



MATHEMATICS

TEXTBOOK FOR CLASS IX

Semester - 1

ENGLISH - TAMIL VERSION



© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2023

New Impression - 2024, 2025, 2026

DISCLAIMER

Any form of copying of the content, information and illustrations from this textbook is a punishable offence.

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser. The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 GSM, SS Maplitho. Title Page 220 GSM and White Art Card.



Published by Samagra Shiksha & SCERT - Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

Vande Mataram



Vande Mataram!

Sujalam, suphalam, malayaja shitalam,
Shasyashyamalam, Mataram!

Vande Mataram!

Shubhrajyotsna pulakitayaminim,
Phullakusumita drumadala shobhinim,
Suhasinim sumadhura bhashinim,
Sukhadam varadam, Mataram!

Vande Mataram, Vande Mataram!

- Bankimchandra Chatterji

வந்தே மாதரம்

வந்தே மாதரம்!

சுஜலாம் சுபலாம் மலயஜ சீதலாம்
சஸ்யஷ்யாமலாம், மாதரம்!

வந்தே மாதரம்!

ஷுப்ரஜ்யோத்ஸ்னா புலகிதயாமினிம்,
புல்லகுசுமித த்ருமதல ஷோபினிம்
சுஹாஸினிம் சுமதரபாஷினிம்
சுகதாம் வரதாம், மாதரம்!
வந்தே மாதரம்! வந்தே மாதரம்!

- பங்கிம் சந்திர சாட்டர்ஜி

Our National Anthem / தேசிய கீதம்

Jana-gana-mana-adhinayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata
Panjaba-Sindhu-Gujarata-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
uchchala-jaladhi-taranga
Tava Subha name jage,
tava subha asisa mage,
gahe tava jaya-gatha.
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

- Rabindranath Tagore

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப ஸிந்த் குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹரிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே, தவ சுப ஆசிஸ
மாகே,
காஹே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே ஜய ஹே ஜய ஹே
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!
இரபிந்திரநாத் தாகூர்

Pledge | உறுதிமொழி

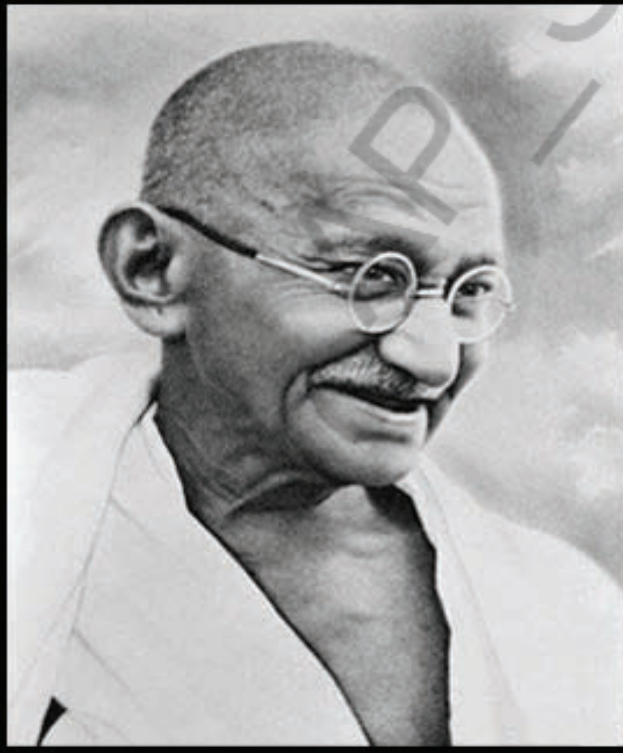
*India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.*

- Pydimarri Venkata Subba Rao

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்
பிறப்புகள்.!என் நாட்டை நான் பெரிதும் நேசிக்கிறேன். இந்நாட்டின் பழம்
பெருமைக்காகவும் பன்முக மரபுச் சிறப்பிற்காகவும் நான் பெருமிதம்
அடைகிறேன்.

இந்நாட்டின் பெருமைக்குத் தகுந்து விளங்கிட என்றும் பாடுபடுவேன்.
என்னுடைய பெற்றோர், ஆசிரியர்கள், எனக்கு வயதில் மூத்தோர்
அனைவரையும் மதிப்பேன். எல்லோரிடமும் அன்பும் மரியாதையும்
காட்டுவேன். விலங்குகளிடத்தில் கருணை காட்டுவேன்.

என் நாட்டிற்கும் என் மக்களுக்கும் உழைத்திட முனைந்து நிற்பேன்.
அவர்கள் நலமும் வளமும் பெறுவதிலே நான் என்றும் மகிழ்ச்சி காண்பேன்.
- பைடிமர்ரி வெங்கட சுப்பாராவ்



GANDHIJI'S TALISMAN

"I will give you a talisman. Whenever you are in doubt or when the self becomes too much with you, apply the following test :

Recall the face of the poorest and the weakest man whom you may have seen and ask yourself if the step you contemplate is going to be of any use to him. Will he gain anything by it ? Will it restore him to a control over his own life and destiny ? In other words, will it lead to Swaraj for the hungry and spiritually starving millions ?

Then you will find your doubts and your self melting away."

M.K. Gandhi

MATHEMATICS

கணிதம்

Class /வகுப்பு - IX

Semester (பருவம்) - I

Contents

பொருளடக்கம்

Chapter	Content	Month	Pg.No.
	Learning Outcomes கற்றல் விளைவுகள்		(i-iv)
Chapter 1 அத்தியாயம் 1	Number Systems எண் அமைப்புகள்	June-July	2
Chapter 2 அத்தியாயம் 2	Polynomials பல்லுறுப்புக்கோவைகள்	July	50
Chapter 3 அத்தியாயம் 3	Co-ordinate Geometry ஆயத்தொலைவு வடிவியல்	August	86
Chapter 4 அத்தியாயம் 4	Linear Equations in two variables இருமாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாடுகள்	August	110
Chapter 5 அத்தியாயம் 5	Introduction to Euclid's Geometry யூக்ளிதின் வடிவியல் அறிமுகம்	September	120
Chapter 6 அத்தியாயம் 6	Lines and Angles கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள்	September	138
Appendix.1 பின்னிணைப்பு-1	Proofs in Mathematics கணித நிரூபணங்கள்	October	166
	Answers விடைகள்		206



Teacher Corner



Student Corner

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
1	Number System	<i>After Completion of this lesson every student will be able to</i> • Acquire knowledge on rational and irrational numbers, their existence and operations on those numbers • Can place any number of rationals & irrationals between any two rationals and irrationals • Can convert decimals into p/q and vice versa. • Can rationalize the given irrational using rationalizing factor • Utilize the laws of exponents and Number Systems in real life situations effectively.
2	Polynomials	<i>After Completion of this lesson every student will be able to</i> • Distinguish between a multinomial and polynomial and can separate polynomials out of the given algebraic expressions • Find the co-efficient and degree of a polynomial • Factorise given polynomial with factor theorem • Find the remainder using remainder theorem • Utilize the concept of polynomials in real life situations and appreciate its significance
3	Co-ordinate geometry	<i>After Completion of this lesson every student will be able to</i> • Express what a cartesian plane is? and its history • Distinguish which point belongs to which quadrant • Plot any point on the cartesian plane • Name any point on the cartesian plane • Utilize the concept of co-ordinate geometry in real life situations and appreciate its significance
4	Linear equations in two variables	<i>After Completion of this lesson every student will be able to</i> • Express any linear equation in two variables in standard form • Find any number of solutions to any sort of linear equation in two variables • Check whether the given pair of co-ordinates is a solution to the given equation or not. • Utilize the concept of Linear Equations in two variables in real life situations and appreciate its significance

கற்றல் விளைவுகள்

வ. எண்	அத்தியாயத்தின் பெயர்	குறிப்பிட்ட கற்றல் விளைவுகள்
1	எண் அமைப்புகள்	இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை • விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்கள், அவற்றின் மீதான கணித செயற்பாடுகள் பற்றிய அறிவை பெறுவர். • ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களுக்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் இருக்கும் என தெரிந்துக் கொள்வர். • தசமங்களை வடிவில் மாற்ற முடியும் மேலும் அதனை மறுதலையாகவும் மாற்ற முடியும் என்பதை அறிவர். • கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்ணை விகிதப்படுத்தும் காரணியைக் கொண்டு விகிதமுறு எண்ணாக மாற்ற முடியும் என அறிவர். • அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழ்நிலைகளில் அடுக்குக் குறி விதிகள் மற்றும் எண் அமைப்புகளை திறம்பட பயன்படுத்துவர்.
2	பல்லுறுப்புக் கோவைகள்	இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை • கொடுக்கப்பட்ட இயற்கணித கோவைகளில் உறுப்புகளை பொறுத்தும் மாறிகளின் படிகளை பிரித்துக்காட்டுவர். • ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகம் மற்றும் படியை கண்டுபிடிப்பர். • கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவையை காரணி தேற்றத்தைக் கொண்டு காரணிப்படுத்துவர். • மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் மீதியை கண்டுபிடிப்பர். • அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழ்நிலைகளில் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் கருத்தை பயன்படுத்துதல் மற்றும் அதன் முக்கியத்துவத்தை பாராட்டுவர்.
3	ஆயத்தொலை வடிவியல்	இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை • கார்டீசியன் தளம் என்றால் என்ன என்பதையும் அதன் வரலாற்றையும் குறித்து தெரிவிப்பர். • எந்தெந்த புள்ளிகள் எந்தெந்த கால் பகுதிகளில் அமையும் என்று பிரித்தறிவர். • கார்டீசியன் தளத்தில் ஏதேனும் புள்ளியை குறிப்பர். • கார்டீசியன் தளத்தில் எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் பெயரிடுவர். • அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழ்நிலைகளில் ஆய்தொலை வடிவியல் கருத்தை பயன்படுத்துதல் மற்றும் அதன் முக்கியத்துவத்தை பாராட்டுவர்.
4	இரு மாறிகளை கொண்ட நேரிய சமன்பாடுகள்	இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை • ஏதேனும் இருமாறிகளை கொண்ட நேரியசமன்பாடுகளை பொதுவடிவத்தில் தெரிவிப்பர். • இருமாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டிற்கு தீர்வுகளை கண்டறிவர். • கொடுக்கப்பட்ட ஆய்தொலை புள்ளிகள், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு இல்லையா என்பதை சரிபார்ப்பர். • அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழ்நிலைகளில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாடுகள் கருத்தைப் பயன்படுத்தி அதன் முக்கியத்துவத்தை பாராட்டுவர்.

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
5	Introduction to Euclid's Geometry	<i>After Completion of this lesson every student will be able to</i> • Recognize various geometry related problems in real life which are inferences of Euclid's Geometry • Identify the axioms and postulates used in solving geometrical problems. • Utilize appropriately the axioms and postulates of Euclid in future endeavours of geometry. • Appreciate Euclid and Other Mathematicians who strived through out their life in pursuit of everlasting geometry.
6	Lines and Angles	<i>After Completion of this lesson every student will be able to</i> • Recognize different basic geometric shapes and can name them with their apt nomenclature • Identify and solve problems related to vertically opposite angles, linear pair of angles, adjacent angles etc., • Identify the parallel and intersecting lines in a plane and solve problems related to both the cases. • Utilize exactly the knowledge on different angles and different types of lines in exploring real life problems related to them. • Appreciate the concepts of Lines & Angles in real life usage

கற்றல் விளைவுகள்

வ. எண்	அத்தியாயத்தின் பெயர்	குறிப்பிட்ட கற்றல் விளைவுகள்
5	யூக்ளிடிஸ் வடிவியல் அறிமுகம்	இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை • அன்றாட வாழ்வில் வெவ்வேறு வடிவியல் சம்பந்தமான பிரச்சினைகளை யூக்ளிடிஸ் வடிவியல் கருத்துக்கள் என்று அடையாளப்படுத்துவர். • வடிவியல் கணக்குகளை தீர்ப்பதில் பயன்படுத்தப்படும் எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகளை கண்டறிவர். • வடிவியலின் எதிர்கால முயற்சியில் யூக்ளிடிஸ் எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகளை தகுந்த முறையில் பயன்படுத்துவர். • நிரந்தர வடிவியலை தேடுவதில் தங்கள் வாழ்நாள் முழுவதும் பாடுபட்ட யூக்ளிட் மற்றும் பிற கணிதவியலாளர்களைப் பாராட்டுவர்.
6	கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள்	இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை • வெவ்வேறு அடிப்படை வடிவியல் வடிவங்களை அடையாளம் காணுதல் மற்றும் அவற்றிற்கு பொருத்தமான பெயர்களை கூறுவர். • குத்தெதிர் கோணங்கள், கோட்டுக்கோண ஜோடிகள், அடுத்துள்ள கோணங்கள் தொடர்பான கணக்குகளை கண்டறிந்து தீர்வு காணுவர். • ஒரு தளத்தில் இருக்கும் இணை கோடுகள் மற்றும் வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளை கண்டறிதல் மேலும் இந்த இரண்டு வகைகள் சம்பந்தமான கணக்குகளை தீர்ப்பர். • அன்றாட வாழ்க்கை பிரச்சினைகளை ஆராய்வதில் வெவ்வேறு கோணங்கள் மற்றும் வெவ்வேறு வகையான கோடுகள் பற்றிய அறிவை சரியாக பயன்படுத்துவர். • அன்றாட வாழ்க்கைப் பயன்பாட்டில் கோடுகள் மற்றும் கோணங்களின் கருத்துக்களைப் பாராட்டுவர்.



NUMBER SYSTEMS

1.1 Introduction

In your earlier classes, you have learnt about the number line and how to represent various types of numbers on it (see Fig. 1.1).



Fig. 1.1 : The number line

Just imagine you start from zero and go on walking along this number line in the positive direction. As far as your eyes can see, there are numbers, numbers and numbers!

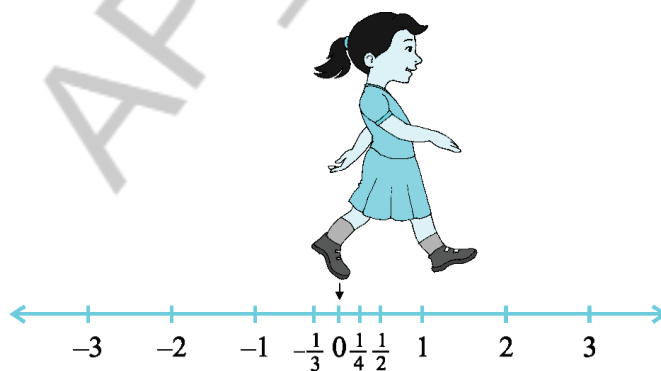


Fig. 1.2

Now suppose you start walking along the number line, and collecting some of the numbers. Get a bag ready to store them!

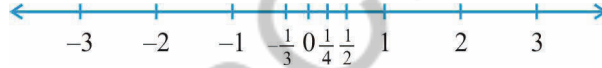


அத்தியாயம்-1

எண் அமைப்புகள்

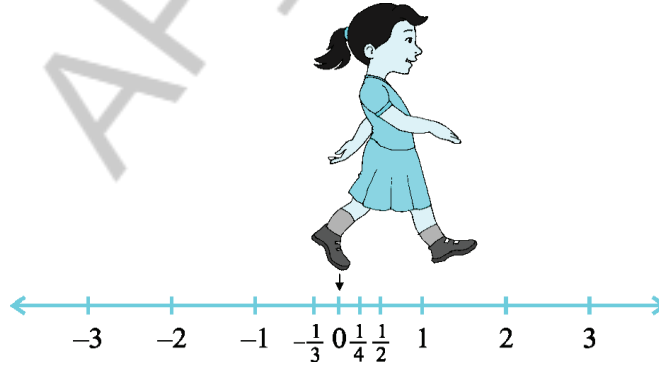
1.1 முன்னுரை

உன்னுடைய முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் எண் கோடு பற்றி அறிந்து இருப்பீர்கள். எண் கோட்டில் வெவ்வேறான எண்களை எப்படி குறிப்பது என்பதையும் அறிந்து இருப்பீர்கள்.



படம் 1.1 : எண்கோடு

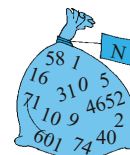
எண் கோட்டில் பூஜ்ஜியத்தில் இருந்து வலது புறமாக நடந்து செல்வதாக கற்பனை செய்து கொள். உன் கண்களுக்கு எட்டிய தூரம் வரை எண்கள், எண்கள் மேலும் எண்கள் மட்டுமே.



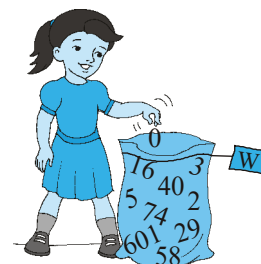
படம்.1.2

நீ எண் கோட்டின் மீது நடக்கும் போது சில எண்களை சேகரிப்பதாக இருந்தால் அவற்றை போட ஒரு பையை எடுத்துக்கொள்.

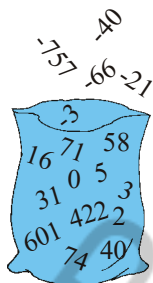
You might begin with picking up only natural numbers like 1, 2, 3, and so on. You know that this list goes on for ever. (Why is this true?) So, now your bag contains infinitely many natural numbers! Recall that we denote this collection by the symbol **N**.



Now turn and walk all the way back, pick up zero and put it into the bag. You now have the collection of *whole numbers* which is denoted by the symbol **W**.



Now, stretching in front of you are many, many negative integers. Put all the negative integers into your bag. What is your new collection? Recall that it is the collection of all *integers*, and it is denoted by the symbol **Z**.

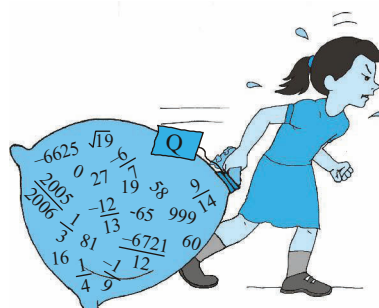
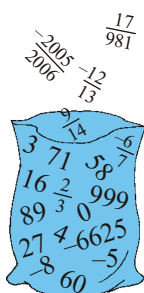


Why **Z** ?

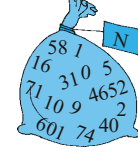
Z comes from the German word "zahlen", which means "to count".



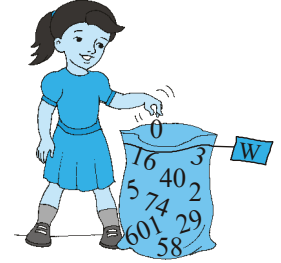
Are there some numbers still left on the line? Of course! There are numbers like $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, or even $\frac{-2005}{2006}$. If you put all such numbers also into the bag, it will now be the collection of *rational numbers*.



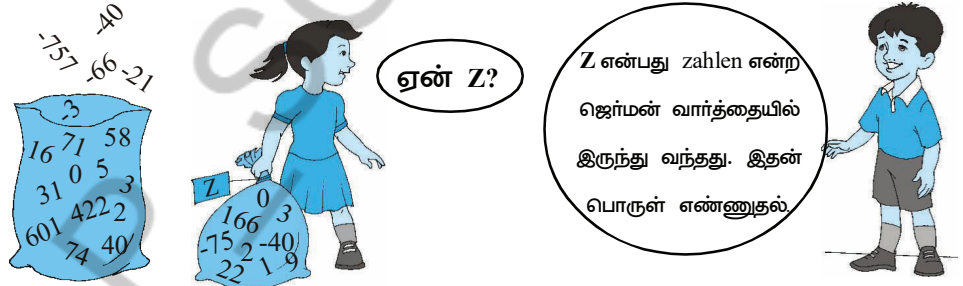
நீங்கள் 1,2,3 என்ற இயல் எண்களை மட்டுமே எடுத்து செல்வதாக கொள்வோம். இந்த பட்டியல் நீண்டு கொண்டே செல்வதை நீங்கள் கவனிக்கலாம்.(இது ஏன் உண்மை?) உன்னுடைய பையில் இப்போது எண்ணிக்கையற்ற இயல் எண்கள் இருப்பதை காணலாம். நாம் இந்த சேகரிப்பை N என்ற குறியீட்டில் குறிப்போம் என்பதை நினைவு கூறுவோம்.



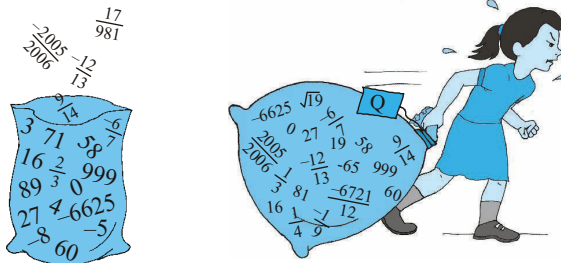
இப்போது எதிர் திசையில் திரும்பி நட. பூஜ்ஜியத்தை எடுத்து பையில் போடு. இந்த சேகரிப்பை நாம் முழு எண்கள் என்போம். இதை W என்ற குறியீட்டில் குறிப்போம்.



தற்போது உனக்கு முன்னால் அதிகபடியான குறை முழுக்கள் உள்ளன. எல்லா குறை முழுக்களையும் பையில் போடு. தற்போது உன்னுடைய புதிய சேகரிப்பு என்ன? இந்த சேகரிப்பு முழுக்கள் என்பதை நினைவு கூறு. மேலும் இதை Z என்ற குறியீட்டில் குறிப்போம்.



எண் கோட்டின் மீது வேறு ஏதாவது எண்கள் விடுபட்டு உள்ளனவா? ஆமாம். $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, அல்லது $\frac{-2005}{2006}$ போன்ற எண்கள் உள்ளன. இத்தகைய எண்களை கூட பையில் போட்டால், இப்போது பையில் உள்ள சேகரிப்பு விகிதமுறு எண்கள்.



The collection of rational numbers is denoted by **Q**. ‘Rational’ comes from the word ‘ratio’, and Q comes from the word ‘quotient’.

You may recall the definition of rational numbers:

A number ‘ r ’ is called a *rational number*, if it can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. (Why do we insist that $q \neq 0$?)

Notice that all the numbers now in the bag can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. For example, -25 can be written as $\frac{-25}{1}$; here $p = -25$ and $q = 1$. Therefore, the rational numbers also include the natural numbers, whole numbers and integers.

You also know that the rational numbers do not have a unique representation in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. For example, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, and so on. These are *equivalent rational numbers (or fractions)*. However, when we say that $\frac{p}{q}$ is a rational number, or when we represent $\frac{p}{q}$ on the number line, we assume that $q \neq 0$ and that p and q have no common factors other than 1 (that is, p and q are *co-prime*). So, on the number line, among the infinitely many fractions equivalent to $\frac{1}{2}$, we will choose $\frac{1}{2}$ to represent all of them.

Now, let us solve some examples about the different types of numbers, which you have studied in earlier classes.

Example 1 : Are the following statements true or false? Give reasons for your answers.

- (i) Every whole number is a natural number.
- (ii) Every integer is a rational number.
- (iii) Every rational number is an integer.

Solution : (i) False, because zero is a whole number but not a natural number.

(ii) True, because every integer m can be expressed in the form $\frac{m}{1}$, and so it is a rational number.

(iii) False, because $\frac{3}{5}$ is not an integer.

நாம் சேகரித்த விகிதமுறு எண்களை Q என குறிப்பர். விகிதமுறு என்னும் சொல் விகிதம் என்ற சொல்லில் இருந்தும் மேலும் Q என்பது ஈவு என்ற வார்த்தையில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது.

விகிதமுறு எண்களின் வரையரையை நினைவு கூர்க.

‘ r ’ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் ‘ r ’ ஐ $\frac{p}{q}$, வடிவில் இருக்க வேண்டும். இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$. (ஏன் நாம் $q \neq 0$ என்கிறோம்?)

இப்போது நாம் கவனித்தோம் எனில் பையில் உள்ள அனைத்து எண்களையும் $\frac{p}{q}$, வடிவில் எழுதலாம். இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள். மேலும் $q \neq 0$. எடுத்துக்காட்டாக -25 ஐ $\frac{-25}{1}$; என்று எழுதலாம். இங்கு $p = -25$ மற்றும் $q = 1$. எனவே இயல்எண்கள், முழு எண்கள் மற்றும் முழுக்கள் அனைத்தும் சேர்ந்ததே விகிதமுறு எண்கள் ஆகும்.

விகிதமுறு எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் p, q முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$ என்றும் ஒன்றை விட அதிகமான முறையில் நாம் எழுதலாம் என்பது உனக்கு தெரியுமா? எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
 $= \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, முதலியன. இவை சமமான விகிதமுறு எண்கள்(அல்லது) பின்னங்கள். $\frac{p}{q}$ ஐ விகிதமுறு எண் என்று கூறும்போது அல்லது $\frac{p}{q}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்கும்போது நாம் $q \neq 0$ என கருதுவோம். மேலும் p மற்றும் q விற்கு 1 ஐ தவிர வேறு பொது காரணிகள் இல்லை எனவே, (அதாவது p மற்றும் q சார்பகா எண்கள்) எண் கோட்டின் மீது $\frac{1}{2}$ க்கு சமமான எண்ணற்ற பின்னங்கள் உள்ளன. அவை அனைத்தும் $\frac{1}{2}$ யே குறிக்கிறது எனக் கொள்வோம். இப்போது நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுக்கொண்ட வெவ்வேறு வகையான எண்களுக்கு தொடர்பான சில கணக்குகளுக்கு கீழ்க்கண்ட எடுத்துகாட்டு மூலம் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்க்கண்ட வாக்கியங்கள் சரியா? தவறா? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

- ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் இயல் எண் ஆகும்.
- ஒவ்வொரு முழுக்களும் விகிதமுறு எண் ஆகும்.
- ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முழுக்கள் ஆகும்.

தீர்வு: (i) தவறு. ஏனெனில் 0 என்பது முழு எண். ஆனால் இயல்எண் அல்ல.

(ii) உண்மை. ஏனெனில் ஒவ்வொரு முழுக்கள் m ஐ $\frac{m}{1}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். எனவே அது விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(iii) தவறு. ஏனெனில் $\frac{3}{5}$ என்பது முழுக்கள் அல்ல.

Example 2 : Find five rational numbers between 1 and 2.

We can approach this problem in at least two ways.

Solution 1 : Recall that to find a rational number between r and s , you can add r and s and divide the sum by 2, that is $\frac{r+s}{2}$ lies between r and s . So, $\frac{3}{2}$ is a number between 1 and 2. You can proceed in this manner to find four more rational numbers between 1 and 2. These four numbers are $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ and $\frac{7}{4}$.

Solution 2 : The other option is to find all the five rational numbers in one step. Since we want five numbers, we write 1 and 2 as rational numbers with denominator 5 + 1, i.e., $1 = \frac{6}{6}$ and $2 = \frac{12}{6}$. Then you can check that $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ and $\frac{11}{6}$ are all rational numbers between 1 and 2. So, the five numbers are $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ and $\frac{11}{6}$.

Remark : Notice that in Example 2, you were asked to find five rational numbers between 1 and 2. But, you must have realised that in fact there are infinitely many rational numbers between 1 and 2. In general, **there are infinitely many rational numbers between any two given rational numbers.**

Let us take a look at the number line again. Have you picked up all the numbers? Not, yet. The fact is that there are infinitely many more numbers left on the number line! There are gaps in between the places of the numbers you picked up, and not just one or two but infinitely many. The amazing thing is that there are infinitely many numbers lying between any two of these gaps too!

So we are left with the following questions:

1. What are the numbers, that are left on the number line, called?
2. How do we recognise them? That is, how do we distinguish them from the rationals (rational numbers)?

These questions will be answered in the next section.



எடுத்துக்காட்டு 2 : 1 மற்றும் 2 க்கு இடையே உள்ள ஐந்து விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடி.

இந்த கணக்கை நாம் குறைந்த பட்சம் இரண்டு முறைகளில் தீர்க்கலாம்.

தீர்வு 1: r மற்றும் s என்ற இரு எண்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதமுறு எண்ணை கண்டுபிடிக்க, r மற்றும் s ஐ கூட்டி இரண்டால் வகுக்க வேண்டும் என்பதை நினைவு கூர்க. அதாவது $\frac{r+s}{2}$ என்பது r க்கும் s க்கும் இடையே உள்ளது. எனவே $\frac{3}{2}$ என்பது 1 க்கும் 2 க்கும் இடையே உள்ள எண். இதே முறையால் 1 மற்றும் 2 க்கு இடையே நான்கு விகிதமுறு எண்களை நாம் கண்டுபிடிக்கலாம். அந்த நான்கு விகிதமுறு எண்கள் $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ மற்றும் $\frac{7}{4}$ ஆகும்.

தீர்வு 2 : ஒரே படியில் ஐந்து விகிதமுறு எண்களையும் கண்டுபிடிப்பது மற்றொரு முறை. நாம் முதலில் 1 மற்றும் 2 என்ற எண்களை $5+1=6$ ஐ தொகுதியாக கொண்ட விகிதமுறு எண்களாக எழுதுவோம். அதாவது $1 = \frac{6}{6}$ மேலும் $2 = \frac{12}{6}$. இப்போது நாம் கவனித்தோமானால்

$\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ மேலும் $\frac{11}{6}$ என்பன 1 மற்றும் 2 க்கு இடையே உள்ள விகிதமுறு எண்களாகும்.

குறிப்பு: எடுத்துக்காட்டு 2ல் நாம் 1 மற்றும் 2 க்கு இடையே உள்ள ஐந்து விகிதமுறு எண்களை கண்டறிந்தோம். ஆனால் உண்மையில் 1 மற்றும் 2 க்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளதை நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள். பொதுவாக ஏதாவது இரண்டு எண்களுக்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருக்கும்.

எண் கோட்டை மற்றொரு முறை கவனிப்போம். நீங்கள் அனைத்து எண்களையும் எடுத்து கொண்டீர்களா? இல்லை. எண் கோட்டில் மேலும் எண்ணற்ற எண்கள் விடுபட்டு உள்ளன. நீங்கள் எடுத்து கொண்ட எண்களுக்கு இடையே இடைவெளி உள்ளது. அவை ஒன்று அல்லது இரண்டு அல்ல எண்ணற்றவை உள்ளன. இதில் ஆச்சரியமான விசயம் என்னவென்றால் இரண்டு எண்களுக்கும் இடையே உள்ள இடைவெளியில் எண்ணற்ற எண்கள் இருக்கிறது.

நம்மிடையே மேலும் கீழே கொடுக்கப்பட்ட சில கேள்விகள் மீதமுள்ளது:

1. எண் கோட்டின் மீது மீதமுள்ள எண்களை என்னவென்று அழைப்பர்?
2. நாம் அவற்றை எவ்வாறு குறிப்பிடுவோம்? அவற்றை விகிதமுறு எண்களில் இருந்து எப்படி வேறுபடுத்தி பார்ப்பது?

இந்த வினாக்களுக்கு அடுத்த பகுதியில் விடை கிடைக்கும்.



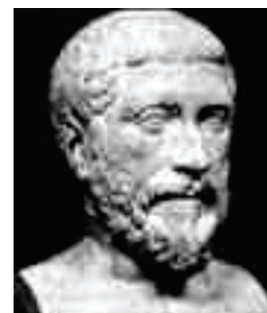
EXERCISE 1.1

1. Is zero a rational number? Can you write it in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$?
2. Find six rational numbers between 3 and 4.
3. Find five rational numbers between $\frac{3}{5}$ and $\frac{4}{5}$.
4. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers.
 - (i) Every natural number is a whole number.
 - (ii) Every integer is a whole number.
 - (iii) Every rational number is a whole number.

1.2 Irrational Numbers

We saw, in the previous section, that there may be numbers on the number line that are not rationals. In this section, we are going to investigate these numbers. So far, all the numbers you have come across, are of the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. So, you may ask: are there numbers which are not of this form? There are indeed such numbers.

The Pythagoreans in Greece, followers of the famous mathematician and philosopher Pythagoras, were the first to discover the numbers which were not rationals, around 400 BC. These numbers are called *irrational numbers (irrationals)*, because they cannot be written in the form of a ratio of integers. There are many myths surrounding the discovery of irrational numbers by the Pythagorean, Hippacus of Croton. In all the myths, Hippacus has an unfortunate end, either for discovering that $\sqrt{2}$ is irrational or for disclosing the secret about $\sqrt{2}$ to people outside the secret Pythagorean sect!



Pythagoras
(569 BCE – 479 BCE)
Fig. 1.3

Let us formally define these numbers.

A number 's' is called *irrational*, if it cannot be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

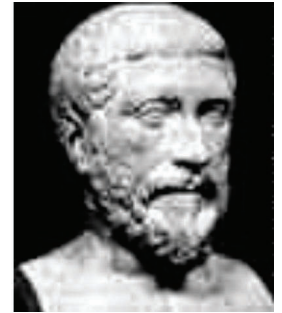
பயிற்சி 1.1

1. பூஜ்ஜியம் என்பது விகிதமுறு எண்ணா? இதை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் உன்னால் எழுத முடியுமா? இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.
2. 3 மற்றும் 4 க்கு இடையே உள்ள ஐந்து விகிதமுறு எண்களை எழுதுக.
3. $\frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{4}{5}$ க்கு இடையே உள்ள ஐந்து விகிதமுறு எண்களை எழுதுக.
4. கீழ்க்கண்ட கூற்றுக்கள் சரியா (அ) தவறா? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
 - (i) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண்.
 - (ii) ஒவ்வொரு முழுக்களும் ஒரு முழு எண்.
 - (iii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு எண்.

1.2 விகிதமுறா எண்கள் :

முந்தைய பகுதியில் நாம் எண் கோட்டின் மீது உள்ள எண்களில் சில விகிதமுறு எண்கள் அல்ல எனப் பார்த்தோம். இந்த பகுதியில் நாம் அந்த எண்களை பற்றி ஆராய்வோம். இது வரை நாம் பார்த்த எண்கள் அனைத்தும் $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் இருந்தன. இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$. இந்த வடிவில் இல்லாத எண்களும் உள்ளனவா? என நீங்கள் கேட்கலாம். அத்தகைய எண்களும் உள்ளன.

BC 400 வருடங்களுக்கு முன்பே பிதாகரஸ் என்ற கிரேக்க கணித மேதை மேலும் தத்துவ ஞானி முதன் முதலில் விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத எண்களை கண்டுபிடித்தார். இந்த எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் என அழைக்கப்பட்டன. ஏனென்றால் இந்த எண்களை முழுக்களில் விகித வடிவில் எழுத முடியாது. இந்த கண்டுபிடிப்பு குறித்து பல கட்டு கதைகள் உள்ளன. ஹிப்பாகஸ் என்பவர் $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என கண்டுபிடித்தது குறித்தோ அல்லது $\sqrt{2}$ என்பதை ரகசிய பிதாகரஸ் குழுவிற்கு வெளியே இருந்த மற்ற இனத்தவருக்கு தெரிவித்தது குறித்தோ அவருடைய வாழ்க்கை துரதிஷ்டவசமான முடிவிற்கு வந்ததாக கதைகள் உண்டு.



பிதாகரஸ்
(569 BCE – 479 BCE)

படம். 1.3

இந்த எண்களை பற்றிய வரையரையை நாம் இப்போது பார்ப்போம்.

's' என்ற ஓர் எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுத முடியாவிட்டால் அந்த எண் விகிதமுறா எண் எனப்படும். இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$.

