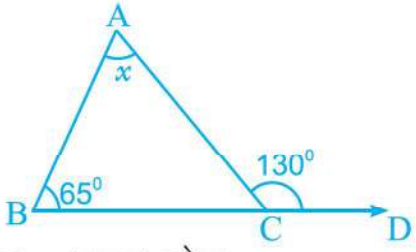
हल : ΔABC में, बाह्यकोण का अंतः अभिमुख कोण क्रमशः 80^0 तथा 60^0 है।

बाह्य कोण = अंतः अभिमुख कोणों का योग

$(x = 80^0 + 60^0 = 140^0)$

बाह्य कोण $\angle ACD = x = 140^0$

उदाहरण : दिये गये चित्र में x का मान ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में,

$\angle ACD$ बाह्य कोण है।

ΔABC में अंतः अभिमुख कोणों का योग = बाह्य कोण

$\angle x + 65^0 = 130^0$

$\therefore \quad \angle x = 130^0 - 65^0 = 65^0$

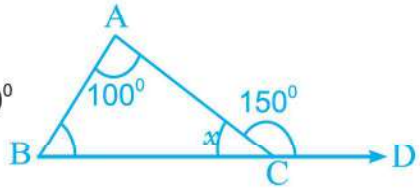
उदाहरण : दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में, $\angle ACD$ बाह्य कोण है।

ΔABC में, सरल कोण (रेखीय कोण) $= 180^0$

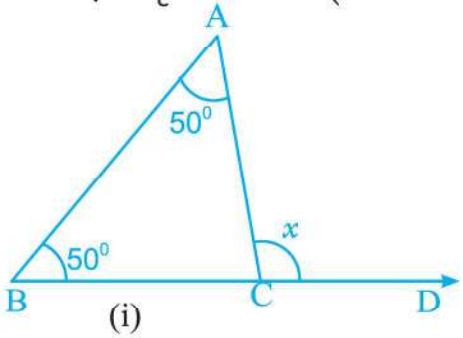
$\therefore \quad \angle x + 150^0 = 180^0$

$\therefore \quad \angle x = 180^0 - 150^0 = 30^0$

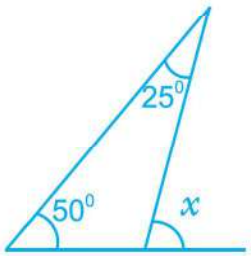


प्रश्नावली 14.1

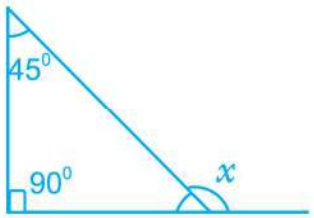
1) दी गई आकृतियों में बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



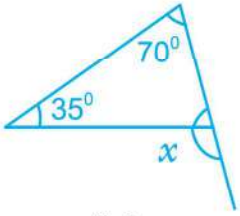
(i)



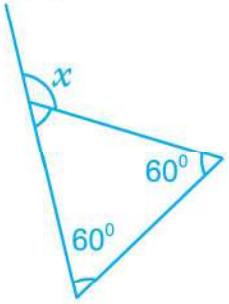
(ii)



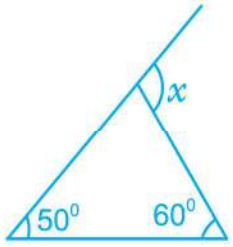
(iii)



(iv)

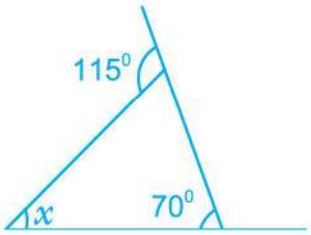


(v)

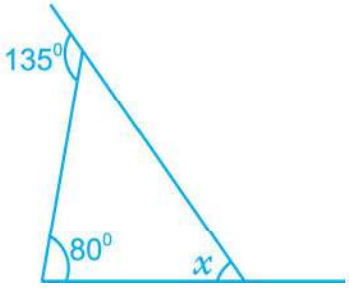


(vi)

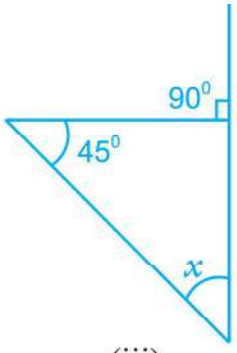
2) दी गई आकृतियों में अंतः कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



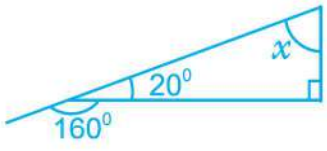
(i)



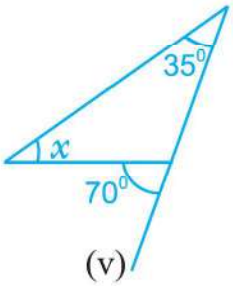
(ii)



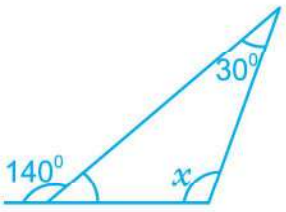
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

3) इन प्रश्नों का उत्तर 'हाँ' और 'नहीं' में दीजिए–

(i) क्या किसी त्रिभुज के दो समकोण हो सकते हैं ?

