11

बीजीय–व्यंजक (Algebraic Expression)

FYBXSH

मुख्य अवधारणाएँ

- ☆ बीजीय व्यंजक के पद
  (एक पद, द्विपद, त्रिपद, बहुपद, समान और असमान पद, गुणांक)
- ☆ बीजीय व्यंजकों का जोड़
- ☆ बीजीय व्यंजकों का व्यवकलन
- ☆ बीजीय व्यंजक का मान

11.1 भूमिका :

वर्ग–VI में हम चर और अचर संख्याओं के संयोजन से प्राप्त बीजीय व्यंजक से परिचित हो चुके हैं। जैसा कि हम जानते हैं, एक बीजीय व्यंजक चर ($x, y, l, m, \ldots$) तथा गणितीय संक्रियाओं (+, −, ×, और ÷) के संयोजन से बनता है। जैसे : $x + 5$, $7-y$, $2p^2$ आदि।

हम दैनिक जीवन में सरल समीकरण के रूप में बीजीय व्यंजक का उपयोग करते हैं। बीजगणित में बीजीय व्यंजक को एक केंद्रीय अवधारणा माना जाता है। यह अंक गणितीय संक्रियाओं को व्यापक बनाता है। इसलिए बीजगणित को व्यापक अंकगणित भी कहा जाता है।

11.2 बीजीय व्यंजक बनाना :

चर (Variable) और अचर (Constant) के प्रयोग से सरल या एक चर वाले व्यंजक जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है, को हम पहचानते हैं। आगे हम दो चर वाले या घात वाले व्यंजक बनाएँगे।

अब हम प्रयास करते हैं कि निम्नलिखित बीजीय व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं।

x^2, x^3, $3m^2$, $2xy$, $-5x^2 + 2$, $3pq - 3$

(i) बीजीय व्यंजक x^2 प्राप्त करने के लिए x से x को गुणा किया जाता है।
अर्थात, $x \times x = x^2$ (x^2 को x का वर्ग या x square पढ़ा जाता है।)

(ii) x^3 प्राप्त करने के लिए
$x \times x \times x = x^3$ (x^3 को x का घन या x cube पढ़ा जाता है।)

iii) व्यंजक $3m^2$ प्राप्त करने के लिए पहले m को m से गुणा किया जाता है और इस गुणनफल को 3 से गुणा किया जाता है ।
जैसेः– $m \times m = m^2$
पुनः $3 \times m^2 = 3m^2$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

(iv) $2xy$ प्राप्त करने के लिए पहले x और y को गुणा किया जाता है और इस गुणनफल को पुनः 2 से गुणा किया जाता है।

जैसे : $x \times y = xy$

पुनः $2 \times xy = 2xy$

(v) $-5x^2 + 2$ प्राप्त करने के लिए x और x के गुणनफल को -5 से गुणा किया जाता है और इस गुणनफल में 2 जोड़ा जाता है।

जैसे $x \times x = x^2$

पुनः $-5 \times x^2 = -5x^2$

अब, $-5x^2 + 2$

(vi) $3pq - 3$ प्राप्त करने के लिए p और q के गुणनफल को 3 से गुणा किया जाता है और प्राप्त गुणनफल में से 3 घटाया जाता है ।

जैसे $p \times q = pq$

पुनः $3 \times pq = 3pq$

अब, $3pq - 3$

प्रयास कीजिए A

निम्नलिखित बीजीय व्यंजक कैसे प्राप्त किए जाते है ?

i) $-3x^2$ ii) $5m^2 - 2$ iii) $-4pq + 3$ iv) $2x^2 - 6$

11.3 बीजीय व्यंजक के पद (Term of Algebraic Expression) :

आइए अब बीजीय व्यंजक $3x + 7$ पर विचार करते हैं।

यहाँ पहले 3 और x का गुणनफल प्राप्त किया जाता है फिर गुणनफल में 7 जोड़ा जाता है। बीजीय व्यंजक $3x + 7$ के दो पद हैं $3x$ और 7 है।

इसी प्रकार बीजीय व्यंजक $2xy - 4$ में $2xy$ और -4 को जोड़ा जाता है। अर्थात बीजीय व्यंजक $2xy - 4$ के दो पद $2xy$ और -4 हैं।

पद (term) चर और अचर के गुणनफल से बने भाग जिनको मिलाने (जोड़ने) से बीजीय व्यंजक प्राप्त होता है, पद कहलाते है।

11.4 बीजीय व्यंजक के प्रकार (Types of Algebric Expression) :