You already know that there are infinitely many rationals. It turns out that there are infinitely many irrational numbers too. Some examples are:

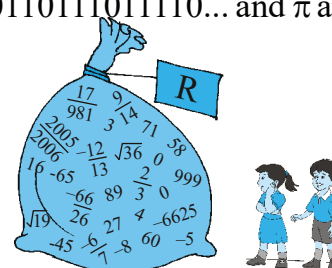
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110\dots$$

Remark : Recall that when we use the symbol $\sqrt{\quad}$, we assume that it is the positive square root of the number. So $\sqrt{4} = 2$, though both 2 and -2 are square roots of 4.

Some of the irrational numbers listed above are familiar to you. For example, you have already come across many of the square roots listed above and the number π .

The Pythagoreans proved that $\sqrt{2}$ is irrational. Later in approximately 425 BC, Theodorus of Cyrene showed that $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ and $\sqrt{17}$ are also irrationals. Proofs of irrationality of $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, etc., shall be discussed in Class X. As to π , it was known to various cultures for thousands of years, it was proved to be irrational by Lambert and Legendre only in the late 1700s. In the next section, we will discuss why $0.10110111011110\dots$ and π are irrational.

Let us return to the questions raised at the end of the previous section. Remember the bag of rational numbers. If we now put all irrational numbers into the bag, will there be any number left on the number line? The answer is no! It turns out that the collection of all rational numbers and irrational numbers together make up what we call the collection of *real numbers*, which is denoted by **R**. Therefore, a real number is either rational or irrational. So, we can say that **every real number is represented by a unique point on the number line. Also, every point on the number line represents a unique real number.** This is why we call the number line, the *real number line*.



R. Dedekind (1831-1916)

Fig. 1.4

In the 1870s two German mathematicians, Cantor and Dedekind, showed that : Corresponding to every real number, there is a point on the real number line, and corresponding to every point on the number line, there exists a unique real number.



G. Cantor (1845-1918)

Fig. 1.5

எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்பது நமக்கு தெரியும். இதே போல் எண்ணற்ற விகிதமுறா எண்களும் உள்ளன. அவற்றில் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

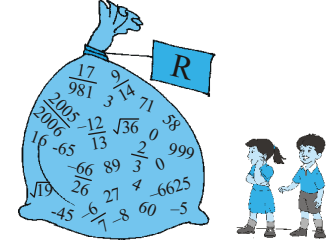
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

குறிப்பு: $\sqrt{\quad}$, என்ற குறியீட்டை பயன்படுத்தும்போது அது ஒரு எண்ணின் மிகை வர்க்க மூலம் என உணகித்து கொள்வோம். எனவே $\sqrt{4} = 2$ என்றாலும் -2 என்பன 4 ன் வர்க்க மூலங்கள் ஆகும்.

மேற்கண்ட விகிதமுறா எண்கள் சில நீ அறிந்தவையே. எடுத்துக்காட்டாக π என்ற எண்ணும் மேற்கண்ட வர்க்க மூலங்களும் நீ ஏற்கனவே அறிந்தவையே.

பிதாகரஸ் $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபித்தார். பிறகு சுமார் 425 BC வருடத்தில் சைரேனே வின் தியோடோரஸ் என்பவர் $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ மற்றும் $\sqrt{17}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் எனக் காட்டினார். $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் என்ற நிரூபணத்தை நீங்கள் 10ம் வகுப்பில் படிப்பீர்கள். பல கலாச்சாரங்களில் π என்பது விகிதமுறா எண் என்று அறிந்திருந்த போதிலும் 1700 வருட கடைசியில் லாம்பர்ட் மற்றும் லெஜண்ட்ரே என்பவர்கள் π என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபித்தனர். அடுத்த பகுதியில் 0.10110111011110... மற்றும் π என்பன ஏன் விகிதமுறா எண்கள் என விவாதிப்போம்.

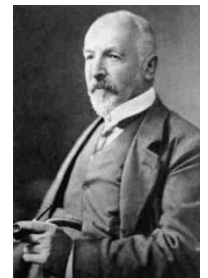
இதற்கு முந்தைய பகுதியில் நாம் கேட்ட கேள்விக்கு வருவோம். விகிதமுறு எண்கள் உள்ள பையை நினைவு கூர்க. இப்போது நாம் அனைத்து விகிதமுறா எண்களையும் பையில் போடுவோம். இன்னும் எண் கோட்டில் ஏதாவது எண்கள் விடுபட்டு உள்ளனவா? விடை இல்லை என்பதாகும். விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேகரிப்பு மெய் எண்களின் சேகரிப்பாக உள்ளது. இதை R எனக் குறிப்போம். எனவே ஒரு மெய் எண் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ (அ) விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும். எனவே ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் எண் கோட்டின் மீது ஒரு தனித்துவமான புள்ளியின் மீது குறிக்கப்பட்டிருக்கும். அதே போல் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்துவமான மெய் எண்ணை குறிக்கும். எனவே நாம் எண் கோட்டை மெய் எண் கோடு என்கிறோம்.



R. டேடேகைண்டு (1831-1916)

படம் 1.4

1870 ல் டெடேகைண்டு மற்றும் கேண்டர் என்ற இரு ஜெர்மானிய கணித மேதைகள் கீழ்க்கண்ட உண்மையை கண்டறிந்தனர்: “ஒவ்வொரு மெய் எண்ணுக்கும் மெய் எண் கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளி உள்ளது. இதே போல் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் தனித்துவமான ஒரு மெய் எண் உள்ளது.”



G. கேண்டர் (1845-1918)

படம் 1.5

Let us see how we can locate some of the irrational numbers on the number line.

Example 3 : Locate $\sqrt{2}$ on the number line.

Solution : It is easy to see how the Greeks might have discovered $\sqrt{2}$. Consider a square OABC, with each side 1 unit in length (see Fig. 1.6). Then you can see by the Pythagoras theorem that $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. How do we represent $\sqrt{2}$ on the number line? This is easy. Transfer Fig. 1.6 onto the number line making sure that the vertex O coincides with zero (see Fig. 1.7).

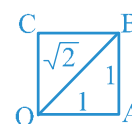


Fig. 1.6

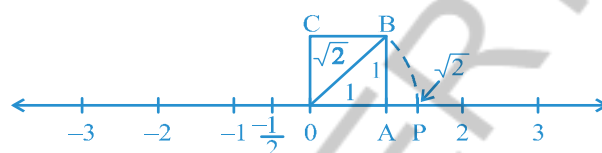


Fig. 1.7

We have just seen that $OB = \sqrt{2}$. Using a compass with centre O and radius OB, draw an arc intersecting the number line at the point P. Then P corresponds to $\sqrt{2}$ on the number line.

Example 4 : Locate $\sqrt{3}$ on the number line.

Solution : Let us return to Fig. 1.7.

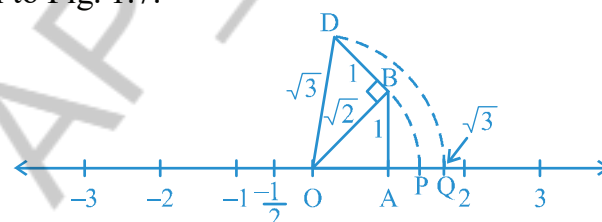


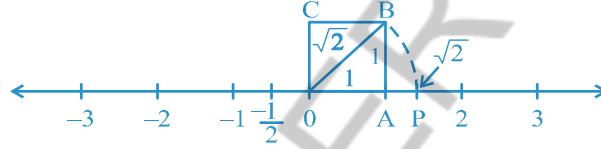
Fig. 1.8

Construct BD of unit length perpendicular to OB (as in Fig. 1.8). Then using the Pythagoras theorem, we see that $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Using a compass, with centre O and radius OD, draw an arc which intersects the number line at the point Q. Then Q corresponds to $\sqrt{3}$.

இப்போது எண் கோட்டின் மீது விகிதமுறா எண்களை எவ்வாறு குறிப்பது எனக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\sqrt{2}$ ஐ எண் கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டு.

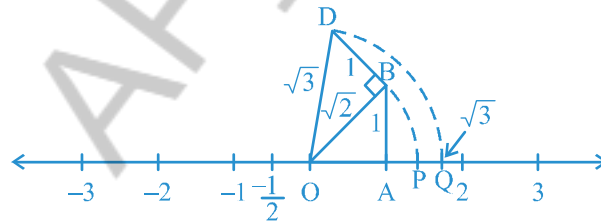
தீர்வு : கிரேக்கர்கள் $\sqrt{2}$ ஐ எப்படி கண்டுபிடித்தார்கள் என்பதை காண்பது மிகவும் சுலபமாகும். ஒவ்வொரு பக்கமும் 1 அலகு நீளமுள்ள OABC என்ற ஒரு சதுரத்தை எடுத்து கொள். (படம் 1.6). பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{2}$ ஐ எப்படி குறிப்பது? இது மிகவும் எளிதானது. படம் 1.6 ல் உள்ள உச்சி 'O' எண் கோட்டில் உள்ள O ல் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தும் படி (படம் 1.7) ல் உள்ளவாறு அமை.



$OB = \sqrt{2}$ என நமக்கு தெரியும். ஒரு கவராயத்தை பயன்படுத்தி O வை மையமாக வைத்து OB ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வில் எண் கோட்டில் P ல் வெட்டும்படி வரைக. இப்போது P என்ற புள்ளி எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{2}$ ஐ குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\sqrt{3}$ ஐ எண் கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டு.

தீர்வு : படம் 1.7 ஐ ஒரு முறை நினைவு கூர்க.



OB க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு BD என்ற கோட்டை (படம் 1.8ல் உள்ளவாறு) வரைக. இப்போது பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ஒரு கவராயத்தை பயன்படுத்தி O ஐ மையமாக வைத்து OD ஐ ஆரமாக கொண்ட ஒரு வில் எண் கோட்டில் Q ல் வெட்டும் படி வரைக. இப்போது Q என்ற புள்ளி எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{3}$ ஐ குறிக்கிறது.

In the same way, you can locate $\sqrt{n}$ for any positive integer n , after $\sqrt{n-1}$ has been located.

EXERCISE 1.2

- State whether the following statements are true or false. Justify your answers.
 - Every irrational number is a real number.
 - Every point on the number line is of the form $\sqrt{m}$, where m is a natural number.
 - Every real number is an irrational number.
- Are the square roots of all positive integers irrational? If not, give an example of the square root of a number that is a rational number.
- Show how $\sqrt{5}$ can be represented on the number line.
- Classroom activity (Constructing the ‘square root spiral’)** : Take a large sheet of paper and construct the ‘square root spiral’ in the following fashion. Start with a point O and draw a line segment OP_1 of unit length. Draw a line segment P_1P_2 perpendicular to OP_1 of unit length (see Fig. 1.9). Now draw a line segment P_2P_3 perpendicular to OP_2 . Then draw a line segment P_3P_4 perpendicular to OP_3 . Continuing in this manner, you can get the line segment $P_{n-1}P_n$ by drawing a line segment of unit length perpendicular to OP_{n-1} . In this manner, you will have created the points $P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, and joined them to create a beautiful spiral depicting $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

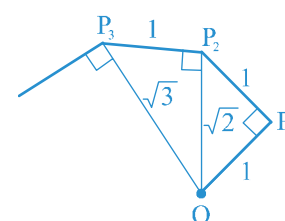


Fig. 1.9 : Constructing square root spiral

1.3 Real Numbers and their Decimal Expansions

In this section, we are going to study rational and irrational numbers from a different point of view. We will look at the decimal expansions of real numbers and see if we can use the expansions to distinguish between rationals and irrationals. We will also explain how to visualise the representation of real numbers on the number line using their decimal expansions. Since rationals are more familiar to us, let us start with them. Let us take three examples : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$.

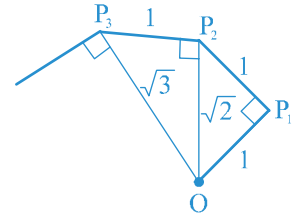
Pay special attention to the remainders and see if you can find any pattern.

இதே முறையில் $\sqrt{n}$ என்ற எந்த ஒரு விகிதமுறா எண்ணையும் எண் கோட்டின் மீது குறிக்கலாம். $\sqrt{n-1}$ ஐ எண்கோட்டின் மீது குறித்த பின்னர் $\sqrt{n}$ ஐ குறிக்கலாம்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்க்கண்ட கூற்றுகள் சரியா? தவறா? எனக்கூறுக. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
 - (i) ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணும் ஒரு மெய் எண்.
 - (ii) எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $\sqrt{m}$, என்ற வடிவில் உள்ளது. இங்கு m ஓர் இயல் எண்.
 - (iii) ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் ஒரு விகிதமுறா எண்.
2. மிகை எண்களின் வாக்க மூலம் ஒவ்வொன்றும் விகிதமுறா எண்ணா? இல்லை எனில் விகிதமுறா எண்ணாக உள்ள வாக்கமூல எண் ஒன்றை கூறு.
3. எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{5}$ ஐ குறித்து காட்டு.
4. வகுப்பறை செயல்பாடு: (“வாக்க மூல சுருளை வரைதல்”):

பெரிய அளவிலான வெள்ளை தாளை எடுத்து கொண்டு அதில் வாக்க மூல சுருளை பின்வருமாறு வரைக. O புள்ளியில் இருந்து ஆரம்பித்து 1 அலகு நீளமுள்ள கோட்டு துண்டு OP_1 ஐ வரைக. OP_1 க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு நீளமுள்ள கோட்டு துண்டு P_1P_2 ஐ வரைக(படம் 1.9). இப்போது OP_2 க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு நீளமுள்ள கோட்டு துண்டு P_2P_3 ஐ வரைக. பிறகு OP_3 க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு நீளமுள்ள கோட்டு துண்டு P_3P_4 ஐ வரைக. இவ்வாறே தொடர்ந்தால் OP_{n-1} க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு நீளமுள்ள $P_{n-1}P_n$ கோட்டு துண்டு கிடைக்கும். இந்த முறையில் நாம் $P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, புள்ளிகளை உருவாக்கி அவற்றை இணைத்தால் அழகான சுருள் வடிவில் $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ ஐ காட்டலாம்.



படம் 1.9 : வாக்க மூல சுருளை வரைதல்

1.3 மெய் எண்களும் அவற்றின் தசம பின்ன வடிவமும்

இந்த பகுதியில் விகிதமுறா எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களை வேறொரு கோணத்தில் படிக்க போகிறோம். மெய் எண்களின் தசம பின்ன வடிவம் பற்றியும் அந்த தசம பின்னம் விகிதமுறா மற்றும் விகிதமுறா எண்களை வேறுபடுத்தி பார்ப்போம். மெய் எண்களின் தசம பின்னத்தைப் பயன்படுத்தி எண் கோட்டின் மீது மெய் எண்களை எவ்வாறு குறிப்பது என்று விளக்குவோம். விகிதமுறா எண்கள் நமக்கு நன்கு தெரியும் எனவே அவற்றில் இருந்து

தொடங்குவோம். இப்போது மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம். $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$. வகுக்கும் போது உண்டாகும் மீதிகளை கூர்ந்து கவனி. அவற்றில் இருந்து ஏதாவது அமைப்பை உருவாக்க முடியுமா? எனப்பார்.

Example 5 : Find the decimal expansions of $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ and $\frac{1}{7}$.

Solution :

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 7.0} \\ \underline{64} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 1.0} \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$$

Remainders : 1, 1, 1, 1, 1... Remainders : 6, 4, 0 Remainders : 3, 2, 6, 4, 5, 1,
Divisor : 3 Divisor : 8 3, 2, 6, 4, 5, 1,...
Divisor : 7

What have you noticed? You should have noticed at least three things:

- The remainders either become 0 after a certain stage, or start repeating themselves.
- The number of entries in the repeating string of remainders is less than the divisor (in $\frac{10}{3}$ one number repeats itself and the divisor is 3, in $\frac{1}{7}$ there are six entries 326451 in the repeating string of remainders and 7 is the divisor).
- If the remainders repeat, then we get a repeating block of digits in the quotient (for $\frac{10}{3}$, 3 repeats in the quotient and for $\frac{1}{7}$, we get the repeating block 142857 in the quotient).

எடுத்துக்காட்டு 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ மேலும் $\frac{1}{7}$ ன் தசம எண் வடிவில் எழுதுக.

தீர்வு :

$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3.333...} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \overline{) 0.875} \\ 7.0 \\ \underline{64} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \overline{) 0.142857...} \\ 1.0 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$
மீதி : 1, 1, 1, 1, 1...	மீதி: 6, 4, 0	மீதி : 3, 2, 6, 4, 5, 1,
வகுக்கும் எண் : 3	வகுக்கும் எண் : 8	3, 2, 6, 4, 5, 1,...
		வகுக்கும் எண் : 7

நீ அறிந்தது என்ன? நமக்கு குறைந்தபட்சம் மூன்று விசயங்கள் புலப்படுகின்றன.

- ஒரு குறிப்பிட்ட படிகளுக்கு பின்னர் மீதி '0' ஆக வருகிறது (அல்லது) தொடர்ந்து செல்கிறது.
- தொடர்ந்து செல்லும் வகுத்தலில் சுழல் எண்களின் எண்ணிக்கை வகுக்கும் எண்ணை விட குறைவாக இருக்கும். ($\frac{10}{3}$ ல் 1 என்ற ஒரு எண் மட்டும் சுழல்கிறது. இதில் வகுக்கும் எண் 3. $\frac{1}{7}$ ல் 326451 என்ற 6 எண்கள் சுழல்கிறது இதில் வகுக்கும் எண் 7).
- மீதி மீண்டும் மீண்டும் வந்தால் அதற்கேற்ப ஈவில் எண்கள் தொடர்ந்து வந்து கொண்டே இருக்கும். ($\frac{10}{3}$ ல் ஈவு 3 மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது. ஆனால் $\frac{1}{7}$ ல் ஈவு 1,4,2,8,5,7... என்று வருகிறது)

Although we have noticed this pattern using only the examples above, it is true for all rationals of the form $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$). On division of p by q , two main things happen – either the remainder becomes zero or never becomes zero and we get a repeating string of remainders. Let us look at each case separately.

Case (i) : The remainder becomes zero

In the example of $\frac{7}{8}$, we found that the remainder becomes zero after some steps and the decimal expansion of $\frac{7}{8} = 0.875$. Other examples are $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$. In all these cases, the decimal expansion terminates or ends after a finite number of steps. We call the decimal expansion of such numbers *terminating*.

Case (ii) : The remainder never becomes zero

In the examples of $\frac{10}{3}$ and $\frac{1}{7}$, we notice that the remainders repeat after a certain stage forcing the decimal expansion to go on for ever. In other words, we have a repeating block of digits in the quotient. We say that this expansion is non-terminating recurring. For example, $\frac{10}{3} = 3.3333\dots$ and $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\dots$

The usual way of showing that 3 repeats in the quotient of $\frac{10}{3}$ is to write it as $3.\bar{3}$. Similarly, since the block of digits 142857 repeats in the quotient of $\frac{1}{7}$, we write $\frac{1}{7}$ as $0.\overline{142857}$, where the bar above the digits indicates the block of digits that repeats. Also $3.57272\dots$ can be written as $3.5\overline{72}$. So, all these examples give us *non-terminating recurring (repeating)* decimal expansions.

Thus, we see that the decimal expansion of rational numbers have only two choices: either they are terminating or non-terminating recurring.

Now suppose, on the other hand, on your walk on the number line, you come across a number like 3.142678 whose decimal expansion is terminating or a number like 1.272727... that is, $1.\overline{27}$, whose decimal expansion is non-terminating recurring, can you conclude that it is a rational number? The answer is yes!

ஒரு சில விகிதமுறு எண்களுக்கு இந்த அமைப்பு இருப்பதை உதாரணமாக பார்த்தோம். ஆனால் $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) என்ற வடிவில் உள்ள எல்லா விகிதமுறு எண்களுக்கும் இந்த அமைப்பு பொருந்தும். p ஐ q ல் வகுக்கும் போது இரண்டு முக்கிய நிகழ்வுகள் நடைபெறுகிறது. அவை ஒன்று மீதி 0 வருகிறது அல்லது எப்போதும் மீதி 0 வருவது இல்லை மேலும் மீதி தொடர்ந்து வருகிறது. இந்த ஒவ்வொரு நிகழ்வையும் தனித்தனியாக ஆராய்வோம்.

நிகழ்வு (i) : மீதி 0 வருவது

எடுத்துக்காட்டு $\frac{7}{8}$ ல் சில படிக்கு பிறகு மீதி 0 வருகிறது. மேலும் $\frac{7}{8}$ ன் தசம எண் வடிவம் 0.875 அடுத்த எடுத்துக்காட்டுகள் $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$. இந்த எல்லா நிகழ்வுகளிலும் தசம எண்கள் சில படிக்கு பிறகு முடிவுக்கு வருகிறது. இத்தகைய எண்களின் தசம பின்னத்தை முடிவறு தசம பின்னம் என்கிறோம்.

நிகழ்வு (ii) : மீதி எப்போதும் 0 வராது

$\frac{10}{3}$ மற்றும் $\frac{1}{7}$ போன்ற எடுத்துக்காட்டுகளில் மீதி என்பது திரும்ப திரும்ப வந்து தசம எண்ணை தொடர செய்கிறது. அதாவது ஈவில் தொடர்ந்து எண்கள் வந்து கொண்டே இருக்கின்றன. இந்த விரிவாக்கத்தை நாம் முடிவறா சுழல் தசம எண் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{10}{3} = 3.3333...$ மேலும் $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$

$\frac{10}{3}$ ல் 3 என்ற எண் ஈவில் தொடர்ந்து வருவதால் நாம் இதை $3.\bar{3}$ என குறிக்கிறோம். இதே

போல் $\frac{1}{7}$ ல் ஈவு பகுதியில் 142857 என்ற தொகுப்பு தொடர்ந்து வருவதால் அதை $0.\overline{142857}$ என எழுதுகிறோம். எண்களின் மேலே உள்ள கோடு அந்த எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் தொடர்ந்து வருவதை குறிக்கிறது. $3.57272...$ என்பதை $3.\overline{572}$ எனக் குறிக்கலாம். மேற்கண்டவை முடிவறா தசம பின்னத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

எனவே விகிதமுறு எண்களின் தசம எண் வடிவம் என்பது முடிவறு தசம எண் அல்லது முடிவறா சுழல் தசம எண் என்ற இரண்டு நிலையில் உள்ளன.

நாம் இப்போது எண் கோட்டின் மீது நடக்கும் போது 3.142678 என்ற எண்ணை கடந்து வந்தால் இதன் தசம எண் முடிவறுவதால் இதை விகிதமுறு எண் எனக் கொள்ளலாம். $1.272727...$ இது $1.\overline{27}$ என்ற எண்ணை கடந்து வந்தால் இதன் தசம எண் முடிவறாமல் மீண்டும் மீண்டும் வருவதாக இருப்பதால் இதையும் விகிதமுறு எண் எனச் சொல்லலாமா? எனில் விடை கூறலாம்.

We will not prove it but illustrate this fact with a few examples. The terminating cases are easy.

Example 6 : Show that 3.142678 is a rational number. In other words, express 3.142678 in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : We have $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, and hence is a rational number.

Now, let us consider the case when the decimal expansion is non-terminating recurring.

Example 7 : Show that $0.3333... = 0.\bar{3}$ can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : Since we do not know what $0.\bar{3}$ is, let us call it 'x' and so

$$x = 0.3333...$$

Now here is where the trick comes in. Look at

$$10x = 10 \times (0.3333...) = 3.333...$$

Now, $3.3333... = 3 + x$, since $x = 0.3333...$

Therefore, $10x = 3 + x$

Solving for x , we get

$$9x = 3, \text{ i.e., } x = \frac{1}{3}$$

Example 8 : Show that $1.272727... = 1.\overline{27}$ can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : Let $x = 1.272727...$ Since two digits are repeating, we multiply x by 100 to get

$$100x = 127.2727...$$

So, $100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

Therefore, $100x - x = 126$, i.e., $99x = 126$

$$\text{i.e., } x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

இதை நாம் நிரூபிக்க முடியாது. ஆனால் சில உதாரணங்கள் மூலம் இதை விவரிக்கலாம். முடிவுறு தசமங்களில் இது சுலபம்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : 3.142678 ஓர் விகிதமுறு எண் எனக்காட்டு. வேறு விதமாக சொல்வதானால் 3.142678 ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள். மேலும் $q \neq 0$.

தீர்வு : $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, ஆகும். இது ஒரு விகிதமுறு எண்.

நாம் இப்போது முடிவுறா சுழல் தசம பின்னத்தை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : $0.3333... = 0.\bar{3}$ ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$.

தீர்வு : நமக்கு $0.\bar{3}$ ன் மதிப்பு தெரியாது. எனவே இதை ' x ' எனக் கொள்வோம்.

$$x = 0.\bar{3} = 0.3333... \text{ இங்கு ஒரு இலக்கம் சுழல்கிறது.}$$

$$\text{எனவே } x \text{ ஐ } 10 \text{ ஆல் பெருக்க } 10x = 10 \times (0.3333...) = 3.3333...$$

$$\text{இப்போது, } 3.3333... = 3 + x, \text{ } x = 0.3333... \text{ எனவே}$$

$$10x = 3 + x$$

$$x \text{ ன் மதிப்பை காண } 9x = 3 \text{ எனவே, } x = \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 : $1.272727... = 1.\bar{27}$ ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள்

மேலும் $q \neq 0$.

தீர்வு : $x = 1.272727...$ இங்கு இரண்டு இலக்கங்கள் சுழல்கிறது. எனவே x ஐ 100 ல் பெருக்கினால்

$$100x = 127.2727...$$

$$\text{எனவே, } 100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

$$100x - x = 126, \text{ அதாவது, } 99x = 126$$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

You can check the reverse that $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$.

Example 9 : Show that $0.2353535\ldots = 0.2\overline{35}$ can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : Let $x = 0.2\overline{35}$. Over here, note that 2 does not repeat, but the block 35 repeats. Since two digits are repeating, we multiply x by 100 to get

$$100x = 23.53535\ldots$$

$$\text{So, } 100x = 23.3 + 0.23535\ldots = 23.3 + x$$

$$\text{Therefore, } 99x = 23.3$$

$$\text{i.e., } 99x = \frac{233}{10}, \text{ which gives } x = \frac{233}{990}$$

You can also check the reverse that $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$.

So, every number with a non-terminating recurring decimal expansion can be expressed in the form $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$), where p and q are integers. Let us summarise our results in the following form

The decimal expansion of a rational number is either terminating or non-terminating recurring. Moreover, a number whose decimal expansion is terminating or non-terminating recurring is rational.

So, now we know what the decimal expansion of a rational number can be. What about the decimal expansion of irrational numbers? Because of the property above, we can conclude that their decimal expansions are *non-terminating non-recurring*.

So, the property for irrational numbers, similar to the property stated above for rational numbers, is

The decimal expansion of an irrational number is non-terminating non-recurring. Moreover,

இவ்வாறே நாம் $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ என்பதை சரிபார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $0.2353535\ldots = 0.2\overline{35}$ ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$.

தீர்வு : $x = 0.2\overline{35}$ இங்கு 2 சுழலவில்லை. 35 மட்டும் சுழல்கிறது. இப்போது இரண்டு இலக்கங்கள் மட்டும் சுழல்வதால் x ஐ 100ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

$$100x = 23.53535\ldots$$

எனவே

$$100x = 23.3 + 0.23535\ldots = 23.3 + x$$

$$99x = 23.3$$

$$99x = \frac{233}{10}, \quad x = \frac{233}{990}$$

இவ்வாறே நாம் $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ என சரிபார்க்கலாம்.

எனவே ஒவ்வொரு முடிவறா சுழல் தசம எண்களையும் $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுத முடியும். இங்கு p மற்றும் q முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$. இந்த முடிவை நாம் பின்வரும் முறையில் விவரிக்கலாம். விகிதமுறு எண்ணின் தசம எண் வடிவம் என்பது முடிவறு தசம எண் (அல்லது) முடிவறா சுழல் தசம எண்ணாக உள்ளது. ஒரு முடிவறு தசம பின்னம் அல்லது முடிவறா சுழல் தசம எண் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

இப்போது நமக்கு ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம எண் எவ்வாறு இருக்கும் என்பது தெரியும். விகிதமுறா எண்ணின் தசம எண் எப்படி இருக்கும்? மேற்கண்ட பண்பை வைத்து நாம் ஒரு முடிவுக்கு வரலாம். அதாவது விகிதமுறா எண்களின் தசம எண் முடிவறாதவையாகவும் மேலும் திரும்ப வராதவையாகவும் இருக்கும்.

எனவே விகிதமுறா எண்களின் பண்பை விகிதமுறு எண்களின் மேற்கண்ட பண்பை ஒத்து கூறுவதனால் அது விகிதமுறா எண்ணின் தசம எண். முடிவறாதவை மேலும் மீண்டும் திரும்ப வராதவை. ஒரு எண்ணின் தசம எண் முடிவறாதவை மேலும் மீண்டும் திரும்ப வராதவை(சுழல் தன்மை) எனில் அந்த எண் விகிதமுறா எண் எனப்படும்.

a number whose decimal expansion is non-terminating non-recurring is irrational.

Recall $s = 0.10110111011110\dots$ from the previous section. Notice that it is non-terminating and non-recurring. Therefore, from the property above, it is irrational. Moreover, notice that you can generate infinitely many irrationals similar to s .

What about the famous irrationals $\sqrt{2}$ and π ? Here are their decimal expansions up to a certain stage.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096\dots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950\dots$$

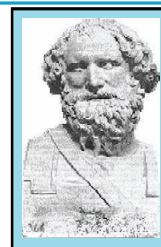
(Note that, we often take $\frac{22}{7}$ as an approximate value for π , but $\pi \neq \frac{22}{7}$.)

Over the years, mathematicians have developed various techniques to produce more and more digits in the decimal expansions of irrational numbers. For example, you might have learnt to find digits in the decimal expansion of $\sqrt{2}$ by the division method. Interestingly, in the Sulbasutras (rules of chord), a mathematical treatise of the Vedic period (800 BC - 500 BC), you find an approximation of $\sqrt{2}$ as follows:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

Notice that it is the same as the one given above for the first five decimal places. The history of the hunt for digits in the decimal expansion of π is very interesting.

The Greek genius Archimedes was the first to compute digits in the decimal expansion of π . He showed $3.140845 < \pi < 3.142857$. Aryabhatta (476 – 550 C.E.), the great Indian mathematician and astronomer, found the value of π correct to four decimal places (3.1416). Using high speed computers and advanced algorithms, π has been computed to over 1.24 trillion decimal places!



Archimedes (287 BCE – 212 BCE)

Fig. 1.10

Now, let us see how to obtain irrational numbers.

Example 10 : Find an irrational number between $\frac{1}{7}$ and $\frac{2}{7}$.

Solution : We saw that $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. So, you can easily calculate $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$.

To find an irrational number between $\frac{1}{7}$ and $\frac{2}{7}$, we find a number which is

இதற்கு முன் பகுதியில் படித்ததில் இருந்து $s = 0.10110111011110...$ என்பதை நினைவு கூர்க. இது முடிவுறாதவை மேலும் சுழல் தன்மை அற்றவை. மேற்கண்ட பண்பை வைத்து இதை விகிதமுறா எண் எனலாம். s ஐ போல எண்ணிக்கையற்ற விகிதமுறா எண்களை நாம் உருவாக்கலாம்.

$\sqrt{2}$ மற்றும் π ஐ பற்றி என்ன கூறுகிறாய்? அவற்றின் தசம பின்னம் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைவரை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

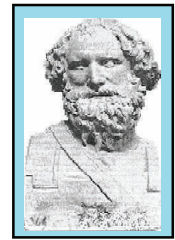
(குறிப்பு: நாம் π ன் தோராய மதிப்பை $\frac{22}{7}$ என குறிப்பிடுகிறோம். ஆனால் $\pi \neq \frac{22}{7}$)

காலம் காலமாக கணித மேதைகள் விகிதமுறா எண்களின் தசம பின்னத்தில் உள்ள எண்களை கண்டறிய பல யுக்திகளை கையாண்டனர். உதாரணமாக $\sqrt{2}$ ன் தசம பின்னத்தை கண்டுபிடிக்க வகுத்தல் முறையை உபயோகித்தனர். (800 BC - 500 BC) வேத காலத்தில் $\sqrt{2}$ ன் தோராய மதிப்பை காண வட்டவில் விதியை பயன்படுத்தினர். அதாவது

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

இந்த விடை மேலே குறிப்பிட்ட விடையில் முதல் ஐந்து தசம எண்கள் ஒத்திருப்பதை காணலாம். π ன் தசமஎண்களை கண்டுபிடிக்க நடந்த வேட்டையின் வரலாறு மிகுந்த விருவிறுப்பானது.

முதன் முதலில் ஆர்க்கிமெட்டீஸ் என்ற கிரேக்க விஞ்ஞானி தான் π ன் தசம பின்னத்தை காண முனைந்தார். அவர் $3.140845 < \pi < 3.142857$ என காட்டினார். ஆரியபட்டா என்ற மிகப் பெரிய இந்திய கணித மேதை மற்றும் வான சாஸ்திர வல்லுனர் π ன் மதிப்பை நான்கு தசம எண்ணில் துல்லியமாக கணக்கிட்டார். அந்த எண் 3.1416. மிக வேகமான கணினியை பயன்படுத்தி π ன் மதிப்பை 1.24 டிரிலியன் தசம எண்களுடன் காணலாம்.



ஆர்க்கிமெட்டீஸ்
(287 BCE – 212 BCE)

படம் 1.10

இப்போது நாம் விகிதமுறா எண்களை எவ்வாறு பெறுவது எனக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : $\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ க்கு இடையே உள்ள விகிதமுறா எண் ஒன்றை கண்டுபிடி?

தீர்வு : $\frac{1}{7} = 0.142857$ என பார்த்தோம் எனவே $\frac{2}{7}$ ன் மதிப்பை $\frac{2}{7} = 0.285714$ என கணக்கிடலாம்.

$\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ க்கு இடையே உள்ள விகிதமுறா எண்களை காண அவற்றின் இடையே உள்ள முடிவுறாத திரும்ப வராத தசம எண்ணை காண வேண்டும்.

non-terminating non-recurring lying between them. Of course, you can find infinitely many such numbers.

An example of such a number is 0.150150015000150000...

EXERCISE 1.3

- Write the following in decimal form and say what kind of decimal expansion each has :

(i) $\frac{36}{100}$	(ii) $\frac{1}{11}$	(iii) $4\frac{1}{8}$
(iv) $\frac{3}{13}$	(v) $\frac{2}{11}$	(vi) $\frac{329}{400}$
- You know that $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. Can you predict what the decimal expansions of $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ are, without actually doing the long division? If so, how?
 [Hint : Study the remainders while finding the value of $\frac{1}{7}$ carefully.]
- Express the following in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

(i) $0.\overline{6}$	(ii) $0.4\overline{7}$	(iii) $0.0\overline{01}$
----------------------	------------------------	--------------------------
- Express $0.99999 \dots$ in the form $\frac{p}{q}$. Are you surprised by your answer? With your teacher and classmates discuss why the answer makes sense.
- What can the maximum number of digits be in the repeating block of digits in the decimal expansion of $\frac{1}{17}$? Perform the division to check your answer.
- Look at several examples of rational numbers in the form $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$), where p and q are integers with no common factors other than 1 and having terminating decimal representations (expansions). Can you guess what property q must satisfy?
- Write three numbers whose decimal expansions are non-terminating non-recurring.
- Find three different irrational numbers between the rational numbers $\frac{5}{7}$ and $\frac{9}{11}$.
- Classify the following numbers as rational or irrational :

(i) $\sqrt{23}$	(ii) $\sqrt{225}$	(iii) 0.3796
(iv) 7.478478...	(v) 1.101001000100001...	