(ii) क्या किसी त्रिभुज के दो अधिक कोण हो सकते हैं ?

(iii) क्या किसी त्रिभुज के दो न्यून कोण हो सकते हैं ?

(iv) क्या किसी त्रिभुज के सभी कोण 70^0 से अधिक हो सकते हैं ?

(v) क्या किसी त्रिभुज के सभी कोण 60^0 से कम हो सकते हैं ?

4) सही कथन के आगे '✓' का एंव गलत कथन के आगे '✗' का निशान लगाईए।

(i) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण अलग–अलग माप की होती है।

(ii) समद्विबाहु त्रिभुज के बराबर भुजा के सामन का कोण समान होता है।

(iii) समकोण त्रिभुज में कोई दो कोण 90^0 हो सकता है।

(iv) अधिक कोण त्रिभुज में एक कोण 90^0 भी हो सकता है।

(v) समकोण त्रिभुज में दो कोण न्यून कोण होगा।

5) रिक्त स्थानों को सही उत्तर से भरिए।

(i) समकोण त्रिभुज के दो न्यून कोणों का योग ..... होता है।

(ii) किसी समकोण त्रिभुज का बाह्य कोण ..... अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

(iii) समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का प्रत्येक न्यून कोण ..... होता है।

(iv) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण ..... होता है।

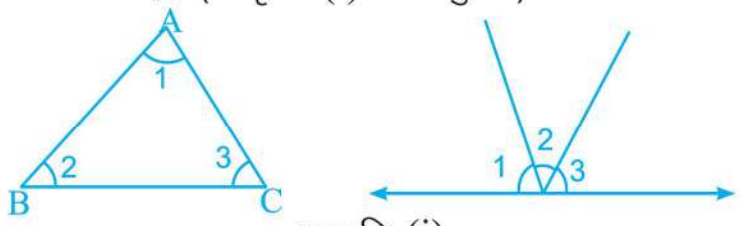
(v) एक समद्विबाहु त्रिभुज के बराबर कोणों में से एक कोण 45^0 है। तो उस त्रिभुज का बाह्य कोण ..... होगा।

14.4.4 त्रिभुज के अंतः कोणों का योग गुण :

त्रिभुज में तीन कोण होते हैं। तीनों कोणों का आपस में संबंध दर्शानें वाला एक गुण पाया जाता है।

क्रिया–कलाप :

एक त्रिभुज खींचिए। त्रिभुज के तीनों कोणों को अलग–अलग काटिए। इन कोणों को एक सरलरेखा में व्यवस्थित कीजिए। (आकृति–(i) के अनुसार)



आकृति (i)

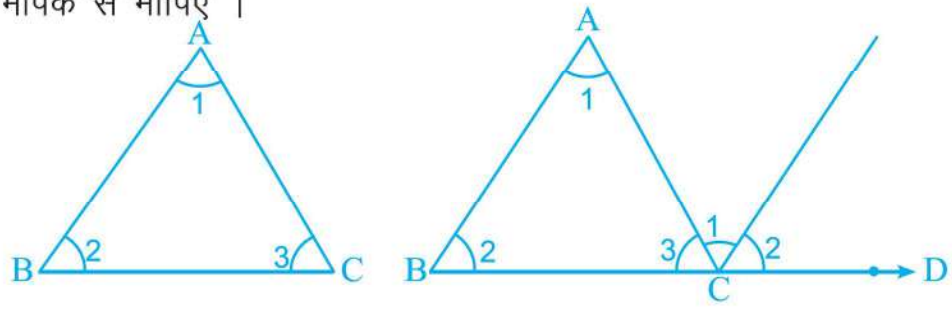
त्रिभुज के तीनों कोण सरल रेखीय कोण को आच्छादित करता हैं।

एक सरल रेखा कोण की माप 180^0 है।

इस प्रकार त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

क्रिया–कलाप :

एक त्रिभुज खींचिए। त्रिभुज के बाह्य कोण अभिमुख अंतः कोणों को कोण मापक से मापिए ।



आकृति (ii)

बाह्य कोण $\angle ACD$ का अभिमुख अंतः कोण $\angle 1$ तथा $\angle 2$ है।

कोण मापक की सहायता से बाह्य कोण $\angle ACD$ में $\angle 1$ तथा $\angle 2$ बनाया गया।

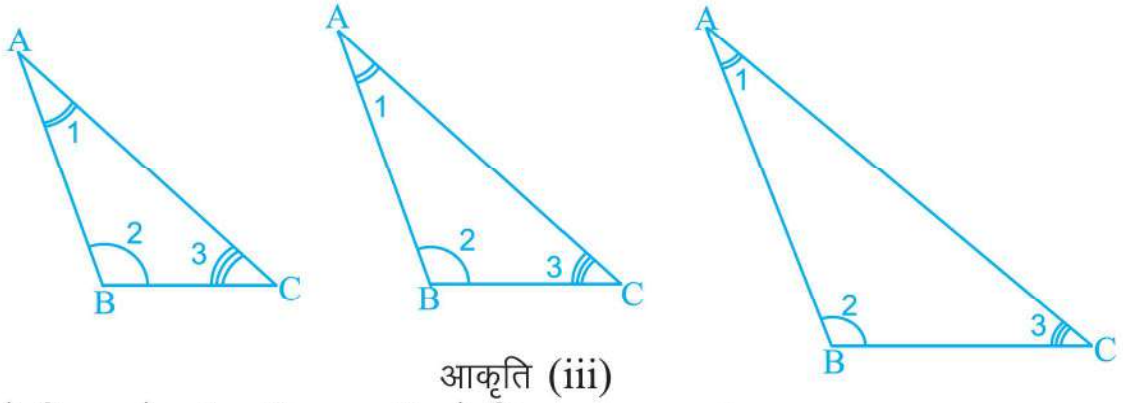
इस प्रकार $\angle 3$, $\angle 1$ तथा $\angle 2$ मिलकर एक सरल रेखीय कोण बना।

