22 आँकड़ों का प्रबंधन (Data Handling)

मुख्य अवधारणाएँ

- ★ दोहरा दंड आलेख
- ★ द्वितीयक आँकड़ा, व्यवस्थित आँकड़ा, वर्गीकृत आँकड़ा
- ★ अंकगणितीय माध्य, मध्यमान/माध्यिका, बहुलक
- ★ संयोग एवं प्रायिकता

GDC1QI

22.1 भूमिका :

पिछली कक्षा में हमने एकत्रित आँकड़ों को सारणीबद्ध करना एवं उन्हें दंड आलेखों द्वारा प्रस्तुत करना सीखा है। जीवन के प्रत्येक क्षेत्र, जैसेः आयात–निर्यात, स्वास्थ्य, चिकित्सा, शिक्षा, कृषि, उत्पादन, न्यूनतम एवं अधिकतम तापमान और मूल्य सूचकांक आदि से संबंधित आँकड़ों का संकलन कर इन आँकड़ों को तालिकाओं एवं चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है ताकि इन आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना आसान हो जाए। आँकड़े दो तरह के होते हैं।

(i) अव्यवस्थित आँकड़े (ii) व्यवस्थित आँकड़े

(i) अव्यवस्थित आँकड़े : प्रथमतः आँकड़ों को एकत्र करते समय आँकड़े अव्यवस्थित रूप में रहते हैं। जैसे : किसी कक्षा में गणित विषय में 15 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं : 1, 5, 4, 10, 2, 8, 6, 5, 5, 2, 1, 2, 3, 3, 4 ये आँकड़े अव्यवस्थित रूप में हैं।

(ii) व्यवस्थित आँकड़े : उपर्युक्त आँकड़ों को क्रमागत रूप से आरोही या अवरोही क्रम में सजाकर लिखने पर यही आँकड़े व्यवस्थित आँकड़े कहे जाते हैं।

जैसे : 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 10 आरोही क्रमानुसार (Ascending order)

10, 8, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, अवरोही क्रमानुसार (Descending order)

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

उदाहरण : निम्नलिखित आँकड़ों को आरोही एवं अवरोही क्रम में लिखिए।

2, 2, 5, 5, 8, 9, 9, 7, 6, 5, 7, 4, 4, 3, 2, 3, 1, 4

हल : आरोही क्रम – 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9

अवरोही क्रम – 9, 9, 8, 7, 7, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1

उदाहरण : वर्ग VII में 20 बच्चों की ऊँचाई (इंच में) निम्नलिखित है :

42,48,48,49,47,47,49,46,45,56,57,56,58,57,56,49,58,57,56,59

इन्हें व्यवस्थित रूप से (आरोही एवं अवरोही क्रम में) सजाकर लिखिए।

हल : आरोही क्रम : 42,45,46,47,47,48,48,49,49,49,56,56,56,56,57,57,57,58,58,59

अवरोही क्रम : 59,58,58,57,57,57,56,56,56,56,49,49,49,48,48,47,47,46,45,42

22.1.1 बारंबारता एवं मिलान चिह्न :

गतिविधि 1 : आवश्यक सामग्री – अंग्रेजी की पाठ्यपुस्तक, पेन/पेंसिल, आलेख कागज/ग्रीड पेपर कार्ड बोर्ड

- कक्षा 7 के विद्यार्थियों को 4 या 5 विद्यार्थियों के समूह में विभाजित कीजिए।
- एक समूह के एक विद्यार्थी को अंग्रेजी की पाठ्यपुस्तक का कोई भी पृष्ठ खोलकर उस पृष्ठ पर अंकित a, e, i, o, u कितनी बार आए हैं, उसे मिलान चिह्न की सहायता से गिनकर लिखने को कहेंगे।
- समूह के अन्य सदस्य उसे गिनने में मदद करेंगे।
- प्रत्येक समूह प्राप्त आँकड़ों से निम्न सारणी को पूरा करेंगे :

स्वर	मिलान चिह्न	उस पृष्ठ पर आने वाले स्वरों की संख्या
a		
e		
i		
o		
u		
	योग	

प्रदर्शन : प्राप्त सारणी स्वर वर्ण की एक बारंबारता सारणी है।

प्रेक्षण : इस सारणी को देखकर हम निम्न प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं–

(i) अधिकतम बार आने वाले स्वर वर्ण कौन–से हैं?

(ii) न्यूनतम बार आने वाले स्वर वर्ण कौन–से हैं?

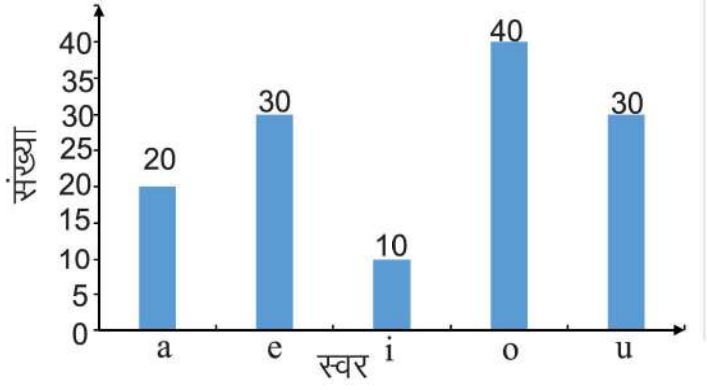
(iii) कुल स्वरों की बारंबारता क्या है?

