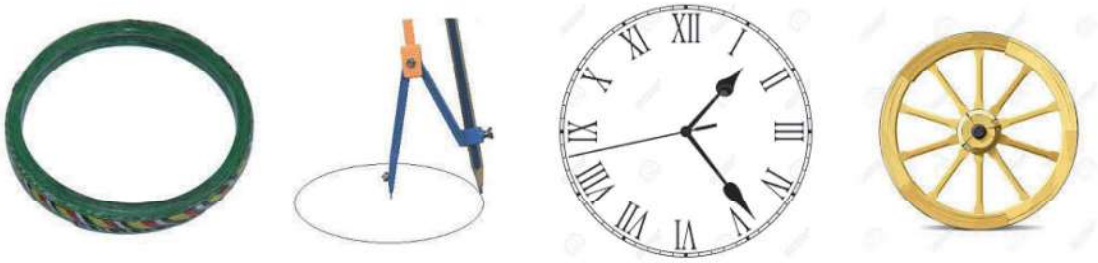
20 वृत्त का क्षेत्रफल (Area of Circle)

मुख्य अवधारणाएँ

- ★ वृत्त की परिधि
- ★ वृत्त का क्षेत्रफल

20.1 भूमिका :



उपर्युक्त आकृतियाँ एक बंद समतलीय वक्र हैं, जिसका प्रत्येक बिन्दु एक निश्चित बिन्दु से बराबर दूरी पर रहता है।

20.2 वृत्त की परिधि :

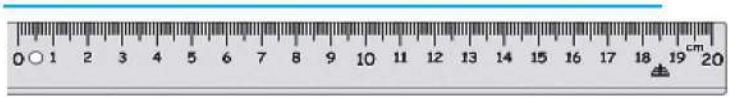
हम अपने आस पास विभिन्न वृत्ताकार आकृतियों को देखते हैं। दैनिक जीवन में ऐसी परिस्थितियाँ आती हैं जब हमें वृत्ताकार आकृति के चारों ओर की माप करने की आवश्यकता पड़ती है। आइए नीचे कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उपर्युक्त आकृतियों में वृत्ताकार पथ के चारों ओर किनारे की लंबाई मापनी होगी।

क्या हम स्केल की सहायता से उन्हे माप सकते हैं? अभी तक हमने स्केल की सहायता से सीधी आकृतियों की माप की है। लेकिन स्केल की सहायता से वक्र आकृतियों को मापना सरल नहीं है। आइए वक्र आकृतियों को मापने की कुछ विधियों का अध्ययन करते हैं।

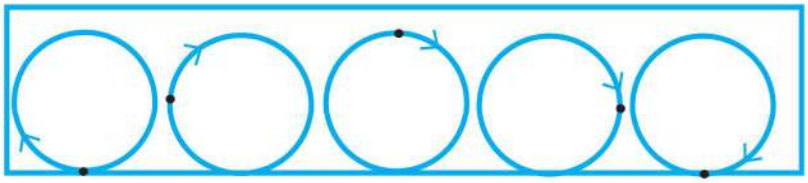
(1) पहली विधि धागे द्वारा : एक धागे से वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर किनारे–किनारे रखते हुए एक चक्कर पूरा करते हैं। एक चक्कर में लगे धागे की लंबाई को स्केल की सहायता से मापते हैं। धागे की माप ही उस वृत्ताकार आकृति की परिमाप या परिधि होती है।

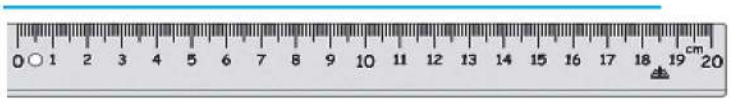




(2) दूसरी विधि लुढ़का कर :

वृत्ताकार आकृति के किनारे एक बिन्दु अंकित कर किसी समतल सतह पर रखकर बिन्दु की स्थिति को सतह पर अंकित किया जाता है।





आकृति को एक सरल रेखा में तब तक घुमाया जाता है जब तक कि अंकित बिन्दु सतह को दुबारा स्पर्श न कर दें। इस दूरी को माप लिया जाता है, जो वृत्ताकार आकृति के चारो ओर की लंबाई होती है।