रेखीय कोण (सरल कोण) $\angle 3+\angle 1+\angle 2=180^0$

अतः ΔABC में $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

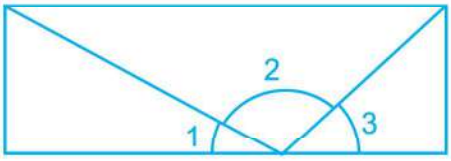
क्रिया–कलाप : तीन त्रिभुज ABC इस प्रकार बनाइए, जिसमें ΔABC के कोण $\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ अन्य त्रिभुजों के कोण क्रमशः समान हो।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"



आकृति (iii)

तीनों त्रिभुज से $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ को मिलाकर सजाइए।



आकृति (iv)

आकृति (iv) से स्पष्ट है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

क्रिया–कलाप : ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ तीन अलग–अलग त्रिभुज बनाइए इन त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की माप से सारणी को पूरा कीजिए एंव निष्कर्ष तक पहुँचिए।

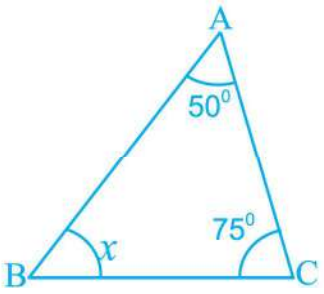
Δ का नाम	कोणों की माप	कोणों की मापों का योग	निष्कर्ष
ΔABC	$m\angle A$ =....., $m\angle B$ =..... $m\angle C$ =.....	$m\angle A+m\angle B+m\angle C$=	.....
ΔPQR	$m\angle P$ =....., $m\angle Q$ =..... $m\angle R$=.....	$m\angle P+m\angle Q+m\angle R$=	.....
ΔXYZ	$m\angle X$ =..... , $m\angle Y$ =..... $m\angle Z$ =.....	$m\angle X+m\angle Y+m\angle Z$=	.....

इन त्रिभुजों के कोणों को शुद्ध–शुद्ध मापने पर हम पाएँगे कि प्रत्येक स्थिति में तीनों कोणों की मापों का योग 180^0 प्राप्त होता है।

उपरोक्त क्रियाकलापों से स्पष्ट है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

उदाहरण : दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



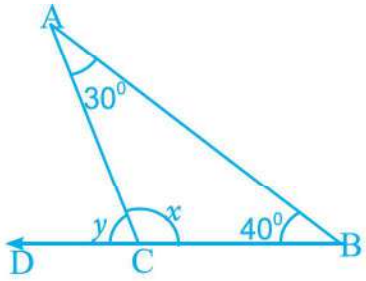
हल : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

$\because \angle x + 50^0 + 75^0 = 180^0$

$\therefore \angle x + 125^0 = 180^0$

$\therefore \angle x = 180^0 - 125^0 = 55^0$

उदाहरण : निम्नलिखित आकृतियों के x एवं y का मान ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC को तीनों कोणों का योग $= 180^0$

$\because \angle x + 40^0 + 30^0 = 180^0$

$\therefore \angle x + 70^0 = 180^0$

$\therefore \angle x = 180^0 - 70^0 = 110^0$

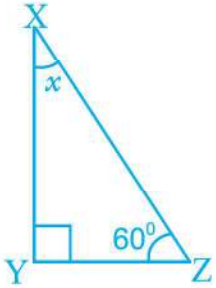
किसी त्रिभुज के बाह्य कोण अभिमुख अंतकोणों के योग के बराबर होता है।

$\because \angle y = \angle CAB + \angle ABC$

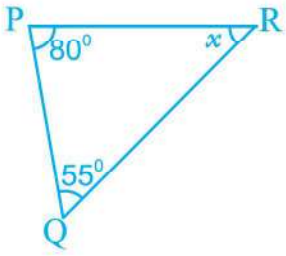
$\therefore \angle y = 40^0 + 30^0 = 70^0$

प्रश्नावली 14.2

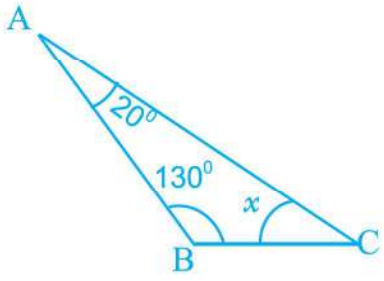
1. निम्नलिखित आकृतियो के x का मान ज्ञात कीजिए।