हम कुछ बीजीय व्यंजक m^2, $3xy - 4$, $2x^2 + 3x^2 + 1$ पर विचार करते है।

(i) बीजीय व्यंजक m^2 में केवल एक ही पद है।

(ii) बीजीय व्यंजक $3xy - 4$ में दो पद हैं।

(iii) $2x^2 + 3x + 1$ में तीन पद है।

अर्थात्, बीजीय व्यंजकों को पद की संख्या के अनुसार निम्न प्रकार बाँटा जा सकता है।

एकपद (Monomial): बीजीय व्यंजक जिसमें केवल एक ही पद हो एकपदीय बीजीय व्यंजक कहलाता है। **जैसे :** x^2, m^2, $3x^3$, $5xy$, $2x^2y$ आदि।

द्विपद (Binomial): बीजीय व्यंजक जिसमें दो असमान पद हो, द्विपदीय बीजीय व्यंजक कहलाता है। **जैसे :** $x^2 - 1$, $3x^2 + 2$, $2x^2 + 5$, $x - 1$

(लेकिन $2xy + 5xy$ और $3x^2 - 2x^2$ द्विपदीय बीजीय व्यंजक नहीं है)

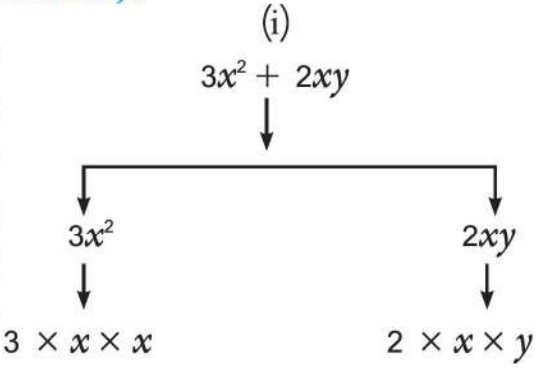
त्रिपद (Trinomial): बीजीय व्यंजक जिसमें तीन असमान पद हो, त्रिपदीय बीजीय व्यंजक कहलाता है। **जैसे :** $x + y + 1$, $2x^2 + 3x + 1$, $3x^2 - 4x - 2$

उपरोक्त बीजीय व्यंजकों पर ध्यान देने से स्पष्ट होता है कि बीजीय व्यंजक का नाम उसके पदों की संख्या पर है। इस प्रकार चार असमान पदों वाले व्यंजक को चतुष्पद (quadrinomial), पाँच पद वाले व्यंजक को पंचपद (pentanomial) कहा जाता है। व्यापक रूप में एक पद, द्विपद, त्रिपद इत्यादि सभी बीजीय व्यंजकों को बहुपद (polynomial) कहा जाता है।

एक या एक से अधिक पद वाले बीजीय व्यंजक को बहुपद कहा जाता है।

11.5 पद का गुणनखंड (Factorisation of Term):

बीजीय व्यंजक $3x^2 + 2xy$ में 3, x और x के गुणनफल से पद $3x^2$ बना है अर्थात् 3, x और x पद $3x^2$ का गुणनखण्ड (factors) है। इसी प्रकार 2, x और y पद $2xy$ के गुणनखंड हैं। हम संख्याओं की तरह बीजीय व्यंजक के पदों को गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree) से दिखा सकते हैं।



उदाहरण : निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्ड वृक्ष बनाइए।

(i) $2x^2$ (ii) $2p^2 + 5pq + 5$

हल:

(i)

$2x^2$

$2 \times x \times x$

(ii)

$2p^2 + 5pq + 5$

$2p^2$ $5pq$ 5

$2 \times p \times p$ $5 \times p \times q$ 5

प्रयास कीजिए B

1. दिये गये बहुपदों में से एकपद, द्विपद और त्रिपद बीजीय व्यंजक को छाँट कर लिखिए ।

   i) $3x^2 - 4$ ii) $4x^2$ iii) $2p - 5q + 1$ iv) $x^2 + y^2$

   v) $3xyz$ vi) $5x^2y$ vii) $l - n + 2$ viii) $3x^3 + 2x^2 + 1$

2. निम्नलिखित बहुपदों का गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree) बनाइए–

   i) $3x - 2$ ii) $4x^2y - 4x + 1$ iii) $2pq - 4$

   iv) $x^2 + y^2 + z^2$ v) $2ab^2$

11.6 समान पद (Like Term) और असमान पद (Unlike Term) :

दो पद समान पद कहे जाते हैं जब दोनों पदों के चर गुणनखंड (Variable Factor) समान होते हैं **जैसे** : $-6xy$, xy और $4xy$ एक पदीय है परन्तु पदों में अचर गुणनखंड अलग –अलग हैं –6, 1, और 4, लेकिन चर गुणनखंड एक समान हैं। अतः तीनों समान पद है।