அத்தகைய எண்கள் எண்ணிக்கையில் அடங்காத வகையில் நாம் கண்டுபிடிக்கலாம்
அத்தகைய எண்ணிற்கு ஒரு எடுத்துகாட்டு 0.150150015000150000...

பயிற்சி 1.3

- கீழ்க்கண்டவற்றை தசம எண் வடிவில் எழுது. மேலும் அவை எவ்வகையான தசம எண் என்பதை கூறு.

(i) $\frac{36}{100}$	(ii) $\frac{1}{11}$	(iii) $4\frac{1}{8}$
(iv) $\frac{3}{13}$	(v) $\frac{2}{11}$	(vi) $\frac{329}{400}$
- $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ என்பதை அறிவாய். இதை கொண்டு கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பை கணிக்க முடியுமா? முடியும் எனில் எப்படி? வகுக்காமல் கணித்து கூறு. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$
(குறிப்பு: $\frac{1}{7}$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடிக்கும் போது மீதியை கவனத்துடன் பார்)
- கீழ்க்கண்டவற்றை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுது. இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$

(i) $0.\overline{6}$	(ii) $0.4\overline{7}$	(iii) $0.00\overline{1}$
----------------------	------------------------	--------------------------
- $0.99999 \dots$ ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுது. உன்னுடைய விடை உனக்கு ஆச்சரியத்தை தருகிறதா? உன்னுடைய ஆசிரியர் மற்றும் நண்பர்களுடன் இதை குறித்து விவாதி.
- $\frac{1}{17}$ என்ற எண்ணின் தசமத்தில் திரும்ப திரும்ப வரும் எண்களின் தொகுதி அதிகபட்சம் எத்தனை இலக்கங்களை கொண்டு இருக்கும்? வகுத்தல் முறையை உபயோகித்து உன்னுடைய விடையை சரிபார்.
- $\frac{p}{q}$ வடிவில் ($q \neq 0$) உள்ள பல விகிதமுறு எண்களை கவனி. இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள். அவற்றின் பொது காரணி 1 ஐ தவிர வேறு இல்லை என்பதையும் மேலும் முடிவறு தசம எண்ணில் உள்ளதையும் கவனி. q என்பது எத்தகைய பண்பை கொண்டது என்பதை உன்னால் யூகிக்க முடிகிறதா?
- இலக்கங்கள் முடிவறாத மேலும் மீண்டும் மீண்டும் திரும்ப வராத தசம எண்கள் மூன்றை எழுதுக.
- $\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ க்கு இடையே உள்ள மூன்று வெவ்வேறான விகிதமுறா எண்களை கண்டுபிடி.
- கீழ்க்கண்ட எண்களில் விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களை பிரித்து எழுதுக.

(i) $\sqrt{23}$	(ii) $\sqrt{225}$	(iii) 0.3796
(iv) 7.478478...	(v) 1.101001000100001...	

1.4 Operations on Real Numbers

You have learnt, in earlier classes, that rational numbers satisfy the commutative, associative and distributive laws for addition and multiplication. Moreover, if we add, subtract, multiply or divide (except by zero) two rational numbers, we still get a rational number (that is, rational numbers are ‘closed’ with respect to addition, subtraction, multiplication and division). It turns out that irrational numbers also satisfy the commutative, associative and distributive laws for addition and multiplication. However, the sum, difference, quotients and products of irrational numbers are not *always* irrational. For example, $(\sqrt{6}) + (-\sqrt{6})$, $(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})$, $(\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3})$ and $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ are rationals.

Let us look at what happens when we add and multiply a rational number with an irrational number. For example, $\sqrt{3}$ is irrational. What about $2 + \sqrt{3}$ and $2\sqrt{3}$? Since $\sqrt{3}$ has a non-terminating non-recurring decimal expansion, the same is true for $2 + \sqrt{3}$ and $2\sqrt{3}$. Therefore, both $2 + \sqrt{3}$ and $2\sqrt{3}$ are also irrational numbers.

Example 11 : Check whether $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2} + 21$, $\pi - 2$ are irrational numbers or not.

Solution : $\sqrt{5} = 2.236...$, $\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.1415...$

Then $7\sqrt{5} = 15.652...$, $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142...$, $\pi - 2 = 1.1415...$

All these are non-terminating non-recurring decimals. So, all these are irrational numbers.

Now, let us see what generally happens if we add, subtract, multiply, divide, take square roots and even n th roots of these irrational numbers, where n is any natural number. Let us look at some examples.

Example 12 : Add $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ and $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.

Solution : $(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3})$
 $= (2 + 1)\sqrt{2} + (5 - 3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

1.4 மெய் எண்கள் மீதான செயல்பாடுகள்

முந்தைய வகுப்புகளில் நாம் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் விதிகளுக்கு உட்பட்டு மாற்று பண்பு, சேர்ப்பு பண்பு மற்றும் பங்கீட்டு பண்பை நிறைவு செய்கிறது என்பதை கற்றோம். மேலும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களை கூட்டினால், கழித்தால், பெருக்கினால் அல்லது வகுத்தால் (பூஜ்ஜியத்தை தவிர்த்து) நாம் விகிதமுறு எண்ணையே பெறுவோம். அதாவது விகிதமுறு எண்கள் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலை பொருத்து அடைவு பண்பை பெற்றுள்ளது. இவ்வாறே விதிமுறை எண்களும் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் விதிகளுக்கு உட்பட்டு மாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்பு பண்பு மற்றும் பங்கீட்டு பண்பை பெற்றுள்ளன. ஆனால் விகிதமுறை எண்களின் கூடுதல், கழித்தல்(வித்தியாசம்), பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எல்லா நேரங்களிலும் விகிதமுறை எண்ணாகவே இருப்பதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக $(\sqrt{6}) + (-\sqrt{6}), (\sqrt{2}) - (\sqrt{2}), (\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3})$ மற்றும் $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ இவை விகிதமுறு எண்கள்.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணோடு ஒரு விகிதமுறை எண்ணை கூட்டினால் மேலும் பெருக்கினால் என்ன நிகழ்கிறது எனப் பார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக $\sqrt{3}$ என்பது ஓர் விகிதமுறை எண் மேலும் $2 + \sqrt{3}$ மற்றும் $2\sqrt{3}$ நிலை என்ன? $\sqrt{3}$ என்பது முடிவுறாத தசம எண். எனவே $2 + \sqrt{3}$ மற்றும் $2\sqrt{3}$ ம் விகிதமுறை எண் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11: $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2} + 21, \pi - 2$ என்பன விகிதமுறை எண்களா? இல்லையா என்பதை சோதித்து பார்.

தீர்வு : $\sqrt{5} = 2.236..., \sqrt{2} = 1.4142..., \pi = 3.1415...$

எனவே $7\sqrt{5} = 15.652..., \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142..., \pi - 2 = 1.1415...$

இவை அனைத்தும் முடிவுறாத மேலும் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்கள் எனவே இவை அனைத்தும் விகிதமுறை எண்கள். விகிதமுறை எண்களை கூட்டினால், கழித்தால், பெருக்கினால், வகுத்தால் அல்லது வர்க்க மூலப்படுத்தினால், n படி மூலங்கள் ஆக்கினால் என்ன நிகழ்கிறது என்பதை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12 : $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ ஐ கூட்டு.

தீர்வு : $(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3})$
 $= (2 + 1)\sqrt{2} + (5 - 3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

Example 13 : Multiply $6\sqrt{5}$ by $2\sqrt{5}$.

Solution : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

Example 14 : Divide $8\sqrt{15}$ by $2\sqrt{3}$.

Solution : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

These examples may lead you to expect the following facts, **which are true**:

- (i) The sum or difference of a rational number and an irrational number is irrational.
- (ii) The product or quotient of a non-zero rational number with an irrational number is irrational.
- (iii) If we add, subtract, multiply or divide two irrationals, the result may be rational or irrational.

We now turn our attention to the operation of taking square roots of real numbers. Recall that, if a is a natural number, then $\sqrt{a} = b$ means $b^2 = a$ and $b > 0$. The same definition can be extended for positive real numbers.

Let $a > 0$ be a real number. Then $\sqrt{a} = b$ means $b^2 = a$ and $b > 0$.

In Section 1.2, we saw how to represent $\sqrt{n}$ for any positive integer n on the number line. We now show how to find $\sqrt{x}$ for any given positive real number x geometrically. For example, let us find it for $x = 3.5$, i.e., we find $\sqrt{3.5}$ geometrically.

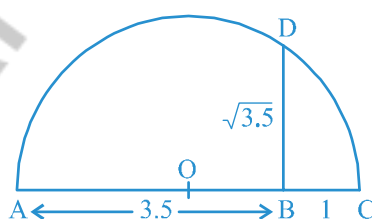


Fig. 1.11

Mark the distance 3.5 units from a fixed point A on a given line to obtain a point B such that $AB = 3.5$ units (see Fig. 1.11). From B, mark a distance of 1 unit and mark the new point as C. Find the mid-point of AC and mark that point as O. Draw a semicircle with centre O and radius OC. Draw a line perpendicular to AC passing through B and intersecting the semicircle at D. Then, $BD = \sqrt{3.5}$.

எடுத்துக்காட்டு 13 : $6\sqrt{5}$ ஐ $2\sqrt{5}$ ல் பெருக்கு.

தீர்வு : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

எடுத்துக்காட்டு 14 : $8\sqrt{15}$ ஐ $2\sqrt{3}$ ல் வகுக்க.

தீர்வு : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து நாம் பின்வரும் முடிவுக்கு வரலாம்.

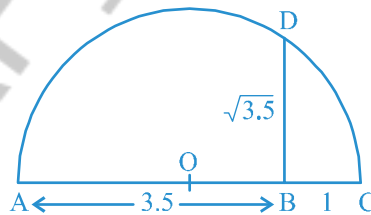
- ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண்.
- பூஜ்ஜியம் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

நாம் இப்போது மெய் எண்களின் வார்க்க மூலங்களின் செயல்கள் குறித்து பார்ப்போம். a ஓர் இயல் எண் எனில் $\sqrt{a} = b$ அதாவது $b^2 = a$ மேலும் $b > 0$. இதே வரையறை மிகை மெய் எண்களுக்கும் பொருந்தும்.

$a > 0$ இது ஒரு மெய் எண் எனில் $\sqrt{a} = b$ அதாவது $b^2 = a$ மேலும் $b > 0$.

1.2 பகுதியில் n என்பது ஏதாவது ஒரு மிகை முழு எண் மேலும் $\sqrt{n}$ ஐ கோட்டின் மீது வெவ்வேறு குறிப்பிடுவது எனக் கண்டோம். நாம் இப்போது x என்ற ஏதாவது ஒரு மிகை மெய் எண்ணிற்கு $\sqrt{x}$ என்பதை வடிவியல் மூலம் எப்படி காண்பது என பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக $x = 3.5$ என்க. நாம் $\sqrt{3.5}$ என்பதை வடிவியல் முறையில் காண்போம்.



படம் 1.11

ஒரு நேர் கோட்டின் மீது A என்ற புள்ளியில் இருந்து 3.5 அலகு தூரத்தில் B என்ற புள்ளியை குறி. $AB = 3.5$ அலகு (படம் 1.15 ஐ கவனி) B யில் இருந்து 1 அலகு தூரத்தில் C என்ற புள்ளியை குறி. AC ன் மையப்புள்ளியை கண்டுபிடித்து அதற்கு O என பெயரிடு. O ஐ மையமாக வைத்து OC ஆரத்துடன் ஒரு அரை வட்டம் வரை. AC க்கு செங்குத்தாக B வழியாக செல்லும்படி கோடு வரைக. இப்போது $BD = \sqrt{3.5}$.

More generally, to find $\sqrt{x}$, for any positive real number x , we mark B so that $AB = x$ units, and, as in Fig. 1.12, mark C so that $BC = 1$ unit. Then, as we have done for the case $x = 3.5$, we find $BD = \sqrt{x}$ (see Fig. 1.12). We can prove this result using the Pythagoras Theorem.

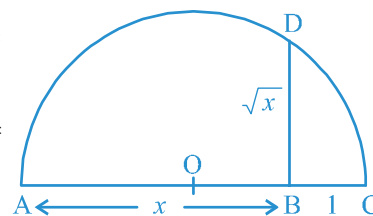


Fig. 1.12

Notice that, in Fig. 1.12, $\triangle OBD$ is a right-angled triangle. Also, the radius of the circle is $\frac{x+1}{2}$ units.

Therefore, $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ units.

Now, $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

So, by the Pythagoras Theorem, we have

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

This shows that $BD = \sqrt{x}$.

This construction gives us a visual, and geometric way of showing that $\sqrt{x}$ exists for all real numbers $x > 0$. If you want to know the position of $\sqrt{x}$ on the number line, then let us treat the line BC as the number line, with B as zero, C as 1, and so on. Draw an arc with centre B and radius BD, which intersects the number line in E (see Fig. 1.13). Then, E represents $\sqrt{x}$.

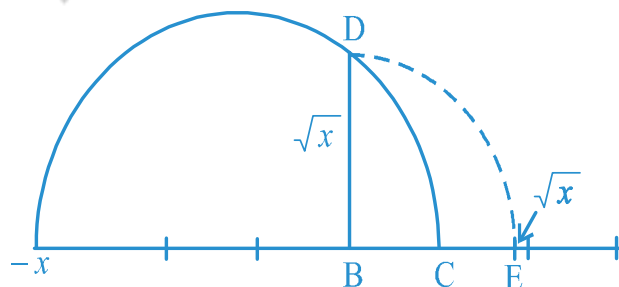
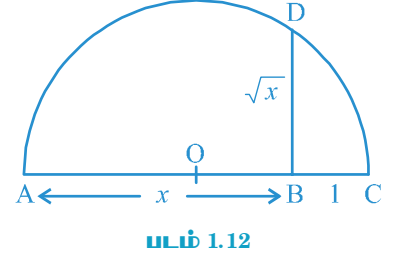


Fig. 1.13

பொதுவாக ஏதாவது மெய் எண் x க்கு $\sqrt{x}$ ஐ கண்டுபிடிக்க வேண்டும் எனில் $AB = x$ அலகு உள்ளவாறு B புள்ளியை குறி. மேலும் படம் 1.12 ல் காட்டி உள்ளபடி $BC = 1$ அலகு உள்ளவாறு C என்ற புள்ளியை குறி. நாம் இப்போது $x = 3.5$ ல் காட்டியபடி (படம் 1.12 ஐ பார்) $BD = \sqrt{x}$ ஐ கண்டுபிடிக்கலாம். பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி நாம் இந்த மதிப்பை நிரூபிக்கலாம்.



படம் 1.12

படம் 1.12 ல் $\triangle OBD$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம். வட்டத்தின் ஆரம் $\frac{x+1}{2}$ அலகுகள்.

எனவே $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ அலகுகள்.

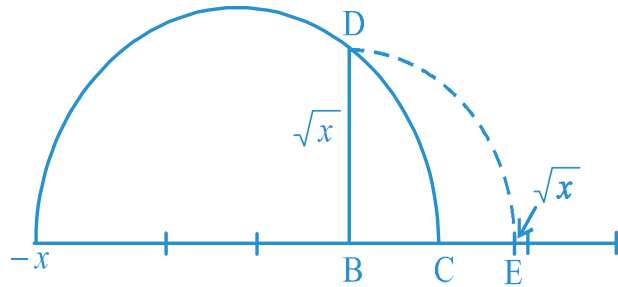
இப்போது $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

$$\therefore BD = \sqrt{x}$$

இந்த வரைமுறை நமக்கு வடிவியல் முறையில் $\sqrt{x}$ என்பது இருப்பதை உணர்த்துகிறது. $x > 0$ என்ற எல்லா மெய் எண்ணுக்கும் இது பொருந்தும். எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{x}$ ன் நிலையை நீ அறிய வேண்டுமெனில் BC ஐ எண் கோடாக எடுத்துக் கொள்வோம். B ஐ பூஜ்ஜியமாகவும் C ஐ 1 ஆகவும் கற்பனை செய்து கொள். இப்போது B ஐ மையமாக வைத்து BD ஆரத்துடன் படம் 1.13 ல் காட்டியபடி ஒரு வில் வரைக. இது எண் கோட்டை E ல் வெட்டுகிறது. இப்போது E என்பது $\sqrt{x}$ ஐ குறிக்கிறது.



படம் 1.13

We would like to now extend the idea of square roots to cube roots, fourth roots, and in general n th roots, where n is a positive integer. Recall your understanding of square roots and cube roots from earlier classes.

What is $\sqrt[3]{8}$? Well, we know it has to be some positive number whose cube is 8, and you must have guessed $\sqrt[3]{8} = 2$. Let us try $\sqrt[5]{243}$. Do you know some number b such that $b^5 = 243$? The answer is 3. Therefore, $\sqrt[5]{243} = 3$.

From these examples, can you define $\sqrt[n]{a}$ for a real number $a > 0$ and a positive integer n ?

Let $a > 0$ be a real number and n be a positive integer. Then $\sqrt[n]{a} = b$, if $b^n = a$ and $b > 0$. Note that the symbol ' $\sqrt{}$ ' used in $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$, etc. is called the *radical sign*.

We now list some identities relating to square roots, which are useful in various ways. You are already familiar with some of these from your earlier classes. The remaining ones follow from the distributive law of multiplication over addition of real numbers, and from the identity $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, for any real numbers x and y .

Let a and b be positive real numbers. Then

- (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- (iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
- (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$
- (v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$
- (vi) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

Let us look at some particular cases of these identities.

Example 15 : Simplify the following expressions:

- (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$
- (ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$
- (iii) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$
- (iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

இந்த கருத்தை பயன்படுத்தி வர்க்கமூலம், கனமூலம், நான்குபடிமூலம் மேலும் n படி மூலம் (இங்கு n மிகைமுழு) கண்டுபிடிக்கலாம். முந்தைய வகுப்புகளில் நாம் கற்ற வர்க்கமூலம் மற்றும் கன மூலத்தை நினைவு கூர்க.

$\sqrt[3]{8}$ என்பது என்ன? இது ஒரு மிக எண். இதன் கனம்=8. இப்போது நீ நினைத்திருப்பாய் $\sqrt[3]{8} = 2$ என்று. இதே போல் $\sqrt[5]{243}$ என்பதை காண முயற்சி செய். $b^5 = 243$ என இருக்கும்படி b என்ற எண்ணை காண முடியுமா? இதன் விடை 3 எனவே $\sqrt[5]{243} = 3$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் இருந்து n என்ற ஏதாவது ஒரு மிகை முழுக்கு $a > 0$ எனில் $\sqrt[n]{a}$ என்பதற்கு வரையறை கூற முடியுமா?

$a > 0$ என்பது மெய் எண் மற்றும் n என்பது மிகை முழு என்க. இப்போது $\sqrt[n]{a} = b$ இதில் $b^n = a$ மேலும் $b > 0$. ‘ $\sqrt{}$ ’ என்ற குறி $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ என்பதில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இதை மூலக்குறி என்பர்.

நாம் இப்போது பல வகைகளில் பயன்படக் கூடிய வர்க்க மூலங்களுடன் தொடர்புடைய சில முற்றொருமைகளை பார்ப்போம். இவற்றில் சிலவற்றை ஏற்கனவே பெருக்கலின் பங்கீட்டு பண்பில் பார்த்தோம். x மற்றும் y மெய் எண்கள் எனில் முற்றொருமை $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ஆகும்.

a மற்றும் b மிகை மெய் எண்கள் எனில்

- (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- (iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$
- (v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$
- (vi) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

இவற்றில் சில முற்றொருமைகள் பற்றி பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 15 : கீழ்க்கண்ட கோவைகளை சுருக்குக.

- (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$ (ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$
- (iii) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$ (iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

Solution : (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = 11 - 7 = 4$

Remark : Note that ‘simplify’ in the example above has been used to mean that the expression should be written as the sum of a rational and an irrational number.

We end this section by considering the following problem. Look at $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Can you tell where it shows up on the number line? You know that it is irrational. May be it is easier to handle if the denominator is a rational number. Let us see, if we can ‘rationalise’ the denominator, that is, to make the denominator into a rational number. To do so, we need the identities involving square roots. Let us see how.

Example 16 : Rationalise the denominator of $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution : We want to write $\frac{1}{\sqrt{2}}$ as an equivalent expression in which the denominator is a rational number. We know that $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ is rational. We also know that multiplying $\frac{1}{\sqrt{2}}$ by $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ will give us an equivalent expression, since $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. So, we put these two facts together to get

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

In this form, it is easy to locate $\frac{1}{\sqrt{2}}$ on the number line. It is half way between 0 and $\sqrt{2}$.

தீர்வு : (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = 11 - 7 = 4$

குறிப்பு : மேலே குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் சுருக்குக எனக் கூறியது கோவையை விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் கூடுதலாக எழுது என்ற பொருள் கொள்ள வேண்டும் கீழ்க்கண்ட கணக்குடன் பாடத்தின் இப்பகுதியை முடிப்போம். $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஐ கவனி. இது எண் கோட்டின் மீது எங்கு உள்ளது எனக்கூற முடியுமா? இது ஒரு விகிதமுறா எண் என உனக்கு தெரியும். இதன் பகுதி விகிதமுறு எண்ணாக இருந்து இருந்தால் இதை குறிப்பது எளிது. நாம் இப்போது பகுதியை எவ்வாறு விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுவது எனப் பார்ப்போம். இதை செய்ய நாம் வர்க்க மூலங்களுக்கு தொடர்புடைய முற்றொருமைகளை பயன்படுத்த வேண்டும். எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 16 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்ற அதன் பகுதி மற்றும் தொகுதியை $\sqrt{2}$ ல் பெருக்க வேண்டும். $\sqrt{2}$ ஐ விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt{2}$ என நமக்கு தெரியும். $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஐ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ல் பெருக்கினால் சமமான கோவை கிடைக்கும். ஏனெனில் $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ இந்த இரண்டு விதிகளை பயன்படுத்தி

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

இந்த வடிவில் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிப்பது எளிது. இது 0 க்கும் $\sqrt{2}$ க்கும் பாதி தூரத்தில் உள்ளது.

Example 17 : Rationalise the denominator of $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

Solution : We use the Identity (iv) given earlier. Multiply and divide $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ by $2 - \sqrt{3}$ to get

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}.$$

Example 18 : Rationalise the denominator of $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

Solution : Here we use the Identity (iii) given earlier.

$$\text{So, } \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3 - 5} = \left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

Example 19 : Rationalise the denominator of $\frac{1}{7 + 3\sqrt{2}}$.

$$\text{Solution : } \frac{1}{7 + 3\sqrt{2}} = \frac{1}{7 + 3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7 - 3\sqrt{2}}{7 - 3\sqrt{2}}\right) = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{49 - 18} = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{31}$$

So, when the denominator of an expression contains a term with a square root (or a number under a radical sign), the process of converting it to an equivalent expression whose denominator is a rational number is called *rationalising the denominator*.

EXERCISE 1.4

1. Classify the following numbers as rational or irrational:

(i) $2 - \sqrt{5}$ (ii) $(3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

எடுத்துக்காட்டு 17 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு : நாம் இங்கு முற்றொருமை (iv) ஐ பயன்படுத்துவோம். $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ன் தொகுதி மற்றும் பகுதியை $2-\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்கு

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 18 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு : நாம் இங்கு முற்றொருமை (iii) ஐ பயன்படுத்துவோம்

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

எடுத்துக்காட்டு 19 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

$$\text{தீர்வு: } \frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

எனவே ஒரு கோவையின் பகுதி வர்க்கமூல உறுப்புகளை (அல்லது வர்க்க மூலக் குறியை) பெற்றிருந்தால் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுவதை பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கல் என்பர்.

பயிற்சி 1.4

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களை பிரித்து எழுதுக.

- (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$
 (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. Simplify each of the following expressions:

(i) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})$ (ii) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$

(iii) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$ (iv) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

3. Recall, π is defined as the ratio of the circumference (say c) of a circle to its diameter (say d). That is, $\pi = \frac{c}{d}$. This seems to contradict the fact that π is irrational. How will you resolve this contradiction?

4. Represent $\sqrt{9.3}$ on the number line.

5. Rationalise the denominators of the following:

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{7} - 2}$

1.5 Laws of Exponents for Real Numbers

Do you remember how to simplify the following?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$

(ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$

(iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

Did you get these answers? They are as follows:

(i) $17^2 \cdot 17^5 = 17^7$

(ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$

(iv) $7^3 \cdot 9^3 = 63^3$

To get these answers, you would have used the following laws of exponents, which you have learnt in your earlier classes. (Here a , n and m are natural numbers. Remember, a is called the base and m and n are the exponents.)

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$

(iv) $a^m b^m = (ab)^m$

2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளை சுருக்கி எழுதுக.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2}) & \text{(ii)} (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) \\ \text{(iii)} (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 & \text{(iv)} (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \end{array}$$

3. π என்பது ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு(c) மற்றும் அதன் விட்டம்(d) இவற்றிற்கு இடையே உள்ள விகிதம் $\pi = \frac{c}{d}$ என வரையறுக்கிறோம். ஆனால் π என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்கிறோம். இந்த முரண்பாட்டை எப்படி தீர்ப்பாய்?

4. $\sqrt{9.3}$ ஐ எண் கோட்டின் மீது குறித்து காட்டுக.

5. கீழ்க்கண்டவற்றின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \frac{1}{\sqrt{7}} & \text{(ii)} \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \\ \text{(iii)} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} & \text{(iv)} \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \end{array}$$

1.5 மெய் எண்களின் அடுக்குகளின் விதிகள்:

கீழ்க்கண்டவற்றை எப்படி சுருக்குவது என உனக்கு தெரியுமா?

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} 17^2 \cdot 17^5 = & \text{(ii)} (5^2)^7 = \\ \text{(iii)} \frac{23^{10}}{23^7} = & \text{(iv)} 7^3 \cdot 9^3 = \end{array}$$

கீழ்க்கண்டவாறு விடைகளை நாம் பெறலாம்.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} 17^2 \cdot 17^5 = 17^7 & \text{(ii)} (5^2)^7 = 5^{14} \\ \text{(iii)} \frac{23^{10}}{23^7} = 23^3 & \text{(iv)} 7^3 \cdot 9^3 = 63^3 \end{array}$$

இந்த விடையை பெற நாம் கீழ்க்கண்ட அடுக்குகறி விதிகளை பயன்படுத்தி உள்ளோம். இதை நீங்கள் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்திருப்பீர்கள் (இங்கு a, n மற்றும் m இயல் எண்கள். ' a ' என்பது அடிமானம், m மற்றும் n என்பவை அடுக்குகள்)

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \text{(ii)} (a^m)^n = a^{mn} \\ \text{(iii)} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n & \text{(iv)} a^m b^m = (ab)^m \end{array}$$

What is $(a)^0$? Yes, it is 1! So you have learnt that $(a)^0 = 1$. So, using (iii), we can get $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

We can now extend the laws to negative exponents too.

So, for example :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3} \\ \text{(ii)} & (5^2)^{-7} = 5^{-14} \\ \text{(iii)} & \frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17} \\ \text{(iv)} & (7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3} \end{array}$$

Suppose we want to do the following computations:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ \text{(ii)} & \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 \\ \text{(iii)} & \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} \\ \text{(iv)} & 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} \end{array}$$

How would we go about it? It turns out that we can extend the laws of exponents that we have studied earlier, even when the base is a positive real number and the exponents are rational numbers. (Later you will study that it can further to be extended when the exponents are real numbers.) But before we state these laws, and to even make sense of these laws, we need to first understand what, for example $4^{\frac{3}{2}}$ is. So, we have some work to do!

We define $\sqrt[n]{a}$ for a real number $a > 0$ as follows:

Let $a > 0$ be a real number and n a positive integer. Then $\sqrt[n]{a} = b$, if $b^n = a$ and $b > 0$.

In the language of exponents, we define $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. So, in particular, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$. There are now two ways to look at $4^{\frac{3}{2}}$.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

$(a)^0$ ன் மதிப்பு என்ன? ஆமாம் அது 1. எனவே நாம் $(a)^0 = 1$ என கற்றுக்கொண்டோம். ஆகவே விதி (iii) ஐ பயன்படுத்தி $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. என பெறலாம். இனி குறை எண்களின் அடுக்குகறி விதிகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக :

$$(i) \quad 17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3} \quad (ii) \quad (5^2)^{-7} = 5^{-14}$$

$$(iii) \quad \frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17} \quad (iv) \quad (7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$$

கீழ்கண்டவற்றை தீர்க்க வேண்டுமெனில் நாம் என்ன செய்ய வேண்டும்?

$$(i) \quad 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \quad (ii) \quad \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$$

$$(iii) \quad \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} \quad (iv) \quad 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$$

நாம் இதை எப்படி செய்வது? அடிமானம் மிகை மெய் எண்ணாகவும் அடுக்குகள் விகிதமுறு எண்ணாகவும் உள்ளவற்றை அடுக்கு குறி விதிகளை பயன்படுத்தி தீர்க்க முடியும் என நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்துள்ளோம் (அடுக்கு குறிகள் மெய் எண்களாக இருந்தால் அவற்றை எவ்வாறு விவரிப்பது என்பதை அடுத்த பகுதியில் பார்ப்போம்) ஆனால் இதற்கு முன்பு நாம் விதிகளை புரிந்து கொள்ள வேண்டும். முதலில் நாம் எதை புரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக $4^{\frac{3}{2}}$ இதில் நாம் சிலவற்றை செய்ய வேண்டும். பகுதி 1.4 ல் $\sqrt[n]{a}$ என்பதில் $a > 0$ மெய் எண் என்பதை வரையறுத்தோம். n என்பது மிகை முழு. மேலும் $\sqrt[n]{a} = b$ இதில் $b^n = a$ மேலும் $b > 0$.

அடுக்கு குறி விதிப்படி $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ என வரையறுத்துள்ளோம். எனவே $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ இப்போது $4^{\frac{3}{2}}$ ன் தீர்வை இரண்டு வழிகளில் பார்க்கலாம்.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

Therefore, we have the following definition:

Let $a > 0$ be a real number. Let m and n be integers such that m and n have no common factors other than 1, and $n > 0$. Then,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

We now have the following extended laws of exponents:

Let $a > 0$ be a real number and p and q be rational numbers. Then, we have

$$(i) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(ii) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(iv) a^p b^p = (ab)^p$$

You can now use these laws to answer the questions asked earlier.

Example 20 : Simplify (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$
 (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

Solution :

$$(i) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2 \quad (ii) \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}} \quad (iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$$

Exercise 1.5

- Find : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
- Find : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
- Simplify : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$
- $8^7 - 8^{-7}$
 (A) 0 (B) 8^{14} (C) 8^{-49} (D) None of these

எனவே கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யலாம்.

$a > 0$ என்க. a ஒரு மெய் எண். m மற்றும் n என்பன முழுக்கள். இவற்றிற்கு பொது காரணி 1 மட்டுமே என்க. மற்றும் $n > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

இனி நாம் கீழ்க்கண்ட அடுக்கு விதிகளை வரையறை செய்யலாம்.

$a > 0$ என்க. a ஒரு மெய் எண். p மற்றும் q என்பன விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$(i) a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (ii) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (iv) a^p b^p = (ab)^p$$

இந்த விதிகளை இதற்கு முன்பு கேட்ட கேள்விகளுக்கு விடையளிக்க பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 20 : சுருக்குக. (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}} \right)^4$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} \quad (iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$$

தீர்வு :

$$(i) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2 \quad (ii) \left(3^{\frac{1}{5}} \right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}} \quad (iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$$

பயிற்சி 1.5

- மதிப்புகளை கண்டுபிடி: (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
- மதிப்புகளை கண்டுபிடி: (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
- சுருக்குக.: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3} \right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^4}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$
- $1.8^7 - 8^{-7}$
(A) 0 (B) 8^{14} (C) 8^{-49} (D) இவற்றில் ஏதுமில்லை

5. Which of the following statements is true?

A) $3^{40} + 3^{20} = 3^{40+20}$

B) $3^{12} \times 3^{10} = 3^{12 \times 10}$

C) $3^{14} + 4^{14} = (3+4)^{14}$

D) $3^{20} \times 3^2 = (3^2)^{11}$

1.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A number r is called a rational number, if it can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

2. A number s is called an irrational number, if it cannot be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

3. The decimal expansion of a rational number is either terminating or non-terminating recurring. Moreover, a number whose decimal expansion is terminating or non-terminating recurring is rational.

4. The decimal expansion of an irrational number is non-terminating non-recurring. Moreover, a number whose decimal expansion is non-terminating non-recurring is irrational.

5. All the rational and irrational numbers make up the collection of real numbers.

6. If r is rational and s is irrational, then $r + s$ and $r - s$ are irrational numbers, and rs and $\frac{r}{s}$ are irrational numbers, $r \neq 0$.

7. For positive real numbers a and b , the following identities hold:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sqrt{ab} &= \sqrt{a}\sqrt{b} & \text{(ii)} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \text{(iii)} \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) &= a - b & \text{(iv)} \quad (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) &= a^2 - b \\ \text{(v)} \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= a + 2\sqrt{ab} + b \end{aligned}$$

8. To rationalise the denominator of $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$, we multiply this by $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$, where a and b are integers.

9. Let $a > 0$ be a real number and p and q be rational numbers. Then

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a^p \cdot a^q &= a^{p+q} & \text{(ii)} \quad (a^p)^q &= a^{pq} \\ \text{(iii)} \quad \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q} & \text{(iv)} \quad a^p b^p &= (ab)^p \end{aligned}$$

5. பின்வரும் கூற்றுகளில் எது சரியானது?

- A) $3^{40} + 3^{20} = 3^{40+20}$
- B) $3^{12} \times 3^{10} = 3^{12 \times 10}$
- C) $3^{14} + 4^{14} = (3+4)^{14}$
- D) $3^{20} \times 3^2 = (3^2)^{11}$

1.6 தொகுப்பு :

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கீழ்க்கண்ட கருத்துகளை கற்றுள்ளோம்.

1. ஓர் எண் r என்பது விகிதமுறு எண் எனில் அதை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுத முடியும் மேலும் p மற்றும் q என்பன முழுக்கள். மேலும் $q \neq 0$.
2. ஓர் எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுத முடியாவிட்டால் அந்த எண் s விகிதமுறா எண் எனப்படும். இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$.
3. ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் விரிவாக்கம் என்பது முடிவுறு தசம எண் வடிவம் அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம எண் வடிவம் ஆகும். ஒரு எண் முடிவுறு தசம எண் வடிவிலோ (அ) முடிவுறா சுழல் தசம எண் வடிவிலோ எழுத முடியுமானால் அந்த எண் விகிதமுறு எண் எனப்படும்.
4. ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறாதவை. மேலும் சுழல் தன்மையற்றதாக இருக்கும். ஓர் எண் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம பின்ன வடிவத்தை பெற்றிருந்தால் அந்த எண் விகிதமுறா எண் எனப்படும்.
5. எல்லா விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தொகுப்பு மெய் எண்களின் தொகுப்பாகும்.
6. r என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் மேலும் s என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் எனில் $r + s$ மற்றும் $r - s$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் ஆகும். மேலும் rs மற்றும் $\frac{r}{s}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் இங்கு $r \neq 0$.
7. a மற்றும் b என்பன மிகை மெய் எண்கள் எனில் கீழ்க்கண்ட முற்றொருமைகள் உண்மை எனலாம்.

$$(i) \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$(ii) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(iii) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \quad (iv) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

$$(v) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

8. $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்ற, இதை $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$ ல் பெருக்க வேண்டும்.