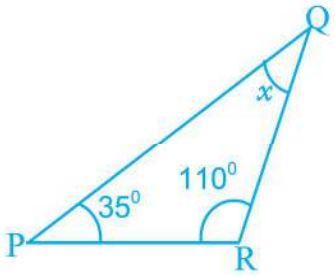
(i)



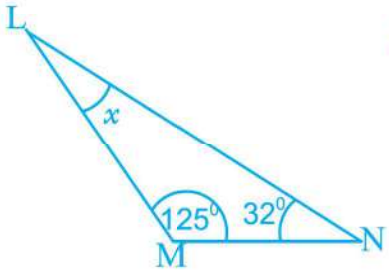
(ii)



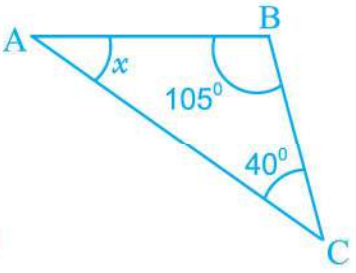
(iii)



(iv)

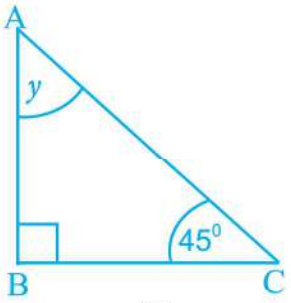


(v)

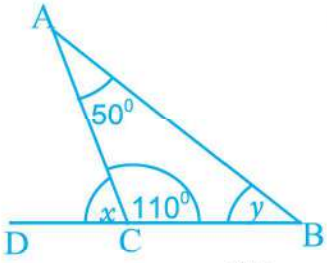


(vi)

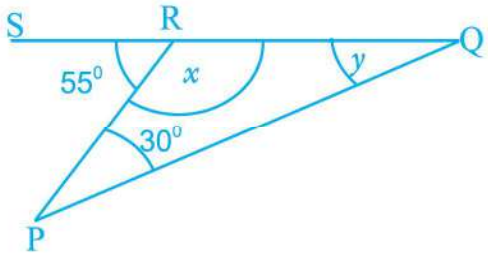
2. निम्नलिखित आकृतियो के x एवं y का मान ज्ञात कीजिए।



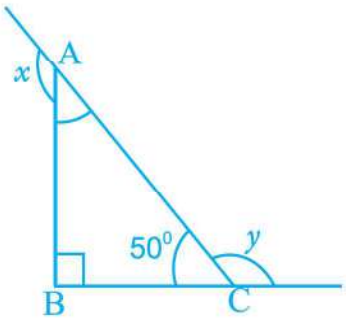
(i)



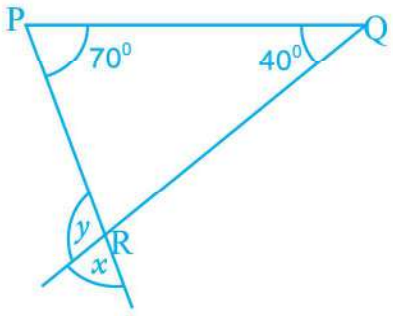
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

3. यदि त्रिभुज के कोण निम्न हो तो किन–किन स्थितियों में त्रिभुज बनना सम्भव है?

i) $40^0, 30^0, 40^0$ ii) $120^0, 80^0, 20^0$ iii) $50^0, 50^0, 80^0$

iv) $90^0, 70^0, 90^0$ v) $90^0, 30^0, 60^0$ vi) $110^0, 100^0, 80^0$

4) चर्चा कीजिए और कारण सहित लिखिए :

i) क्या किसी त्रिभुज में दो अधिक कोण हो सकते हैं ?

ii) क्या किसी त्रिभुज में एक समकोण और एक अधिक कोण हो सकते हैं?

iii) क्या किसी त्रिभुज में दो अधिक कोण हो सकते है ?

iv) क्या किसी त्रिभुज में बाह्य कोण एवं अंतः कोणों का योग 180^0 होता है ?

v) क्या किसी त्रिभुज के प्रत्येक कोण 60^0 से अधिक हो सकता है ?

vi) क्या किसी त्रिभुज के प्रत्येक कोण 60^0 से कम हो सकता है ?

vii) क्या किसी त्रिभुज के प्रत्येक कोण न्यून कोण होना आवश्यक हैं ?

5. किसी त्रिभुज के तीन कोण क्रमशः 1 : 2 : 3 के अनुपात में है तो उस त्रिभुज के प्रत्येक कोण ज्ञात कीजिए।

6. एक त्रिभुज के बाह्य कोण 135^0 है। उसके अंतः अभिमुख कोणों का अनुपात 1 : 2 है। उसकी अंत कोणों को बताइए।

7. किसी ΔABC में यदि $\angle A=72^0$, $\angle B=73^0$ तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

8. यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यून कोण 4 : 2 के अनुपात में हो तो सभी न्यून कोणों को ज्ञात कीजिए।

9. यदि त्रिभुज में एक कोण 100^0 का है अन्य दो कोण बराबर हो तो शेष दो कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

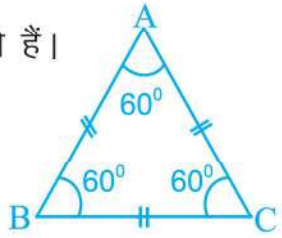
14.4.5 विशेष प्रकार के त्रिभुज :