अब इन पदों पर विचार करते हैं $2x^2$, $2xy$, $2x$ । इन पदों में अचर गुणनखंड (constant facor) समान है, फिर भी समान पद नहीं है, क्योंकि तीनों में चर गुणनखंड x^2, xy और x समान नहीं है। अतः $2x^2$, $2xy$ और $2x$ असमान पद हैं। जब दो या दो से अधिक पद के चर गुणनखंड असमान होते हैं, ऐसे पद असमान पद कहलाते हैं।

11.7 पद के गुणांक (Coefficient of Term):

किसी बीजीय पद में दो प्रकार गुणनखण्ड होते है, चर गुणनखंड (variable factors) और अचर (संख्यात्मक) गुणनखंड (numerical factors)।

अब इन पदों को देखते हैं जैसेः $7x$, $-4x^2y$, $6pq$, m^2। यहाँ पद $7x$ में 7, x का

संख्यात्मक गुणनखंड (numerical factor) है इसी प्रकार $-4x^2y$ का -4, $6pq$ का 6 तथा m^2 का 1 संख्यात्मक गुणनखंड है। गुणांक का प्रयोग व्यापक रूप में इस प्रकार करते हैं। पद $-4x^2y$ में संख्यात्मक गुणांक -4 है तथा x^2 का गुणांक $-4y$, y का गुणांक $-4x^2$ है इस प्रकार -4 का गुणांक x^2y तथा x का गुणांक $-4xy$ है।

गुणांक संख्यात्मक गुणनखंड या एक या एक से अधिक गुणनखंडों का गुणनफल है, जो पद के शेष गुणनखंड के लिए गुणांक होगा।

प्रयास कीजिए C

1. निम्नलिखित पदों को समान और असमान पदों में अलग–अलग सूचीबद्ध कीजिए:
   i) $3x^2$ ii) $4xy$ iii) $-x^2$ iv) $2xy$ v) $-7xy$
   vi) $-5x^2$ vii) $3xy$ viii) $6x^2$ ix) $-2x^2y$ x) $97xy$
2. दिए गये पदों के संख्यात्मक गुणांक लिखिए –
   i) $-y^2$ ii) $2xy$ iii) $-3xy^2$ iv) $5xy^2$ v) $\frac{y}{3}$ vi) $\frac{y^2}{6}$
3. निम्नलिखित पदों के x का गुणांक लिखिए –
   i) x^2 ii) $-3xy$ iii) $4x^2y$ iv) $2x^2y^2$ v) $\frac{-x}{4}$ vi) $\frac{x^2}{4}$
4. दिये गये व्यजकों के x का गुणांक लिखिए –
   i) $2x-y$ ii) $8-xy$ iii) $2x^2-y^2$ iv) $-5xy+1$ v) $3-x^2$

किसी बीजीय पद में गुणांक +1 और −1 पद में छिपा रहता है। लिखते समय $+1x$ या $-1x$ के बदले केवल x या $-x$ लिखते हैं।

11.8 बीजीय व्यंजकों का जोड़ (addition of algebraic exprcssion) :

1. सलमा, सीमा और सरीन बाजार से आम खरीदती है। सीमा, सलमा से 10 अधिक आम खरीदती है। सरीन उन दोनों से 5 आम अधिक खरीदती है। क्या आप सरीन द्वारा खरीदे गये आम की संख्या ज्ञात कर सकते हैं ?

हल: चूँकि, सलमा द्वारा खरीदी गई आमों की संख्या ज्ञात नहीं है। मान लिया सलमा x आम खरीदती है। सीमा द्वारा खरीदी गई आम $x+10$ । सरीन इन दोनों से 5 अधिक आम खरीदी है । अतः सरीन $x+10+5$ यानि $x+15$ आम खरीदी है।

2. रामू के पिता की वर्तमान आयु रामू की आयु से तीन गुनी है। रामू के दादाजी की आयु रामू और रामू के पिताजी के आयु के योगफल से 12 वर्ष अधिक है। आप रामू के दादाजी का आयु कैसे ज्ञात करेंगे?