किसी आँकड़े में संख्याओं की पुनरावृत्ति की संख्या को बारंबारता कहते हैं। आँकड़ों की बारंबारता को जोड़कर कुल बारंबारता ज्ञात कर सकते हैं। कुल बारंबारता को 'N' से निरूपित करते हैं।

22.2. दण्डालेख : उपर्युक्त क्रियाकलाप के द्वारा प्रदत्त आँकड़ों को दण्डालेख से दिखाया जा सकता है।

मान लिया कि स्वरों की एक बारंबारता सारणी निम्न हैं। इस आँकड़ों को दण्डालेख के द्वारा दर्शाया जा सकता है।

स्वर	a	e	i	o	u
बारंबारता	20	30	10	40	30



उदाहरण : एक विद्यालय में कक्षा–7 के 25 बच्चों की आयु (वर्ष में) निम्नलिखित हैं :

15,16,16,14,17,17,16,15,15,16,16,17,15,16,16,14,16,15,14,15,16,16,15,14,15

इस आँकड़ों से मिलान चिह्न एवं बारंबारता सारणी बनाइए।

हल :

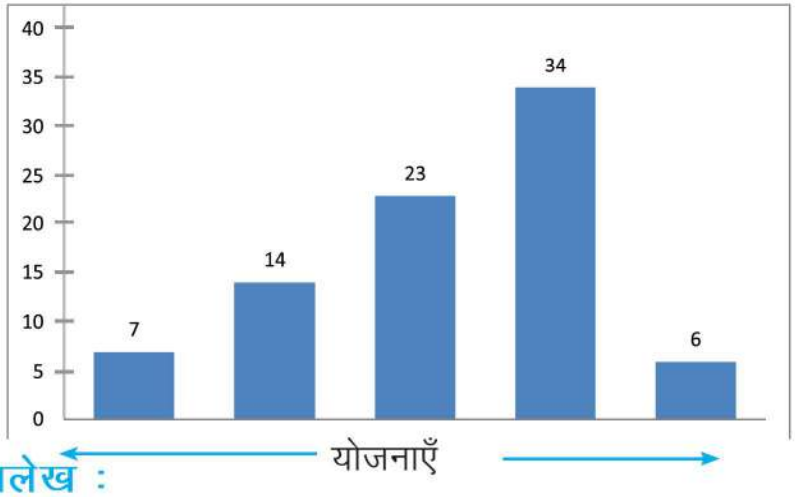
आयु	मिलान चिह्न	बारंबारता
14	||||	4
15	𝍸 |||	8
16	𝍸 𝍸	10
17	|||	3
		कुल N = 25

उदाहरण : भारत सरकार द्वारा शिक्षा पर पिछले पाँच योजनाओं में निम्नलिखित राशि खर्च की गई।

योजना	खर्च लाख ₹ में
I	7
II	14
III	23
IV	34
V	6

उपर्युक्त आँकड़ों को देखकर ग्राफ पेपर में दंड–आलेख बनाइए।

हल :



22.2.1 दोहरा दंड आलेख :

दंड आलेख की सहायता से विभिन्न सूचनाओं को प्राप्त किया जाता है। जब किसी सूचना से संबंधित तुलनात्मक अध्ययन की जरूरत होती है तो दोहरे दंड आलेख का निर्माण किया जाता है।

दोहरे दंड आलेख को हम एक उदाहरण से समझ सकते हैं।

उदाहरण : किसी शहर में वर्षवार गणित एवं विज्ञान की किताबों की बिक्री निम्नवत् है :

वर्ष	गणित पुस्तक की बिक्री की सं0	विज्ञान पुस्तक की बिक्री की सं0
2013	360	510
2014	410	540
2015	460	610
2016	620	660

उपर्युक्त दिए गए आँकडों के आधार पर दोहरा दंड आलेख खींचिए एवं निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) किस वर्ष दोनों किताबों की विक्री सबसे कम हुई?

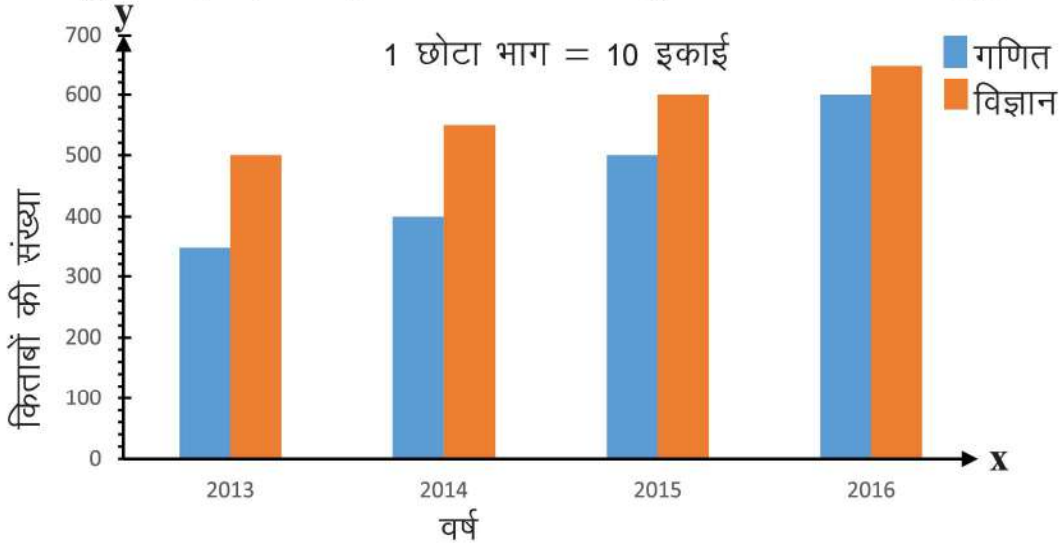
(ii) किस वर्ष दोनों किताबों की बिक्री अधिकतम हुई?

हल : दोहरा दंड आलेख निम्नलिखित चरण के अनुसार बनाया जाएगा।

चरण : 1 एक ग्राफ पेपर लेकर एक क्षैतिज रेखा OX खींचे। उसके ऊर्ध्वाधर (लम्बवत्) एक रेखा OY खींचिए।

चरण : 2 प्रति 1 छोटे भाग = 10 इकाई मानकर या 1 बड़ा भाग = 100 मानकर लम्बवत् एवं क्षैतिज चित्रानुसार संख्या लिखिए।

चरण : 3 उपर्युक्त दिए गए आँकड़ों के आधार पर चित्रानुसार दंड आलेख बनाइए।



(i) 2013 में दोनों किताबों की बिक्री सबसे कम हुई।

(ii) 2016 में दोनों किताबों की बिक्री अधिकतम हुई।

उदाहरण : निम्नलिखित आँकड़े विद्यार्थियों के SA I एवं SA II में पूर्णांक 60 में से प्राप्त अंक गणित, अंग्रेजी, पर्यावरण, सा० विज्ञान एवं हिन्दी में निम्न प्रकार हैं।