1. ऐसे त्रिभुज जिसके तीनों भुजाओं की माप समान हो समबाहु त्रिभुज कहलाते हैं।

कागज काटकर एक ही तरह के कई त्रिभुजाकार आकृति बनाते हैं। त्रिभुजों को एक दूसरे के उपर इस प्रकार रखते हैं कि एक दूसरे को पूरा–पूरा ढँक लें। अब पहले त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर किसी भी प्रकार घुमाकर रखते हैं। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक लेता है।

ऐसे सभी बनाये गए त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

अर्थात् हम पाते हैं कि इस तरह बने त्रिभुजों की भुजाएँ समान होती हैं।



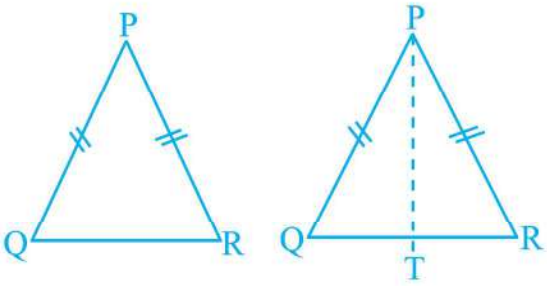
निष्कर्षतः हम कह सकते हैं कि समबाहु त्रिभुज में

i) सभी भुजाएँ समान होती हैं।

ii) प्रत्येक कोण 60^0 के होते हैं।

2. ऐसे त्रिभुज जिसकी दो भुजाओं की माप आपस में समान हो, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाते हैं।

कागज काटकर एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं जिसमें PQ = PR इस प्रकार मोड़ते हैं कि भुजा PQ पूरा–पूरा भुजा PR को ढँक लें। अब शीर्ष P से गुजरने वाली रेखा PT, ΔPQR का सममित अक्ष हैं।



अर्थात् ∠Q और ∠R एक दूसरे के पूर्णतया ढँक लेते हैं। ∠Q तथा ∠R त्रिभुज की भुजा QR पर स्थित हैं। अतः ∠Q तथा ∠R आधार कोण है जो परस्पर समान है। PQ तथा PR , ΔPQR के सम भुजाएँ हैं।

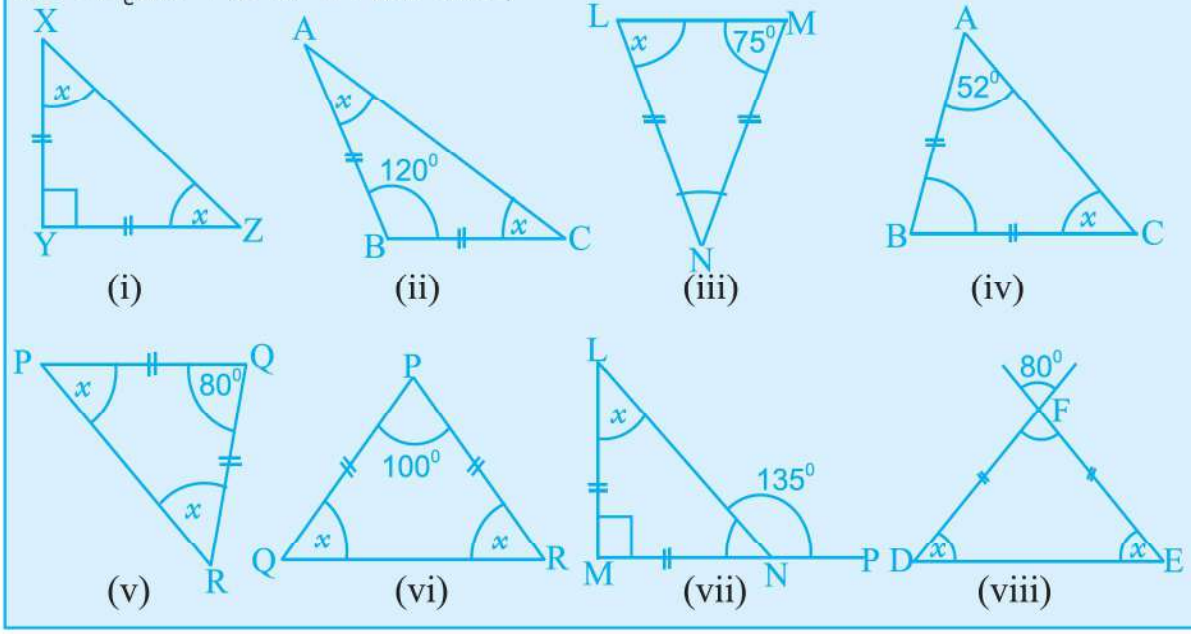
निष्कर्षतः हम पाते हैं कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज में

i) दो भुजाएँ समान लम्बाई की होती है।

ii) समान भुजाओं के सामने का कोण समान होता है।

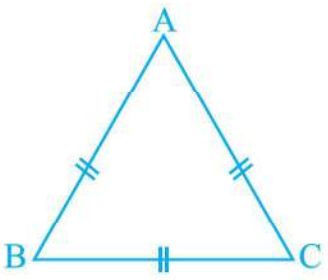
प्रयास कीजिए E

निम्न आकृतियों में x का मान ज्ञात कीजिए–



उदाहरण : दिखाइए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।

हल : ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।



जिसमें $AB = BC = AC$

$AB = AC$

$\angle B = \angle C$

पुनः $BA = BC$

$\angle A = \angle C$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

ΔABC में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\angle A + \angle A + \angle A = 180^0$