இங்கு a மற்றும் b என்பன முழுக்கள்.

9. p மற்றும் q என்பன விகிதமுறு எண்கள். மேலும் $a > 0$ எனில்

$$(i) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(ii) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(iv) a^p b^p = (ab)^p$$



POLYNOMIALS

2.1 Introduction

You have studied algebraic expressions, their addition, subtraction, multiplication and division in earlier classes. You also have studied how to factorise some algebraic expressions. You may recall the algebraic identities :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

and

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

and their use in factorisation. In this chapter, we shall start our study with a particular type of algebraic expression, called *polynomial*, and the terminology related to it. We shall also study the *Remainder Theorem* and *Factor Theorem* and their use in the factorisation of polynomials. In addition to the above, we shall study some more algebraic identities and their use in factorisation and in evaluating some given expressions.

2.2 Polynomials in One Variable

Let us begin by recalling that a variable is denoted by a symbol that can take any real value. We use the letters x , y , z , etc. to denote variables. Notice that $2x$, $3x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$ are algebraic expressions. All these expressions are of the form (a constant) $\times x$. Now suppose we want to write an expression which is (a constant) $\times$ (a variable) and we do not know what the constant is. In such cases, we write the constant as a , b , c , etc. So the expression will be ax , say.

However, there is a difference between a letter denoting a constant and a letter denoting a variable. The values of the constants remain the same throughout a particular situation, that is, the values of the constants do not change in a given problem, but the value of a variable can keep changing.



அத்தியாயம் 2

பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

2.1 அறிமுகம்

முன் வகுப்புகளில் நீங்கள் இயற்கணித கோவைகள் குறித்தும் அவற்றின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலையும் படித்துள்ளீர். மேலும் சில இயற்கணித கோவைகளை எவ்வாறு காரணிப்படுத்துவது என்பது குறித்தும் படித்துள்ளீர். கீழ்க்கண்ட இயற்கணித முற்றொருமைகளை நினைவு கூர்க.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

மற்றும்

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

மேலும் காரணிப்படுத்துவதில் இவற்றின் பயன்பாட்டை அறிந்துக்கொண்டோம். இந்த அத்தியாயத்தில் குறிப்பிட்ட வகையான இயற்கணித கோவைகள் அதாவது பல்லுறுப்புக் கோவைகள் தொடர்புடைய சொற்றொடர்கள் குறித்தும் படிப்போம். மேலும் நாம் மீதித் தேற்றம் மற்றும் காரணித் தேற்றம் குறித்தும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துவதில் அவற்றின் பயன்பாடு குறித்தும் படிப்போம். மேலும் இயற்கணித முற்றொருமைகள் காரணிப்படுத்தலில் பயன்படுதலையும் பார்ப்போம்.

2.2 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

ஒரு மாறி என்பது ஒரு குறியீடு மூலம் அறியலாம். மேலும் இந்த குறியீடு எந்த ஒரு மெய் எண்ணின் மதிப்பையும் அடையும் என்பதை நினைவு கூர்வோம். மாறிகளை குறிக்க x, y, z என்ற எழுத்துகளை பயன்படுத்தலாம். $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ என்பன இயற்கணித கோவைகள் என்பதை கவனிக்க. இந்த கோவைகள் அனைத்தும் மாறிலி $\times x$ என்ற அமைப்பில் உள்ளன. இப்போது நாம் ஏதாவது ஒரு கோவையை எழுத வேண்டும் எனில் மாறிலி $\times$ மாறி என எழுதுவோம். இங்கு மாறிலிகளை a, b, c எனவும், மாறிகளை x, y, z எனவும் எழுதலாம். எனவே கோவை ax என்பதாகும்.

ஆனால் மாறி, மாறிலிகளை குறிக்கும் எழுத்துகளில் வித்தியாசம் உண்டு. ஒரு மாறிலியின் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட கீழலில் மாறாமல் இருக்கும். அதாவது மாறிலியின் மதிப்பு அந்த கணக்கில் மாறாது. ஆனால் மாறிகளின் மதிப்பு மாற்றம் அடைந்துக்கொண்டே இருக்கும்.

Now, consider a square of side 3 units (see Fig. 2.1). What is its perimeter? You know that the perimeter of a square is the sum of the lengths of its four sides. Here, each side is 3 units. So, its perimeter is 4×3 , i.e., 12 units. What will be the perimeter if each side of the square is 10 units? The perimeter is 4×10 , i.e., 40 units. In case the length of each side is x units (see Fig. 2.2), the perimeter is given by $4x$ units. So, as the length of the side varies, the perimeter varies.

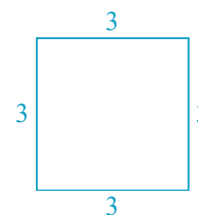


Fig. 2.1

Can you find the area of the square PQRS? It is $x \times x = x^2$ square units. x^2 is an algebraic expression. You are also familiar with other algebraic expressions like $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$. Note that, all the algebraic expressions we have considered so far have only whole numbers as the exponents of the variable. Expressions of this form are called *polynomials in one variable*. In the examples above, the variable is x . For instance, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ is a polynomial in x . Similarly, $3y^2 + 5y$ is a polynomial in the variable y and $t^2 + 4$ is a polynomial in the variable t .

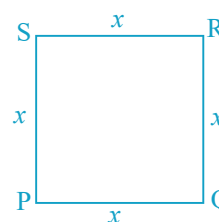


Fig. 2.2

In the polynomial $x^2 + 2x$, the expressions x^2 and $2x$ are called the **terms** of the polynomial. Similarly, the polynomial $3y^2 + 5y + 7$ has three terms, namely, $3y^2$, $5y$ and 7 . Can you write the terms of the polynomial $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$? This polynomial has 4 terms, namely, $-x^3$, $4x^2$, $7x$ and -2 .

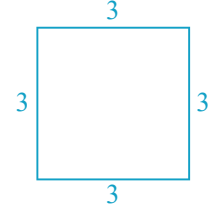
Each term of a polynomial has a **coefficient**. So, in $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$, the coefficient of x^3 is -1 , the coefficient of x^2 is 4 , the coefficient of x is 7 and -2 is the coefficient of x^0 (Remember, $x^0 = 1$). Do you know the coefficient of x in $x^2 - x + 7$? It is -1 .

2 is also a polynomial. In fact, 2 , -5 , 7 , etc. are examples of *constant polynomials*. The constant polynomial 0 is called the **zero polynomial**. This plays a very important role in the collection of all polynomials, as you will see in the higher classes.

Now, consider algebraic expressions such as $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ and $\sqrt[3]{y} + y^2$. Do you know that you can write $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$? Here, the exponent of the second term, i.e., x^{-1} is -1 , which is not a whole number. So, this algebraic expression is not a polynomial.

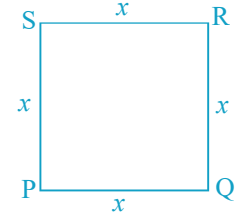
Again, $\sqrt{x} + 3$ can be written as $x^{\frac{1}{2}} + 3$. Here the exponent of x is $\frac{1}{2}$, which is not a whole number. So, is $\sqrt{x} + 3$ a polynomial? No, it is not. What about $\sqrt[3]{y} + y^2$? It is also not a polynomial (Why?).

இப்போது 3 அலகு பக்க அளவு கொண்ட ஒரு சதுரத்தை எடுத்துக்கொள் (படம் 2.1). அதன் சுற்றளவு என்ன? சதுரத்தின் சுற்றளவு என்பது நான்கு பக்க அளவுகளின் கூடுதல் என்பது உங்களுக்கு தெரியும். இங்கு ஒவ்வொரு பக்க அளவு 3 அலகுகள். எனவே இதன் சுற்றளவு 4×3 , அதாவது 12 அலகுகள். சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் 10 அலகுகள் எனில் அதன் சுற்றளவு எவ்வளவு? 4×10 அலகுகள். அதாவது 40 அலகுகள். ஒருவேளை சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகுகள் எனில் (படம் 2.2), அதன் சுற்றளவு $4x$ அலகுகள். எனவே சதுரத்தின் பக்க அளவு மாறினால் சுற்றளவும் மாறும்.



படம் 2.1

சதுரம் PQRS-ன் பரப்பளவை கண்டுபிடிக்க முடியுமா? பரப்பளவு $x \times x = x^2$ சதுர அலகுகள். x^2 என்பது ஒரு இயற்கணித கோவை. உங்களுக்கு $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ போன்ற இயற்கணித கோவைகள் குறித்து தெரியும். இதுவரை நாம் பார்த்த கோவைகள் அனைத்தும் ஒரே மாறியும், அதன் அடுக்குகள் முழு எண்ணாகவும் உள்ளன. இவ்வகையான கோவைகள் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்பு கோவைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் மாறி x . மேலும் $x^3 - x^2 + 4x + 7$ என்பது x ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதேபோல் $3y^2 + 5y$ என்பது y ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. மேலும் $t^2 + 4$ என்பது t ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை.



படம் 2.2

$x^2 + 2x$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2 மற்றும் $2x$ என்பன உறுப்புகள் எனப்படும். இதேபோல் $3y^2 + 5y + 7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் மூன்று உறுப்புகள் உள்ளன. அவை $3y^2$, $5y$ மற்றும் 7 என்பன. பல்லுறுப்புக் கோவை $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ல் உள்ள உறுப்புகளை உன்னால் எழுத முடியுமா? இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையில் $-x^3$, $4x^2$, $7x$ மற்றும் -2 என்ற 4 உறுப்புகள் உள்ளன.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரு குணகம் உள்ளது. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ என்ற கோவையில் x^3 ன் குணகம் -1 , x^2 ன் குணகம் $+4$, x ன் குணகம் 7 , x^0 ன் குணகம் -2 ($x^0 = 1$ என்பதை நினைவு கூர்க). $x^2 - x + 7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x ன் குணகம் என்ன? அது -1 ஆகும்.

2 என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. 2, -5 , $7...$ என்பன மாறிலி பல்லுறுப்பு கோவைக்கு எடுத்துக்காட்டாகும். மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை '0' ஐ பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம். இது பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொகுப்பில் மிக முக்கியமான இடத்தை பிடிக்கிறது. இதை நீங்கள் மேல் வகுப்பில் படிப்பீர்கள்.

நாம் இப்போது $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ மற்றும் $\sqrt[3]{y} + y$ போன்ற இயற்கணித கோவைகளை பார்ப்போம். $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ என்பது உனக்கு தெரியுமா? இங்கு இரண்டாவது உறுப்பு x^{-1} ன் அடுக்கு -1 ஆகும். இது முழு எண் அல்ல. எனவே இந்த இயற்கணிதக் கோவை பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.

மேலும் $\sqrt{x} + 3$ ஐ $x^{\frac{1}{2}} + 3$ என எழுதலாம். இங்கு x ன் அடுக்கு $\frac{1}{2}$ இதுவும் முழு எண் அல்ல. எனவே $\sqrt{x} + 3$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகுமா? இல்லை. $\sqrt[3]{y} + y^2$ ஐ பற்றி நீ என்ன நினைக்கிறாய்? இதுவும் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல?(ஏன்?).

If the variable in a polynomial is x , we may denote the polynomial by $p(x)$, or $q(x)$, or $r(x)$, etc. So, for example, we may write :

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$q(x) = x^3 - 1$$

$$r(y) = y^3 + y + 1$$

$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

A polynomial can have any (finite) number of terms. For instance, $x^{150} + x^{149} + \dots + x^2 + x + 1$ is a polynomial with 151 terms.

Consider the polynomials $2x$, 2 , $5x^3$, $-5x^2$, y and u^4 . Do you see that each of these polynomials has only one term? Polynomials having only one term are called *monomials* ('mono' means 'one').

Now observe each of the following polynomials:

$$p(x) = x + 1, \quad q(x) = x^2 - x, \quad r(y) = y^9 + 1, \quad t(u) = u^{15} - u^2$$

How many terms are there in each of these? Each of these polynomials has only two terms. Polynomials having only two terms are called *binomials* ('bi' means 'two').

Similarly, polynomials having only three terms are called *trinomials* ('tri' means 'three'). Some examples of trinomials are

$$p(x) = x + x^2 + \pi, \quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2,$$

$$r(u) = u + u^2 - 2, \quad t(y) = y^4 + y + 5.$$

Now, look at the polynomial $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$. What is the term with the highest power of x ? It is $3x^7$. The exponent of x in this term is 7. Similarly, in the polynomial $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$, the term with the highest power of y is $5y^6$ and the exponent of y in this term is 6. We call the highest power of the variable in a polynomial as the *degree of the polynomial*. So, the degree of the polynomial $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ is 7 and the degree of the polynomial $5y^6 - 4y^2 - 6$ is 6. **The degree of a non-zero constant polynomial is zero.**

Example 1 : Find the degree of each of the polynomials given below:

(i) $x^5 - x^4 + 3$

(ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$

(iii) 2

Solution : (i) The highest power of the variable is 5. So, the degree of the polynomial is 5.

(ii) The highest power of the variable is 8. So, the degree of the polynomial is 8.

(iii) The only term here is 2 which can be written as $2x^0$. So the exponent of x is 0. Therefore, the degree of the polynomial is 0.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள மாறி x எனில் நாம் பல்லுறுப்புக் கோவையை $p(x)$ அல்லது $q(x)$ அல்லது $r(x)$ போன்ற வடிவில் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 + 5x - 3 \\ q(x) &= x^3 - 1 \\ r(y) &= y^3 + y + 1 \\ s(u) &= 2 - u - u^2 + 6u^5 \end{aligned}$$

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் எத்தனை (குறிப்பிட்ட) உறுப்புகள் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x^{150} + x^{149} + \dots + x^2 + x + 1$ என்பது 151 உறுப்புகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை.

$2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ மற்றும் u^4 போன்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி. இவற்றில் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டும் உள்ளதை கவனித்தாயா? ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ள கோவைகளை ஒருறுப்புக் கோவைகள் (monomials) என்பர். (மோனோ (mono) என்றால் 1 என பொருள்படும்)

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி:

$$p(x) = x + 1, \quad q(x) = x^2 - x, \quad r(y) = y^9 + 1, \quad t(u) = u^{15} - u^2$$

ஒவ்வொரு கோவையிலும் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன? ஒவ்வொன்றும் இரண்டு உறுப்புகளை கொண்டுள்ளன. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அந்த பல்லுறுப்புக் கோவையை ஈருறுப்புக் கோவை என்பர். இதேபோல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அவற்றை மூவுறுப்புக் கோவை என்பர். மூவுறுப்புக் கோவைக்கு எடுத்துக்காட்டு:

$$\begin{aligned} p(x) &= x + x^2 + \pi, & q(x) &= \sqrt{2} + x - x^2, \\ r(u) &= u + u^2 - 2, & t(y) &= y^4 + y + 5. \end{aligned}$$

$p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை கவனி. x ன் மிக அதிகபட்ச அடுக்கு கொண்ட உறுப்பு எது? அது $3x^7$ என்பதாகும். இந்த உறுப்பில் x ன் அடுக்கு 7 ஆகும். இதேபோல் $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் y ன் மிக அதிகபட்ச அடுக்கு உள்ள உறுப்பு $5y^6$. மேலும் y ன் அடுக்கு 6. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் மாறியின் மிக அதிகபட்ச அடுக்கை நாம் அந்த பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என்கிறோம். எனவே $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 7 ஆகும். மேலும் $5y^6 - 4y^2 - 6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 6 ஆகும். மாறிலி உறுப்பை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : கீழே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படிகளை எழுதுக.

$$(i) x^5 - x^4 + 3 \quad (ii) 2 - y^2 - y^3 + 2y^8 \quad (iii) 2$$

தீர்வு : (i) மாறியின் அதிகபட்ச அடுக்கு 5. எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5.

(ii) மாறியின் அதிகபட்ச அடுக்கு 8. எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 8.

(iii) இதிலுள்ள ஒரேயொரு உறுப்பு 2. இதை $2x^0$ என எழுதலாம். x ன் அடுக்கு 0. எனவே இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி '0'.

Now observe the polynomials $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ and $s(u) = 3 - u$. Do you see anything common among all of them? The degree of each of these polynomials is one. A polynomial of degree one is called a *linear polynomial*. Some more linear polynomials in one variable are $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$. Now, try and find a linear polynomial in x with 3 terms? You would not be able to find it because a linear polynomial in x can have at most two terms. So, any linear polynomial in x will be of the form $ax + b$, where a and b are constants and $a \neq 0$ (why?). Similarly, $ay + b$ is a linear polynomial in y .

Now consider the polynomials :

$$2x^2 + 5, \quad 5x^2 + 3x + \pi, \quad x^2 \text{ and } x^2 + \frac{2}{5}x$$

Do you agree that they are all of degree two? A polynomial of degree two is called a *quadratic polynomial*. Some examples of a quadratic polynomial are $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ and $6 - y - y^2$. Can you write a quadratic polynomial in one variable with four different terms? You will find that a quadratic polynomial in one variable will have at most 3 terms. If you list a few more quadratic polynomials, you will find that any quadratic polynomial in x is of the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$ and a, b, c are constants. Similarly, quadratic polynomial in y will be of the form $ay^2 + by + c$, provided $a \neq 0$ and a, b, c are constants.

We call a polynomial of degree three a *cubic polynomial*. Some examples of a cubic polynomial in x are $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. How many terms do you think a cubic polynomial in one variable can have? It can have at most 4 terms. These may be written in the form $ax^3 + bx^2 + cx + d$, where $a \neq 0$ and a, b, c and d are constants.

Now, that you have seen what a polynomial of degree 1, degree 2, or degree 3 looks like, can you write down a polynomial in one variable of degree n for any natural number n ? A polynomial in one variable x of degree n is an expression of the form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

where $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ are constants and $a_n \neq 0$.

In particular, if $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ (all the constants are zero), we get the **zero polynomial**, which is denoted by 0. What is the degree of the zero polynomial? The degree of the zero polynomial is *not defined*.

So far we have dealt with polynomials in one variable only. We can also have polynomials in more than one variable. For example, $x^2 + y^2 + xyz$ (where variables are x, y and z) is a polynomial in three variables. Similarly $p^2 + q^{10} + r$ (where the variables are p, q and r), $u^3 + v^2$ (where the variables are u and v) are polynomials in three and two variables, respectively. You will be studying such polynomials in detail later.

இப்போது பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி. $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ மற்றும் $s(u) = 3 - u$. இவற்றில் பொதுவான பண்பு ஏதாவது உள்ளதா? இந்த பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றின் படியும் 1. ஒரு மாறி மற்றும் படி ஒன்றாக உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை என்று அழைப்பர். மேலும் சில ஒரு மாறி கொண்ட ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$ முதலியன. இப்போது 3 உறுப்பு கொண்ட x மாறியுடன் கூடிய ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடிப்போம். உன்னால் கண்டுபிடிக்க முடியாது. ஏனெனில் ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையில் அதிகபட்சம் இரண்டு உறுப்புகள் மட்டுமே இருக்கும். எனவே x மாறியுடன் கூடிய ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது $ax + b$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறிலிகள். மேலும் $a \neq 0$ (ஏன்?). இதேபோல் $ay + b$ என்பது y ல் ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை.

இப்போது கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனிப்போம் :

$$2x^2 + 5, 5x^2 + 3x + \pi, x^2 \text{ மற்றும் } x^2 + \frac{2}{5}x$$

இவை அனைத்தும் படி '2' ஐ கொண்டவையா? படி 2 ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்பர். இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள்: $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ மற்றும் $6 - y - y^2$. ஒரு மாறியுடன் கூடிய நான்கு வெவ்வேறு உறுப்புகள் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுத முடியுமா? ஒரு மாறியை கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையில் அதிகபட்சம் மூன்று உறுப்புகள் இருக்கும். x ஐ மாறியாக கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பொது வடிவம் $ax^2 + bx + c$ என்பதாகும். இங்கு a, b, c என்பன மாறிலிகள், மேலும் $a \neq 0$. இதேபோல் y ஐ மாறியாக கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பொதுவடிவம் $ay^2 + by + c$ ஆகும். இங்கு a, b, c என்பன மாறிலிகள். மேலும் $a \neq 0$.

படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ என்பன x ஐ மாறியாக கொண்ட சில முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஆகும். ஒரு மாறி கொண்ட முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையில் எத்தனை உறுப்புகள் இருக்கக்கூடும் என நீ நினைக்கிறாய்? அதிகபட்சமாக 4 உறுப்புகள் இருக்கும். இதை $ax^3 + bx^2 + cx + d$. இங்கு $a \neq 0$, மேலும் a, b, c, d என்பன மாறிலிகள்.

இப்போது படி 1, படி 2, படி 3 கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எவ்வாறு இருக்கும் என உங்களுக்கு தெரியும். இயல் எண் n க்கு ஒரு மாறியுடன் கூடிய n படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை உன்னால் எழுத முடியுமா? ஒரு மாறி x கொண்ட படி n உடைய பல்லுறுப்புக் கோவையானது

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ என்ற வடிவில் இருக்கும்.}$$

இங்கு $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ என்பன மாறிலிகள். மேலும் $a_n \neq 0$.

ஒருவேளை $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ (எல்லா மாறிலிகளும் '0') எனில் நமக்கு பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கிறது. இதை '0' என குறிக்கிறோம். பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என்ன? இது வரையறுக்கப்படவில்லை.

இதுவரை நாம் ஒரு மாறி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றி மட்டுமே பார்த்தோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக $x^2 + y^2 + xyz$ (இங்கு x, y, z என்பன மாறிகள்) என்பது 3 மாறிகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதேபோல் $p^2 + q^{10} + r$ (இங்கு p, q, r என்பன மாறிகள்), $u^3 + v^2$ (இங்கு u, v என்பன மாறிகள்) முதலியன 3 மற்றும் 2 மாறிகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள். இது குறித்து பிறகு நீங்கள் விரிவாக படிப்பீர்கள்.

EXERCISE 2.1

- Which of the following expressions are polynomials in one variable and which are not? State reasons for your answer.
 (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$
 (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$
- Write the coefficients of x^2 in each of the following:
 (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$
- Give one example each of a binomial of degree 35, and of a monomial of degree 100.
- Write the degree of each of the following polynomials:
 (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3
- Classify the following as linear, quadratic and cubic polynomials:
 (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$
 (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$
- If $P(x) = 2x^6 + 7x^5 + 3$ and $Q(x) = 7x^5 + x^3 + 1$ are polynomials, then the degree of $P(x) + Q(x)$ is
 (A) 11 (B) 6 (C) 8 (D) 19

2.3 Zeroes of a Polynomial

Consider the polynomial $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

If we replace x by 1 everywhere in $p(x)$, we get

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

So, we say that the value of $p(x)$ at $x = 1$ is 4.

Similarly, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$
 $= -2$

Can you find $p(-1)$?

Example 2 : Find the value of each of the following polynomials at the indicated value of variables:

- $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ at $x = 1$.
- $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ at $y = 2$.
- $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ at $t = a$.

பயிற்சி 2.1

1. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் ஒரு மாறியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லாதது எது? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
 (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$
 (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$
2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் x^2 ன் குணகங்களை எழுதுக.
 (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$
3. 35 ஐ படியாக கொண்ட ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை, 100 ஐ படியாக கொண்ட ஒருறுப்புக் கோவைக்கு ஒவ்வொரு உதாரணம் கொடு.
4. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றின் படிகளை எழுதுக.
 (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3
5. கீழ்க்கண்டவற்றில் ஒருபடி, இருபடி, முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துக.
 (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$
 (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$
6. $P(x) = 2x^6 + 7x^5 + 3$ மற்றும் $Q(x) = 7x^5 + x^3 + 1$ ஆகியன பல்லுறுப்புக்கோவைகள் எனில் $P(x) + Q(x)$ ன் படி
 (A) 11 (B) 6 (C) 8 (D) 19

2.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள் :

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக்கொள். x இருக்கும் இடத்தில் 1 ஐ பிரதியிட்டால்,

$$\begin{aligned} \text{நாம் பெறுவது, } p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

எனவே $p(x)$ ன் மதிப்பு $x = 1$ எனில் 4 ஆகும்.

$$\begin{aligned} \text{இதேபோல், } p(0) &= 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

நீங்கள் $p(-1)$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடிப்பீர்களா?

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்பையும் கொடுக்கப்பட்ட மாறியின் மதிப்பிற்கு ஏற்றவாறு கண்டுபிடிக்கவும்.

- (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$. இதில் $x = 1$
- (ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$. இதில் $y = 2$
- (iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$. இதில் $t = a$

Solution : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

The value of the polynomial $p(x)$ at $x = 1$ is given by

$$\begin{aligned} p(1) &= 5(1)^2 - 3(1) + 7 \\ &= 5 - 3 + 7 = 9 \end{aligned}$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

The value of the polynomial $q(y)$ at $y = 2$ is given by

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

The value of the polynomial $p(t)$ at $t = a$ is given by

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

Now, consider the polynomial $p(x) = x - 1$.

What is $p(1)$? Note that : $p(1) = 1 - 1 = 0$.

As $p(1) = 0$, we say that 1 is a *zero* of the polynomial $p(x)$.

Similarly, you can check that 2 is a *zero* of $q(x)$, where $q(x) = x - 2$.

In general, we say that a *zero* of a polynomial $p(x)$ is a number c such that $p(c) = 0$.

You must have observed that the zero of the polynomial $x - 1$ is obtained by equating it to 0, i.e., $x - 1 = 0$, which gives $x = 1$. We say $p(x) = 0$ is a polynomial equation and 1 is the *root of the polynomial* equation $p(x) = 0$. So we say 1 is the zero of the polynomial $x - 1$, or a *root of the polynomial* equation $x - 1 = 0$.

Now, consider the constant polynomial 5. Can you tell what its zero is? It has no zero because replacing x by any number in $5x^0$ still gives us 5. In fact, *a non-zero constant polynomial has no zero*. What about the zeroes of the zero polynomial? By convention, *every real number is a zero of the zero polynomial*.

Example 3 : Check whether -2 and 2 are zeroes of the polynomial $x + 2$.

Solution : Let $p(x) = x + 2$.

Then $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

Therefore, -2 is a zero of the polynomial $x + 2$, but 2 is not.

Example 4 : Find a zero of the polynomial $p(x) = 2x + 1$.

Solution : Finding a zero of $p(x)$, is the same as solving the equation

$$p(x) = 0$$

தீர்வு : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ எனும்போது $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு

$$\begin{aligned} p(1) &= 5(1)^2 - 3(1) + 7 \\ &= 5 - 3 + 7 = 9 \end{aligned}$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ எனும்போது, $q(y)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ எனும்போது, $p(t)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

இப்போது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = x - 1$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

இதில் $p(1)$ ன் மதிப்பு என்ன? $p(1) = 1 - 1 = 0$ என கவனிக்கவும். $p(1) = 0$. $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் 1 என நாம் கூறலாம்.

இதேபோல், 2 என்பது $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகமா சரிபார்ப்போம். இங்கு $q(x) = x - 2$.

பொதுவாக, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் என்பது ஒரு எண் c ஆகும். இங்கே $p(c) = 0$ எனில் c ஐ $p(x)$ ன் பூஜ்ஜிய மதிப்பு என்பர்.

$x - 1$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடிப்பதற்கு $x - 1$ ஐ 0 க்கு சமம் என காட்டுவதன் மூலம் பெறலாம். அதாவது $x - 1 = 0$ எனில் $x = 1$. இங்கு $p(x) = 0$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு ஆகும். மேலும் $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் பூஜ்ஜியம் 1 ஆகும். எனவே 1 ஐ $x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் பூஜ்ஜியம் எனவும் அல்லது $x - 1 = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் மூலம் எனவும் கூறலாம்.

நாம் இப்போது மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை 5 ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதனுடைய பூஜ்ஜியம் என்னவென்று உன்னால் கூற முடியுமா? இதற்கு பூஜ்ஜியம் கிடையாது. ஏனெனில் x க்கு பதிலாக எந்த எண்ணைக் கொடுத்தாலும் $5x^0$ ன் மதிப்பு 5 மட்டுமே வரும். எனவே பூஜ்ஜியம் அல்லாத மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூஜ்ஜியம் இல்லை. பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையில் பூஜ்ஜியம் என்பது என்ன? ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: -2 மற்றும் 2 என்பன $x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களா என சோதித்துப் பார்க்க.

தீர்வு : $p(x) = x + 2$ என்க.

$$\text{மேலும் } p(2) = 2 + 2 = 4, p(-2) = -2 + 2 = 0$$

எனவே -2 என்பது $x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகும். ஆனால் 2, $p(x)$ க்கு பூஜ்ஜியம் ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $p(x) = 2x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியத்தை கண்டுபிடி?

தீர்வு : $p(x) = 0$ என கண்டுபிடித்ததை போலவே $p(x)$ ன் பூஜ்ஜிய மதிப்பை கண்டுபிடிக்கலாம்.

$p(x)$ ஐ 0 க்கு சமமாக்க வேண்டும்.

Now, $2x + 1 = 0$ gives us $x = -\frac{1}{2}$

So, $-\frac{1}{2}$ is a zero of the polynomial $2x + 1$.

Now, if $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, is a linear polynomial, how can we find a zero of $p(x)$? Example 4 may have given you some idea. Finding a zero of the polynomial $p(x)$, amounts to solving the polynomial equation $p(x) = 0$.

Now, $p(x) = 0$ means $ax + b = 0$, $a \neq 0$

So, $ax = -b$
i.e., $x = -\frac{b}{a}$.

So, $x = -\frac{b}{a}$ is the only zero of $p(x)$, i.e., a linear polynomial has one and only one zero.

Now we can say that 1 is the zero of $x - 1$, and -2 is the zero of $x + 2$.

Example 5 : Verify whether 2 and 0 are zeroes of the polynomial $x^2 - 2x$.

Solution : Let

$$p(x) = x^2 - 2x$$

Then

$$p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

and

$$p(0) = 0 - 0 = 0$$

Hence, 2 and 0 are both zeroes of the polynomial $x^2 - 2x$.

Let us now list our observations:

- (i) A zero of a polynomial need not be 0.
- (ii) 0 may be a zero of a polynomial.
- (iii) Every linear polynomial has one and only one zero.
- (iv) A polynomial can have more than one zero.

EXERCISE 2.2

- Find the value of the polynomial $5x - 4x^2 + 3$ at
 - (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$
- Find $p(0)$, $p(1)$ and $p(2)$ for each of the following polynomials:
 - (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$
 - (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

இப்போது $2x + 1 = 0$ எனில் $x = -\frac{1}{2}$ ஆகும்.

எனவே $-\frac{1}{2}$ என்பது $2x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

இப்போது $p(x) = ax + b$ மேலும் $a \neq 0$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியத்தை நாம் எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது? எடுத்துக்காட்டு 4 ன் மூலம் உங்களுக்கு சில வழிமுறைகள் புரிந்திருக்கும். பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியத்தை காண பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு $p(x) = 0$ என்பதை தீர்க்க வேண்டும்.

இப்போது $p(x) = 0$ எனில் $ax + b = 0$, $a \neq 0$

$$\begin{array}{ll} \text{ஆகவே} & ax = -b \\ \text{அதாவது} & x = -\frac{b}{a} \end{array}$$

எனவே $p(x)$ ன் பூஜ்ஜிய மதிப்பு $-\frac{b}{a}$ மட்டுமே ஆகும். நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தை மட்டும் பெற்றிருக்கும் என்பது.

1 என்பது $x - 1$ ன் பூஜ்ஜியம் மேலும் -2 என்பது $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியம் எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5: 2 மற்றும் 0 என்பன பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - 2x$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகுமா?

தீர்வு : $p(x) = x^2 - 2x$ எனக்கொள்.

$$\text{இப்போது, } p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\text{மற்றும் } p(0) = 0 - 0 = 0$$

எனவே, $x^2 - 2x$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் 2 மற்றும் 0 ஆகும்.

இதுவரை நாம் அறிந்தவை :

- ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜிய மதிப்பானது பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை
- ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் 0 ஆக இருக்கலாம்.
- நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரேயொரு பூஜ்ஜியத்தை மட்டும் பெற்றிருக்கும்.
- ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்களை பெற்றிருக்கும்.

பயிற்சி 2.2

1. கீழுள்ள மதிப்புகளில் $5x - 4x^2 + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பை கண்டுபிடி

$$(i) x = 0 \quad (ii) x = -1 \quad (iii) x = 2$$

2. கீழுள்ள ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் $p(0)$, $p(1)$ மற்றும் $p(2)$ ன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி

$$(i) p(y) = y^2 - y + 1 \quad (ii) p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$$

$$(iii) p(x) = x^3 \quad (iv) p(x) = (x - 1)(x + 1)$$

3. Verify whether the following are zeroes of the polynomial, indicated against them.

(i) $p(x) = 3x + 1$, $x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi$, $x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1$, $x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$, $x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2$, $x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m$, $x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1$, $x = \frac{1}{2}$

4. Find the zero of the polynomial in each of the following cases:

(i) $p(x) = x + 5$

(ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$

(vi) $p(x) = ax$, $a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d$, $c \neq 0$, c, d are real numbers.

2.4 Factorisation of Polynomials

Let us now look at the situation of Example 10 above more closely. It tells us that since the remainder, $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $(2t + 1)$ is a factor of $q(t)$, i.e., $q(t) = (2t + 1)g(t)$

for some polynomial $g(t)$. This is a particular case of the following theorem.

Factor Theorem : If $p(x)$ is a polynomial of degree $n \geq 1$ and a is any real number, then

(i) $x - a$ is a factor of $p(x)$, if $p(a) = 0$, and (ii) $p(a) = 0$, if $x - a$ is a factor of $p(x)$.

Proof: By the Remainder Theorem, $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$.

(i) If $p(a) = 0$, then $p(x) = (x - a)q(x)$, which shows that $x - a$ is a factor of $p(x)$.

(ii) Since $x - a$ is a factor of $p(x)$, $p(x) = (x - a)g(x)$ for some polynomial $g(x)$. In this case, $p(a) = (a - a)g(a) = 0$.

Example 6 : Examine whether $x + 2$ is a factor of $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ and of $2x + 4$.

Solution : The zero of $x + 2$ is -2 . Let $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ and $s(x) = 2x + 4$

$$\begin{aligned}\text{Then, } p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

So, by the Factor Theorem, $x + 2$ is a factor of $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$.

3. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள x ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியங்கள் ஆகுமா என சரிபார்.

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2, x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = x + 5$

(ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$

(vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0$ மேலும் c, d மெய் எண்கள்

2.4 பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல்

இப்போது எடுத்துக்காட்டு 10 ஐ மீண்டும் ஒருமுறை கூர்ந்து கவனி. இதில் மீதி $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ என்பதால் $(2t + 1)$ என்பது $q(t)$ ன் காரணி ஆகிறது. அதாவது $q(t) = (2t + 1)g(t)$, இங்கு $g(t)$ என்பது ஏதாவது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. இது கீழ்க்கண்ட தேற்றத்திற்குரிய ஒரு செயல்.