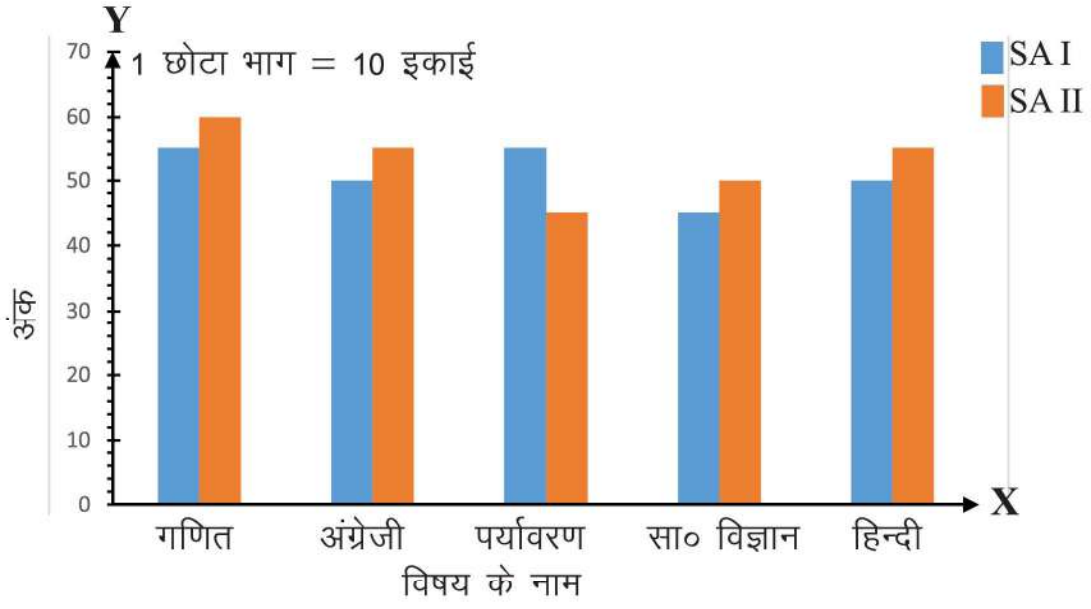
विषय	SA I	SA II
गणित	55	58
अंग्रेजी	50	55
पर्यावरण	55	45
स० विज्ञान	45	50
हिन्दी	50	55

इन आँकडों का प्रयोग कर दोहरा दंड आलेख बनाइए। SA I के दंड आलेख को छायांकित कीजिए। दंड आलेख के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

(i) किस विषय में बच्चे पहले से अच्छा अंक प्राप्त किए?

(ii) SA II के किस विषय में उनका प्राप्तांक सबसे कम रहा?

हल :



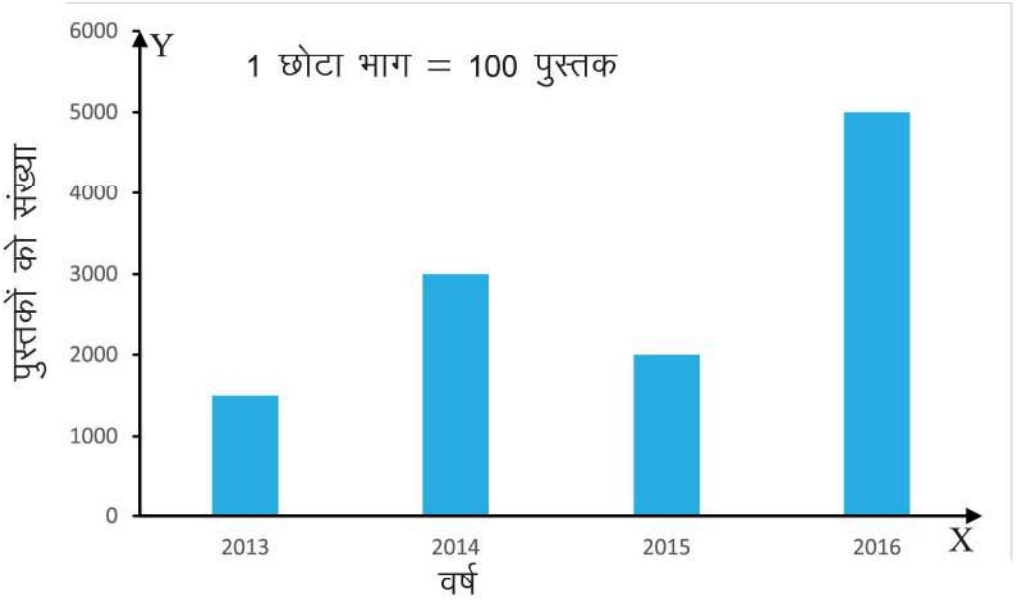
"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

(i) गणित विषय में बच्चे पहले से अच्छा अंक प्राप्त किए।

(ii) SA II में पर्यावरण एवं सामाजिक विज्ञान में उनका प्राप्तांक सबसे कम रहा।

प्रश्नावली : 22.1

(1) किसी पुस्तक विक्रेता द्वारा पाँच वर्षों में लगातार बेचे गए पुस्तकों की संख्या को नीचे दंडालेख में दिखाया गया है।



उपर्युक्त दंडालेख के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) वर्ष 2014 में कुल कितनी पुस्तकें बेची गयी?

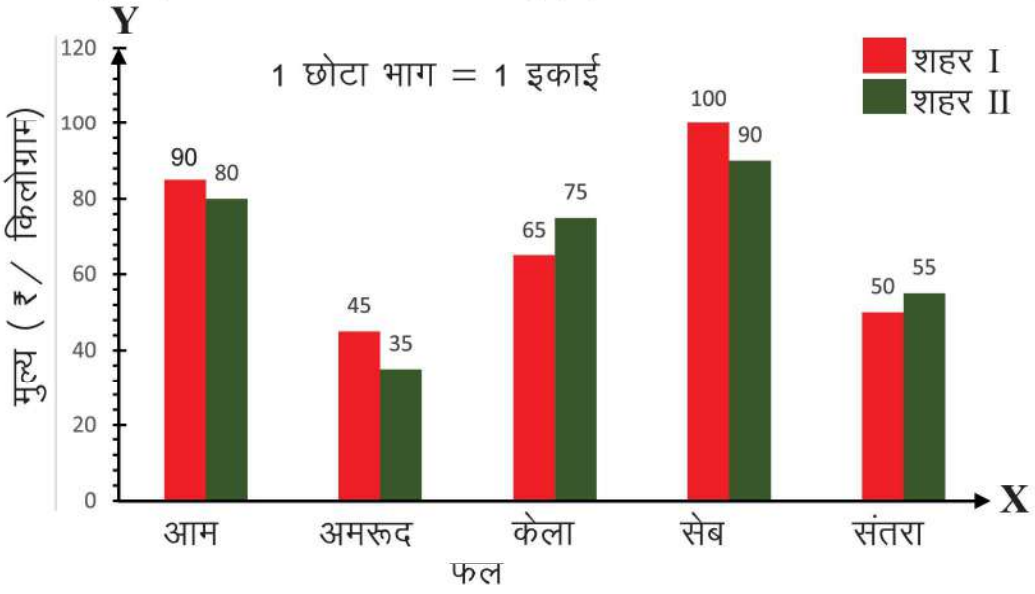
(ii) वर्ष के अनुसार बेची गयी पुस्तकों की सारणी बनाइए।