या, $3\angle A = 180^0$

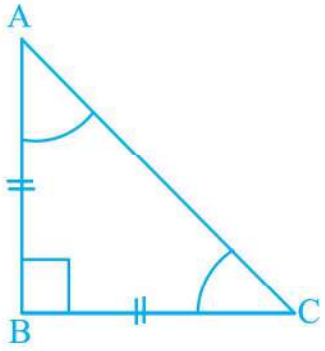
या, $\angle A = \frac{180^0}{3} = 60^0$

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^0$

अतः समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।

उदाहरण : समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के समकोण के सामने की भुजा पर बना कोण प्रत्येक 45^0 का होता है।

हल : ΔABC एक समकोण त्रिभुज है
जिसमें $\angle B = 90^0$ तथा $AB = BC$
समकोण की सामने की भुजा AC पर बनने वाली $\angle A$ कोण $\angle C$ तथा है।



$\therefore \angle A = \angle C$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180^0

$\angle A + \angle C + 90^0 = 180^0$

$\angle A + \angle A = 180^0 - 90^0$

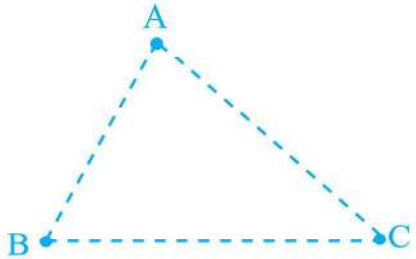
$2\angle A = 90^0 \therefore \angle A = 45^0$

$\angle A = \angle C = 45^0$

14.5 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों के योग का त्रिभुज के तीसरी भुजा से संबंध :

क्रिया–कलाप खेल के मैदान में A, B, C तीन बिन्दु अंकित कीजिए जो एक रेखा में न हो। तीनों बिन्दुओं को एक दूसरे से मिलाइए। AB, BC, CA पथ निर्धारित कीजिए।

A से C तक पहूँचने के लिए पहले AB पथ पुनः BC पथ का उपयोग कीजिए।
दूसरी स्थिति में A से C तक पहूँचने के लिए AC पथ का उपयोग कीजिए।



चर्चा कीजिए कि A से C तक पहुँचने में किस मार्ग से चलने में अधिक दूरी तय करना पड़ा ?

स्पष्ट है कि A से C तक पहुँचने के लिए AC मार्ग कम समय लगेगा।

अर्थात् $AB + BC > AC$

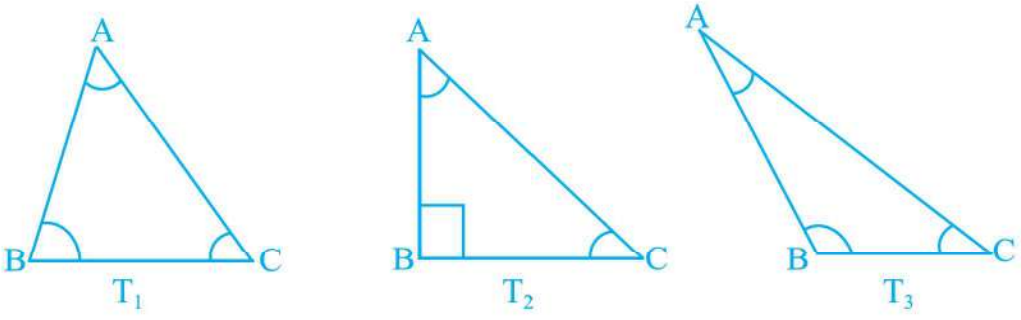
इसी प्रकार A से C तक पहुँचने के लिए AC मार्ग सबसे छोटा मार्ग होगा।

अर्थात $AC + BC > AB$

इसी प्रकार $BA + AC > BC$

उपर्युक्त स्थिति में यह स्पष्ट है कि यदि ABC एक त्रिभुज है तो **त्रिभुज के दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ी है।**

क्रिया–कलाप विभिन्न आकारों वाली तीन त्रिभुज (T_1, T_2, T_3) बनाईए। त्रिभुज की भुजाओं को माप कर नीचे के तालिका को पूरा कीजिए।



त्रिभुज	त्रिभुज की भुजाएँ			भुजाओं का योग			क्या यह सही है?	सत्य / असत्य
	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}+\overline{BC}$	$\overline{BC}+\overline{CA}$	$\overline{CA}+\overline{AB}$		
T_1	.....	.....	.....	.....	.....	.....	AB+BC>AC BC+CA>AB CA+AB>BC	.....
T_2	.....	.....	.....	.....	.....	.....	AB+BC>AC BC+CA>AB CA+AB>BC	.....
T_3	.....	.....	.....	.....	.....	.....	AB+BC>AC BC+CA>AB CA+AB>BC	.....