हल : चूँकि, रामू की आयु ज्ञात नहीं है। मान लिया रामू की वर्तमान आयु y वर्ष है। रामू के पिता की वर्तमान आयु $3y$ वर्ष होगा।

अतः रामू के दादाजी का वर्तमान आयु $y+3y+12$ होगी। यानि $4y+12$ होगी।

उपरोक्त दोनों स्थितियों में हम देखतें है कि बीजीय व्यंजक में संक्रिया किया गया है।

उदाहरण : $3x$, $5x$ और $7x$ का योगफल ज्ञात कीजिए –

हल : $3x + 5x + 7x$ (यहाँ सभी व्यंजक एक पदीय है)

$= (3 + 5 + 7)x = 15x$

समान पदों के योगफल में केवल पदों के संख्यात्मक गुणांकों को जोड़ा या घटाया जाता है ।

उदाहरण : $7m$ और $5n$ का योगफल प्राप्त कीजिए ।

हल : चूँकि $7m$ और $5n$ विजातीय असमान व्यंजक है।

अतः $7m$ और $5n$ का योगफल समान पद वाले व्यंजकों की भाँति एक पद नहीं होगा । इसलिए $7m$ और $5n$ का योगफल को हम इस क्रम में लिखते हैं।

अतः $7m$ और $5n$ का योगफल $= 7m + 5n$

उदाहरण : $2x + 5$ और $3x - 7$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(2x + 5) + (3x - 7)$

$= 2x + 5 + 3x - 7 = 2x + 3x + 5 - 7$

$= 5x - 2$

स्तम्भ विधि :

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ +\ 3x - 7 \\ \hline 5x - 2 \\ \hline \end{array}$$

वैकल्पिक रूप से हम व्यंजकों को स्तम्भ विधि से भी योगफल ज्ञात करते है। इसमें समान पदों को एक स्तम्भ में रखकर जोड़ते हैं।

उदाहरण : व्यंजक $3x - 2y + 5$, $5x + 4y + 1$ और $6y - 2$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(3x - 2y + 5) + (5x + 4y + 1) + (6y - 2)$

पुनर्व्यवस्थित कर समान पदों को एक साथ रखने पर ।

$3x - 2y + 5 + 5x + 4y + 1 + 6y - 2$

$= 3x + 5x - 2y + 4y + 6y + 5 + 1 - 2$

$= 8x + 8y + 4$

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

प्रयास कीजिए D

1. योगफल ज्ञात कीजिए–
   i) $2x$, $6x$ और $7x$ ii) $5m^2$, $-4m^2$ और $11m^2$
2. समान पदों को पुनर्व्यवस्थित कर सरल कीजिए–
   i) $5x + 3y - 2 + 7x - y - 2$ ii) $4l^2 - 2 - 2l^2 + 15 + l^2$
3. निम्नलिखित व्यंजकों को जोड़िए–
   i) $2pq + 2$ और $2p^2 - 3$ ii) $y^2-2xy+3$, $-xy+1$ एवं $y^2+3xy+5$
   iii) $5m - 2$, $7n + 7$ और $9l - 4$ iv) $a^2 + 2ab + b^2$, $3ab + 2$ और $b^2 + 1$

11.9 व्यंजकों का व्यवकलन (घटाव): एक पदी व्यंजक, व्यंजकों में सबसे सरलतम व्यंजक है। एक व्यंजक के अचर गुणांक में से दूसरे व्यंजक के अचर गुणांक को घटाया जाता है।

अब निम्न उदाहरणों को समझिए।

एक पदीय व्यंजक को घटाने का अर्थ है, उस पद के योज्य प्रतिलोम को जोड़ना।
$-4xy$ घटाने का अर्थ है $+4xy$ को जोड़ना।

उदहारण : $6x$ में से $4x$ को घटाइए।

हल : $6x - 4x = (6-4)x = 2x$

उदहारण : $11xy$ में से $-4xy$ को घटाइए।

हल : $11xy - (-4xy) = 11xy + 4xy = 15xy$

उदहारण : x^2 में से y^2 को घटाइए।

हल : दोनों पद असमान है। अतः x^2 में से y^2 घटाने पर $x^2 - y^2$ प्राप्त होगा।

उदहारण : $5m^2 - 7mn + 3$ में से $-4m^2 - 2mn + 8$ को घटाइए।

हल : $(5m^2 - 7mn + 3) - (-4m^2 - 2mn + 8)$

$= 5m^2 - 7mn + 3 + 4m^2 + 2mn - 8$

$= 9m^2 - 5mn - 5$

स्तम्भ विधि :

$$\begin{array}{r} 5m^2 - 7mn + 3 \\ -4m^2 - 2mn + 8 \\ + \quad + \quad - \\ \hline 9m^2 - 5mn - 5 \end{array}$$

उदाहरण : व्यंजक $-2x^2 - xy + 1$ में क्या जोड़ा जाय कि योगफल $3x^2 + 2xy + 5$ होगा ?