(2) एक फैक्टरी द्वारा निर्मित साइकिलों की संख्या निम्नलिखित है।

वर्ष	2012	2013	2014	2015	2016
साइकिलों की सं०	650	700	800	750	600

इन आँकड़ों के लिए दंड आलेख बनाइए।

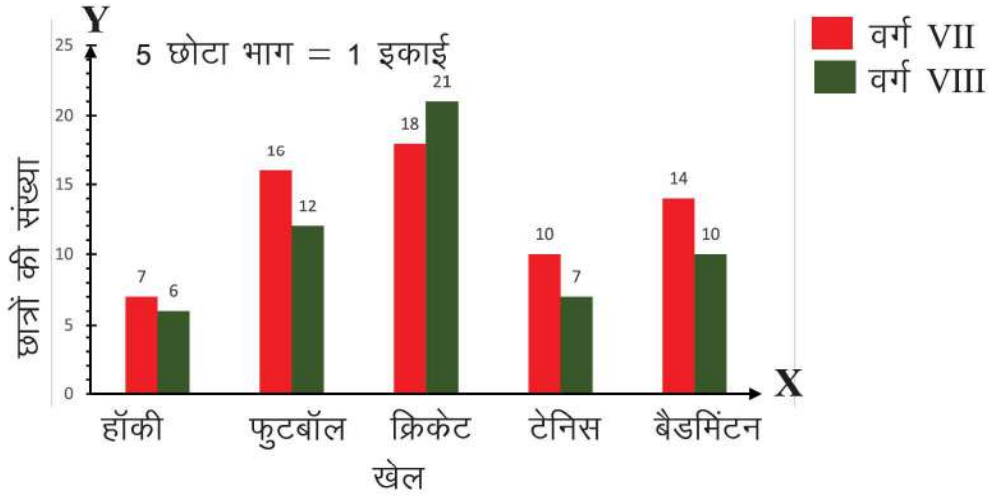
(3) नीचे दिए गए दोहरा दंड आलेख को पढ़िए एवं संबंधित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :



(i) सेब की कीमत में दोनों शहर में प्रति किग्रा कितना का अंतर है?

(ii) शहर I एवं शहर II के अमरूद के दामों का अनुपात कितना है?

(4) दिए गए दोहरा–दंड आलेख को पढ़िए एवं निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



(i) वर्ग VIII के छात्रों द्वारा किस खेल को सबसे अधिक पंसद किया जाता है?

(ii) वर्ग VII के कितने विद्यार्थियों द्वारा टेनिस खेल को पसंद किया जाता है?

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

(iii) वर्ग VII में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

(iv) किस खेल को पंसद करने वाले बच्चों की संख्या वर्ग VIII से वर्ग VII की कम है?

(v) वर्ग VII के खिलाड़ी, वर्ग VIII के खिलाड़ियों की अपेक्षा किस–किस खेल को अधिक पंसद करते हैं?

(vi) वर्ग VII के बैडमिंटन एवं वर्ग VIII के टेनिस पसंद करने वाले खिलाड़ियों का अनुपात बताइए।

(5) शहरी एवं ग्रामीण क्षेत्रों के लोगों द्वारा औसतन विभिन्न भोज्य पदार्थों से लिए गए कैलोरी को निम्नलिखित तालिका में दर्शाया गया है। इन आँकड़ों के लिए उपर्युक्त इकाई लेकर इनके तुलनात्मक अध्ययन हेतु दोहरा दंड आलेख बनाइए।

विभिन्न भोज्य पदार्थ	ग्रामीण क्षेत्र	शहरी क्षेत्र
दाल	35	50
हरी सब्जियाँ	15	20
दूध	70	50
तेल एवं वसा	10	35
चीनी	20	30

(6) किसी सप्ताह के तीन दिनों में एक पुस्तकालय के पाठकों का निम्न आँकड़े एकत्रित किए गए –

दिन	सोम	मंगल	बुध
समाचार पत्र पाठकों की सं०	400	600	350
पत्रिका पाठकों की संख्या	150	100	200

(i) उचित माप लेकर एक दोहरा दंड आलेख बनाइए।

(ii) किस दिन पुस्तकालय में पाठकों की संख्या अधिकतम थी?

(iii) किस दिन पुस्तकालय में समाचार पत्र पाठकों की संख्या सबसे कम थी?

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

(7) निम्नलिखित आँकड़ों से दोहरा दंडालेख बनाइए एवं दिए गए प्रश्नों का उत्तर लिखिए।

प्रतिदिन उपस्थिति	राजकीयकृत मध्य विद्यालय	दिनांक 16.12.2016
वर्ग	कुल विद्यार्थियों की संख्या	उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या
VI	90	81
VII	82	76
VIII	95	91

(i) किस वर्ग में अधिक विद्यार्थी हैं?

(ii) कुल विद्यार्थी एवं कुल उपस्थिति का अंतर किस वर्ग में न्यूनतम है?