उपर्युक्त क्रियाकलाप से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि **एक त्रिभुज के दो भुजाओं के मापों का योग तीसरी भुजा के माप से अधिक होती है।**

इसी प्रकार दो भुजा के मापों में अन्तर की तुलना तीसरी भुजा से करने पर स्पष्ट है कि एक त्रिभुज की **किसी दो भुजाओं की मापों में अन्तर हमेशा तीसरी भुजा की माप से कम होती है।**

उदाहरण : ΔABC की एक माध्यिका AP है दिखाईए कि $AB + BC + CA > 2AP$

हल : दिया गया है कि ABC एक त्रिभुज है, जिसमें AP माध्यिका

ΔABP में $AB+BP > AP$ ..... (i) (दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ी होती है)

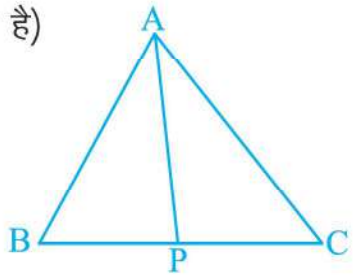
ΔAPC में $AC+CP > AP$ ..... (ii)

(i) एवं (ii) को जोड़ने पर,

$AB + BP + AC + CP > AP + AP$

या, $AB + AC + (BP + CP) > 2AP$

या, $AB + AC + BC > 2AP$ (AP माध्यिका है, P, BC का मध्य बिन्दु है।)

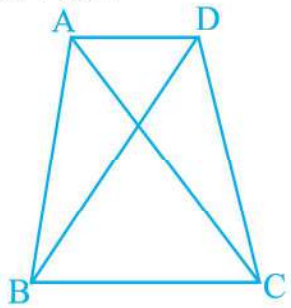


उदाहरण : ABCD एक चतुर्भुज है। दिखाइए कि

$AB + BC + CD + DA > AC + BD$

हल : ABCD एक चतुर्भुज है। A से AC तथा B से BD मिलाया गया।

दिखाना है कि $AB + BC + CD + DA > AC + BD$



ΔABD में – $AB + AD > BD$ – (i)

ΔBCD में – $BC + CD > BD$ – (ii)

इसी प्रकार, ΔACD में – $AD + DC > AC$ – (iii)

ΔABC में – $AB + BC > AC$ – (iv)

(i), (ii), (iii) एवं (iv) को जोड़ने पर,

$AB + AD + BC + CD + AD + DC + AB + BC > BD + BD + AC + AC$

या, $2AB + 2AC + 2BC + 2CD > 2BD + 2AC$

या, $2(AB + AD + BC + CD) > 2(BD + AC)$

$AB + AD + BC + CD > BD + AC$ सत्यापित ।

उदाहरण : किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 4cm, 3cm, 6cm है।

क्या त्रिभुज का बनना सम्भव हैं ?

हल : किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की मापों का योग उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के माप से अधिक होता है।

मान लिया कि एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 4cm, 3cm एवं 6cm है।

$4\text{ cm} + 3\text{ cm} = 7\text{ cm} > 6\text{ cm}$

$3\text{ cm} + 6\text{ cm} = 9\text{ cm} > 4\text{ cm}$

$4\text{ cm} + 6\text{ cm} = 10\text{ cm} > 3\text{ cm}$

अतः दिए गए मापों से त्रिभुज बनाना सम्भव है।

प्रश्नावली 14.3

1) क्या दी गई भुजाओं की मापों से त्रिभुज बनाना सम्भव हैं ?

i) 3 cm, 4 cm, 5 cm ii) 3 cm, 3 cm, 4 cm

iii) 4 cm, 3 cm, 7 cm iv) 5 cm, 7 cm, 8 cm

v) 2 cm, 2 cm, 1 cm vi) 4 cm, 3 cm, 1 cm

2) निम्न में कौन सत्य है। किसी त्रिभुज PQR में

i) $PQ + PR < QR$ ii) $PQ + QR > PR$

iii) $PR + QR < PQ$ iv) $PR + QR > PQ$

v) $PQ + PR > QR$ vi) $PQ + QR < PR$

3) यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु P है। सत्यापित कीजिए कि $(AB + BC + AC) > 2\,AP$।

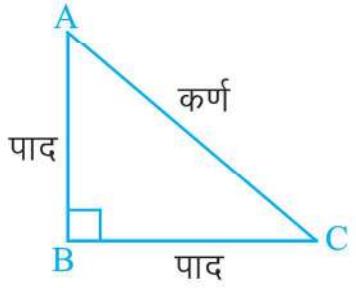
4) ABCD एक चतुर्भुज है। क्या $AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$?