वृत्त के चारों ओर की लंबाई को वृत्त की परिधि कहते हैं।

प्रयास कीजिए A

(1) चूड़ी, वृत्ताकार प्लेट, डब्बे का ढक्कन या अन्य वृत्ताकार आकृतियों की परिधि (किनारे की लंबाई) ज्ञात कीजिए।

(2) साइकिल के टायर पर एक बिन्दु लगाइए फिर लुढ़का कर परिधि (किनारे की लंबाई) ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

वृत्त का क्षेत्रफल

वास्तव में वृत्त की परिधि ही उसकी परिमाप है। धागों की सहायता से या लुढ़का कर वृत्ताकार वस्तुओं की परिधि ज्ञात करना सरल नहीं है। कितनी भी सावधानी से मापे कुछ न कुछ त्रुटियाँ रह ही जाती है। सही माप प्राप्त नहीं होती है। आवश्यक है कि इसके लिए भी अन्य आकृतियों की तरह सूत्र हो। आइए इसके लिए एक क्रियाकलाप करते हैं। विभिन्न त्रिज्याओं के 3 वृत्त बनाते हैं तथा धागे से उनकी परिधि माप लेते हैं तथा परिधि एवं व्यास का अनुपात ज्ञात करते हैं।

क्रियाकलाप : विभिन्न त्रिज्याओं वाले तीन वृत्त बनाइए तथा धागे से उसकी परिधि मापिए। परिधि एवं व्यास का अनुपात ज्ञात करते हुए सारणी को पूरा कीजिए।

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि / व्यास
स्थिति : 1				
स्थिति : 2				
स्थिति : 3				

ऊपर की तालिका से स्पष्ट है कि परिधि एवं व्यास का अनुपात लगभग समान आ रहा है। परिधि एवं व्यास की अनुपात को ग्रीक शब्द π (पाई) से प्रदर्शित करते है। जिसका मान लगभग 3.14 होता है।

$$\pi = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{वृत्त का व्यास}}$$

वृत्त का व्यास, त्रिज्या की दुगनी होती है।

यदि वृत्त की परिधि $= c$, वृत्त की व्यास $= d$, वृत्त की त्रिज्या $= r$ हो

$$\pi = \frac{c}{d},\ c = \pi d = \pi \times 2r = 2\pi r \ [\because d = 2r]$$

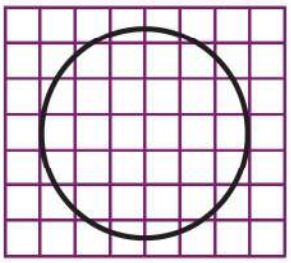
$c = 2\pi r$

20.3 वृत्त का क्षेत्रफल :

वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे? क्या ग्राफ पेपर या वर्गाकृत पेपर की सहायता से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है?

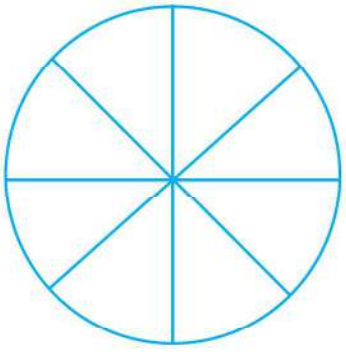
आइए प्रयास करते हैं।

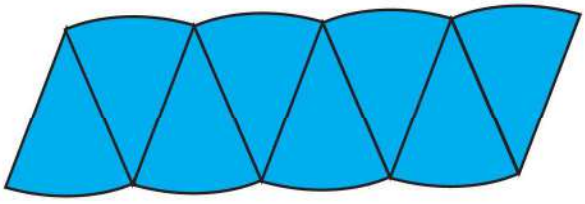
ग्राफ या वर्गीकृत पेपर पर 3 से० मी० त्रिज्या का एक वृत्त बनाते हैं। वृत्त के द्वारा घेरे गए वर्गों को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।



चूँकि वृत्त का किनारा वक्र है इसलिए किनारों पर पूर्ण वर्ग प्राप्त नहीं होता है। इसलिए इस विधि द्वारा वृत्त के क्षेत्रफल का सही माप प्राप्त करना संभव नहीं है। हमें जो क्षेत्रफल मिलता है वह वृत्त के क्षेत्रफल का लगभग माप है।