(iii) कक्षा में कुल उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या एवं कुल विद्यार्थियों की संख्या लिखिए।

औसत (Average)

22.3 माध्य, माध्यिका, बहुलक (Mean, Median, Mode)

भूमिका : हम प्रतिदिन, समाचार पत्रों, टेलीविजन पत्रिकाओं आदि से विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ एकत्र करते हैं। जैसे :

कॉलम A	कॉलम B
1. दो कार के दुर्घटनाग्रस्त होने पर तीन व्यक्ति की मृत्यु हो गई।	1.दो कार के दुर्घटनाग्रस्त होने से कुछ लोगों की मृत्यु हो गयी।
2. आज के क्रिकेट मैच में धोनी ने 190 रन बनाएँ।	2. आज के क्रिकेट मैच में धोनी ने सर्वाधिक रन बनाए।

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि दोनों ही कॉलम से सूचनाएँ प्राप्त हो रही हैं, परन्तु कॉलम – A की सूचनाएँ ज्यादा स्पष्ट एवं अर्थपूर्ण है, क्योकि इसमें सूचनाएँ संख्यात्मक रूप में दी गई हैं।

इस प्रकार, किसी सूचनाओं को किसी विशेष कार्य के लिए संख्यात्मक रूप में एकत्र करना आँकड़ा कहलाता है।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

आँकड़ों का प्रबंधन

आँकड़ों का संगठन : पिछली कक्षा में हमने पढ़ा है कि आँकड़ों का संगठन दो प्रकार से किया जाता है –

(1) प्राथमिक आँकड़े (Primary data)

वैसे आँकड़े जिसे संग्रहकर्त्ता स्वयं एकत्र करते हैं, प्राथमिक आँकड़े कहलाते हैं। यह आँकड़े अव्यवस्थित रूप में रहता है। जैसे : वर्ग 7 के 10 बच्चों द्वारा गणित विषय में कुल 20 अंकों में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किया गया। 4, 1, 11, 13, 20, 9, 19, 17, 11, 20

(2) द्वितीयक आँकड़े (Secondary data) :

द्वितीय आँकड़े संग्रहकर्ता द्वारा स्वयं एकत्र न कर आवश्यकतानुसार समाचार पत्र, टेलीविजन, पत्रिकाएँ आदि अन्य स्त्रोत से प्राप्त किया जाता है।

(3) वर्गीकृत आँकड़ा (Grouped data) :

सुविधानुसार आँकड़े को किसी समूह या वर्ग में प्रदर्शित करना वर्गीकृत आँकड़ा (Grouped data) कहलाता हैं।

प्रसार (Range):

व्यवस्थित आँकड़े के उच्चतम एवं न्यूनतम मान के अंतर को प्रसार (Range) परिसर कहते हैं।

उदाहरण : गणित विषय 20 बच्चों के पूर्णांक 20 में से प्राप्तांक निम्नलिखित हैं।

15, 7, 9, 13, 12, 12, 20, 4, 13, 18, 20, 18, 6, 9, 14, 16, 18, 17, 16, 17

उपर्युक्त आँकड़े को आरोही क्रम में सजाकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) न्यूनतम एवं अधिकतम अंक बताइए (ii) इन आँकड़ों का परिसर निकालिए

हल : आरोही क्रम – 4, 6, 7,9, 9, 12, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 18, 20, 20

(i) न्यूनतम अंक = 4, अधिकतम अंक = 20

(ii) प्रसार = अधिकतम अंक – न्यूनतम अंक

= 20 – 4 = 16

उदाहरण : आँकड़े 45, 31, 32, 35, 18, 21, 55, 24, 30, 42 को अवरोही क्रम में सजाकर

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) उपर्युक्त आँकड़े का उच्चतम मान क्या है?

(ii) न्यूनतम मान क्या है?

(iii) प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल : अवरोही क्रम : 55, 45, 42, 35, 32, 31, 30, 24, 21, 18

(i) अधिकतम मान = 55 (ii) न्यूनतम मान = 18

(iii) प्रसार = अधिकतम अंक – न्यूनतम अंक

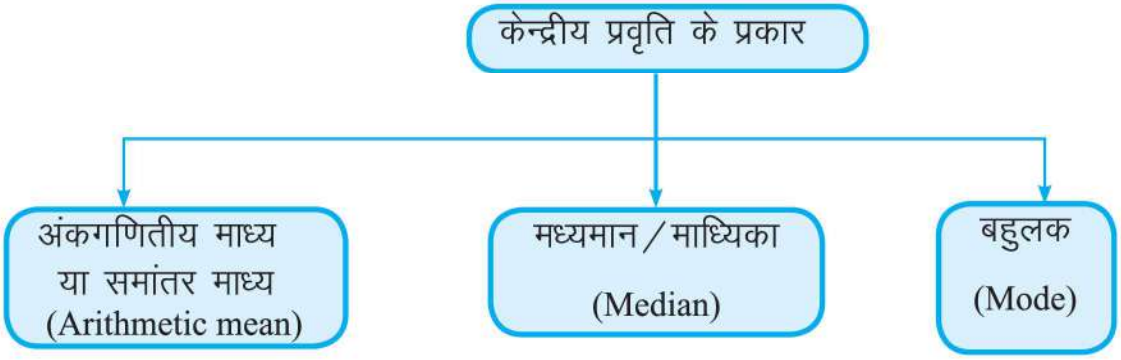
= 55 – 18 = 37

22.4 केन्द्रीय प्रवृति एवं इसके प्रकार (Types of Central Tendency) :

हम अपने दैनिक जीवन में प्रायः औसत शब्द का प्रयोग करते हैं जैसे–औसत तापमान, औसत अंक, औसत आयु आदि।

मान लिया जाए कि वर्ग VII के बच्चों की औसत आयु 12 वर्ष है। इसका तात्पर्य यह कदापि नहीं है कि वर्ग VII में पढ़ने वाले प्रत्येक बच्चों की आयु 12 वर्ष है। इसका अर्थ इनमें कुछ बच्चों के आयु 12 वर्ष से कम और कुछ बच्चों का 12 वर्ष से अधिक हो सकता है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (Observations) को निरूपित करती है क्योंकि औसत सबसे अधिक एवं सबसे कम के बीच में होता है।



22.5 अंकगणितीय माध्य (Arithmetic mean) :

क्रिकेट का एक खिलाड़ी 20 लगातार पारियों में क्रमशः 10,12,15,9,18,20,25,13,17,20,18,16,14,30,16,20,17,18,15,17 रन बनाता है। एक मैच के लिए उस खिलाड़ी से उसकी 21 वीं पारी में कितने रनों की आशा की जा सकती हैं? संभवतः वह 21 वीं पारी में शून्य (0)

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

बनाये पर पूर्व के रनों को देखकर कहा जा सकता है कि वह 17 रन बनाएगा। 17 एक ऐसी संख्या है, जिसके आसपास के रन उस खिलाड़ी ने अधिकतम बार बनाए। यह संख्या (17) प्राप्त करने के लिए 20 पारियों में बनाए गए कुल रनों को जोड़कर 20 से भाग दे दिया जाता है। प्राप्त संख्या को 20 पारियों में उस खिलाड़ी द्वारा बनाए गए रनों का गणितीय औसत/माध्य या समांतर माध्य (Arithmetic mean) कहा जाएगा।