हल : अभीष्ट व्यंजक प्राप्त करने के लिए योगफल में व्यंजक $-2x^2 - xy + 1$ को घटाते हैं।

अब $3x^2+2xy+5 - (-2x^2-xy+1)$

$= 3x^2+2xy+5 + 2x^2 + xy - 1$

$= 3x^2+2x^2 + 2xy + xy +5 -1$ (समान पद को एक साथ रखने पर)

$= 5x^2+3xy+4$

अभीष्ट व्यंजक $= 5x^2 + 3xy + 4$

स्तम्भ विधि :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2xy + 5 \\ -2x^2 - xy + 1 \\ + \quad + \quad - \\ \hline 5x^2 + 3xy + 4 \end{array}$$

अभीष्ट व्यंजक $= 5x^2 + 3xy + 4$

ध्यान दें :

1. $-(7-3) = -7+3$ उसी प्रकार $-(a-b) = -a + b$ संख्याओं की तरह बीजीय पदों के लिए किया जाता है।
2. घटाने वाले व्यंजकों के पदों का चिह्न बदल जाता है। + के बदले − तथा − के बदले +

प्रयास कीजिए E

1. घटाइए–
   i) $3x^2$ में से $-11x^2$
   ii) $8lmn$ में से $12lmn$
   iii) $5y^2 - 7xy + 1$ में से $-y^2+x^2$
   iv) $8m^2 - n^2$ में से m^2+n^2+2mn
2. स्तम्भ विधि से घटाइए–
   i) $5xy^2 - 3xy - 9$ में से $6xy - 4$
   ii) $a^2+b^2+c^2+3abc$ में से $a^2+b^2+c^2$
   iii) $5p^2+3q^2-pq$ में से $4pq-10q^2-4p^2$
   iv) $5m^2-3n^2$ में से m^2-2mn
3. दो व्यंजकों का योगफल m^2-n^2 है। यदि पहला व्यंजक $5m^2-5mn+4$ है, तो दूसरा व्यंजक क्या है ?
4. व्यंजक $-x^2 + 2xy + 8$ प्राप्त करने के लिए आप $4x^2 - 3xy + 1$ में कितना घटाएँगे? अपने उत्तर की जाँच कीजिए।
5. $-y^2 + 3xy - 4$ और $x^2 + y^2 + 1$ के योगफल में से $x^2 + y^2 - 3xy + 4$ घटाइए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

11.10 व्यंजक का मान निकालना (Evaluate the expression):

किसी बीजीय व्यंजक का मान उसमें शामिल चरों के मान पर निर्भर करता है। चर का एक विशेष मान के लिए समीकरण संतुष्ट होता है ।

उदाहरण के लिए x भुजा वाले समबाहू त्रिभुज की परिमिति $3x$ होता है। x के विभिन्न मानों के लिए व्यंजक $3x$ का मान ज्ञात किया जा सकता है।

यदि $x = 5cm$ तो समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 3 \times 5cm = 15cm$

इन उदाहरणों को देखिए:

उदाहरण : यदि $l = 2$ और $m = 3$ तो $l^2 + m^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $l^2 + m^2$ में $l = 2$ और $m = 3$ रखने पर

$$l^2 + m^2 = 2^2 + 3^2 = 2 \times 2 + 3 \times 3 = 4 + 9 = 13$$

उदाहरण : $x = -2$ और $y = 3$ तो निम्नलिखित बहुपदों का मान ज्ञात कीजिए।

i) $x^2 - y^2$ ii) $x^2 + y^2 + 2xy$ iii) $x^3 - y^3$

हल : $x^2 - y^2$ में $x = -2$ और $y = 3$ रखने पर

i) $x^2 - y^2 = (-2)^2 - 3^2 = (-2) \times (-2) - 3 \times 3 = 4 - 9 = -5$

ii) $x^2 + y^2 + 2xy = (-2)^2 + 3^2 + 2 \times (-2) \times 3 = 4 + 9 - 12 = 13 - 12 = 1$

iii) $x^3 - y^3 = (-2)^3 - 3^3 = -8 - 27 = -35$

उदाहरण : $a = -1$ और $b = 2$ हो तो दिखाइए कि

i) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

हल : i) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$L.H.S = a^2 - 2ab + b^2$ में $a = -1,\ b = 2$ रखने पर

$= (-1)^2 - 2 \times (-1) \times 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$

$R.H.S = (a-b)^2 = (-1-2)^2 = (-3)^2 = 9$

$L.H.S = R.H.S$ अतः $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$L.H.S = (a + b)^3$ में $a = -1,\ b = 2$ रखने पर

$= (-1 + 2)^3 = (1)^3 = 1$

$R.H.S = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ में $a = -1,\ b = 2$ रखने पर

$= (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 \times 2 + 3 \times (-1) \times 2^2 + 2^3$