காரணி தேற்றம் : $p(x)$ என்பது $n \geq 1$ படியாக கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் என்க. (i) $p(a) = 0$ எனில் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி ஆகும். மேலும் இதன் மறுதலையாக (ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ க்கு காரணி எனில் $p(a) = 0$ ஆகும்.

நிரூபணம் : மீதித் தேற்றத்தின்படி, $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ என்ற கூற்றை எடுத்துக்கொண்டால் $p(x) = (x - a)q(x)$ ஆகும். மேலும் $p(x)$ க்கு $(x - a)$ ஒரு காரணி ஆகிறது.

(ii) இதேபோல், $(x - a)$ என்பது $p(x)$ க்கு ஒரு காரணியானதால் $p(x) = (x - a)g(x)$.

இவ்வாறு $\therefore p(a) = (a - a)g(a) = 0$. $(x - a)$ என்பது $p(x)$ க்கு ஒரு காரணி எனில் $p(a) = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : $x + 2$ என்பது $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ மற்றும் $2x + 4$ க்கு காரணியாகுமா?

தீர்வு : $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியம் -2 . இங்கு $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ மற்றும் $s(x) = 2x + 4$ எனக்கொள்.

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \end{aligned}$$

$$\text{இப்போது,} \quad = 0$$

எனவே காரணித் தேற்றத்தின்படி $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ க்கு $x + 2$ என்பது ஒரு காரணி ஆகும்.

Again, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

So, $x + 2$ is a factor of $2x + 4$. In fact, you can check this without applying the Factor Theorem, since $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Example 7 : Find the value of k , if $x - 1$ is a factor of $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$.

Solution : As $x - 1$ is a factor of $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$, $p(1) = 0$

Now, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

So, $4 + 3 - 4 + k = 0$

i.e., $k = -3$

We will now use the Factor Theorem to factorise some polynomials of degree 2 and 3. You are already familiar with the factorisation of a quadratic polynomial like $x^2 + lx + m$. You had factorised it by splitting the middle term lx as $ax + bx$ so that $ab = m$. Then $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$. We shall now try to factorise quadratic polynomials of the type $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$ and a, b, c are constants.

Factorisation of the polynomial $ax^2 + bx + c$ by **splitting the middle term** is as follows:

Let its factors be $(px + q)$ and $(rx + s)$. Then $\frac{3x^2}{x} = 3x$ = first term of quotient

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

Comparing the coefficients of x^2 , we get $a = pr$.

Similarly, comparing the coefficients of x , we get $b = ps + qr$.

And, on comparing the constant terms, we get $c = qs$.

This shows us that b is the sum of two numbers ps and qr , whose product is $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$.

Therefore, to factorise $ax^2 + bx + c$, we have to write b as the sum of two numbers whose product is ac . This will be clear from Example 13.

Example 8 : Factorise $6x^2 + 17x + 5$ by splitting the middle term, and by using the Factor Theorem.

Solution 1 : (By splitting method) : If we can find two numbers p and q such that $p + q = 17$ and $pq = 6 \times 5 = 30$, then we can get the factors.

So, let us look for the pairs of factors of 30. Some are 1 and 30, 2 and 15, 3 and 10, 5 and 6. Of these pairs, 2 and 15 will give us $p + q = 17$.

மேலும்,

$$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$$

எனவே $(x+2)$ என்பது $2x+4$ ன் ஒரு காரணி ஆகும். காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்தாமலே இதை நீங்கள் நிரூபிக்கலாம். எவ்வாறு எனில் $2x+4 = 2(x+2)$

எடுத்துக்காட்டு 7 : $(x-1)$ என்பது $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ன் காரணி எனில் k ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $(x-1)$ என்பது $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ன் காரணி என்பதால், $p(1) = 0$

இப்போது,
$$p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$$

ஆகவே,
$$4 + 3 - 4 + k = 0$$

அதாவது.,
$$k = -3$$

படி 2 மற்றும் படி 3 கொண்ட சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்த காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்துவோம். ஏற்கனவே நீங்கள் இருபடி கோவைகளை காரணிப்படுத்துதலை அறிந்திருக்கிறீர்கள். உதாரணமாக $x^2 + lx + m$ ன் மைய உறுப்பு lx ஐ பிரித்து $ax + bx$ என்றும், இதில் $ab = m$ என்றும் கொண்டு $x^2 + lx + m = (x+a)(x+b)$ என காரணிப்படுத்தலாம். நாம் இப்போது $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துவோம். இங்கு $a \neq 0$ மேலும் a, b, c என்பன மாறிலிகள்.

$ax^2 + bx + c$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மைய உறுப்பை கீழ்க்கண்டவாறு காரணிப்படுத்தலாம்.

அவற்றின் காரணிகள் $(px + q)$ மேலும் $(rx + s)$ எனக்கொள்க.

எனவே $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = prx^2 + (ps + qr)x + qs$

x^2 ன் குணகங்களை ஒப்பிடும்போது $a = pr$ என கிடைக்கிறது.

இதேபோல், x ன் குணகங்களை ஒப்பிடும்போது $b = ps + qr$ என கிடைக்கிறது.

மேலும் மாறிலிகளை ஒப்பிடும்போது $c = qs$ எனக் கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து நாம் b என்பது ps மற்றும் qr என்ற இரு எண்களின் கூடுதல் என அறிகிறோம். இவற்றின் பெருக்கல் $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$.

எனவே $ax^2 + bx + c$ என்பதை காரணிப்படுத்த b என்பதை இரு எண்களின் கூடுதலாக எழுத வேண்டும். அந்த இரு எண்களின் பெருக்கற்பலன் ac .

எடுத்துக்காட்டு 13 ன் மூலம் இதை சரியாக புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 : காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்தியும், மைய உறுப்பை பிரித்தும் $6x^2 + 17x + 5$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு 1: (மைய உறுப்பை பிரிக்கும் முறை) : இரண்டு எண்கள் p மற்றும் q ல் $p + q = 17$

எனவும் $pq = 6 \times 5 = 30$ எனவும் வருமானால் நமக்கு காரணிகள் கிடைக்கும். எனவே 30ன் காரணிகளின் ஜோடியை காண்போம். $(1,30), (2,15), (3,10), (5,6)$ இந்த ஜோடிகளில் $(2,15)$ என்பவை $p + q = 17$ என்று வருகிறது.

$$\begin{aligned}
 \text{So, } 6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)x + 5 \\
 &= 6x^2 + 2x + 15x + 5 \\
 &= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1) \\
 &= (3x + 1)(2x + 5)
 \end{aligned}$$

Solution 2 : (Using the Factor Theorem)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6p(x)$, say. If a and b are the zeroes of $p(x)$, then $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. So, $ab = \frac{5}{6}$. Let us look at some possibilities for a and b .

They could be $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$. Now, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$. But

$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$. So, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ is a factor of $p(x)$. Similarly, by trial, you can find that $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ is a factor of $p(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Therefore, } 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \\
 &= 6\left(\frac{3x + 1}{3}\right)\left(\frac{2x + 5}{2}\right) \\
 &= (3x + 1)(2x + 5)
 \end{aligned}$$

For the example above, the use of the splitting method appears more efficient. However, let us consider another example.

Example 9 : Factorise $y^2 - 5y + 6$ by using the Factor Theorem.

Solution : Let $p(y) = y^2 - 5y + 6$. Now, if $p(y) = (y - a)(y - b)$, you know that the constant term will be ab . So, $ab = 6$. So, to look for the factors of $p(y)$, we look at the factors of 6.

The factors of 6 are 1, 2 and 3.

$$\text{Now, } p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$$

So, $y - 2$ is a factor of $p(y)$.

$$\begin{aligned}
 \text{எனவே } 6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)x + 5 \\
 &= 6x^2 + 2x + 15x + 5 \\
 &= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1) \\
 &= (3x + 1)(2x + 5)
 \end{aligned}$$

தீர்வு 2 : (காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்துதல்)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6p(x)$ எனக்கொள். a, b என்பன $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியங்கள்

எனில் $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. ஆகையால் $ab = \frac{5}{6}$. இப்போது a, b க்கு சில சாத்தியக்கூறுகளை பார்ப்போம்,

அவை $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{2}, \pm 1$ என இருக்கலாம். இப்போது $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$.

ஆனால் $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$, எனவே $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி ஆகும். இதேபோல்

முயற்சித்தால் $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ என்பதும் ஒரு காரணி என அறியலாம்.

$$\begin{aligned}
 \text{ஆகையால், } 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \\
 &= 6\left(\frac{3x + 1}{3}\right)\left(\frac{2x + 5}{2}\right) \\
 &= (3x + 1)(2x + 5)
 \end{aligned}$$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து மைய உறுப்பை பிரிக்கும் முறை மிகவும் எளிதானவை என அறியலாம். எனினும் மற்றும் ஓர் எடுத்துக்காட்டை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $y^2 - 5y + 6$ ஐ காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : $p(y) = y^2 - 5y + 6$. என்க. $p(y) = (y - a)(y - b)$ எனில் இதன் மாறிலி உறுப்பு ab . எனவே $ab = 6$. $p(y)$ ன் காரணிகளை கண்டுபிடிக்க முதலில் 6 ன் காரணிகளை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

6 ன் காரணிகள் 1, 2, 3 மற்றும் 6.

$$\text{இப்போது } p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$$

எனவே $(y - 2)$ என்பது $p(y)$ ன் காரணி.

Also, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

So, $y - 3$ is also a factor of $y^2 - 5y + 6$.

Therefore, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

Note that $y^2 - 5y + 6$ can also be factorised by splitting the middle term $-5y$.

Now, let us consider factorising cubic polynomials. Here, the splitting method will not be appropriate to start with. We need to find at least one factor first, as you will see in the following example.

Example 10 : Factorise $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$.

Solution : Let $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

We shall now look for all the factors of -120 . Some of these are $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$.

By trial, we find that $p(1) = 0$. So $x - 1$ is a factor of $p(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Now we see that } x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad (\text{Why?}) \\ &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \quad [\text{Taking } (x - 1) \text{ common}] \end{aligned}$$

We could have also got this by dividing $p(x)$ by $x - 1$.

Now $x^2 - 22x + 120$ can be factorised either by splitting the middle term or by using the Factor theorem. By splitting the middle term, we have:

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

So, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

EXERCISE 2.3

1. Determine which of the following polynomials has $(x + 1)$ a factor :

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. Use the Factor Theorem to determine whether $g(x)$ is a factor of $p(x)$ in each of the following cases:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

இதேபோல், $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

எனவே $(y - 3)$ என்பதும் $y^2 - 5y + 6$ ன் ஓர் காரணி.

ஆகையால், $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

$y^2 - 5y + 6$ என்பதன் மைய உறுப்பு $-5y$ ஐ பிரித்தும் காரணிப்படுத்தலாம் என்பதை கவனிக்க. $y^2 - 5y + 6$ ல் மைய உறுப்பு $-5y$ ஐ பிரித்தலின் மூலமே காரணிப்படுத்துதல் நடைபெற்றது என்பதை நினைவில்கொள். இப்போது முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல் எவ்வாறு என பார்ப்போம். இங்கு பிரித்தல் முறையை பயன்படுத்துவது சரிவராது. நாம் முதலில் குறைந்தபட்சம் ஒரு காரணியாவது கண்டுபிடிப்பது அவசியம். இதை கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ என்க.

இப்போது -120 ன் எல்லா காரணிகளையும் நாம் பார்ப்போம். அவற்றில் சில $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$.

முயற்சித்தல் முறையில் $p(1) = 0$ என்பதை கண்டறிந்தோம். எனவே $(x - 1)$ என்பது $p(x)$ க்கு ஓர் காரணி.

$$\begin{aligned} \text{இப்போது } x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad (\text{ஏன்?}) \\ &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \quad (x - 1 \text{ ஐ பொதுவாக எடுக்க}) \end{aligned}$$

$p(x)$ ஐ $x - 1$ ஆல் வகுக்கும் போதும் இதை நாம் பெறலாம். $x^2 - 22x + 120$.

இப்போது $x^2 - 22x + 120$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை மைய உறுப்பை பிரித்து காரணிப்படுத்துவோம்.

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

எனவே, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்பு கோவைகளில் $(x + 1)$ ஐ காரணியாக கொண்டவை எவை என கண்டுபிடிக்கவும்?

- (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் $g(x)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணியா என்பதை காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்தி கண்டுபிடி.

- (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

$$(ii) p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$$

$$(iii) p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$$

3. Find the value of k , if $x - 1$ is a factor of $p(x)$ in each of the following cases:

$$(i) p(x) = x^2 + x + k$$

$$(ii) p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$$

$$(iii) p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$(iv) p(x) = kx^2 - 3x + k$$

4. Factorise :

$$(i) 12x^2 - 7x + 1$$

$$(ii) 2x^2 + 7x + 3$$

$$(iii) 6x^2 + 5x - 6$$

$$(iv) 3x^2 - x - 4$$

5. Factorise :

$$(i) x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$(ii) x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

$$(iii) x^3 + 13x^2 + 32x + 20$$

$$(iv) 2y^3 + y^2 - 2y - 1$$

2.5 Algebraic Identities

From your earlier classes, you may recall that an algebraic identity is an algebraic equation that is true for all values of the variables occurring in it. You have studied the following algebraic identities in earlier classes:

Identity I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Identity II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Identity III: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Identity IV: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

You must have also used some of these algebraic identities to factorise the algebraic expressions. You can also see their utility in computations.

Example 11 : Find the following products using appropriate identities:

$$(i) (x + 3)(x + 3) \quad (ii) (x - 3)(x + 5)$$

Solution : (i) Here we can use Identity I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Putting $y = 3$ in it, we get

$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 3) &= (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

(ii) Using Identity IV above, i.e., $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, we have

$$\begin{aligned} (x - 3)(x + 5) &= x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5) \\ &= x^2 + 2x - 15 \end{aligned}$$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

3. கீழ்க்கண்டவற்றில் $p(x)$ ன் காரணி $x - 1$ எனில் k ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. காரணிபடுத்துக.

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

5. காரணிபடுத்துக.

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.5 இயற்கணித முற்றொருமைகள் :

இயற்கணித முற்றொருமை என்பது ஒரு இயற்கணித சமன்பாட்டில் வரும் மாறிகளுக்கு எந்த மதிப்பு அளித்தாலும் அது சரியாக இருக்கும் என்பதை நீங்கள் முன் வகுப்புகளில் படித்ததை நினைவு கூறுங்கள். கீழ்க்கண்ட இயற்கணித முற்றொருமைகளை நீங்கள் ஏற்கனவே படித்துள்ளீர்கள்.

முற்றொருமை I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

முற்றொருமை II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

முற்றொருமை III: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

முற்றொருமை IV: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

இயற்கணித கோவைகளை காரணிபடுத்த மேற்கண்ட முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி இருப்பீர்கள். அவற்றின் பயன்பாட்டை கீழே பாருங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 11: முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றின் பெருக்கற்பலனை கண்டுபிடி.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

தீர்வு : (i) நாம் இங்கே முற்றொருமை I $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ஐ பயன்படுத்த வேண்டும்.

இங்கு $y = 3$ என பிரதியிட்டால்

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 3) &= (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

(ii) நாம் இங்கே முற்றொருமை IV $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ஐ பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\begin{aligned}\text{இப்போது } (x - 3)(x + 5) &= x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5) \\ &= x^2 + 2x - 15\end{aligned}$$

Example 12 : Evaluate 105×106 without multiplying directly.

Solution :

$$\begin{aligned}
 105 \times 106 &= (100 + 5) \times (100 + 6) \\
 &= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6), \text{ using Identity IV} \\
 &= 10000 + 1100 + 30 \\
 &= 11130
 \end{aligned}$$

You have seen some uses of the identities listed above in finding the product of some given expressions. These identities are useful in factorisation of algebraic expressions also, as you can see in the following examples.

Example 13 : Factorise:

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

Solution : (i) Here you can see that

$$49a^2 = (7a)^2, 25b^2 = (5b)^2, 70ab = 2(7a)(5b)$$

Comparing the given expression with $x^2 + 2xy + y^2$, we observe that $x = 7a$ and $y = 5b$.

Using Identity I, we get

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) We have $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

Now comparing it with Identity III, we get

$$\begin{aligned}
 \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} &= \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)
 \end{aligned}$$

So far, all our identities involved products of binomials. Let us now extend the Identity I to a trinomial $x + y + z$. We shall compute $(x + y + z)^2$ by using Identity I.

Let $x + y = t$. Then,

$$\begin{aligned}
 (x + y + z)^2 &= (t + z)^2 \\
 &= t^2 + 2tz + z^2 && \text{(Using Identity I)} \\
 &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 && \text{(Substituting the value of } t)
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 12 : பெருக்கல் செய்யாமல் 105×106 ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$\begin{aligned} 105 \times 106 &= (100 + 5) \times (100 + 6) \\ &= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6), \text{ (முற்றொருமை IV ஐ பயன்படுத்தி)} \\ &= 10000 + 1100 + 30 \\ &= 11130 \end{aligned}$$

கொடுக்கப்பட்ட இயற்கணித கோவைகளின் பெருக்கற்பலனை காண முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தியதை பார்த்தோம். இந்த முற்றொருமைகள் இயற்கணித கோவைகளை காரணிபடுத்தவும் பயன்படுவதை கீழே காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 13 : காரணிபடுத்துக.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

தீர்வு : (i) இங்கு $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$

கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $x^2 + 2xy + y^2$ என்பதுடன் ஒப்பிட்டால் நாம் பெறுவது $x = 7a$ மற்றும் $y = 5b$.

முற்றொருமை I ஐ பயன்படுத்தி

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

இதை முற்றொருமை III உடன் ஒப்பிட்டால்

$$\begin{aligned} \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} &= \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right) \end{aligned}$$

இதுவரை ஈருறுப்புக் கோவைகளை முற்றொருமை உதவியுடன் தீர்த்தோம். இப்போது முற்றொருமை I ஐ மூன்றுப்பு கோவை $x + y + z$ என்பதில் எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என பார்ப்போம். $(x + y + z)^2$ என்பதையும் முற்றொருமை I ஐ பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்துவோம்.

இங்கு $x + y = t$ என்க.

$$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$$

$$= t^2 + 2tz + z^2$$

$$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$$

(முற்றொருமை I பண்பு)

(t ன் மதிப்பை பிரதியிட்டால்)

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad (\text{Using Identity I}) \\
 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \quad (\text{Rearranging the terms})
 \end{aligned}$$

So, we get the following identity:

Identity V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

Remark : We call the right hand side expression **the expanded form** of the left hand side expression. Note that the expansion of $(x + y + z)^2$ consists of three square terms and three product terms.

Example 14 : Write $(3a + 4b + 5c)^2$ in expanded form.

Solution : Comparing the given expression with $(x + y + z)^2$, we find that

$$x = 3a, y = 4b \text{ and } z = 5c.$$

Therefore, using Identity V, we have

$$\begin{aligned}
 (3a + 4b + 5c)^2 &= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a) \\
 &= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac
 \end{aligned}$$

Example 15 : Expand $(4a - 2b - 3c)^2$.

Solution : Using Identity V, we have

$$\begin{aligned}
 (4a - 2b - 3c)^2 &= [4a + (-2b) + (-3c)]^2 \\
 &= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a) \\
 &= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac
 \end{aligned}$$

Example 16 : Factorise $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$.

$$\begin{aligned}
 \text{Solution : We have } 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz &= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) \\
 &\quad + 2(-y)(z) + 2(2x)(z) \\
 &= [2x + (-y) + z]^2 \quad (\text{Using Identity V}) \\
 &= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)
 \end{aligned}$$

So far, we have dealt with identities involving second degree terms. Now let us extend Identity I to compute $(x + y)^3$. We have:

$$\begin{aligned}
 (x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2 \\
 &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\
 &= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\
 &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\
 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)
 \end{aligned}$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad (\text{முற்றொருமை I ன் படி})$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \quad (\text{உறுப்புகளின் வரிசையை மாற்றுவதால்})$$

எனவே நமக்கு பின்வரும் முற்றொருமை கிடைக்கிறது.

முற்றொருமை V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

விளக்கம் : வலதுபுற கோவையை இடதுபுற கோவையின் விரிவாக்கம் என்கிறோம். $(x + y + z)^2$ என்பதன் விரிவாக்கம் மூன்று வர்க்க உறுப்புகளையும் மூன்று பெருக்கல் உறுப்புகளையும் கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 14 : $(3a + 4b + 5c)^2$ ன் விரிவாக்கத்தை கண்டுபிடி

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x + y + z)^2$ உடன் ஒப்பிடும்போது

$$x = 3a, y = 4b, z = 5c$$

முற்றொருமை V ஐ பயன்படுத்துக.

$$\begin{aligned} (3a + 4b + 5c)^2 &= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a) \\ &= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 15: $(4a - 2b - 3c)^2$ ஐ விரிவாக்கு.

தீர்வு : முற்றொருமை V ஐ பயன்படுத்தினால்,

$$\begin{aligned} (4a - 2b - 3c)^2 &= [4a + (-2b) + (-3c)]^2 \\ &= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a) \\ &= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 16 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ஐ காரணிபடுத்துக.

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : } 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz &= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) \\ &\quad + 2(-y)(z) + 2(2x)(z) \\ &= [2x + (-y) + z]^2 \quad (\text{முற்றொருமை V ஐ பயன்படுத்தினால்}) \\ &= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z) \end{aligned}$$

இதுவரை நாம் இரண்டு அடுக்கு கொண்ட முற்றொருமைகளை பற்றி பார்த்தோம். இப்போது முற்றொருமை I ஐ பயன்படுத்தி $(x + y)^3$ ஐ எவ்வாறு விரிவுபடுத்துவது என பார்ப்போம்.

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2 \\ &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \end{aligned}$$

So, we get the following identity:

Identity VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

Also, by replacing y by $-y$ in the Identity VI, we get

Identity VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
 $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Example 17 : Write the following cubes in the expanded form:

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

Solution : (i) Comparing the given expression with $(x + y)^3$, we find that

$$x = 3a \text{ and } y = 4b.$$

So, using Identity VI, we have:

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^3 &= (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b) \\ &= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2\end{aligned}$$

(ii) Comparing the given expression with $(x - y)^3$, we find that

$$x = 5p, y = 3q.$$

So, using Identity VII, we have:

$$\begin{aligned}(5p - 3q)^3 &= (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q) \\ &= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2\end{aligned}$$

Example 18 : Evaluate each of the following using suitable identities:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

Solution : (i) We have

$$\begin{aligned}(104)^3 &= (100 + 4)^3 \\ &= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4) \\ &= 1000000 + 64 + 124800 \\ &= 1124864\end{aligned}$$

(Using Identity VI)

(ii) We have

$$\begin{aligned}(999)^3 &= (1000 - 1)^3 \\ &= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1) \\ &= 1000000000 - 1 - 2997000 \\ &= 997002999\end{aligned}$$

(Using Identity VII)

எனவே நமக்கு கீழ்க்கண்ட முற்றொருமை கிடைக்கிறது.

முற்றொருமை VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

இதேபோல் முற்றொருமை VI ல் y பதிலாக $-y$ ஐ பயன்படுத்தினால் நமக்கு கிடைப்பது

முற்றொருமை VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
 $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

எடுத்துக்காட்டு 17 : கீழ்க்கண்ட முப்படி கோவைகளை விரிவுபடுத்தி எழுதுக.

$$(i) (3a + 4b)^3 \quad (ii) (5p - 3q)^3$$

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x + y)^3$ உடன் ஒப்பிடும்போது

$$x = 3a \text{ மற்றும் } y = 4b.$$

எனவே, முற்றொருமை VI ஐ பயன்படுத்தினால்

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$

$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x - y)^3$ உடன் ஒப்பிடும்போது

$$x = 5p, y = 3q.$$

எனவே, முற்றொருமை VII ஐ பயன்படுத்தினால்

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

எடுத்துக்காட்டு 18 : முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றை விரிவுபடுத்தி மதிப்பை காண்க.

$$(i) (104)^3 \quad (ii) (999)^3$$

தீர்வு : (i)

$$(104)^3 = (100 + 4)^3$$

$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$$

(முற்றொருமை VI ஐ பயன்படுத்தி)

$$= 1000000 + 64 + 124800$$

$$= 1124864$$

(ii)

$$(999)^3 = (1000 - 1)^3$$

$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$$

(முற்றொருமை VII ஐ பயன்படுத்தி)

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$

$$= 997002999$$

Example 19 : Factorise $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

Solution : The given expression can be written as

$$\begin{aligned} & (2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) \\ &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 \\ &= (2x + 3y)^3 \quad (\text{Using Identity VI}) \\ &= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y) \end{aligned}$$

Now consider $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

On expanding, we get the product as

$$\begin{aligned} & x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y \\ &+ y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{On simplification}) \end{aligned}$$

So, we obtain the following identity:

Identity VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Example 20 : Factorise : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

Solution : Here, we have

$$\begin{aligned} & 8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ &= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z) \\ &= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)] \\ &= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz) \end{aligned}$$

EXERCISE 2.4

1. Use suitable identities to find the following products:

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. Evaluate the following products without multiplying directly:

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. Factorise the following using appropriate identities:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

எடுத்துக்காட்டு 19 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ ஐ காரணிபடுத்துக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவையை இவ்வாறு எழுதலாம்

$$\begin{aligned} &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) \\ &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 \\ &= (2x + 3y)^3 \quad (\text{முற்றொருமை VI ன் படி}) \\ &= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y) \end{aligned}$$

இப்போது $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ என்பதை எடுத்துக்கொள்.

இதனை விரிவுபடுத்தி பெருக்கினால்.

$$\begin{aligned} &x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y \\ &+ y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{சுருக்கினால் கிடைப்பது}) \end{aligned}$$

எனவே, நமக்கு கீழ்க்கண்ட முற்றொருமை கிடைக்கிறது.

முற்றொருமை VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

எடுத்துக்காட்டு 20 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ ஐ காரணிபடுத்துக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவை

$$\begin{aligned} &8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ &= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z) \\ &= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)] \\ &= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz) \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.4

1. தகுந்த முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றின் பெருக்கற்பலனை காண்க.

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. கீழ்க்கண்டவற்றை பெருக்கல் செய்யாமல் மதிப்புகளை காண்க.

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. கீழ்க்கண்டவற்றை பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துக.

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. Expand each of the following, using suitable identities:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. Factorise:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. Write the following cubes in expanded form:

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. Evaluate the following using suitable identities:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. Factorise each of the following:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. Verify : (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. Factorise each of the following:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[Hint : See Question 9.]

11. Factorise : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. Verify that $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. If $x + y + z = 0$, show that $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. Without actually calculating the cubes, find the value of each of the following:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. Give possible expressions for the length and breadth of each of the following rectangles, in which their areas are given:

Area : $25a^2 - 35a + 12$

(i)

Area : $35y^2 + 13y - 12$

(ii)

4. பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றை விரிவாக்குக.

$$(i) (x + 2y + 4z)^2 \quad (ii) (2x - y + z)^2 \quad (iii) (-2x + 3y + 2z)^2$$

$$(iv) (3a - 7b - c)^2 \quad (v) (-2x + 5y - 3z)^2 \quad (vi) \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1 \right]^2$$

5. காரணிபடுத்துக.

$$(i) 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$$

$$(ii) 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

6. கீழ்க்கண்ட முப்படிகளை விரிவாக்குக.

$$(i) (2x + 1)^3 \quad (ii) (2a - 3b)^3 \quad (iii) \left[\frac{3}{2}x + 1 \right]^3 \quad (iv) \left[x - \frac{2}{3}y \right]^3$$

7. பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளை காண்க:

$$(i) (99)^3 \quad (ii) (102)^3 \quad (iii) (998)^3$$

8. கீழ்க்கண்டவற்றை காரணிபடுத்துக:

$$(i) 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 \quad (ii) 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iii) 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2 \quad (iv) 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

$$(v) 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

9. சரிபார்க்கவும்: (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. கீழ்க்கண்டவற்றை காரணிபடுத்துக:

$$(i) 27y^3 + 125z^3 \quad (ii) 64m^3 - 343n^3$$

[குறிப்பு : 9 ம் கேள்வியை பார்க்க]

11. $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ ஐ காரணிபடுத்துக.

$$12. \text{சரிபார்க்க : } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

13. $x + y + z = 0$ எனில் $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ எனக்காட்டு.

14. கீழ்க்கண்ட கணங்களின் மதிப்புகளை முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி காண்க.

$$(i) (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$$

$$(ii) (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$$

15. பின்வரும் கோவைகள் ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு எனில் அவற்றிற்கு பொருத்தமான நீள, அகல அளவுகளை கண்டுபிடி.

$$\text{பரப்பளவு: } 25a^2 - 35a + 12$$

(i)

$$\text{பரப்பளவு: } 35y^2 + 13y - 12$$

(ii)

16. What are the possible expressions for the dimensions of the cuboids whose volumes are given below?

Volume : $3x^2 - 12x$

(i)

Volume : $12ky^2 + 8ky - 20k$

(ii)

17. A girl is playing with a toy building block. The volume of the block is

$$V(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$$

What are the three dimensions of the block?

2.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A polynomial $p(x)$ in one variable x is an algebraic expression in x of the form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

where $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ are constants and $a_n \neq 0$.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ are respectively the *coefficients* of $x^0, x, x^2, \dots, x^n$, and n is called the *degree of the polynomial*. Each of $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_0$, with $a_n \neq 0$, is called a *term* of the polynomial $p(x)$.

2. A polynomial of one term is called a monomial.
3. A polynomial of two terms is called a binomial.
4. A polynomial of three terms is called a trinomial.
5. A polynomial of degree one is called a linear polynomial.
6. A polynomial of degree two is called a quadratic polynomial.
7. A polynomial of degree three is called a cubic polynomial.
8. A real number ' a ' is a *zero* of a polynomial $p(x)$ if $p(a) = 0$. In this case, a is also called a *root* of the equation $p(x) = 0$.
9. Every linear polynomial in one variable has a unique zero, a non-zero constant polynomial has no zero, and every real number is a zero of the zero polynomial.
10. Factor Theorem : $x - a$ is a factor of the polynomial $p(x)$, if $p(a) = 0$. Also, if $x - a$ is a factor of $p(x)$, then $p(a) = 0$.
11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

16. கீழே கன செவ்வகங்களின் கன அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு பொருத்தமான அளவுகளை கண்டுபிடி.

கன அளவு: $3x^2 - 12x$

(i)

கன அளவு: $12ky^2 + 8ky - 20k$

(ii)

17. ஒரு சிறுமி கனச்செவ்வக வடிவ கட்டிடத்தொகுதி பொம்மையை கொண்டு விளையாடுகிறாள். அதன் கனஅளவு

$$V(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$$

எனில் அதன் மூன்று பரிமானங்களை எழுதுக.

2.6 நாம் கற்றவை :

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கீழ்க்கண்டவற்றை பற்றி விவாதித்தோம்.

- ஒரு மாறி x ல் n வது படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பொது வடிவம்,
 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ஆகும்.
 இங்கு $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ என்பன மாறிலிகள், $a_n \neq 0$
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ என்பன முறையே $x^0, x, x^2, \dots, x^n$ ன் குணகங்கள். மேலும் n என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_0$ ஆகியன பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகள் ஆகும்.
- ஓர் உறுப்பை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- படி 1 ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை (அ) நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- படி 2 ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- படி 3 ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- $p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஏதாவது ஒரு மெய் எண் a க்கு $p(a) = 0$ எனில் a ஐ அக்கோவையின் பூஜ்ஜியம் என்பர். இவ்வாறே a ஐ பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 0$ க்கு மூலம் என்றும் கூறுவர்.
- ஒரு மாறியை கொண்ட எல்லா நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் தனித்த பூஜ்ஜியத்தை கொண்டிருக்கும். ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற மாறிலியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை பூஜ்ஜியத்தை கொண்டிராது.
- காரணி தேற்றம்: $p(a) = 0$ எனில் $x - a$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி ஆகும். மேலும் $x - a$ என்பது $p(x)$ க்கு காரணி எனில் $p(a) = 0$ ஆகும்.
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
- $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
- $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$



COORDINATE GEOMETRY

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?'

So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 Introduction

You have already studied how to locate a point on a number line. You also know how to describe the position of a point on the line. There are many other situations, in which to find a point we are required to describe its position with reference to more than one line. For example, consider the following situations:

I. In Fig. 3.1, there is a main road running in the East-West direction and streets with numbering from West to East. Also, on each street, house numbers are marked. To look for a friend's house here, is it enough to know only one reference point? For instance, if we only know that she lives on Street 2, will we be able to find her house easily? Not as easily as when we know two pieces of information about it, namely, the number of the street on which it is situated, and the house number. If we want to reach the house which is situated in the 2nd street and has the number 5, first of all we would identify the 2nd street and then the house numbered 5 on it. In Fig. 3.1, H shows the location of the house. Similarly, P shows the location of the house corresponding to Street number 7 and House number 4.

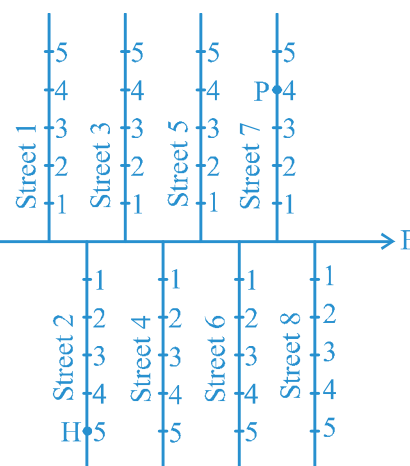


Fig. 3.1



அத்தியாயம் 3

ஆயத்தொலைவு வழுவியல்

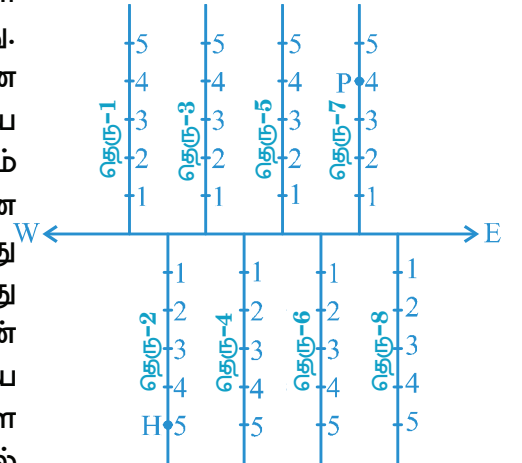
வட துருவங்கள் மற்றும் பூமத்திய ரேகைகள், வெப்ப மண்டலங்கள் மற்றும் தீர்க்க ரேகைகளின் நன்மை என்ன? என்னவென்று கேட்டால் பெல்மேன் அழுவார். அவரின் உதவியாளர்கள் இவ்வாறு பதிலளிப்பார்கள் 'அவை வழக்கமான அடையாளங்கள் மட்டுமே'.

லூயிஸ்கரோல், *The Hunting of the Snark*

3.1 அறிமுகம்

எண் கோட்டின் மீது புள்ளிகளை குறிக்கும் முறையை பற்றி ஏற்கனவே தெரிந்து கொண்டீர்கள். ஒரு கோட்டின் மீது புள்ளியை வரையறுக்கும் முறையை பற்றி உங்களுக்கு தெரியும். சில சமயங்களில் ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட கோடுகளை பொறுத்து ஒரு புள்ளியை வரையறுக்க வேண்டியுள்ளது. உதாரணத்துக்கு கீழ்காணும் சூழ்நிலையை கவனியுங்கள்.