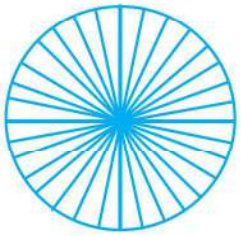
आइए दूसरी विधि पर चर्चा करते हैं। हमने आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखा है। यदि हम वृत्त को आयत के रूप में रूपांतरित करें तो आयत के क्षेत्रफल के सूत्र की मदद से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। एक वृत्त के आधे भाग को छायांकित करते हैं। वृत्त को आठ भागों में मोड़ कर मोड़ के अनुदिश काटते हैं, हमें आठ बराबर त्रिज्याखंड प्राप्त होगा।





आठों त्रिज्याखंडों को चित्रानुसार सजाने पर हमें लगभग समांतर चतुर्भुज जैसे आकृति प्राप्त होती है।

वृत्त को जितना अधिक बराबर त्रिज्याखंडों में विभक्त करेंगे, सजाने पर उतना ही सही आयत जैसी आकृति प्राप्त होती है। हम वृत्त को 64 बराबर त्रिज्याखंडों में विभक्त करते हैं। 64 त्रिज्याखंडों को सजाने पर हमें लगभग आयत प्राप्त होती है, जहाँ आयत की चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या होती है।



यहाँ वृत्त को 32 बराबर त्रिज्याखंडों में विभक्त किया गया है, प्रत्येक ओर 16 त्रिज्याखंड होंगे । इसलिए आयत की लंबाई 16 त्रिज्याखंडों की लंबाईयों के बराबर है जो वृत्त की परिधि की आधी है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

इसी प्रकार वृत्त को 64 बराबर त्रिज्याखंडों में विभक्त किया जाए तो प्रत्येक ओर 32 त्रिज्याखंड होंगे, इसलिए आयत की लंबाई 32 त्रिज्याखंडों की लंबाईयों के बराबर है जो वृत्त की परिधि की आधी होगी।

यदि वृत्त की त्रिज्या r हो, तो आयत की लंबाई $= \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$

आयत की चौड़ाई = वृत्त की त्रिज्या $= r$

वृत्त का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई × चौड़ाई = $\pi r \times r = \pi r^2$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

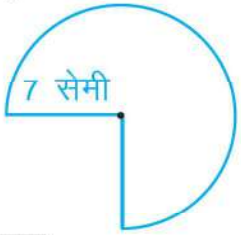
उदाहरण : 14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी ।

वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 14$सेमी $= 88$ सेमी

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 14$सेमी $\times 14$सेमी $= 616$सेमी^{2}

उदाहरण : दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल : दी गई आकृति वृत्त की तीन चौथाई है।

वृत्त की त्रिज्या = 7 सेमी

आकृति की परिमाप $= \frac{3}{4}$ वृत्त की परिधि $+ 2 \times$ त्रिज्या

$= \frac{3}{4} 2\pi r + 2r$

$= \frac{3}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$ सेमी $+ 2 \times 7$ सेमी

$= 33$ सेमी $+ 14$ सेमी $= 47$ सेमी

उदाहरण : 21 मी व्यास वाले एक वृत्ताकार बगीचे के चारों ओर माली बाड़ लगाना चाहता है, ₹4 प्रति मीटर की दर से पूरे 2 चक्कर रस्सी से बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्ताकार बगीचे का व्यास = 21 मी

त्रिज्या $= \frac{21}{2}$ मी

1 चक्कर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक रस्सी की लंबाई

= वृत्त की परिधि = $2\pi r$

= $2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2}$ मी

= 66मी

2 चक्कर के लिए आवश्यक रस्सी की लंबाई = 2×66 मी = 132मी

1 मी रस्सी का व्यय = ₹4

132 मी रस्सी की लंबाई का व्यय = $132 \times$ ₹4 = ₹528

उदाहरण : एक वृत्ताकार प्लेट की परिधि 154 सेमी है। प्लेट की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्ताकार प्लेट की परिधि = 154 सेमी