$= -1 + 6 - 12 + 8 = 14 - 13 = 1$

$L.H.S = R.H.S$

अतः $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

प्रयास कीजिए F

1. दिये गये बहुपदों का मान ज्ञात कीजिए। यदि $x = 2$ और $y = -2$ हो।
   i) $4xy$ ii) $x + y - 1$ iii) $x^2 + y^2 + 2xy$ iv) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$
2. $a = -3$ और $b = 2$ के लिए निम्न बहुपदों का मान ज्ञात कीजिए–
   i) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ii) $\frac{a^2 - b^2}{3}$ iii) $a^2 + b^2 - ab - b^2 - a^2$
3. $l = -2$ और $m = 2$ हो, तो दिखलाइए कि–
   i) $l^2 - m^2 = (l + m)(l - m)$ ii) $l^2 + m^2 = (l + m)^2 - 2lm$

11.11 बीजीय व्यंजकों के प्रयोग (सूत्र और नियम) :

हम गणित में सूत्र और नियम का संक्षिप्त एवं प्यापक रूप में, बीजीय व्यंजकों का प्रयोग कर लिखते हैं।

परिमाप सूत्र

i) यदि वर्ग की भुजा की लंबाई l हो तो वर्ग का परिमाप $= 4 \times l$

ii) समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 3 \times l$ (l = भुजा)

iii) समपंचभुज (Regular Pentagon) का परिमाप $= 5 \times l$ (l = भुजा)

इसी प्रकार यदि आयत की लंबाई l और चौड़ाई b हो तो आयत की परिमाप $= 2(l + b)$ होगा।

क्षेत्रफल सूत्र

i) यदि वर्ग की भुजा l हो तो वर्ग का क्षेत्रफल $= l^2$

ii) इसी प्रकार यदि आयत की लंबाई l और चौड़ाई b से व्यक्त किया जाए तो आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = lb$

iii) b आधार और h ऊँचाई वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{bh}{2}$

उपरोक्त सूत्रों में प्रयुक्त चर के दी गई मानों के लिए वांछित प्रतिबंध के अंतर्गत राशि का मान परिकलित किया जा सकता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

उदाहरण : यदि वर्ग की भुजा $l = 4$ इकाई हो तो

वर्ग की परिमाप $= 4l = 4 \times 4$ इकाई $= 16$ इकाई तथा

वर्ग का क्षेत्रफल $= l^2 = (4)^2$ वर्ग इकाई $= 4 \times 4$ वर्ग इकाई

$= 16$ वर्ग इकाई

l के दूसरे मान के लिए भी वर्ग का परिमाप और क्षेत्रफल की गणना किया जा सकता है।

11.12 संख्या प्रतिरूपों (Number Patterns) के लिए नियम :

यदि किसी प्राकृत संख्या को n से व्यक्त किया जाए तो उसका परवर्ती(Successor) $(n + 1)$ होगा।

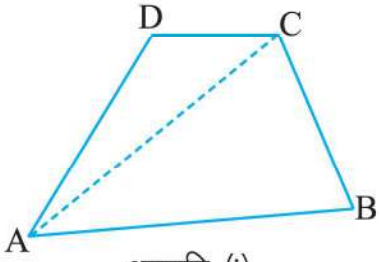
जैसे $n = 4$ का परवर्ती $n + 1 = 4 + 1 = 5$ है।

इसी प्रकार सम संख्या $2n$ और विषम संख्या $(2n + 1)$ होगा।

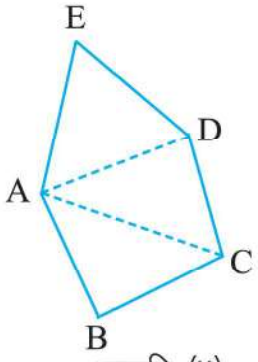
यदि $n = 5$ हो तो $2n = 2 \times 5 = 10$ एक सम संख्या है।

$2n + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$ एक विषम संख्या है।

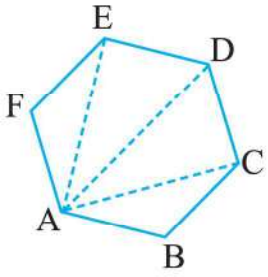
ज्यामिति में प्रतिरूप :



आकृति (i)



आकृति (ii)



आकृति (iii)

यहाँ आकृति (i), (ii) और (iii) में क्रमशः चतुर्भुज, पंचभुज एवं षट्भुज है। हम देखते है कि चतुर्भुज के एक शीर्ष से एक विकर्ण, पंचभुज के एक शीर्ष से 2 विकर्ण और षट्भुज के एक शीर्ष से 3 विकर्ण खींचा जा सकता है। अर्थात भुजाओं और विकर्ण की संख्याओं में देखते हैं कि एक शीर्ष से खींचे जाने वाले विकर्णों की संख्या का पैटर्न मिलता है।

i) 4 भुजा वाले बहुभुज में एक शीर्ष से विकर्णों की संख्या $= 4 - 3 = 1$

ii) 5 भुजा वाले बहुभुज में एक शीर्ष से विकर्णों की संख्या $= 5 - 3 = 2$

iii) 6 भुजा वाले बहुभुज में एक शीर्ष से विकर्णों की संख्या $= 6 - 3 = 3$

बहुभुज में विकर्णों की संख्या = (n–3), जहाँ n बहुभुज की भुजाओं की संख्या है।

गतिविधि : संख्या प्रतिरूप

आवश्यक सामग्री – माचिस की तीलियाँ, चार्ट पेपर, फेवीकोल (गोंद)