I. படம் 3.1 ல் கீழ்க்கு மேற்காக ஒரு முக்கிய சாலை ஒன்று உள்ளது. இந்த சாலையை ஒட்டி அமைந்துள்ள தெருக்களுக்கு மேற்கு கிழக்காக எண்ணிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தெருவிலும் உள்ள வீடுகளுக்கு எண் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. உன் நண்பனின் வீட்டை கண்டறிய அவரின் வீட்டை பற்றிய ஒரே ஒரு குறிப்பு மட்டும் தெரிந்தால் போதுமா? உதாரணமாக அவன் வீதி எண் 2ல் வசிக்கிறான் என்ற ஒரே ஒரு குறிப்பு மட்டும் வைத்து கொண்டு அவனுடைய வீட்டை கண்டறிய முடியுமா? அது அவ்வளவு சுலபமானது அல்ல. வீதி எண் மற்றும் வீட்டின் எண் ஆகிய இரண்டு விவரங்கள் இல்லாமல் அவனுடைய வீட்டை கண்டறிவது சுலபமல்ல. வீதி எண் 2ல் உள்ள 5ம் எண் வீட்டை கண்டறிய வேண்டுமானால் முதலில் வீதி எண் 2க்கு சென்று வீட்டு எண் 5க்கு செல்ல வேண்டும். படம் 3.1 ல் H என்பது வீதி எண் 2ல் எண் 5ஐ கொண்ட வீடாகும். P என்பது வீதி எண் 7ல் எண் 4ஐ கொண்ட வீடாகும்.



படம். 3.1

II. Suppose you put a dot on a sheet of paper [Fig.3.2 (a)]. If we ask you to tell us the position of the dot on the paper, how will you do this? Perhaps you will try in some such manner: “The dot is in the upper half of the paper”, or “It is near the left edge of the paper”, or “It is very near the left hand upper corner of the sheet”. Do any of these statements fix the position of the dot precisely? No! But, if you say “The dot is nearly 5 cm away from the left edge of the paper”, it helps to give some idea but still does not fix the position of the dot. A little thought might enable you to say that the dot is also at a distance of 9 cm above the bottom line. We now know exactly where the dot is!

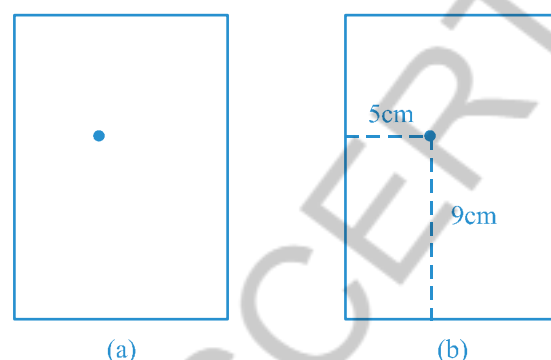


Fig. 3.2

For this purpose, we fixed the position of the dot by specifying its distances from two fixed lines, the left edge of the paper and the bottom line of the paper [Fig.3.2 (b)]. In other words, we need **two** independent informations for finding the position of the dot.

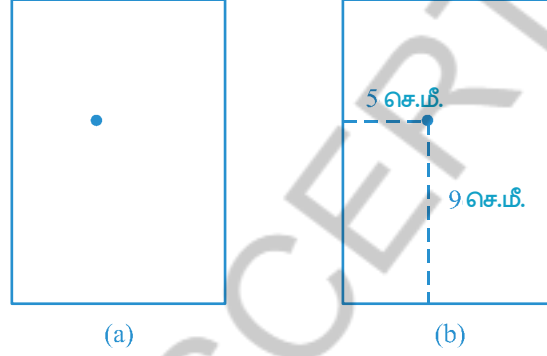
Now, perform the following classroom activity known as ‘Seating Plan’.

Activity 1 (Seating Plan) : Draw a plan of the seating in your classroom, pushing all the desks together. Represent each desk by a square. In each square, write the name of the student occupying the desk, which the square represents. Position of each student in the classroom is described precisely by using two independent informations:

- (i) the column in which she or he sits,
- (ii) the row in which she or he sits.

If you are sitting on the desk lying in the 5th column and 3rd row (represented by the shaded square in Fig. 3.3), your position could be written as (5, 3), first writing the column number, and then the row number. Is this the same as (3, 5)? Write down the names and positions of other students in your class. For example, if Sonia is sitting in the 4th column and 1st row, write S(4,1). The teacher’s desk is not part of your seating plan. We are treating the teacher just as an observer.

II. ஒரு வெள்ளை தாளின் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்தாய் எனக்கொள். இப்பொழுது நாங்கள் உங்களை வெள்ளைத் தாளின் மீது புள்ளி எங்கே உள்ளது எனக் கேட்டால் நீ என்ன சொல்வாய்? ஒரு வேளை நீ பின்வருமாறு பதிலளிக்க கூடும் அதாவது புள்ளி வெள்ளைத் தாளின் மேல் பகுதியில் உள்ளது. அல்லது அது தாளின் இடது விளிம்பிற்கு அருகே உள்ளது என்று சொல்வாய். அல்லது புள்ளி இடப்புறத்தின் மேல் விளிம்பிற்கு அருகே உள்ளது என்று சொல்வாய். மேற்கண்ட மூன்று பதில்களும் புள்ளியின் இடத்தைத் துல்லியமாக காண உதவுகின்றனவா? இல்லை. ஆனால் நீங்கள் ஒரு வேளை அந்த புள்ளி இடது விளிம்பிலிருந்து 5செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளது என்று கூறினால் அது புள்ளியின் இருப்பிடத்தை அறிய ஓரளவிற்கு மட்டுமே உதவும். இருந்தாலும் அது புள்ளியின் சரியான இடத்தைத் துல்லியமாக குறிக்காது? அந்த புள்ளி கீழே உள்ள விளிம்பிலிருந்து 9செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளது என்று சொன்னால் அது புள்ளியின் இடத்தைத் துல்லியமாக குறிக்கும்.



படம் 3.2

எனவே புள்ளியின் சரியான இடத்தை குறிக்க இடது விளிம்பிலிருந்து உள்ள தூரம் மற்றும் கீழே உள்ள விளிம்பிலிருந்து உள்ள தூரம் ஆகிய இரண்டு விவரங்கள் தேவைப்படுகின்றன. படம் 3.2 (b) வேறு வகையில் சொல்வதனால் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க இரண்டு தனிப்பட்ட அல்லது சார்பற்ற விவரங்கள் தேவைப்படுகின்றன. தற்போது கீழ்க்கண்ட வகுப்பறை செயல்பாட்டை செய்துப்பார்.

செயல்பாடு 1: (இருக்கைத் திட்டம்): உன்னுடைய பள்ளியின் இருக்கைத் திட்டம் ஒன்றை வரையவும். அனைத்து மேசைகளையும் ஓரிடத்தில் சேருங்கள். ஒவ்வொரு மேசையையும் ஒரு சதுரத்தால் குறிக்கவும். ஒவ்வொரு சதுரத்திலும் அம்மேசைக் குறிய மாணவன் அல்லது மாணவியின் பெயரை எழுதவும். இப்போது ஒவ்வொரு மாணவன் அல்லது மாணவியின் இடத்தைத் துல்லியமாக குறிக்க இரண்டு அளவுகள் தேவைப்படுகின்றன.

- மாணவன் அல்லது மாணவி அமரும் நிரல் வரிசை
- மாணவன் அல்லது மாணவி அமரும் நிரை வரிசை

நீ அமர்ந்திருக்கும் மேசை 5 வது நிரல் வரிசை 3 வது நிரை வரிசை எனில் உன்னுடைய இடத்தின் நிலை படம் 3.3 ல் காட்டியபடி இருக்கும். இதை (5,3) என குறிக்கலாம். முதலில் வருவது நிரல் வரிசையின் அளவு, இரண்டாவது வருவது நிரை வரிசையின் அளவு இது (3,5) போன்று இருக்குமா? இதே போல் மற்ற மாணவர்கள் அமரும் இடத்தின் நிலையை குறித்துக்காட்டு. எடுத்துக்காட்டாக சோனியா என்பவர் 4 வது நிரல் வரிசை மற்றும் 1 வது நிரை வரிசையில் உட்கார்ந்துள்ளார் என எடுத்துக்கொண்டால் இதை S (4,1) என எழுதலாம். உன்னுடைய இருக்கைத் திட்டத்தில் ஆசிரியரின் இருக்கை இடம் பெறவில்லை. அவர் வெறும் பார்வையாளராக கருதப்படுகிறார்.

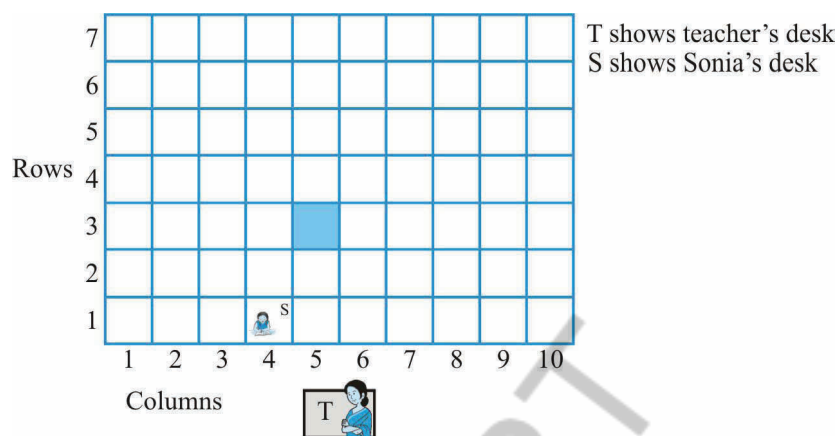
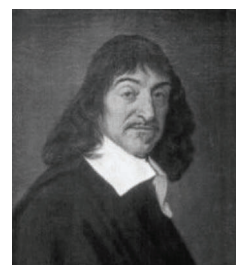


Fig. 3.3

In the discussion above, you observe that position of any object lying in a plane can be represented with the help of two perpendicular lines. In case of 'dot', we require distance of the dot from bottom line as well as from left edge of the paper. In case of seating plan, we require the number of the column and that of the row. This simple idea has far reaching consequences, and has given rise to a very important branch of Mathematics known as *Coordinate Geometry*. In this chapter, we aim to introduce some basic concepts of coordinate geometry. You will study more about these in your higher classes. This study was initially developed by the French philosopher and mathematician *René Descartes*.

René Descartes, the great French mathematician of the seventeenth century, liked to lie in bed and think! One day, when resting in bed, he solved the problem of describing the position of a point in a plane. His method was a development of the older idea of latitude and longitude. In honour of Descartes, the system used for describing the position of a point in a plane is also known as the *Cartesian system*.

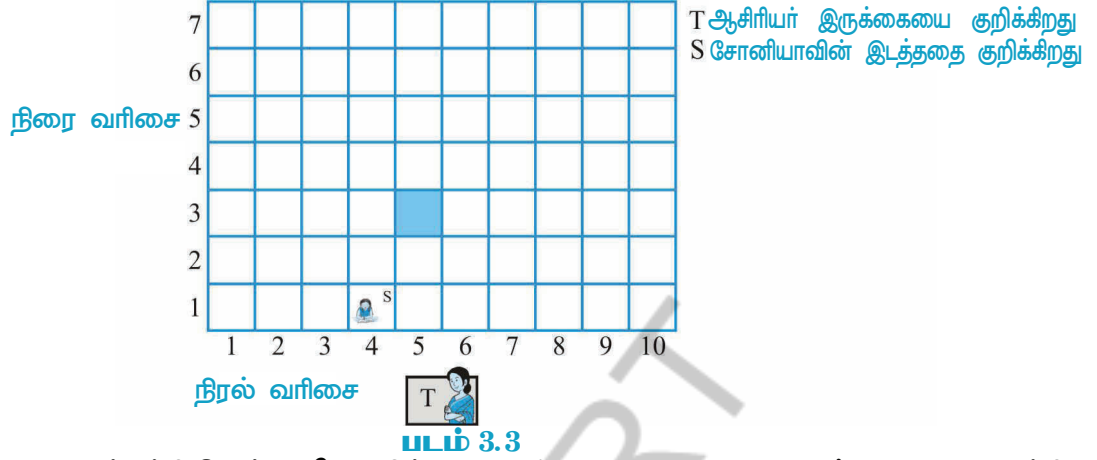


René Descartes (1596 -1650)

Fig. 3.4

EXERCISE 3.1

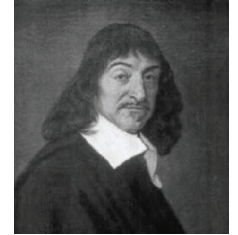
1. How will you describe the position of a table lamp on your study table to another person?
2. **(Street Plan)** : A city has two main roads which cross each other at the centre of the city. These two roads are along the North-South direction and East-West direction. All the other streets of the city run parallel to these roads and are 200 m apart. There are 5 streets in each direction. Using 1 cm = 200 m, draw a model of the city on your notebook. Represent the roads/streets by single lines.



படம் 3.3

மேற்கண்ட விளக்கத்திலிருந்து நீ அறிந்து கொள்வது என்னவென்றால் ஒரு சமதளத்தின் மீதுள்ள ஒரு பொருளின் நிலையை இரு சொங்குத்துக் கோடுகள் உதவியுடன் குறிக்கலாம். இதற்கு முன்னர் புள்ளியின் நிலையை குறிப்பதிலும் இடது விளிம்பிலிருந்து தூரம், கீழ் விளிம்பிலிருந்து தூரம் போன்ற இரண்டு விவரங்கள் தேவைப்பட்டது. இருக்கை திட்டத்தில் நமக்குத் தேவைப்படுவது நிரல் வரிசை எண் மற்றும் நிறை வரிசை எண் ஆகும். இந்த எளிய ஆலோசனையானது ஆயத் தொலை வடிவியல் என்ற முக்கியமான கணித உட்பிரிவிற்கு வித்திட்டுள்ளது. இந்த பாடத்தில் ஆயத் தொலை வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள் குறித்து கற்போம். இது குறித்து அதிகமாக மேல் வகுப்புகளில் கற்பீர்கள் இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி வடிவியலைக் கற்கும் முறையினை பிரஞ்சு தத்துவ மேதையும் கணிதவியல் அறிஞருமான ரெனி டெஸ்கார்டிஸ்(Rene Descartes) அறிமுகப்படுத்தினார்.

17 வது நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த மிகப் பெரிய கணித மேதை ரெனி டெஸ்கார்டிஸ். அவர் படுக்கையில் படுத்துக்கொண்டே சிந்திப்பதில் ஆர்வம் உடையவர். ஒரு நாள் அவ்வாறு சிந்தித்த போது சமதளத்தில் உள்ள புள்ளியின் நிலையை விளக்கும் முறையை கண்டறிந்தார். இவரது இந்த முறையானது பண்டைய அட்சரேகை, தீர்க்கரேகைகளின் தொடர்ச்சியாகும். இவரை கௌரவிக்கும் வகையில் சமதளத்தில் புள்ளியைக் குறிக்கும் முறையை கார்டீசியன் முறை என்கிறோம்.



ரெனி டெஸ்கார்டிஸ்
(1596-1650)

படம் 3.4

பயிற்சி 3.1

1. உன்னுடைய படிப்பு அறையிலுள்ள மேசை மின்விளக்கின் நிலையை வேறொருவருக்கு எப்படி எடுத்துக் கூறுவாய்?
2. (தெரு திட்டம்): ஒரு நகரத்தில் இரண்டு பிரதான சாலைகள் நகர மையத்தில் ஒன்றை ஒன்று சந்திக்கும் வகையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த இரண்டு சாலைகளும் வடக்கு தெற்காகவும் மற்றும் கிழக்கு மேற்காகவும் உள்ளன. இந்த சாலையிலுள்ள மற்றத் தெருக்கள் இந்த சாலைகளுக்கு இணையாக 200 மீட்டர் தூரத்தில் செல்கின்றன. ஒவ்வொரு திசையிலும் 5 தெருக்கள் உள்ளன. 1 செ.மீ.= 200மீ என்ற அளவு திட்டத்தை பயன்படுத்தி நகரத்தின் மாதிரிப் படத்தை உன்னுடைய நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரை. சாலைகளையும் தெருக்களையும் ஒற்றைக் கோடு மூலம் காட்டு.

There are many cross- streets in your model. A particular cross-street is made by two streets, one running in the North - South direction and another in the East - West direction. Each cross street is referred to in the following manner : If the 2nd street running in the North - South direction and 5th in the East - West direction meet at some crossing, then we will call this cross-street (2, 5). Using this convention, find:

- (i) how many cross - streets can be referred to as (4, 3).
- (ii) how many cross - streets can be referred to as (3, 4).

3.2 Cartesian System

You have studied the *number line* in the chapter on 'Number System'. On the number line, distances from a fixed point are marked in equal units positively in one direction and negatively in the other. The point from which the distances are marked is called the *origin*. We use the number line to represent the numbers by marking points on a line at equal distances. If one unit distance represents the number '1', then 3 units distance represents the number '3', '0' being at the origin. The point in the positive direction at a distance r from the origin represents the number r . The point in the negative direction at a distance r from the origin represents the number $-r$. Locations of different numbers on the number line are shown in Fig. 3.5.

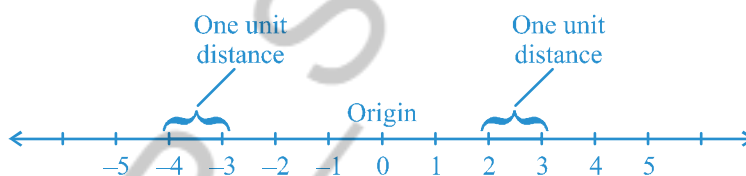


Fig. 3.5

Descartes invented the idea of placing two such lines perpendicular to each other on a plane, and locating points on the plane by referring them to these lines. The perpendicular lines may be in any direction such as in Fig.3.6. But, when we choose

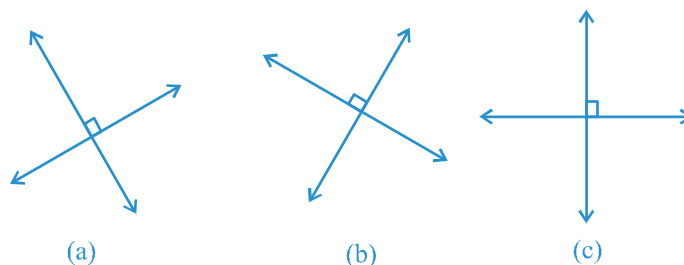


Fig. 3.6

உன்னுடைய மாதிரிப் படத்தில் பல தெருக்கள் ஒன்றையொன்றை கடந்து செல்கின்றன. குறிப்பிட்ட சந்திப்பானது வடக்கு தெற்கு மற்றும் கிழக்கு மேற்காகச் செல்லும் இரண்டு தெருக்களால் ஆனது என்பதை கவனி. ஒவ்வொரு சந்திப்பும் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கப்பட்டிருக்கும். வடக்கு தெற்காக செல்லும் சந்திக்கும் இந்த சந்திப்பை நாம் (2, 5) என குறிப்பிடுவோம். இந்த முறையைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) (4, 3) என எத்தனை சந்திப்புகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும்?

(ii) (3, 4) என எத்தனை சந்திப்புகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும்?

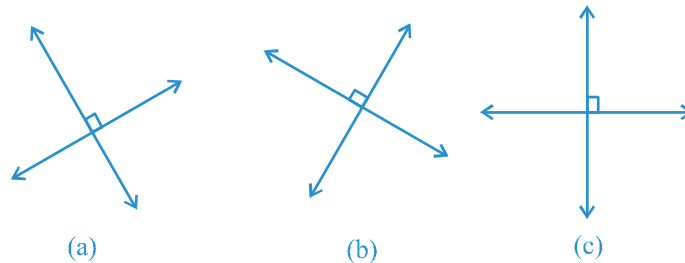
3.2 கார்டீஸியன் ஆயமுறை :

எண் அமைப்பு என்ற பாடத்தில் எண் கோட்டைப் பற்றி படித்தீர்கள். எண் கோட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து சம அலகுகளாக ஒரு பக்கம் மிகை(+) எண்களாகவும் எதிர் பக்கம் குறை(-) எண்களாகவும் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். எந்த புள்ளியிலிருந்து அளவு துவங்குகிறதோ அந்த புள்ளியை ஆரம்பப்(ஆதி) புள்ளி என்கிறோம். எண் கோட்டினை அதன் மீது சம தூரத்தில் எண்களை குறிக்கப் பயன்படுத்துகின்றோம். ஒரு அலகு தூரம் 1அலகு எனக் குறிக்கின்றோம். 1அலகு தூரம் 1 எனக் குறித்தால் 3 அலகு தூரம் 3 என்ற எண்ணைக் குறிக்கும். 0 என்பது ஆதிப்புள்ளி, மிகை(+) திசையில் r தூரத்தில் உள்ள புள்ளி r எனவும் எதிர்ப்பக்கம் ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து r தூரம் உள்ள புள்ளி $-r$ எனவும், குறிக்கப்படும். படம் 3.5ல் வெவ்வேறு எண்களை எண் கோட்டின் மீது குறித்திருப்பதைக் காண்கிறோம்.



படம். 3.5

டெஸ்கார்டீஸ் என்பவர் இத்தகைய இரு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக சமதளத்தின் மீது வைக்கும் முறையைக் கண்டுபிடித்தார். மேலும் அதன் மீது புள்ளிகளை குறிக்கும் முறையையும் அறிமுகப்படுத்தினார். செங்குத்துக் கோடுகள் படம் 3.6ல் காட்டியபடி எந்த திசையிலும் இருக்கலாம். ஆனால் இந்த இரு கோடுகளையும் நாம் தேர்ந்தெடுக்கும்போது சமதளத்தில் அவற்றின் மீது புள்ளிகளை குறிக்க ஒன்றை கிடைக்கோடாகவும் மற்றொன்றை குத்துக்கோடாகவும் படம் 3.6ல் காட்டியபடி இந்த பாடத்தில் உபயோகப்படுத்துகின்றோம்.



படம். 3.6

these two lines to locate a point in a plane *in this chapter*, one line will be horizontal and the other will be vertical, as in Fig. 3.6(c).

These lines are actually obtained as follows : Take two number lines, calling them $X'X$ and $Y'Y$. Place $X'X$ horizontal [as in Fig. 3.7(a)] and write the numbers on it just as written on the number line. We do the same thing with $Y'Y$ except that $Y'Y$ is vertical, not horizontal [Fig. 3.7(b)].

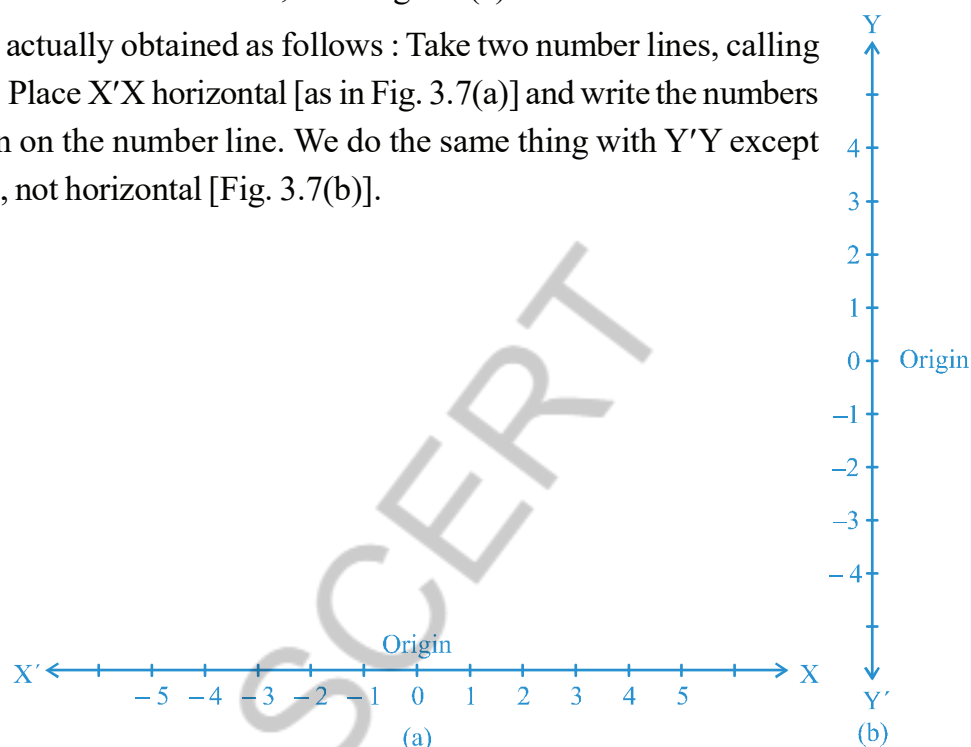


Fig. 3.7

Combine both the lines in such a way that the two lines cross each other at their zeroes, or origins (Fig. 3.8). The horizontal line $X'X$ is called the x -axis and the vertical line $Y'Y$ is called the y -axis. The point where $X'X$ and $Y'Y$ cross is called the **origin**, and is denoted by O . Since the positive numbers lie on the directions OX and OY , OX and OY are called the **positive directions** of the x -axis and the y -axis, respectively. Similarly, OX' and OY' are called the **negative directions** of the x -axis and the y -axis, respectively.

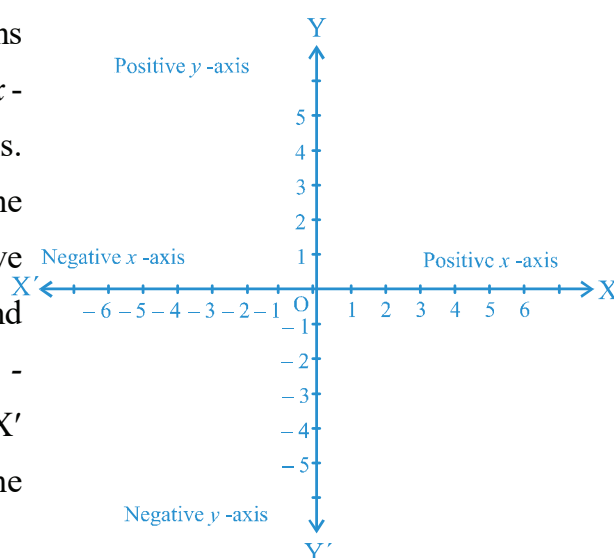
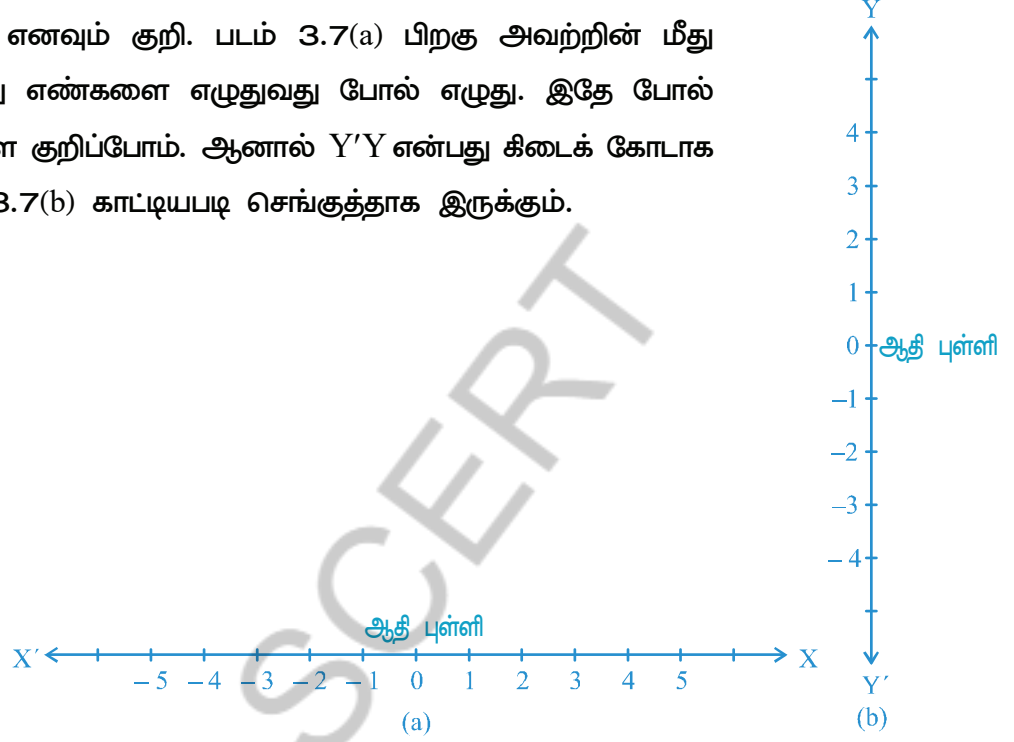


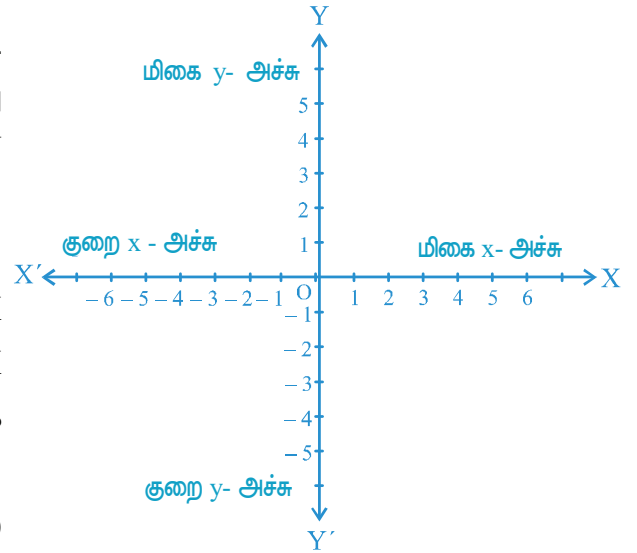
Fig. 3.8

இந்த கோடுகள் எவ்வாறு கிடைக்கின்றன என்பதை இப்போது பார்ப்போம். இரண்டு எண் கோடுகளை எடுத்துக்கொள். அவற்றை $X'X$ எனவும் $Y'Y$ எனவும் குறி. படம் 3.7(a) பிறகு அவற்றின் மீது எண்கோட்டின் மீது எண்களை எழுதுவது போல் எழுது. இதே போல் $Y'Y$ மீது எண்களை குறிப்போம். ஆனால் $Y'Y$ என்பது கிடைக் கோடாக இல்லாமல் படம் 3.7(b) காட்டியபடி செங்குத்தாக இருக்கும்.



படம். 3.7

இந்த இருகோடுகளும் ஆதிப்புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும்படி படம் 3.8ல் உள்ளபடி சேர்க்க வேண்டும். கிடைக்கோடு $X'X$ என்பது x - அச்சு எனவும் செங்குத்துக் கோடு $Y'Y$ என்பது y - அச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. $X'X$ மற்றும் $Y'Y$ இவை வெட்டும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி எனப்படும். மிகை எண்கள் OX மற்றும் OY திசைகளில் அமைவதால் OX மற்றும் OY என்ப x, y - அச்சுகளின் மிகை அச்சு எனவும் OX' மற்றும் OY' என்பவைகளை x, y - அச்சுகளின் குறை அச்சுகள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.



படம். 3.8

You observe that the axes (plural of the word ‘axis’) divide the plane into four parts. These four parts are called the *quadrants* (one fourth part), numbered I, II, III and IV anticlockwise from OX (see Fig.3.9). So, the plane consists of the axes and these quadrants. We call the plane, the *Cartesian plane*, or the *coordinate plane*, or the *xy-plane*. The axes are called the *coordinate axes*.

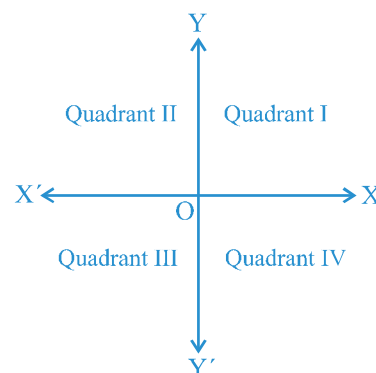


Fig. 3.9

Now, let us see why this system is so basic to mathematics, and how it is useful. Consider the following diagram where the axes are drawn on graph paper. Let us see the distances of the points P and Q from the axes. For this, we draw perpendiculars PM on the x -axis and PN on the y -axis. Similarly, we draw perpendiculars QR and QS as shown in Fig. 3.10.

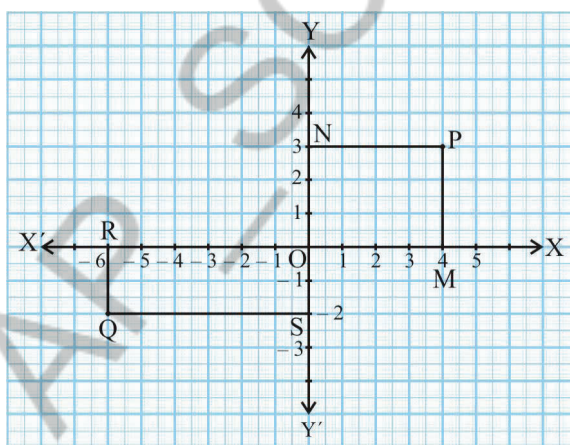
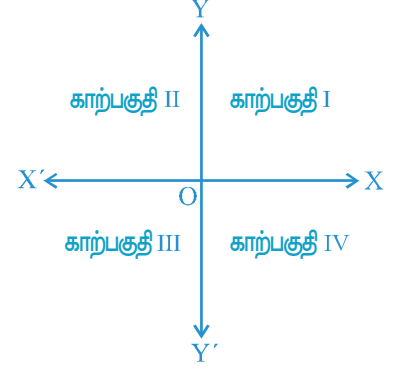


Fig.3.10

You find that

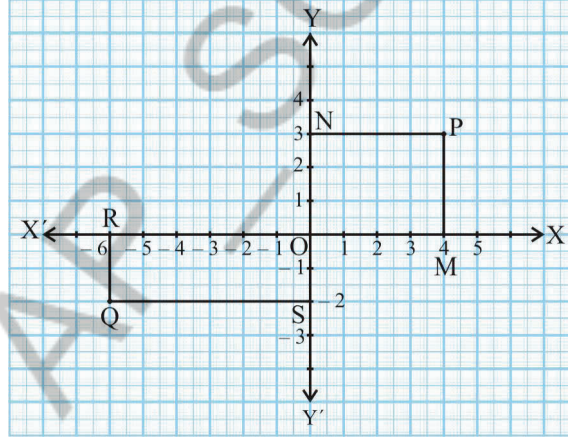
- (i) The perpendicular distance of the point P from the y -axis measured along the positive direction of the x -axis is $PN = OM = 4$ units.
- (ii) The perpendicular distance of the point P from the x -axis measured along the positive direction of the y -axis is $PM = ON = 3$ units.