किन्हीं दो या दो से अधिक सजातीय राशियों का गणितीय औसत अंक गणितीय माध्य राशि है जो उन राशियों के योग में दी हुई राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होती है।

$$\text{अंक गणितीय औसत / माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

उदाहरण : निम्नलिखित आँकड़ों का अंकगणितीय माध्य निकालें 2, 3, 2, 5, 6, 2, 9, 2, 9, 8

हल : $\text{अंक गणितीय औसत / माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

$$= \frac{2 + 3 + 2 + 5 + 6 + 2 + 9 + 2 + 9 + 8}{10}$$

$$= \frac{48}{10} = 4.8$$

उदाहरण : 5, 4, 2, 1, 0, 3, 5, 4, 2, 4 इन आँकड़ों का

(i) परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : (i) परिसर = अधिकतम अंक − न्यूनतम अंक = 5 − 0 = 5

(ii) $\text{समांतर / अंकगणितीय माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

$$= \frac{5 + 4 + 2 + 1 + 0 + 3 + 5 + 4 + 2 + 4}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

प्रश्नावली : 22.2

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   i) परिसर = अधिकतम मान − ..... ii) माध्य = $\frac{\text{प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{.....}}$

2. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर के चार विकल्प दिए गए हैं। सहीं विकल्प के सामने (✓) निशान लगाइए।

   (a) 14, 6, 12, 17, 10, 21, 4, 3 का परिसर

   i) 21 ii) 17 iii) 3 iv) 14

   (b) प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का अंक गणितीय माध्य है।

   i) 2 ii) 4 iii) 7 iv) 3

3. निम्न आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।

   20, 25, 21, 19, 18, 19, 20 ,25 ,17

4. कक्षा vii के 10 विद्यार्थियों द्वारा गणित में पूर्णांक 20 में से प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं।

   19, 18, 18, 17, 12, 12, 3, 12, 10, 19

   (i) उपर्युक्त आँकड़ों में अधिकतम एवं न्यूनतम अंक क्या है?

   (ii) आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित आँकड़ों को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में सजाकर लिखिए एवं दिए गए प्रश्नों का उत्तर दीजिए ।

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) इन आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।

   (ii) आँकड़ों का अंक गणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

(6) प्रथम पाँच लगातार प्राकृत संख्याओं का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

(7) प्रथम पाँच सम प्राकृत संख्याओं का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

(8) प्रथम पाँच अभाज्य संख्याओं का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

(9) 5 के प्रथम 6 गुणज (Multiples) का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

(10) एक शहर का एक सप्ताह में हुई वर्षा (मिमी में) का रिकॉर्ड निम्न है :

दिन	सोम	मंगल	बुध	वृहस्पति	शुक्र	शनि	रवि
वर्षा (मि०मी० में)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) पूरे सप्ताह के वर्षा का माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) सप्ताह में कितने दिन औसत से कम वर्षा हुई ?

(11) 10 लड़कियों की ऊँचाई सेमी में मापा गया, जो निम्नलिखित हैं –

135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141

(i) सबसे लंबी लड़कियों की ऊँचाई क्या है?

(ii) सबसे छोटी लड़कियों की ऊँचाई बताएँ?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।

(iv) लड़कियों की ऊँचाई का औसत/माध्य क्या है?

(v) कितनी लड़कियों की ऊँचाई औसत से अधिक है?

(12) निम्नलिखित सारणी में तीन खिलाड़ियों द्वारा खेले गए 4 खेलों में प्राप्त अंक दर्शाया गया है।

खिलाड़ी	खेल – 1	खेल – 2	खेल – 3	खेल – 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	0	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) खिलाड़ी A के द्वारा सभी खेलों में प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।
(ii) खिलाड़ी C के द्वारा सभी खेलों में प्राप्त अंकों का माध्य निकालिए।
(iii) खिलाड़ी B के अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

22.6 मध्यमान / माध्यिका (Median) :

कभी–कभी ऐसी परिस्थितियाँ आती हैं, जहाँ माध्य के द्वारा केन्द्रीय प्रवृति की माप ज्ञात नहीं की जा सकती है। इस परिस्थिति में एक अलग विधि द्वारा केन्द्रीय प्रवृति की माप ज्ञात की जाती है।

जैसे : किसी वर्ग के 31 बच्चों की औसत ऊँचाई ज्ञात करना हो तो सभी बच्चों के ऊँचाई को जोड़कर यदि 31 से भाग दिया जाए तो औसत ऊँचाई ज्ञात करते हैं। इसे एक अन्य विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है, जो अत्यंत सरल एवं कम समय में ज्ञात किया जा सकता है।

दिए हुए आँकड़ों को यदि क्रमानुसार (आरोही / अवरोही) सजा दिया जाए तो ठीक बीच के मान को माध्यिका / माध्यक / मध्यमान कहा जाता है।

22.6.1 प्राथमिक / असंगठित आँकड़े की माध्यिका निकालने की विधि :

यदि आँकड़े असंगठित हों तो उन्हें सर्वप्रथम आरोही / अवरोही क्रम में सजाया जाता है।

यदि आँकड़ों की कुल संख्या $= n$ हो, जहाँ $n =$ विषम संख्या

तो $\boxed{\text{माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वाँ पद}}$

उदाहरण : निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यिका ज्ञात कीजिए।

34, 46, 56, 27, 28, 35, 45

हल : सबसे पहले इन आँकड़ों को आरोही / अवरोही क्रम में सजाया जाता है:

27, 28, 34, $\boxed{35,}$ 45, 46, 56

यहाँ, $n = 7$ (विषम संख्या)

$\therefore$ माध्यिका $= \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ चौथा पद

सजाए गए आँकड़े का चौथे पद का मान 35 है।

अतः माध्यिका $= 35$

दूसरी विधि : यदि आँकड़ों की कुल संख्या $= n$ हो, जहाँ $n =$ सम संख्या

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{ वाँ पद} + \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

उदाहरण : 8 विद्यार्थियों का भार (किग्रा में) 30, 42, 24, 37, 21, 25, 38, 31 है, तो माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़ों का आरोही क्रम 21, 24, 25, 30, 31, 37, 38, 42