कार्य विधि:

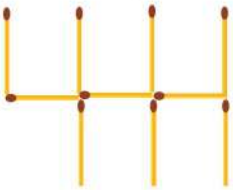
- चार्ट पेपर पर चित्र के अनुसार माचिस के तीलियों को चिपकाइए :



आकृति (i)



आकृति (ii)



आकृति (iii)

- आकृति (i),(ii), (iii) और (iv) में आकृति में उपयोग किये गये तीलियों की संख्या गिनकर उनके सामने लिखिए।
- आकृति (i) में 1 प्रतिरूप के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या = $4 = 3 + 1$
- आकृति (ii) में 2 प्रतिरूप के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या = $7 = 3 \times 2 + 1$
- आकृति (iii) में 3 प्रतिरूपों के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या= $10 = 3 \times 3 + 1$

.....

.....

- n प्रतिरूपों के लिए तीलियों की संख्या = $3n + 1$ होता है।

क्या आप n का मान कोई अन्य प्राकृत संख्या लेकर प्रतिरूप में तीलियों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं?

इन्हें जाने

यदि $n = 1, 2, 3.....$ तो प्रतिरूप

i) $(n+1)$ परवर्ती संख्याएँ है।

ii) $2n$ सम संख्याएँ है।

iii) $(2n+1)$ विषम संख्याएँ है।

iv) n^2 पूर्ण वर्ग संख्याएँ है।

v) $(n-3)$ बहुभुज में विकर्णों की संख्या है।

प्रश्नावली : 11.1

1) निम्नलिखित में से समान पदों को छाँटिए :

i) $12xy$ ii) $2x$ iii) $-7xy$ iv) $3x^2$

v) $5xy$ vi) $3x^2y$ vii) xy viii) $10xy^2$

2) निम्नलिखित व्यंजकों का संख्यात्मक पूर्णांक लिखिए–

क्र०सं०	पद	संख्यात्मक पुर्णांक	क्र०सं०	पद	संख्यात्मक पुर्णांक
i	$-2x^2$		iv	$\frac{4}{5}xyz$	
ii	$13x^2y,z$		v	abc	
iii	$-7lm$		vi	$\frac{-2}{3}y^2$	

3) निम्नलिखित में से एकपद, द्विपद एवं त्रिपद को छांटकर लिखिए

i) $4x+5$ ii) $3x^2$ iii) $2x^2-y+1$ iv) x^2-y^2 v) $x+y-2$

vi) $\frac{2}{3}x^2$ vii) $8xy$ viii) p^2-pq ix) $y+x-1$ x) $3m-3n$

4) निम्नलिखित में समान और असमान पद–युग्म बताइए

i) $-15x$, $-15xy$ ii) $-2a^2$, $\frac{2}{3}a^2$ iii) $6x^2y$, $9x^2y$

iv) $3ab$, ab v) pq^2, $-4pq^2$ vi) $\frac{1}{2}xyz$, $0.5xyz$

5) जोड़िए

(i) xy, $3xy$ और $4xy$ (ii) $-x^2$,$3x^2$ और $5x^2$

(iii) $x+5$ और $5x$ (iv) $x+y+1$ और $x-y-1$

(v) x^2-3 और $2x^2+5$ (vi) a^2+b^2-2 और $-a^2-b^2+2$

(vii) n^2-1, $mn+n^2$ और n^2+mn-3 (viii) $2n^2-1$, $4mn-n^2$ और $-n^2+mn-5$

6) निम्न बहुपदों को स्तम्भ में लिखकर जोड़िए ।

a) $3x^2-xy+2$, $xy-1$ और $x^2+2xy+2$

b) x^2-y^2-1, y^2-1-x^2 और $1-x^2-y^2$

7) क्या व्यंजक x^2-xy+1 और $-3x^2+3xy+5$ के योगफल $-2x^2+2xy+6$ हैं? जाँचिए–

8) घटाइए–

i) $-15x^2$ में से $10x^2$ ii) $a+b$ में से $a-b$

iii) $3m^2-mn+8$ में से $-m^2+5mn$ iv) $3ab-2a^2-2b^2$ में से $5a^2-7ab+5b^2$

9) $3x+2y$ और x^2-xy+3 के योगफल में से $x^2+2xy+y^2$ घटाइए।

10) यदि $A= x+1$, $B=y-1$ और $C=x+y+1$ हो तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