ஆதிப்புள்ளியை O எனக் குறிக்கலாம். அச்சுகள் இரண்டும் சமதளத்தை 4 பாகங்களாகப் பிரிப்பதை கவனி. இந்த நான்கு பாகங்களும் கால் பகுதிகள் என அழைக்கப்படும். இவை OX லிருந்து கடிகார முள் சுழலும் திசைக்கு எதிர் திசையில் I, II, III மற்றும் IV என எண் இடப்படும். படம் 3.9ஐ பார்க்கவும். எனவே சமதளத்தில் இரண்டு அச்சுகள் மற்றும் இந்த கால் பகுதிகள் உள்ள இந்த சமதளத்தை கார்டீசியன் தளம் அல்லது ஆயத் தொலை தளம் அல்லது xy - தளம் என்கிறோம். அச்சுகளை ஆயத் தொலை அச்சுகள் என்கிறோம்.



படம். 3.9

இந்த அமைப்பு ஏன் கணிதத்திற்கு அடிதளமாக உள்ளது எனவும் இது எப்படி பயன்படுகிறது எனவும் நாம் இப்போது பார்ப்போம். கீழ்க்கண்ட படத்தைப்பார். அச்சுகள் வரைபடத் தாளின் மீது வரையப்பட்டுள்ளன. இப்போது P மற்றும் Q புள்ளிகள் அச்சுகளிலிருந்து எவ்வளவு தூரம் உள்ளன எனப் பார்ப்போம். அதற்காக நாம் X- அச்சிற்கு PM என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் Y - அச்சிற்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் வரைய வேண்டும். படம் 3.10ல் உள்ளபடி QR மற்றும் QS என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை வரையலாம்.



படம். 3.10

இப்போது நீங்கள் அறிவது,

(i) y - அச்சிலிருந்து புள்ளி Pன் தூரம் x ன் மிகை அச்சு மீது அளக்கப்படும் தூரம் OMக்கு சமம் $PN=OM=4$ அலகுகள்.

(ii) x - அச்சிலிருந்து புள்ளி Pன் செங்குத்து தூரம் y ன் மிகை அச்சின் மீது அளக்கப்படும் தூரம் ONக்கு சமம் $PM=ON=3$ அலகுகள்.

- (iii) The perpendicular distance of the point Q from the y - axis measured along the negative direction of the x - axis is $OR = SQ = 6$ units.
- (iv) The perpendicular distance of the point Q from the x - axis measured along the negative direction of the y - axis is $OS = RQ = 2$ units.

Now, using these distances, how can we describe the points so that there is no confusion?

We write the coordinates of a point, using the following conventions:

- (i) The x - *coordinate* of a point is its perpendicular distance from the y - axis measured along the x - axis (positive along the positive direction of the x - axis and negative along the negative direction of the x - axis). For the point P, it is $+4$ and for Q, it is -6 . The x - coordinate is also called the *abscissa*.
- (ii) The y - *coordinate* of a point is its perpendicular distance from the x - axis measured along the y - axis (positive along the positive direction of the y - axis and negative along the negative direction of the y - axis). For the point P, it is $+3$ and for Q, it is -2 . The y - coordinate is also called the *ordinate*.
- (iii) In stating the coordinates of a point in the coordinate plane, the x - coordinate comes first, and then the y - coordinate. We place the coordinates in brackets.

Hence, the coordinates of P are $(4, 3)$ and the coordinates of Q are $(-6, -2)$.

Note that the coordinates describe a point in the plane *uniquely*. $(3, 4)$ is not the same as $(4, 3)$.

Example 1 : See Fig. 3.11 and complete the following statements:

- (i) The abscissa and the ordinate of the point B are _ _ _ and _ _ _ , respectively.
Hence, the coordinates of B are (_ _ , _ _).
- (ii) The x -coordinate and the y -coordinate of the point M are _ _ _ and _ _ _ , respectively.
Hence, the coordinates of M are (_ _ , _ _).
- (iii) The x -coordinate and the y -coordinate of the point L are _ _ _ and _ _ _ , respectively.
Hence, the coordinates of L are (_ _ , _ _).
- (iv) The x -coordinate and the y -coordinate of the point S are _ _ _ and _ _ _ , respectively.
Hence, the coordinates of S are (_ _ , _ _).

(iii) y - அச்சிலிருந்து புள்ளி Q ன் செங்குத்து தூரம் x ன் குறை அச்சின் மீது அளக்கப்படும் தூரம் OR க்கு சமம் $OR = SQ = 6$ அலகுகள்.

(iv) x - அச்சிலிருந்து புள்ளி Q ன் செங்குத்து தூரம் y ன் குறை அச்சின் மீது அளக்கப்படும் தூரம் OS க்கு சமம் $OS = RQ = 2$ அலகுகள்.

இந்த அளவுகளைப் பயன்படுத்தி குழப்பம் இல்லாமல் புள்ளிகளை வரையறுப்பது எப்படி? கீழ்க்கண்ட வழக்கப்படி புள்ளியின் ஆயத் தொலைவை எழுதலாம்.

(i) ஒரு புள்ளியின் x அச்ச தூரம் y அச்சிலிருந்து அதன் செங்குத்து தூரம், இது x அச்ச வழியாக (x ன் மிகை அச்சில் நேர் ஆகவும் x - குறை அச்சில் எதிர் திசையில் எதிர் ஆகவும்) அளக்கப்படும். புள்ளி P க்கு இது $+4$ மற்றும் புள்ளி Q விற்கு இது -6 .

(ii) ஒரு புள்ளியின் y அச்ச தூரம் x அச்சிலிருந்து அதன் செங்குத்து தூரம், இது y அச்ச வழியாக (y ன் மிகை அச்சில் நேர் ஆகவும் y - குறை அச்சில் எதிர் திசையில் எதிர் ஆகவும்) அளக்கப்படும். புள்ளி P க்கு இது $+3$ மற்றும் புள்ளி Q விற்கு இது -2 ஆகும். Y அச்ச என்பது Y -அச்ச எனவும் அழைக்கப்படும்.

(iii) ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலை அச்ச தூரங்களைக் குறிக்கும் போது முதலில் X -அச்ச பிறகு Y - அச்ச தூரங்களையும் எழுதுவோம். இவற்றை அடைப்பில் குறிப்பிட்டு இரண்டிற்கும் இடையே , (கமா) குறி மூலம் வேறுபடுத்தி காட்டுவோம். எனவே P யின் அச்ச தூரங்கள் $(4, 3)$ மற்றும் Q வின் அச்ச தூரங்கள் $(-6, -2)$ ஒரு தளத்தில் அச்ச தூரங்கள் ஒரு தனித்த புள்ளியை மட்டுமே குறிக்கும் $(3, 4)$ என்பது $(4, 3)$ க்கு சமமல்ல. (இவைகள் இரண்டும் வெவ்வேறானவை).

எடுத்துக்காட்டு 1: படம் 3.11 ஐ கவனி. பிறகு கீழே கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளை பூர்த்தி செய்..

(i) புள்ளி B ன் x -அச்ச மற்றும் y -அச்ச தூரங்கள் என்பவை முறையே ___ மற்றும் ___ என்பன. எனவே B யின் அச்ச தூரங்கள் (__, __).

(ii) புள்ளி M ன் x -அச்ச மற்றும் y -அச்ச தூரங்கள் என்பவை முறையே ___ மற்றும் ___ என்பன. எனவே M யின் அச்ச தூரங்கள் (__, __).

(iii) புள்ளி L ன் x -அச்ச மற்றும் y -அச்ச தூரங்கள் என்பவை முறையே ___ மற்றும் ___ என்பன. எனவே L யின் அச்ச தூரங்கள் (__, __).

(iv) புள்ளி S ன் x -அச்ச மற்றும் y -அச்ச தூரங்கள் என்பவை முறையே ___ மற்றும் ___ என்பன. எனவே S யின் அச்ச தூரங்கள் (__, __).

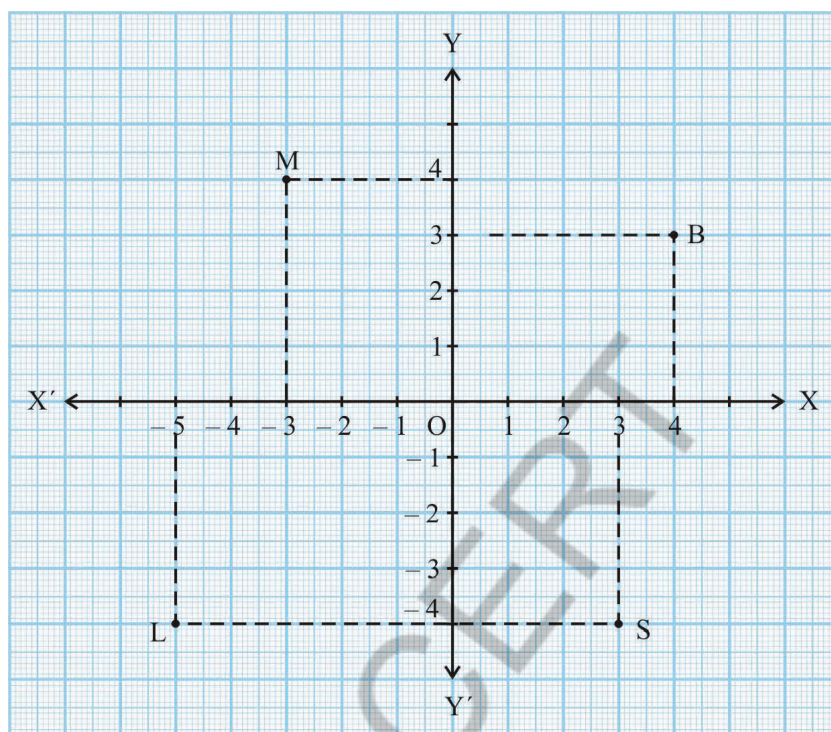
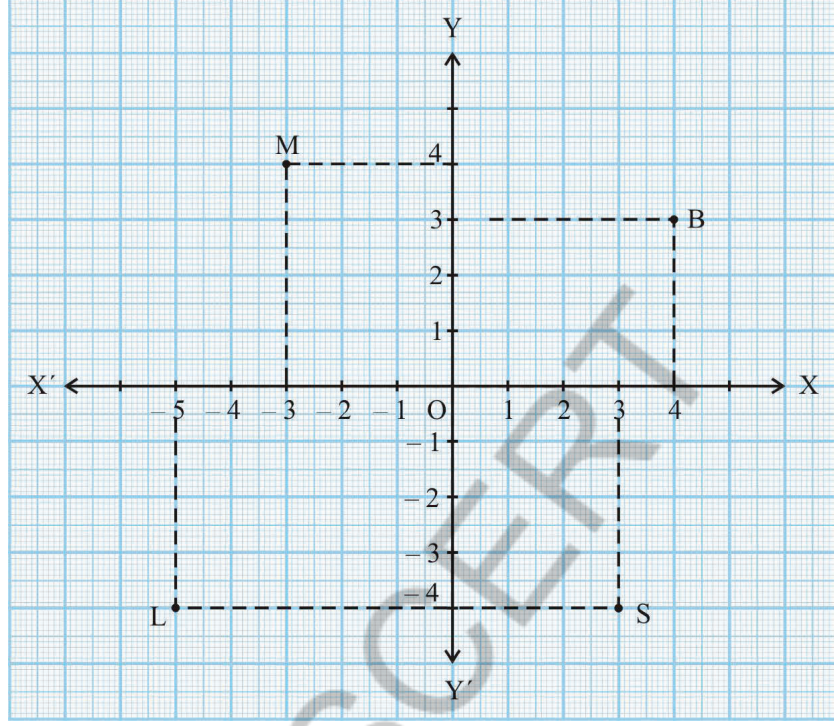


Fig. 3.11

Solution: (i) Since the distance of the point B from the y - axis is 4 units, the x - coordinate or abscissa of the point B is 4. The distance of the point B from the x - axis is 3 units; therefore, the y - coordinate, i.e., the ordinate, of the point B is 3. Hence, the coordinates of the point B are (4, 3).

As in (i) above :

- (ii) The x - coordinate and the y - coordinate of the point M are -3 and 4 , respectively. Hence, the coordinates of the point M are $(-3, 4)$.
- (iii) The x - coordinate and the y - coordinate of the point L are -5 and -4 , respectively. Hence, the coordinates of the point L are $(-5, -4)$.
- (iv) The x - coordinate and the y - coordinate of the point S are 3 and -4 , respectively. Hence, the coordinates of the point S are $(3, -4)$.



படம். 3.11

தீர்வு : (i) புள்ளி B ன் தூரம் y - அச்சிலிருந்து 4 அலகுகள் என்பதால் இதன் x - அச்ச தூரம் 4. புள்ளி B ன் தூரம் x - அச்சிலிருந்து 3 அலகுகள் என்பதால் இதன் y - அச்ச தூரம் 3. எனவே புள்ளி B(4, 3) எனப்படும்.

(ii) x - அச்ச மற்றும் y - அச்சின் தூரங்கள் முறையே -3 மற்றும் 4 என்பதால் புள்ளி M என்பது (-3,4).

(iii) புள்ளி L ன் x - அச்ச மற்றும் y - அச்சின் தூரங்கள் முறையே -5 மற்றும் -4 என்பதால் புள்ளி L என்பது (-5,-4) எனக் குறிக்கப்படும்.

(iv) புள்ளி S ன் x - அச்ச மற்றும் y - அச்சின் தூரங்கள் முறையே 3 மற்றும் -4 என்பதால் புள்ளி S என்பது (3,-4) எனக் குறிக்கப்படும்.

Example 2 : Write the coordinates of the points marked on the axes in Fig. 3.12.

Solution : You can see that :

- (i) The point A is at a distance of + 4 units from the y -axis and at a distance zero from the x -axis. Therefore, the x -coordinate of A is 4 and the y -coordinate is 0. Hence, the coordinates of A are (4, 0).

- (ii) The coordinates of B are (0, 3). Why?

- (iii) The coordinates of C are (− 5, 0). Why?

- (iv) The coordinates of D are (0, − 4). Why?

- (v) The coordinates of E are $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Why?

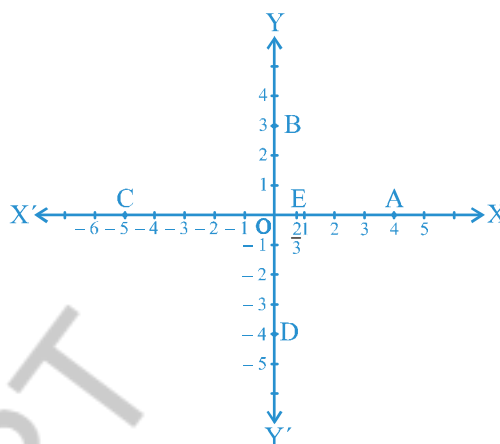


Fig. 3.12

Since every point on the x -axis has no distance (zero distance) from the x -axis, therefore, the y -coordinate of every point lying on the x -axis is always zero. Thus, the coordinates of any point on the x -axis are of the form $(x, 0)$, where x is the distance of the point from the y -axis. Similarly, the coordinates of any point on the y -axis are of the form $(0, y)$, where y is the distance of the point from the x -axis. Why?

What are the coordinates of the **origin O**? It has zero distance from both the axes so that its abscissa and ordinate are both zero. Therefore, the coordinates of the origin are **(0, 0)**.

In the examples above, you may have observed the following relationship between the signs of the coordinates of a point and the quadrant of a point in which it lies.

- If a point is in the 1st quadrant, then the point will be in the form (+, +), since the 1st quadrant is enclosed by the positive x -axis and the positive y -axis.
- If a point is in the 2nd quadrant, then the point will be in the form (−, +), since the 2nd quadrant is enclosed by the negative x -axis and the positive y -axis.
- If a point is in the 3rd quadrant, then the point will be in the form (−, −), since the 3rd quadrant is enclosed by the negative x -axis and the negative y -axis.
- If a point is in the 4th quadrant, then the point will be in the form (+, −), since the 4th quadrant is enclosed by the positive x -axis and the negative y -axis (see Fig. 3.13).

எடுத்துக்காட்டு 2: படம் 3.12 ல் அச்சுகளின் மீது குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்ச தூரங்களை எழுதுக.

தீர்வு:

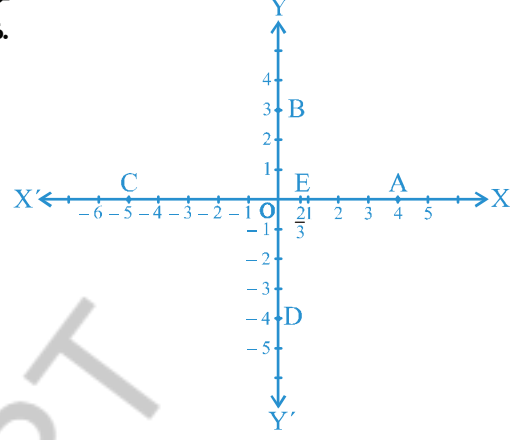
(i) A என்ற புள்ளி Y-அச்சிலிருந்து 4 அலகுகள் தூரத்திலும் மற்றும் X- அச்சிலிருந்து 0 அலகுகள் தூரத்திலும் உள்ளது. எனவே X- அச்ச தூரம் +4 மற்றும் Y-அச்ச தூரம் 0 எனவே புள்ளி A என்பது (4, 0) எனக் குறிக்கப்படும்..

(ii) B ன் அச்ச தூரம் (0,3) ஏன்?

(iii) C ன் அச்சுகள் (-5, 0) ஏன்?

(iv) D ன் அச்சுகள் (0, - 4) ஏன்?

(v) E ன் அச்சுகள் $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ஏன்?



படம். 3.12

X- அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் Y- அச்ச தொலைவு பூஜ்ஜியம் ஆகும். எனவே X- அச்ச மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் (x,0) எனக் குறிக்கப்படும். இங்கே x என்பது Y-அச்சிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம் ஆகும். இதே போல் Y- அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் (0,y) எனக் குறிக்கப்படும். இங்கே y என்பது X- அச்சிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம். ஏன்?

ஆதிப்புள்ளி O என்பது X மற்றும் Y அச்சிலிருந்து பூஜ்ஜிய தூரத்திலிருக்கும். எனவே ஆதிப்புள்ளியை (0, 0) எனக் குறிப்போம்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் குறியீட்டிற்கும் அப்புள்ளி அமைந்திருக்கும் காற்பகுதிகளுக்கும் இருக்கும் தொடர்பை நீ கவனித்திருப்பாய்.

- ஒரு புள்ளி முதல் கால் பகுதியில் இருந்தால் அது (+, +) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் முதல் கால் பகுதி X- அச்சின் மிகை எண்கள் மற்றும் Y- அச்சின் மிகை எண்கள் அடங்கிய பகுதி ஆகும்.
- ஒரு புள்ளி முதல் 2வது பகுதியில் இருந்தால் அது (-, +) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் இரண்டாவது கால் பகுதி X- அச்சின் குறை எண்கள் மற்றும் Y- அச்சின் மிகை எண்கள் அடங்கிய பகுதி ஆகும். படம் 3.13ஐ பார்க்க.
- ஒரு புள்ளி முதல் 3வது பகுதியில் இருந்தால் அது (-, -) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் மூன்றாவது கால் பகுதி X- அச்சின் குறை எண்கள் மற்றும் Y- அச்சின் குறை எண்கள் அடங்கிய பகுதி ஆகும். படம் 3.13ஐ பார்க்க.
- ஒரு புள்ளி முதல் 4வது பகுதியில் இருந்தால் அது (+, -) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் நான்காவது கால் பகுதி X- அச்சின் மிகை எண்கள் மற்றும் Y- அச்சின் குறை எண்கள் அடங்கிய பகுதி ஆகும். படம் 3.13ஐ பார்க்க.

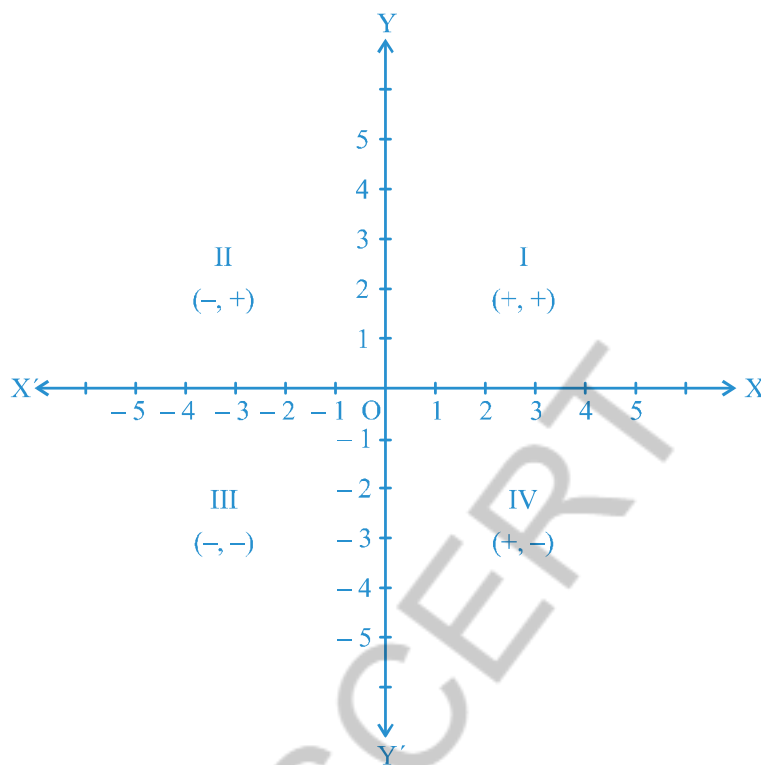
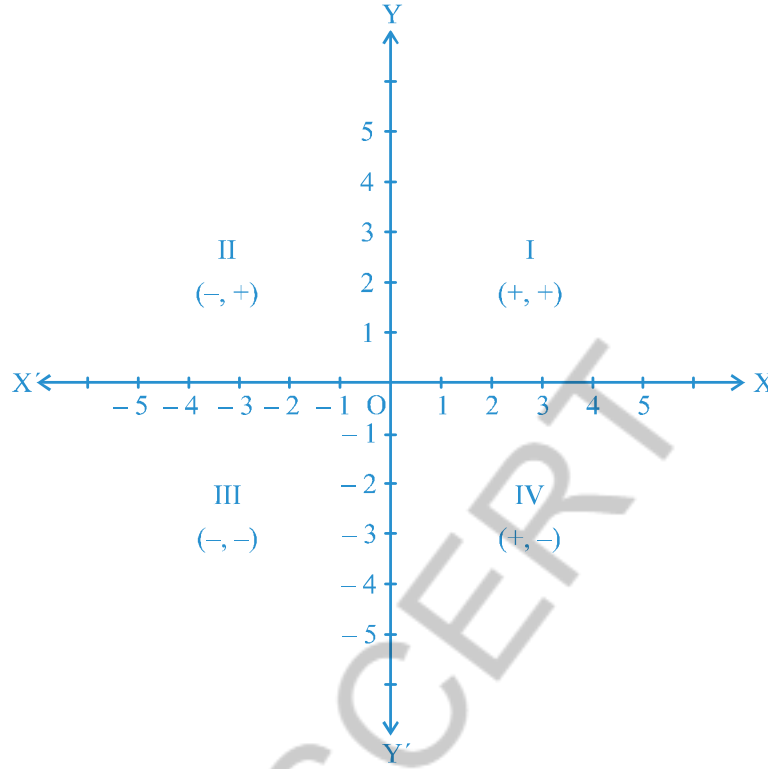


Fig. 3.13

Remark : The system we have discussed above for describing a point in a plane is only a convention, which is accepted all over the world. The system could also have been, for example, the ordinate first, and the abscissa second. However, the whole world sticks to the system we have described to avoid any confusion.

EXERCISE 3.2

1. Write the answer of each of the following questions:
 - (i) What is the name of horizontal and the vertical lines drawn to determine the position of any point in the Cartesian plane?
 - (ii) What is the name of each part of the plane formed by these two lines?
 - (iii) Write the name of the point where these two lines intersect.
2. See Fig.3.14, and write the following:
 - (i) The coordinates of B.
 - (ii) The coordinates of C.
 - (iii) The point identified by the coordinates $(-3, -5)$.



படம். 3.13

குறிப்பு : நாம் விவரித்த மேற்கண்ட சமதளப் புள்ளியை குறிக்கும் முறை உலகம் முழுவதும் உங்களால் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட அமைப்பு ஆகும். Y அச்ச முதலாகவும் X அச்ச இரண்டாவதாகக் கூட வந்திருக்கலாம் ஆனால் அது குழப்பத்தை உருவாக்கும். எனவே இந்த குழப்பத்தைப் போக்க உலகம் முழுவதும் நாம் விவரித்த அமைப்பு முறையே பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பயிற்சி 3.2

1. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளி.

(i) கார்னீஸியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் இடத்தை நிர்ணயிக்க உதவும் கிடைக்கோடு மற்றும் குத்துக் கோடு இவற்றின் பெயர் என்ன?

(ii) இந்த கோடுகளால் தளத்தின் மீது உருவாகும் ஒவ்வொரு பகுதியின் பெயர்களை எழுதுக.

(iii) இந்த இரு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியின் பெயரை எழுதுக.

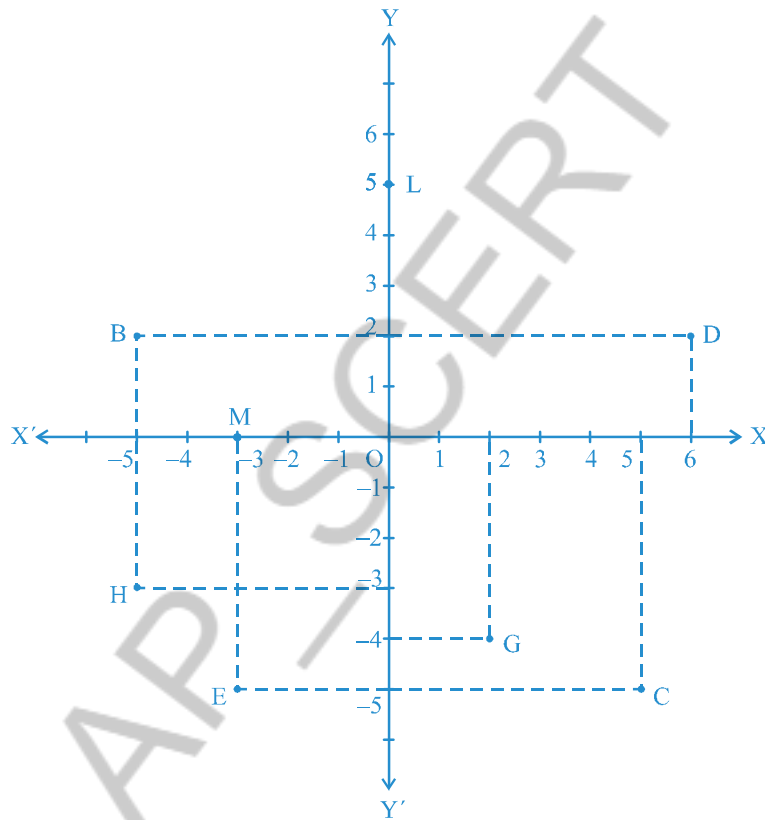
2. படம் 3.14 ஐ பார்த்து கீழ்க்கண்டவற்றை எழுதுக.

(i) புள்ளி B ன் அச்ச தூரம்

(ii) புள்ளி C அச்ச தூரம்

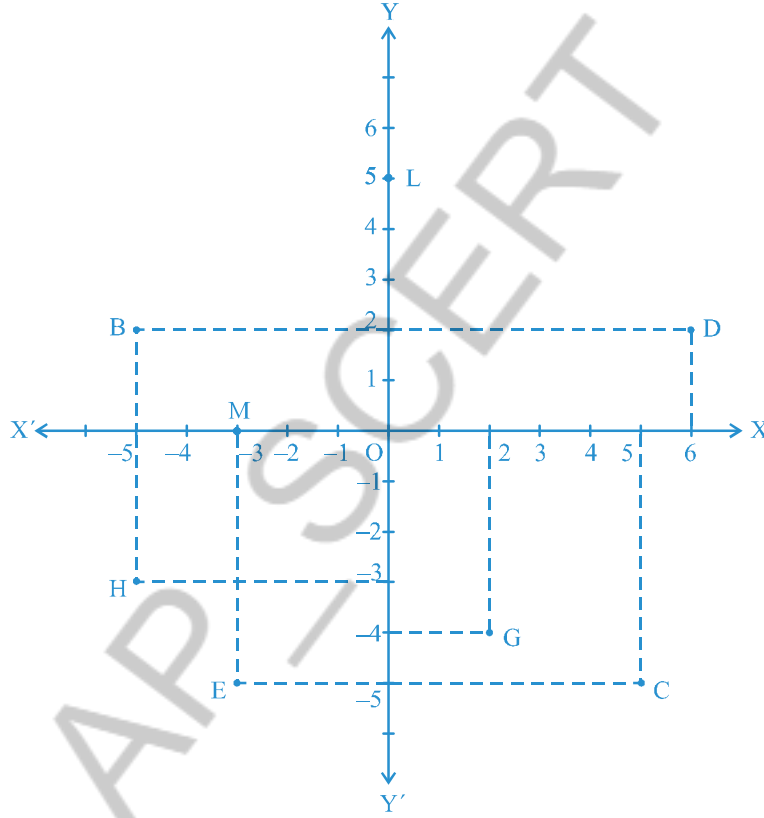
(iii) $(-3, -5)$ அச்ச தூரம் குறிக்கும் புள்ளியின் பெயர்.

- (iv) The point identified by the coordinates $(2, -4)$.
- (v) The abscissa of the point D.
- (vi) The ordinate of the point H.
- (vii) The coordinates of the point L.
- (viii) The coordinates of the point M.

**Fig. 3.14**

3. A car is located at the point $P(2,5)$ on a map. From P it travels 3 units towards east and reaches Q. What are the new coordinates of the car's location at Q?
- A) $(5,8)$ B) $(5,5)$
C) $(-1,5)$ D) $(-1, 8)$

- (iv) $(2, -4)$ அச்ச தூரம் குறிக்கும் புள்ளியின் பெயர்.
- (v) புள்ளி D ன் X அச்ச தூரம்
- (vi) புள்ளி H ன் X அச்ச தூரம்
- (vii) L புள்ளியின் அச்ச தூரம்
- (viii) புள்ளி M ன் அச்ச தூரம்



படம். 3.14

3. ஒரு கார், ஒரு வரைபடத்தின் மீது $P(2,5)$ எனும் புள்ளியில் உள்ளது. அது P புள்ளியிலிருந்து 3 அலகுகள் கிழக்கு திசையை நோக்கி நகர்ந்து Q புள்ளியை அடைகிறது. தற்போது கார் அமைந்துள்ள Q புள்ளியின் அச்சதூரங்களை கண்டுபிடி.

- A) $(5,8)$ B) $(5,5)$
- C) $(-1,5)$ D) $(-1, 8)$

3.3 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. To locate the position of an object or a point in a plane, we require two perpendicular lines. One of them is horizontal, and the other is vertical.
2. The plane is called the Cartesian, or coordinate plane and the lines are called the coordinate axes.
3. The horizontal line is called the x -axis, and the vertical line is called the y -axis.
4. The coordinate axes divide the plane into four parts called quadrants.
5. The point of intersection of the axes is called the origin.
6. The distance of a point from the y -axis is called its x -coordinate, or abscissa, and the distance of the point from the x -axis is called its y -coordinate, or ordinate.
7. If the abscissa of a point is x and the ordinate is y , then (x, y) are called the coordinates of the point.
8. The coordinates of a point on the x -axis are of the form $(x, 0)$ and that of the point on the y -axis are $(0, y)$.
9. The coordinates of the origin are $(0, 0)$.
10. The coordinates of a point are of the form $(+, +)$ in the first quadrant, $(-, +)$ in the second quadrant, $(-, -)$ in the third quadrant and $(+, -)$ in the fourth quadrant, where $+$ denotes a positive real number and $-$ denotes a negative real number.
11. If $x \neq y$, then $(x, y) \neq (y, x)$, and $(x, y) = (y, x)$, if $x = y$.

3.3 தொகுப்பு:

இந்த பாடத்தில் கீழ்க்கண்டவற்றை கற்றோம்.

1. சமதளத்தின் மீது ஒரு புள்ளி அல்லது பொருளை குறிக்க இரண்டு செங்குத்து கோடுகள் தேவை. அவற்றில் ஒன்று கிடைக்கோடு மற்றொன்று குத்துக்கோடு.
2. சமதளம் கார்டீஸியன் தளம் என்றோ அல்லது ஆயத் தொலைத் தளம் என்றோ அழைக்கப்படும்.
3. கிடைக்கோடு X - அச்சு என அழைக்கப்படும் மற்றும் குத்துக்கோடு Y - அச்சு என அழைக்கப்படும்.
4. ஆய தொலை அச்சுகள் சமதளத்தை நான்கு சமமான கால் பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன.
5. அச்சுகளின் வெட்டும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது.
6. Y - அச்சிலிருந்து புள்ளியின் தூரத்தை x - அச்சு தூரம் எனவும் x -அச்சிலிருந்து புள்ளியின் தூரத்தை y - அச்சு தூரம் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.
7. ஒரு புள்ளி அச்சு தூரத்தை (x,y) என குறிக்கிறோம். x என்பது x அச்சு தூரத்தையும் y என்பது y அச்சு தூரத்தையும் குறிக்கும்.
8. X - அச்சின் மீதுள்ள புள்ளிகள் $(x, 0)$ என்ற வடிவிலும் Y - அச்சின் மீதுள்ள புள்ளிகள் $(0,y)$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.
9. ஆதிப்புள்ளி $(0, 0)$ எனக் குறிக்கப்படும்.
10. முதல் கால் பகுதியில் $(+, +)$ எனவும், இரண்டாம் கால் பகுதியில் $(-, +)$ எனவும், மூன்றாம் கால் பகுதியில் $(-, -)$ எனவும், நான்காம் கால் பகுதியில் $(+, -)$ எனவும் புள்ளிகள் குறிக்கப்படும்.
11. $x \neq y$ எனில் $(x, y) \neq (y, x)$, மற்றும் $x = y$ எனில் $(x, y) = (y, x)$



LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

—Edmund Halley

4.1 Introduction

In earlier classes, you have studied linear equations in one variable. Can you write down a linear equation in one variable? You may say that $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ and $\sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$ are examples of linear equations in one variable. You also know that such equations have a unique (i.e., one and only one) solution. You may also remember how to represent the solution on a number line. In this chapter, the knowledge of linear equations in one variable shall be recalled and extended to that of two variables. You will be considering questions like: Does a linear equation in two variables have a solution? If yes, is it unique? What does the solution look like on the Cartesian plane? You shall also use the concepts you studied in Chapter 3 to answer these questions.

4.2 Linear Equations

Let us first recall what you have studied so far. Consider the following equation:

$$2x + 5 = 0$$

Its solution, i.e., the root of the equation, is $-\frac{5}{2}$. This can be represented on the number line as shown below:

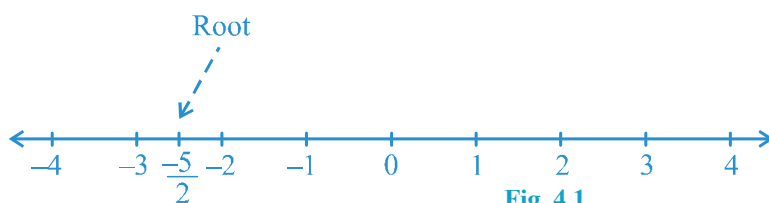


Fig. 4.1



அத்தியாயம் 4

இரு மாறிகளில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்

இயற்கணித கலையின் முக்கிய பயன்பாடானது கணித சிக்கலை சமன்பாட்டு வடிவில் மாற்றுவதும், அச்சமன்பாடுகளை மிக எளிமையான சொற்களில் வெளிப்படுத்துவதும் ஆகும்.