यहाँ, $n = 8$ (सम संख्या)

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{8}{2}\right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{8+1}{2}\right) \text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{4 \text{ था पद} + 5 \text{ वाँ पद}}{2} = \frac{30 + 31}{2} = \frac{61}{2} = 30.5 \text{ किग्रा}$$

$\therefore$ माध्यिका $= 30.5$ किग्रा

22.7 बहुलक (Mode) :

क्रियाकलाप : जूते के एक थोक विक्रेता द्वारा 1 महीने में विभिन्न माप के जूते को बेचा गया जिसे निम्नलिखित सारणी में दिखाया गया है :

जूते की माप (Size)	बेचे गए जूतों की संख्या
0	5
1	8
2	6
3	11
4	20
5	38
6	47
7	7
8	8
9	10

यहाँ अगर थोक विक्रेता यह जानना चाहता है कि किस माप के जूते को अधिक मँगाया जाए ताकि अधिकतम ग्राहकों की माँग पूरी की जा सके?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए सर्वप्रथम माध्य निकाल कर देखते हैं –

$$= \frac{5 + 8 + 6 + 11 + 20 + 38 + 47 + 7 + 8 + 10}{10}$$

$$= \frac{160}{10} = 16$$

इसके आधार पर थोक विक्रेता को 16 जोड़ी जूते की प्रत्येक माप की रखनी चाहिए। प्रश्न देखकर पता चलता है कि यह कहीं से भी उचित नहीं है।

अब माध्यिका निकाल कर देखते है

इसके लिए आँकड़ों को व्यवस्थित करते हैं।

आरोही क्रम – 5, 6, 7, 8, 8, 10, 11, 20, 38, 47

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{ वाँ पद} + \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{10}{2}\right) \text{ वाँ पद} + \left(\frac{10+1}{2}\right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{ वाँ पद} + 6 \text{ वाँ पद}}{2} = \frac{8 + 10}{2} = 9$$

माध्यिका निकालने के बाद भी दुकानदार सही नतीजे पर नहीं पहुँचता है कि उसे किस माप का जूता अधिकतम रखना चाहिए क्योंकि माध्यिका के हिसाब से प्रत्येक माप के जूते की संख्या 9 जोड़ी होनी चाहिए।

परन्तु प्रश्न देखने से पता चलता है कि 6 न० के जूते की बिक्री अधिकतम 47 हुई है। इस कारण माध्यिका निकाल कर भी हम इस समस्या का समाधान नहीं कर सकते हैं।

इस समस्या के समाधान हेतु एक अलग विधि अपनाई जाती है –

तालिका को देखकर यह ज्ञात होता है कि 6 न० के जूते को अधिक रखा जाए तो वह अधिकतम ग्राहकों को संतुष्ट कर पाएगा।

अतः दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार उपस्थित होने वाले आँकड़ों को बहुलक (Mode) कहते हैं।

उदाहरण : निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

75, 79, 74, 76, 75, 74, 75, 77, 75, 74, 80, 75, 74, 78, 75

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम – 74, 74, 74, 74, 75, 75, 75, 75, 75, 75, 76, 77, 78, 79, 80

यहाँ 75 की उपस्थिति सबसे अधिक बार अर्थात छह बार है।

इसलिए बहुलक = 75

नोट : कभी–कभी दो भिन्न आँकड़ों की बारंबारताएँ सर्वाधिक एवं समान पाए जाते हैं। इस स्थिति में आँकड़ों के दो बहुलक होंगे ।

उदाहरण : आँकड़ों 5, 3, 3, 5, 5, 4, 2, 4, 5, 4, 4 का बहुलक में ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़ों का आरोही क्रम – 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5

यहाँ संख्या 4 एवं 5 की बारंबारता 4 है। अर्थात् संख्या 4 एवं 5 दोनों 4–4 बार आया हैं।

अतः बहुलक = 4 एवं 5

उदाहरण : निम्न आँकड़ों का बहुलक निकाले – 2, 5, 4, 4, 5, 3, 2, 2, 1, 2, 3, 2

हल : आँकड़ों का व्यवस्थित रूप – 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5

आँकड़ों में 2 की बारंबारता सबसे अधिक है।

अतः दिए गए आँकड़ों का बहुलक = 2

उदाहरण : क्या आँकड़ा 5,10,10,12,13 के माध्य, मध्यमान एवं बहुलक तीनों समान हो सकते हैं?

हल : दिए गए आँकड़ों का आरोही क्रम = 5, 10, 10, 12, 13

$$\text{माध्य} = \frac{5 + 10 + 10 + 12 + 13}{10}$$

$$= \frac{50}{5} = 10$$

मध्यमान : इन्हें व्यवस्थित रूप से आरोही क्रम रखने पर 5, 10, 10, 12, 13

$$\text{मध्यमान} = \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ रा पद}$$

$$= 10$$

बहुलक : दिए गए आँकड़ों में 10 सबसे अधिक 2 बार है।

इस प्रकार दिए गए आँकड़ों का बहुलक = 10

यहाँ माध्य = मध्यमान = बहुलक = 10

अतः कभी–कभी किसी आँकड़ों का माध्य, मध्यमान एवं बहुलक एक हो सकता है।

प्रश्नावली : 22.3

(1) नीचे दिए गए प्रश्नों के सही उत्तर लिखिए।

(i) एक शहर के विभिन्न पार्कों में उपलब्ध पेड़ों की संख्या

32, 33, 39, 35, 48, 33, 34, 33, 34, 33 है, तो इस आँकड़े में बहुलक क्या है?

(a) 32 (b) 34 (c) 33 (b) 48

(ii) एक व्यक्ति वैसे खिलौने अपने दुकान में रखना चाहता है, जिसे अत्यधिक बच्चे पसंद करते हों। इसके लिए उसे किस केन्द्रीय प्रवृति की माप का उपयोग करना होगा?

(a) माध्य (b) बहुलक (c) मध्यमान (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) निम्नलिखित में से किन आँकड़ों का माध्य, माध्यिका एवं बहुलक समान है?