i) $A+B$ ii) $2A-B$ iii) $2A+C-B$ iv) $A+B-2C$

11) यदि व्यंजकों का चित्र द्वारा दिखाया गया है।

▲ $= x^2+y^2$, ■ $=x^2-y^2$ और ● $= x^2+y^2+1$

तो निम्नलिखित चित्रात्मक संक्रियाओं का मान ज्ञात कीजिए।

i) ■ + ▲ ii) ▲ + ▲ − ● iii) ▲ + ■ + ●

12) रेखा एक व्यंजक $x+y+1$ प्राप्त करना चाहती है। उसे $2x^2+x+2$ में कौन सा व्यंजक घटाना चाहिए ?

13) $x = 2$ के लिए निम्नलिखित बहुपदों का मान ज्ञात कीजिए।

i) $x+3$ ii) $4x-3$ iii) x^2-1 iv) x^2+2x+1

14) निम्नलिखित व्यजकों का मान ज्ञात कीजिए यदि $n = -2$ है

i) $5n-4$ ii) $3n^2+3n-4$ iii) n^3+4n^2+4n-2

15) यदि $a = -2$ और $b = 2$ है, तो निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए ।

i) $\frac{a+b}{2}$ ii) a^2+ab+b^2 iii) $\frac{a^3+b^3}{3}$ iv) $\frac{a^3-b^3}{3}$

16) व्यंजक n^2 का मान ज्ञात कीजिए जब $x = 1, 2, 3.....10$ आपके द्वारा परिकलित किये गये n^2 के मानों में एक पैटर्न दिखाइए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

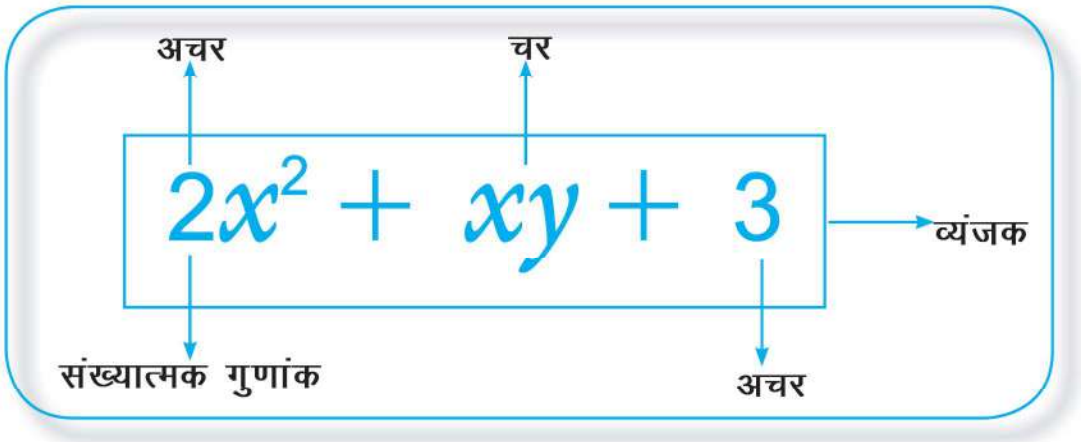
17) यदि $a = 2$ और $b = 1$ है, तो दिखाइए –

i) $a+b = b+a$ ii) $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

iii) $a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$ iv) $a^3-b^3 = (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$

18) व्यंजक $(a-b)^2 + 2ab$ का मान ज्ञात कीजिए, जब $a = 3$ और $b = 2$ है।

जानिए :



इन्हें भी जानें–

1) चरों एवं अचरों के योग, व्याकलन, गुणन, विभाजन से बीजीय व्यंजक बनते हैं।
2) एक व्यंजक में एक या एक से अधिक पद हो सकते हैं।
3) एक पद, गुणनखंडों का गुणनफल होता है।
4) एक या एक से अधिक पदों से बना व्यंजक बहुपद कहलाता है।
5) साधरणतः व्यंजक एकपद, द्विपद, त्रिपद. . . आदि होते हैं।
6) दो समान पदों का योग या व्यवकलन एक अन्य समान पद में होता है, जिसका गुणांक समान पदों के गुणांकों के योगफल या अंतर के बराबर होता है।

याद रखिए–

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$

$a^3+b^3 = (a+b)\ (a^2-ab+b^2)$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$

$= (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$(a+b)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3ab(a-b)-b^3$