14.6 समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस गुण :

ईसा से छठी शताबदी पूर्व एक यूनानी (Greek) दार्शनिक पाइथागोरस ने समकोण त्रिभुज से संबंधित एक महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया। जिसे पाइथागोरस नाम से जाना जाता है।

समकोण त्रिभुज के भुजाओं को विशेष नाम से जाना जाता है। समकोण के सम्मुख भुजा कर्ण (hypotenuse) कहलाता है। अन्य दो भुजाएँ समकोण त्रिभुज के पाद (legs) कहलाते हैं। कर्ण (hypotenuse) सबसे लम्बी भुजा होती है।

ABC एक समकोण त्रिभुज है।
जिसमें $\angle B = 90^0$ ।
AC, ΔABC का कर्ण है।
AB एवं BC समकोण त्रिभुज ABC के दो पाद हैं।



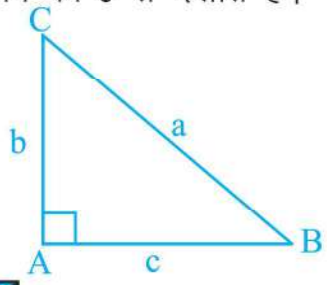
कहा जाता है कि भारतीय गणितज्ञ बौधायन के द्वारा इस गुण के बारे में बताया गया था।

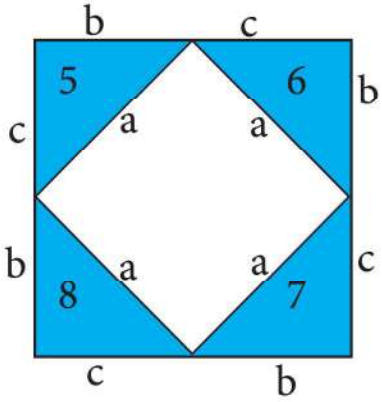
"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

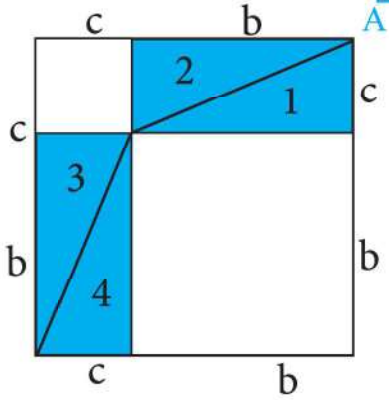
त्रिभुज एवं इसके गुण

ABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसमें ∠A की सामने की भुजा की माप को a, ∠B के सामने की भुजा की माप को b तथा ∠C के सामने की भुजा की माप को c से दर्शाते हैं।

रंगीन कागज काटकर एक समकोण त्रिभुज के आठ प्रतिरूप बनाइए। इन समकोण त्रिभुजों को दो वर्गाकार कागज पर दिए गए चित्र के अनुसार सजाइए।







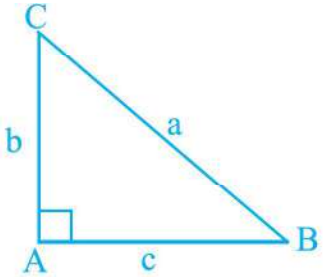
स्पष्ट है कि वर्गाकार कागज पर बचे सफेद भाग का क्षेत्रफल समान होंगे।

पहले वर्ग का बचा भाग का क्षेत्रफल a^2 तथा दूसरे वर्ग में बचा सफेद भाग का क्षेत्रफल $(b^2 + c^2)$ है। $\therefore a^2 = b^2 + c^2$

अतः किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग अन्य दो पादों पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

उदाहरण : यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 3cm, 4cm तथा 5cm है क्या यह समकोण त्रिभुज हैं ?

हल : माना कि a, b तथा c त्रिभुज की भुजाएँ है।



जिसमें $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm

पाइथागोरस गुण के अनुसार समकोण त्रिभुज में

$a^2 = b^2 + c^2$

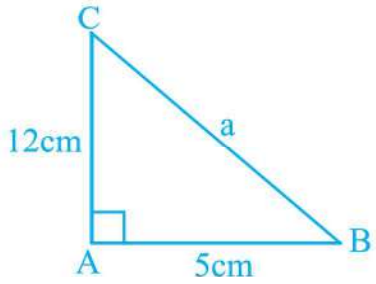
या, $(5)^2 = (4)^2 + (3)^2$

या, $25 = 16 + 9 \quad \therefore \quad 25 = 25$

अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज होगा।

उदाहरण : ΔABCएक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90^0$, $AB = 5cm$, $AC = 12cm$, BC ज्ञात कीजिए।

हल : समकोण त्रिभुज में $\angle A = 90^0$



पाइथागोरस गुण से –

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

$= (12)^2 + (5)^2$

$= 144 + 25$

$= 169 = (13)^2$

$\therefore BC = 13cm$

प्रश्नावली 14.4

1) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

i) किसी समकोण त्रिभुज में $(\text{कर्ण})^2$ = ... + ...

ii) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण की सामने की भुजा को ..... कहते हैं।

iii) किसी समकोण त्रिभुज में न्यून कोण की संख्या..... होती है।

iv) किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लंबी भुजा को.....कहते हैं।

2) निम्नलिखित में भुजाओं के कौन से समूह एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं।

i) 3cm, 4cm, 5cm

ii) 17cm, 8cm, 15cm

iii) 2cm, 2cm, 5cm

iv) 12cm, 5cm, 13cm

v) 2.5cm, 6.5cm, 6.5cm

vi) 10cm, 12cm, 15cm

3) समकोण त्रिभुज ABC में $\angle A = 90^0$, $BC = 26cm$, $AB = 10cm$, तो AC ज्ञात कीजिए।

4) समकोण त्रिभुज PQR में $\angle P = 90^0$, $PQ = 5cm$, $PR = 12cm$, तो QR ज्ञात कीजिए।

5) किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण = 7.5cm एवं लंब = 4.5cm हो तो आधार ज्ञात कीजिए।