वृत्ताकार प्लेट की परिधि = $2\pi r$

$$154 \text{ सेमी} = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$r = \frac{154\text{सेमी} \times 7}{2 \times 22} = \frac{49}{2} \text{ सेमी} = 24.5 \text{ सेमी}$$

उदाहरण : एक साइकिल का पहिया 11 किमी की दूरी तय करने में 5000 चक्कर लगाती है। साइकिल के पहिया का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : साइकिल द्वारा तय की गई दूरी = चक्करों की संख्या × पहिया का परिधि

11 किमी = $5000 \times \pi d$

$$11000 \text{ मी} = 5000 \times \frac{22}{7} d$$

$$d = \frac{11000\text{मी} \times 7}{5000 \times 22} = \frac{7}{10} \text{ मी}$$

$$d = \frac{7}{10} \times 100 \text{ सेमी} = 70 \text{ सेमी}$$

साइकिल की पहिया का व्यास = 70 सेमी

याद रखिए

(1) व्यास = 2 × त्रिज्या

(2) त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2}$

(3) वृत्त की परिधि = $2\pi r$

(4) वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

उदाहरण : किसी अर्द्धवृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है। ऐसे दो अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : अर्द्धवृत्त का त्रिज्या = 7 सेमी

अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \pi r^2$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \text{ सेमी} \times 7 \text{ सेमी}$$

$$= 77 \text{ सेमी}^2$$

ऐसे दो अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल $= 2 \times 77$ सेमी$^2 = 154$ सेमी^{2}

उदाहरण : दिए गए वृत्त के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी हो ।



हल : वृत्त के छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{4} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \text{ सेमी} \times 7 \text{ सेमी}$$

$$= \frac{77}{2} \text{ सेमी}^2 = 38.5 \text{ सेमी}^2$$

प्रश्नावली 20.1

1) वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या निम्नलिखित है। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(i) 7 सेमी (ii) 21 मिमी (iii) 2.8मी (iv) 4.9 सेमी

(v) 0.56मी (vi) 6.3सेमी (vii) 10.5सेमी (viii) 8.4सेमी

2) वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी व्यास निम्नलिखित है। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(i) 14 सेमी (ii) 4.2 मी (iii) 18.2 मिमी (iv) 9.8 सेमी

3) 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)

4) वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(i) 7 सेमी (ii) 28 सेमी (iii) 1.4 मी (iv) 3.5 सेमी

5) उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 20 सेमी है। ($\pi = 3.14$)

6) वृत्त का त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि

(i) 44 सेमी (ii) 88 मी (iii) 198 सेमी (iv) 26.4सेमी

7) 154 सेमी^{2} क्षेत्रफल वाले वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

8) उस वृत्त का व्यास कितना होगा जिसका क्षेत्रफल 78.5 मी^{2} है ? ($\pi = 3.14$)

9) दो वृत्तों की त्रिज्याओं का अनुपात 2 : 3 है। परिधियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

10) एक वृत्त की परिधि उसकी व्यास से 15 सेमी अधिक है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए?

11) वृत्ताकार फूलों की क्यारी जिसका व्यास 21 मी है। इसके चारों ओर 3 चक्कर में रस्सी की बाड़ लगाना है। ₹5 प्रति मीटर की दर से रस्सी की लागत मूल्य ज्ञात कीजिए।

12) 5 मीटर व्यास वाले एक कुँआ के चारों ओर ₹140 प्रति मीटर की दर से जगत का घेरा निर्माण कराना है। निर्माण में कुल खर्च ज्ञात कीजिए।

13) एक साइकिल के पहिये का व्यास 70 सेमी है। पहिये की 150 चक्कर लगने पर साइकिल कितनी दूरी तय करेगी।

14) 0.21 मी त्रिज्या वाली एक पहिया को 363 मीटर दूरी तय करने में कितना चक्कर लगाएगी?

15) एक घास के मैदान में 3.5 मीटर रस्सी से एक बकरी बँधी है। बकरी द्वारा चरे गए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16) ₹2.10 प्रति वर्ग मीटर की दर से 2 मीटर त्रिज्या वाले वृत्ताकार कुँआ पर जाली लगाने की लागत ज्ञात कीजिए ।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"