(a) 6, 2, 5, 4, 3, 4, 1 (b) 4, 3, 4, 3, 4, 6, 4 (c) 4, 1, 2, 1, 3, 2, 4 (d) 3, 2, 7, 8, 3, 3, 2

(2) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) माध्य, माध्यिका एवं बहुलक ..... की माप है।

(ii) यदि प्रेक्षणों की संख्या विषम संख्या है तो माध्यिका निकालने का सूत्र है, ...वां पद।

(iii) यदि प्रेक्षणों की संख्या सम संख्या है तो माध्यिका निकालने के लिए .....+ ..... वाँ पद का सूत्र का उपयोग करेंगे।

(iv) किसी आँकड़ों में अधिकतम बार उपलब्ध संख्या उस आँकड़े का ..... कहलाता है।

(3) सही कथन के आगे (✓) एवं गलत कथन के आगे (✗) का निशान लगाइए –

(i) माध्य, मध्यमान एवं बहुलक समान हो सकते हैं।

(ii) दिए गए आँकड़ों का माध्य उन आँकड़ों के बीच में होता है

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

(iii) किसी आँकड़ों का बहुलक उन आँकड़ों में से ही होता है।

(iv) मध्यमान किसी आँकड़ों के बीच में हो भी सकता है और नहीं भी ।

(v) मध्यमान को ही अंकगणितीय माध्य कहा जाता है।

(4) प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

(5) प्रथम नौ सम संख्याओं का माध्यिका ज्ञात कीजिए।

(6) निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक ज्ञात कीजिए।

9, 7, 3, 6, 7, 10, 14, 7, 3, 1, 2, 5, 7

(7) निम्नलिखित संख्याओं का मध्यमान एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 2, 6, 4, 3, 4, 2, 3, 4

(8) एक विक्रेता द्वारा बेचे गए पतंगों की संख्या से संबंधित आँकड़ा निम्नलिखित है।

पतंग का रंग	पतंगों की संख्या
लाल	18
पीला	22
काला	20
हरा	25
नीला	30

आँकड़े को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

(i) किस रंग के पतंग की बिक्री अधिकतम हुई?

(ii) प्रश्न संख्या (i) का उत्तर देने के लिए केन्द्रीय प्रवृति के किस माप का उपयोग किया जाएगा।

(9) निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य, माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

6, 10, 10, 11, 13

(10) निम्नलिखित आँकड़ों के माध्य, माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

10, 8, 4, 7, 8, 10, 15, 10, 0

22.8 संयोग और प्रायिकता :

हमारे दैनिक जीवन में प्रायः कुछ प्रश्न सामने आते हैं, जैसे (i) क्या कल बारिश होगी?

(ii) क्या भारत पाकिस्तान से क्रिकेट मैच जीतेगा? इन प्रश्नों का उत्तर हाँ भी हो सकता है और नहीं भी।

आइए कुछ कथनों पर विचार करें –

(i) पानी के अंदर मोमबत्ती जल सकती है।

(ii) एक आदमी की लंबाई 12 फीट हो सकती है।

(iii) सूर्य पूर्व दिशा में उदय होगा।

(iv) भारत, पाकिस्तान से फुटबॉल मैच जीतेगा।

हम आसानी से यह कह सकते हैं कि कथन (i) एवं (ii) असत्य है, जबकि कथन (iii) सत्य है परन्तु कथन (iv) सत्य भी हो सकता है और असत्य भी।

22.8.1 संयोग (Chance)

एक थैले में कुछ गेंदें हैं और ये सारी नीली गेंदे हैं। यदि हमने बिना देखे एक गेंद निकाला तो हम बहुत आसानी से कह सकते हैं कि निकाली गई गेंद नीली ही होगी।

सोचिए, यदि थैले में कुछ नीली और कुछ हरी गेंद हो, तो निकाली गई गेंद का रंग क्या नीला ही होगा ? इसका जबाब हाँ हो सकता है और नहीं भी। इसी प्रकार यदि किसी सिक्के को उछाला जाए तो हमें क्या प्राप्त होगा? यह संयोग (Chance) की ही बात है कि सिक्के को उछालने से क्या प्राप्त हो सकता है?

एक सिक्के को 10 बार उछालने पर प्रत्येक उछाल के परिणाम निम्न है–

उछाल संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
परिणाम	T	T	H	H	H	H	T	T	T	H	?

क्या उछाल संख्या एवं परिणाम में कोई संबंध है? क्या परिणाम कोई प्रतिरूप बनाते हैं? क्या आप बिना सिक्का उछाले बता सकते है कि 11वें उछाल में क्या परिणाम होगा? इसका जवाब

"JCERT Text Book for free distribution : 2020-2021"

नहीं में होगा। यह महज संयोग है कि परिणाम चित आएगा या पट।

22.8.2 प्रायिकता (Probability)

हमने अभी तक सिक्के को उछालने के बाद आने वाले परिणाम को लिखा। ये दोनों परिणाम प्राप्त करने की घटना समप्रायिक (equally likely) घटना है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि चित प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। उसी प्रकार पासे को फेंकने से परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 आ सकते हैं एवं प्रत्येक परिणाम को प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

अभी तक की चर्चा से हम कह सकते हैं कि

प्रायिकता 0 एवं 1 या इन दोनों के बीच की होती है।

प्रश्नावली : 22.4

1) बताइए कि निम्नलिखित में किसका होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है, परन्तु निश्चित रूप से नहीं ।

   i) आज सूर्योदय पूर्व दिशा में हुआ है।

   ii) एक पासे को फेंकने से 6 आएगा।

   iii) एक पासे को फेंकने से 1 से 6 तक की संख्या आएगा।

   iv) एक सिक्के को उछालने से चित आएगा।

   v) कल वर्षा होगी।

   vi) इस वर्ष में कुल 370 दिन होंगे।

2) यदि आप शहर में होने वाले हॉकी मैच को देखने जाने का निर्णय सिक्के उछाल कर लेते हैं तो आप मैच देखने जाएँगे, इसकी प्रायिकता क्या होगी?

3) एक थैले में छह कंचे हैं, जिसमें 1 से 6 तक की संख्या अंकित है।

   i) संख्या 4 वाले कंचे के निकलने की प्रायिकता क्या है?

   ii) संख्या 3 वाले कंचे के निकलने की प्रायिकता क्या है?

   iii) संख्या 7 वाले कंचे को निकालने की प्रायिकता क्या है?

   iv) इसकी क्या प्रायिकता है, जो कंचा निकलेगा उसमें 1 से 6 तक की संख्या में से ही अंकित होगी?