- எட்மண்ட் ஹாலி

4.1 அறிமுகம் :

இதற்கு முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் குறித்து படித்தீர்கள். ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் ஒன்றை உன்னால் எழுத முடியுமா? $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ மற்றும் $\sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$ என்பன ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் என நீ சொல்லலாம். இத்தகைய சமன்பாட்டிற்கு ஒரேஒரு (unique) தீர்வு மட்டுமே உண்டு என்பதையும் நீ அறிவாய். இந்த தீர்வை எண் கோட்டின் மீது எப்படி குறிப்பது என்பதையும் நினைவு படுத்திக்கொள். இந்தப் பாடத்தில் ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் குறித்து படிப்போம். கீழ்க்கண்ட வினாக்களை குறித்து சிந்தித்துப்பார். இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு உண்டா? ஆம் எனில் அது ஒரே தீர்வா? கார்டீசியன் சமதளத்தில் அந்த தீர்வு எப்படி இருக்கும்? இத்தகைய வினாக்களுக்கு விடை காண பாடம் 3-ல் படித்தவற்றை பயன்படுத்திக் கொள்.

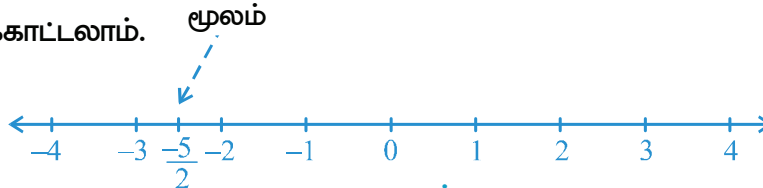
4.2 ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் :

இதுவரை நீ படித்தவற்றை மீண்டும் நினைவுப்படுத்திக் கொள். கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டை கவனி.

$$2x + 5 = 0$$

இதன் தீர்வு அதாவது இதன் மூலம் என்பது $-\frac{5}{2}$ இதை கீழ்க்கண்டவாறு எண்கோட்டின்

மீது குறித்துக்காட்டலாம். மூலம்



படம். 4.1

While solving an equation, you must always keep the following points in mind:

The solution of a linear equation is not affected when:

- (i) the same number is added to (or subtracted from) both the sides of the equation.
- (ii) you multiply or divide both the sides of the equation by the same non-zero number.

Let us now consider the following situation:

In a One-day International Cricket match between India and Sri Lanka played in Nagpur, two Indian batsmen together scored 176 runs. Express this information in the form of an equation.

Here, you can see that the score of neither of them is known, i.e., there are two unknown quantities. Let us use x and y to denote them. So, the number of runs scored by one of the batsmen is x , and the number of runs scored by the other is y . We know that

$$x + y = 176,$$

which is the required equation.

This is an example of a linear equation in two variables. It is customary to denote the variables in such equations by x and y , but other letters may also be used. Some examples of linear equations in two variables are:

$$1.2s + 3t = 5, p + 4q = 7, \pi u + 5v = 9 \text{ and } 3 = \sqrt{2}x - 7y.$$

Note that you can put these equations in the form $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ and $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$, respectively.

So, any equation which can be put in the form $ax + by + c = 0$, where a , b and c are real numbers, and a and b are not both zero, is called a *linear equation in two variables*. This means that you can think of many many such equations.

Example 1 : Write each of the following equations in the form $ax + by + c = 0$ and indicate the values of a , b and c in each case:

$$(i) 2x + 3y = 4.37 \quad (ii) x - 4 = \sqrt{3}y \quad (iii) 4 = 5x - 3y \quad (iv) 2x = y$$

Solution : (i) $2x + 3y = 4.37$ can be written as $2x + 3y - 4.37 = 0$. Here $a = 2$, $b = 3$ and $c = -4.37$.

(ii) The equation $x - 4 = \sqrt{3}y$ can be written as $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$. Here $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ and $c = -4$.

(iii) The equation $4 = 5x - 3y$ can be written as $5x - 3y - 4 = 0$. Here $a = 5$, $b = -3$ and $c = -4$. Do you agree that it can also be written as $-5x + 3y + 4 = 0$? In this case $a = -5$, $b = 3$ and $c = 4$.

ஒரு சமன்பாட்டை தீர்க்கும்போது கீழ்க்கண்ட உண்மைகளை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்:

- ஒரு ஒருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வு எப்போதெல்லாம் மாற்றம் அடையாது எனில் ஒரே எண்ணை சமன்பாட்டின் இருபுறமும் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ,
- மேலும் சமன்பாட்டின் இருபுறத்தையும் பூஜ்ஜியம் அல்லாத எண்ணால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ.

கீழ்க்கண்ட சூழலை நாம் இப்போது கவனிப்போம்.

நாக்பூரில் இந்தியாவிற்கும் இலங்கைக்கும் இடையே நடந்த ஒருநாள் கிரிக்கெட் போட்டியில் இரண்டு இந்திய மட்டை வீச்சாளர்கள் சேர்த்து எடுத்த ஓட்டம் 176. இந்த விவரத்தை ஒரு சமன்பாட்டின் மூலம் தெரிவி.

இங்கு எந்த ஒரு மட்டை வீச்சாளரின் ஓட்டமும் கொடுக்கப்படவில்லை. அதாவது இரண்டும் தெரியாத அளவுகள். அவற்றை x மற்றும் y மூலம் குறிப்போம். எனவே ஒரு மட்டை வீச்சாளர் எடுத்த ஓட்டங்கள் x எனவும், மற்றொருவர் எடுத்த ஓட்டங்கள் y எனவும் கொள்க. எனவே நமக்கு கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$x + y = 176,$$

இதுவே நமக்குத் தேவையான சமன்பாடு ஆகும்.

இது இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு ஒரு உதாரணம் ஆகும். x மற்றும் y எனக் குறிப்பது மரபு. ஆனால் இதை வேறு மாறிகள் மூலமாகவும் குறிக்கலாம். இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

$$1.2s + 3t = 5, p + 4q = 7, \pi u + 5v = 9 \text{ மற்றும் } 3 = \sqrt{2}x - 7y.$$

இந்த சமன்பாடுகளை கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம், $1.2s + 3t - 5 = 0, p + 4q - 7 = 0, \pi u + 5v - 9 = 0$ மற்றும் $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$.

எனவே, $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் எழுதப்படும் எந்த சமன்பாடும் இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடு எனப்படும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மெய் எண்கள் மற்றும் a, b இவை இரண்டும் ஒரே சமயத்தில் பூஜ்ஜியம் இருக்கக்கூடாது. இதேபோன்று பல சமன்பாடுகள் குறித்து நீ சிந்திக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் எழுது மற்றும் a, b, c இவற்றின் மதிப்புகளை ஒவ்வொன்றிலும் கண்டுபிடி.

$$(i) 2x + 3y = 4.37 \quad (ii) x - 4 = \sqrt{3}y \quad (iii) 4 = 5x - 3y \quad (iv) 2x = y$$

தீர்வு:

(i) சமன்பாடு $2x + 3y = 4.37$ இதை $2x + 3y - 4.37 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $a = 2, b = 3$ மற்றும் $c = -4.37$

(ii) சமன்பாடு $x - 4 = \sqrt{3}y$ என்பதை $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $a = 1, b = -\sqrt{3}$ மற்றும் $c = -4$

(iii) சமன்பாடு $4 = 5x - 3y$ என்பதை $5x - 3y - 4 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $a = 5, b = -3$ மற்றும் $c = -4$

இதை $-5x + 3y + 4 = 0$ எனவும் எழுதலாம் என்பதை நீ ஒப்புக்கொள்கிறாயா? இங்கு $a = -5, b = 3$ மற்றும் $c = 4$

(iv) The equation $2x = y$ can be written as $2x - y + 0 = 0$. Here $a = 2$, $b = -1$ and $c = 0$.

Equations of the type $ax + b = 0$ are also examples of linear equations in two variables because they can be expressed as

$$ax + 0.y + b = 0$$

For example, $4 - 3x = 0$ can be written as $-3x + 0.y + 4 = 0$.

Example 2 : Write each of the following as an equation in two variables:

- (i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

Solution : (i) $x = -5$ can be written as $1.x + 0.y = -5$, or $1.x + 0.y + 5 = 0$.
 (ii) $y = 2$ can be written as $0.x + 1.y = 2$, or $0.x + 1.y - 2 = 0$.
 (iii) $2x = 3$ can be written as $2x + 0.y - 3 = 0$.
 (iv) $5y = 2$ can be written as $0.x + 5y - 2 = 0$.

EXERCISE 4.1

- The cost of a notebook is twice the cost of a pen. Write a linear equation in two variables to represent this statement.

(Take the cost of a notebook to be ₹ x and that of a pen to be ₹ y).

- Express the following linear equations in the form $ax + by + c = 0$ and indicate the values of a , b and c in each case:

- (i) $2x + 3y = 9.35$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$
 (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 Solution of a Linear Equation

You have seen that every linear equation in one variable has a unique solution. What can you say about the solution of a linear equation involving two variables? As there are two variables in the equation, a solution means a pair of values, one for x and one for y which satisfy the given equation. Let us consider the equation $2x + 3y = 12$. Here, $x = 3$ and $y = 2$ is a solution because when you substitute $x = 3$ and $y = 2$ in the equation above, you find that

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

This solution is written as an ordered pair $(3, 2)$, first writing the value for x and then the value for y . Similarly, $(0, 4)$ is also a solution for the equation above.

(iv) சமன்பாடு $2x = y$ என்பதை $2x - y + 0 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $a = 2, b = -1$ மற்றும் $c = 0$.

$ax + b = 0$ என்ற வகையான சமன்பாடுகளும் இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடு எனலாம். ஏனெனில் அவற்றை $ax + 0.y + b = 0$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $4 - 3x = 0$ என்பதை $-3x + 0.y + 4 = 0$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றையும் இரண்டு மாறிகள் கொண்ட சமன்பாடுகளாக எழுது.

(i) $x = -5$

(ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$

(iv) $5y = 2$

தீர்வு : (i) $x = -5$ என்பதை $1.x + 0.y = -5$, அல்லது $1.x + 0.y + 5 = 0$ என எழுதலாம்.

(ii) $y = 2$ என்பதை $0.x + 1.y = 2$, அல்லது $0.x + 1.y - 2 = 0$ என எழுதலாம்.

(iii) $2x = 3$ என்பதை $2x + 0.y - 3 = 0$ என எழுதலாம்.

(iv) $5y = 2$ என்பதை $0.x + 5y - 2 = 0$ என எழுதலாம்.

பயிற்சி 4.1

1. ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ஒரு பேனாவின் விலையைப் போல் இரு மடங்கு. இந்தக் கூற்றை குறிக்க இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒரு ஒருபடிச் சமன்பாட்டை எழுது.

(நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ x எனவும் பேனாவின் விலை ₹ y எனவும் கொள்க).

2. கீழ்க்கண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் எழுதுக. ஒவ்வொன்றிலும் a, b, c ன் மதிப்புகளை எழுதுக.

(i) $2x + 3y = 9.35$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் முறை :

ஒரு மாறி கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு என்பதை நீ அறிவாய். இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு என்ன என்பது குறித்து நீ என்ன சொல்கிறாய்? சமன்பாட்டில் இரண்டு மாறிகள் இருப்பதால் தீர்வும் ஒரு ஜோடியாக இருக்கும். x க்கு ஒரு மதிப்பும், y க்கு ஒரு மதிப்பும் என ஒரு ஜோடி மதிப்புகள் இருக்கும். $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டை கவனி. இங்கு $x = 3$ மற்றும் $y = 2$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. சமன்பாட்டில் இந்த மதிப்புகளை பிரதியிட்டால்,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

இந்த தீர்வை $(3, 2)$ என்ற ஜோடியாக எழுதலாம். முதலில் x ன் மதிப்பையும், இரண்டாவதாக y ன் மதிப்பையும் எழுத வேண்டும். இதேபோல் $(0, 4)$ என்பதும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு ஆகும்.

On the other hand, $(1, 4)$ is not a solution of $2x + 3y = 12$, because on putting $x = 1$ and $y = 4$ we get $2x + 3y = 14$, which is not 12. Note that $(0, 4)$ is a solution but not $(4, 0)$.

You have seen at least two solutions for $2x + 3y = 12$, i.e., $(3, 2)$ and $(0, 4)$. Can you find any other solution? Do you agree that $(6, 0)$ is another solution? Verify the same. In fact, we can get many many solutions in the following way. Pick a value of your choice for x (say $x = 2$) in $2x + 3y = 12$. Then the equation reduces to $4 + 3y = 12$, which is a linear equation in one variable. On solving this, you get $y = \frac{8}{3}$. So $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ is another solution of $2x + 3y = 12$. Similarly, choosing $x = -5$, you find that the equation becomes $-10 + 3y = 12$. This gives $y = \frac{22}{3}$. So, $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ is another solution of $2x + 3y = 12$. So there is no end to different solutions of a linear equation in two variables. That is, *a linear equation in two variables has infinitely many solutions.*

Example 3 : Find four different solutions of the equation $x + 2y = 6$.

Solution : By inspection, $x = 2, y = 2$ is a solution because for $x = 2, y = 2$

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

Now, let us choose $x = 0$. With this value of x , the given equation reduces to $2y = 6$ which has the unique solution $y = 3$. So $x = 0, y = 3$ is also a solution of $x + 2y = 6$. Similarly, taking $y = 0$, the given equation reduces to $x = 6$. So, $x = 6, y = 0$ is a solution of $x + 2y = 6$ as well. Finally, let us take $y = 1$. The given equation now reduces to $x + 2 = 6$, whose solution is given by $x = 4$. Therefore, $(4, 1)$ is also a solution of the given equation. So four of the infinitely many solutions of the given equation are:

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ and } (4, 1).$$

Remark : Note that an easy way of getting a solution is to take $x = 0$ and get the corresponding value of y . Similarly, we can put $y = 0$ and obtain the corresponding value of x .

Example 4 : Find two solutions for each of the following equations:

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

Solution : (i) Taking $x = 0$, we get $3y = 12$, i.e., $y = 4$. So, $(0, 4)$ is a solution of the given equation. Similarly, by taking $y = 0$, we get $x = 3$. Thus, $(3, 0)$ is also a solution.

(1, 4) என்பது $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு அல்ல. ஏனெனில், $x = 1$ மற்றும் $y = 4$ என்ற மதிப்புகளை பிரதியிட்டால் சமன்பாடு $2x + 3y = 14$ என பெறுகிறோம், எனவே (1, 4) என்பது தீர்வு அல்ல. (0, 4) என்பது தீர்வு ஆனால் (4, 0) என்பது தீர்வு அல்ல என்பதை கவனி.

$2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தது இரண்டு தீர்வுகள் அதாவது (3,2) மற்றும் (0,4) எனப் பார்த்தோம். வேறு ஏதாவது தீர்வை உன்னால் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? (6,0) என்பது மற்றொரு தீர்வு என்பதை நீ ஏற்றுக் கொள்கிறாயா? இதை சரிபார். கீழ்க்கண்ட வழிமுறைப்படி பல தீர்வுகளை நாம் காணலாம். x க்கு உன்னுடைய விருப்பப்படி ஒரு மதிப்பை பிரதியிடு. $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டில் $x = 2$ என பிரதியிட்டால், அது $4 + 3y = 12$ என்ற ஒரு மாறியில் ஒருபடிச் சமன்பாடாக குறைகிறது. இதை சுருக்கினால் $y = \frac{8}{3}$ என கிடைக்கிறது. எனவே $(2, \frac{8}{3})$ என்பதும் மற்றொரு தீர்வு ஆகும். இதேபோல் $x = -5$ என எடுத்துக்கொண்டால் சமன்பாடு $-10 + 3y = 12$ என ஆகிறது. இது $y = \frac{22}{3}$ என்ற மதிப்பைக் கொடுக்கிறது. எனவே $(-5, \frac{22}{3})$ என்பது $2x + 3y = 12$ என்பதன் மற்றொரு தீர்வு ஆகும். இப்படி முடிவில்லாமல் தீர்வுகளை கண்டுபிடித்துக் கொண்டே போகலாம். எனவே இரு மாறிகள் கொண்ட ஒரு ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு முடிவிலா தீர்வுகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $x + 2y = 6$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நான்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : சரிபார்த்தல் மூலம் $x = 2$ மற்றும் $y = 2$ எனலாம்.

ஏனெனில் $x = 2, y = 2$ மதிப்புகளுக்கு $x + 2y = 2 + 4 = 6$

இப்போது $x = 0$ என எடுத்துக்கொள்வோம். x க்கு இந்த மதிப்பை பிரதியிட்டால் சமன்பாடு $2y = 6$ என ஆகிறது. எனவே $y = 3$ ஆகையால், $x = 0, y = 3$ என்பது $x + 2y = 6$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு ஆகும். இதேபோல் $y = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் சமன்பாடு $x = 6$ என கிடைக்கிறது. எனவே $x = 6, y = 0$ என்பது $x + 2y = 6$ என்ற சமன்பாட்டின் மற்றொரு தீர்வு ஆகும். கடைசியாக $y = 1$ என எடுத்துக்கொள்வோம். சமன்பாடு $x + 2 = 6$ என பெறுகிறோம். எனவே $x = 4$ ஆகையால், (4, 1) என்பதும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு ஆகும். எனவே முடிவிலா தீர்வுகளில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட நான்கு தீர்வுகள் (2, 2), (0, 3), (6, 0) மற்றும் (4, 1) என்பன.

குறிப்பு: எளிய வழி என்னவென்றால் $x = 0$ எனக் கொண்டு y மதிப்பையும், $y = 0$ எனக் கொண்டு x மதிப்பையும் கண்டுபிடிப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் இரண்டு தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

தீர்வு : (i) $x = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் $3y = 12$ அதாவது $y = 4$ எனவே (0, 4) என்பது ஒரு தீர்வு. இதேபோல் $y = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் $x = 3$ எனவே (3, 0) என்பது மற்றொரு தீர்வு ஆகும்.

(ii) Taking $x = 0$, we get $5y = 0$, i.e., $y = 0$. So $(0, 0)$ is a solution of the given equation. Now, if you take $y = 0$, you again get $(0, 0)$ as a solution, which is the same as the earlier one. To get another solution, take $x = 1$, say. Then you can check that the corresponding value of y is $-\frac{2}{5}$.

So $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ is another solution of $2x + 5y = 0$.

(iii) Writing the equation $3y + 4 = 0$ as $0 \cdot x + 3y + 4 = 0$, you will find that $y = -\frac{4}{3}$ for any value of x . Thus, two solutions can be given as $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ and $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$.

EXERCISE 4.2

- Which one of the following options is true, and why?

$y = 3x + 5$ has

- (i) a unique solution, (ii) only two solutions, (iii) infinitely many solutions

- Write four solutions for each of the following equations:

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

- Check which of the following are solutions of the equation $x - 2y = 4$ and which are not:

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

- Find the value of k , if $x = 2, y = 1$ is a solution of the equation $2x + 3y = k$.

4.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

- An equation of the form $ax + by + c = 0$, where a, b and c are real numbers, such that a and b are not both zero, is called a linear equation in two variables.
- A linear equation in two variables has infinitely many solutions.
- Every point on the graph of a linear equation in two variables is a solution of the linear equation. Moreover, every solution of the linear equation is a point on the graph of the linear equation.

(ii) $x = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் $5y = 0$. அதாவது $y = 0$ எனவே $(0, 0)$ ஒரு தீர்வு ஆகும். அதேபோல் $y = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் $x = 0$ கிடைக்கிறது. அதாவது $(0, 0)$ தீர்வாக கிடைக்கிறது.

இது முன்பைப் போலவே இருப்பதால் $x = 1$ என எடுத்துக்கொள். y ன் மதிப்பு $-\frac{2}{5}$. ஆகையால் தீர்வு $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ என்றாகிறது.

(iii) $3y + 4 = 0$ என்பதை $0.x + 3y + 4 = 0$ என எழுதலாம். x க்கு எந்த மதிப்பு அளித்தாலும் $y = -\frac{4}{3}$ என கிடைக்கும். எனவே $\left[0, -\frac{4}{3}\right]$ மற்றும் $\left[1, -\frac{4}{3}\right]$ என இரண்டு தீர்வுகளை எழுதலாம்.

பயிற்சி 4.2

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் எது உண்மை? ஏன்?

$y = 3x + 5$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

(i) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு (ii) இரண்டு தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு

(iii) முடிவிலா தீர்வுகள் உண்டு

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் நான்கு தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. கீழ்க்கண்டவற்றுள் $x - 2y = 4$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எவை? தீர்வு அல்லாதவை எவை?

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. $x = 2, y = 1$ என்பவை $2x + 3y = k$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனில் k ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

4.4 தொகுப்பு :

இப்பாடத்தில் கீழுள்ள கருத்துகள் குறித்து அறிந்துக் கொண்டோம்.

1. $ax + by + c = 0$, என்ற வடிவிலுள்ள சமன்பாடு இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடு என அழைக்கப்படும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மெய் எண்கள் மற்றும் a, b என்பன ஒரே சமயத்தில் பூஜ்ஜியம் இல்லை.
2. இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு கணக்கில் அடங்கா பல தீர்வுகள் உண்டு.
3. ஒருபடி சமன்பாட்டின் வரைபடத்தின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அந்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும். ஒவ்வொரு தீர்வும் ஒருபடி சமன்பாட்டின் வரைபடத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.



INTRODUCTION TO EUCLID'S GEOMETRY

5.1 Introduction

The word 'geometry' comes from the Greek words 'geo', meaning the 'earth', and 'metrein', meaning 'to measure'. Geometry appears to have originated from the need for measuring land. This branch of mathematics was studied in various forms in every ancient civilisation, be it in Egypt, Babylonia, China, India, Greece, the Incas, etc. The people of these civilisations faced several practical problems which required the development of geometry in various ways.

For example, whenever the river Nile overflowed, it wiped out the boundaries between the adjoining fields of different land owners. After such flooding, these boundaries had to be redrawn. For this purpose, the Egyptians developed a number of geometric techniques and rules for calculating simple areas and also for doing simple constructions. The knowledge of geometry was also used by them for computing volumes of granaries, and for constructing canals and pyramids. They also knew the correct formula to find the volume of a truncated pyramid (see Fig. 5.1). You know that a pyramid is a solid figure, the base of which is a triangle, or square, or some other polygon, and its side faces are triangles converging to a point at the top.

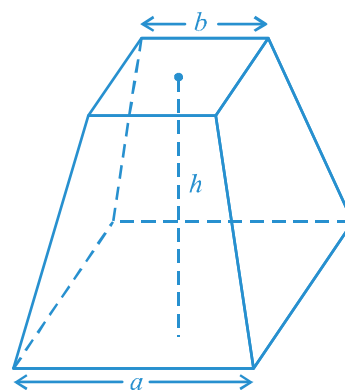


Fig. 5.1 : A Truncated Pyramid



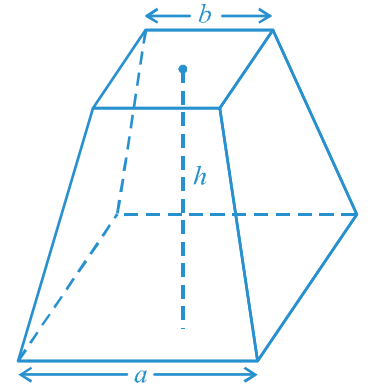
அத்தியாயம்-5

யூக்ளிடிஸ் வடிவியல் அறிமுகம்

5.1 அறிமுகம்

(geometry) எனும் சொல் ஜியோ (geo) மற்றும் மெட்ரின் (metrein) ஆகிய இரண்டு கிரேக்க சொற்களை இணைத்து உருவாக்கப்பட்டது. ஜியோ (geo) என்றால் பூமி மற்றும் மெட்ரின் (metrein) என்றால் அளத்தல் எனவும் பொருள்படும். இந்த வடிவியல் எனும் கருத்து நிலத்தை அளப்பதற்கான அவசியம் ஏற்பட்டபோது பிறந்தது. கணிதத்தின் இந்த பிரிவு, பண்டைய நாகரிகங்களான எகிப்து, பாபிலோனியா, சீனா, இந்தியா, கிரீஸ், இன்களாஸ் ஆகியோரால் ஆராயப்பட்டது. இந்த நாகரிகத்தினர் தங்களின் வாழ்வில் பல்வேறு இயல்பான பிரச்சனைகளை எதிர்கொண்டபோது அது பலவழிகளில் வடிவியல் பற்றிய கோட்பாடுகள் வளர்ச்சியடைய வழிவகுத்தது.

எடுத்துக்காட்டாக, நைல் நதியில் வெள்ளம் பெருக்கெடுத்து ஓடிய போது அருகிலுள்ள வயல் விளைநிலங்களின் எல்லைகள் அரித்துச் செல்லப்பட்டன. வெள்ளம் குறைந்த பிறகு, விளைநிலங்களின் எல்லைகள் மீண்டும் வரையறுக்கப்பட்டன. இதற்காக, எகிப்தியர்கள் எளிய பரப்புகளை உருவாக்குவதற்கும், எளிய கட்டமைப்புகளை உருவாக்குவதற்கும் எண்ணற்ற வடிவியல் நுணுக்கங்களையும், விதிகளையும் உருவாக்கினர், தானியக் குவியல்களின் கன அளவுகளை கணக்கிடவும், கால்வாய்கள் மற்றும் பிரமீடுகளை கட்டமைப்பதற்கும் வடிவியல் பற்றிய அறிவை பயன்படுத்தினர். துண்டிக்கப்பட்ட பட்டை கம்புகளின் (பிரமிடுகள்) கனஅளவை காண்பதற்கு, துல்லியமான படம் 5.1 : துண்டிக்கப்பட்ட பிரமிடு கத்திரத்தையும் அவர்கள் அறிந்து வைத்திருந்தனர்.



படம் 5.1 : துண்டிக்கப்பட்ட பிரமிடு

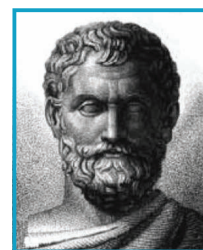
பிரமிடு என்பது அடிபாகம் முக்கோணம் அல்லது சதுரம் அல்லது வேறு சில பலகோணமாகவும் அதன் பக்க முகங்கள் உச்சியில் குவிந்திருக்கும் முக்கோணமாகவும் கொண்ட ஒரு திண்ம வடிவ படம் ஆகும்.

In the Indian subcontinent, the excavations at Harappa and Mohenjo-Daro, etc. show that the Indus Valley Civilisation (about 3000 BCE) made extensive use of geometry. It was a highly organised society. The cities were highly developed and very well planned. For example, the roads were parallel to each other and there was an underground drainage system. The houses had many rooms of different types. This shows that the town dwellers were skilled in mensuration and practical arithmetic. The bricks used for constructions were kiln fired and the ratio length : breadth : thickness, of the bricks was found to be 4 : 2 : 1.

In ancient India, the *Sulbasutras* (800 BCE to 500 BCE) were the manuals of geometrical constructions. The geometry of the Vedic period originated with the construction of altars (or *vedis*) and fireplaces for performing Vedic rites. The location of the sacred fires had to be in accordance to the clearly laid down instructions about their shapes and areas, if they were to be effective instruments. Square and circular altars were used for household rituals, while altars whose shapes were combinations of rectangles, triangles and trapeziums were required for public worship. The *sriyantra* (given in the *Atharvaveda*) consists of nine interwoven isosceles triangles. These triangles are arranged in such a way that they produce 43 subsidiary triangles. Though accurate geometric methods were used for the constructions of altars, the principles behind them were not discussed.

These examples show that geometry was being developed and applied everywhere in the world. But this was happening in an unsystematic manner. What is interesting about these developments of geometry in the ancient world is that they were passed on from one generation to the next, either orally or through palm leaf messages, or by other ways. Also, we find that in some civilisations like Babylonia, geometry remained a very practical oriented discipline, as was the case in India and Rome. The geometry developed by Egyptians mainly consisted of the statements of results. There were no general rules of the procedure. In fact, Babylonians and Egyptians used geometry mostly for practical purposes and did very little to develop it as a systematic science. But in civilisations like Greece, the emphasis was on the *reasoning* behind why certain constructions work. The Greeks were interested in establishing the truth of the statements they discovered using deductive reasoning (see Appendix 1).

A Greek mathematician, Thales is credited with giving the first known proof. This proof was of the statement that a circle is bisected (i.e., cut into two equal parts) by its diameter. One of Thales' most famous pupils was Pythagoras (572 BCE), whom you have heard about. Pythagoras and his group discovered many geometric properties and developed the theory of geometry to a great extent. This process continued till 300 BCE. At that time Euclid, a teacher of mathematics at Alexandria in Egypt, collected all the known work and arranged it in his famous treatise



Thales
(640 BCE – 546 BCE)
Fig. 5.2

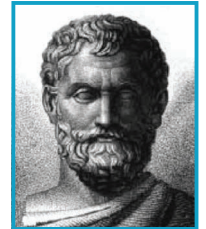
இந்திய துணைக் கண்டத்தில் மொகஞ்சதாரோ மற்றும் ஹரப்பா போன்ற இடங்களில் மேற்கொள்ளப்பட்ட அகழ்வாராய்ச்சிகளின் படி, சிந்து சமவெளி நாகரிகத்தினர் (சுமார் கி.மு. 3000) வடிவியலை வெகுவாக பயன்படுத்தினர். இது சிறப்பாக நிர்வகிக்கப்பட்ட ஒரு சமூகம் ஆகும். நகரங்கள் நன்கு திட்டமிடப்பட்டு சிறப்பாக வளர்ச்சியடைந்தன. எடுத்துக்காட்டாக, சாலைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவும், பாதாள சாக்கடைகள் அமைக்கப்பட்டும் இருந்தன. வெவ்வேறு வகைகளில் பல அறைகள் கொண்ட வீடுகள் கட்டப்பட்டிருந்தன. இது அளவீடுகள் மற்றும் செயல் வடிவ எண்கணிதத்தில் நகர வாசிகள் சிறந்த திறனை பெற்றிருந்தனர் என்பதை காட்டுகிறது. வீடுகட்டுவதற்கு சுட்ட செங்கற்களையே பயன்படுத்தினர். இவற்றின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 4:2:1 என்ற விகிதத்தில் இருந்தன.

பழங்கால இந்தியாவில், சுல்பகூத்ராஸ் (கி.மு. 800லிருந்து கி.மு. 500 வரை) என்ற வடிவங்களை கட்டமைப்பதற்கான கைப்பிரதிகள் இருந்தன.

வேதகால சடங்குகளை நிறைவேற்றுவதற்கு கட்டப்பட்ட பலி பீடங்கள் மற்றும் புனித அக்னி குண்டங்கள் ஆகியவற்றில் வடிவியல் அறிவு பயன்படுத்தப்பட்டது. இவற்றை சிறப்பாகவும், எளிமையாகவும் கையாளுவதற்கு, புனித அக்னி அமையும் இடத்திற்கு ஏற்ப அவற்றின் வடிவம், பரப்பளவுகள் சார்ந்த தெளிவான குறிப்புகள் வழங்கப்பட்டன. குடும்பம் சார்ந்த சடங்குகளுக்கு சதுரம், வட்ட வடிவங்களில் உள்ள அக்னி குண்டங்களை பயன்படுத்தினர், அதேபோன்று, செவ்வகம், முக்கோணம், சரிவகம் ஆகியவற்றின் ஒருங்கிணைந்த வடிவங்களில் உள்ள அக்னி குண்டங்களை பொது வழிபாட்டு சடங்குகளுக்கு பயன்படுத்தினர்.

ஸ்ரீ எந்திரம் Sriyantra (அதர்வண வேதத்தில் கொடுக்கப்பட்டது) என்பது உட்புறமாக ஒன்றுக்கொன்று பின்னப்பட்ட 9 இருசமபக்க முக்கோணங்களின் கலவை ஆகும். இந்த முக்கோணங்கள் ஒரு சீரான வரிசையில் அமைக்கப்பட்டு 43 துணை முக்கோணங்களை உருவாக்குகின்றன. பலிபீடங்கள், புனித அக்னி குண்டங்கள் ஆகியவற்றின் கட்டமைப்பிற்கு துல்லியமான வடிவியல் முறைகளை பயன்படுத்தினாலும் அவற்றிற்கு தொடர்புடைய சூத்திரங்கள் குறித்து விவாதிக்கப்படவில்லை. மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து வடிவியலின் கருத்து உலகம் முழுவதும் பரந்து விரிந்து பயன்படுத்தப்பட்டதாக தெரிகிறது. ஆனால் இவை வரைமுறையின்றி ஒழுங்கற்று இருந்தன. பழங்காலத்தில் இந்த வடிவியல் கருத்துகளை பூமியின் ஒரு சந்ததியினரிடமிருந்து மற்றொரு சந்ததியினருக்கு வாய்மொழி வழியாகவோ, ஓலைச்சுவடி வடிவிலோ அல்லது பிற வழிகளிலோ கொண்டு சேர்க்கப்பட்டது மிகவும் பாராட்டுக்குரியது / சிறப்புக்குரியது. பாபிலோனியா, இந்தியா, ரோம நாகரிகங்களில் வடிவியல் மக்களின் இயல்பான வாழ்க்கையின் ஒரு அங்கமாகவே இருந்தது. எகிப்தியர்கள் வடிவியலில் ஏற்படுத்திய வளர்ச்சியில் வெறும் முடிவுகளின் கூற்றுக்கள் இருந்தன. இந்த முடிவுகளை பெறுவதற்காக பொதுவான விதிகளை அவர்கள் உருவாக்க வில்லை. உண்மையில், பாபிலோனியர்கள், எகிப்தியர்கள் வடிவியலை இயல்பான நடைமுறை பயன்பாட்டிற்கே அதிகம் பயன்படுத்தினர். இதன் மூலம் அறிவியல் சார்ந்த வளர்ச்சிக்கு சிறிதளவு முயற்சி செய்தனர். ஆனால், கிரேக்க நாகரிகத்தினர் அக்கால கட்டிடங்களின் உறுதியாக கட்டமைப்புக்கான காரணங்களை ஆராய்வதற்கு முக்கியத்துவம் அளித்தனர். கிரேக்கர்கள் தாம் கண்டறிந்த உண்மைகளை விதிவிலக்கு பகுத்தறி முறையில் எடுத்துரைக்க ஆர்வம் காட்டினர். (இணைப்பு 1 ஐ பார்க்க)

ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் வட்டத்தை இருசமக்கூறிடுகிறது (இரண்டு சம பாகங்களாக) என உலகிற்கு முதன் முதலாக நிரூபித்த கிரேக்க கணிதமேதை தேல்ஸ் ஆவார். தேல்ஸின் முக்கிய சீடர்களில் ஒருவரான பைதாகரஸ் (கி.பி. 572) பற்றி கேள்விப்பட்டிருப்பீர்கள். பைதாகரஸ் அவரது குழுவும் பல்வேறு வடிவியல் பண்புகளை கண்டறிந்து வடிவியல் தேற்றங்களில் பெரிய அளவில் மாற்றங்களை கொண்டு வந்தனர். கி.பி.300 வரை இச்செயல்முறை தொடர்ந்தது. அந்த சமயத்தில் எகிப்தின் அலெக்சாண்டிரியாவை சார்ந்த கணித ஆசிரியர் யூக்ளிட் என்பவர் அனைத்து வடிவியல் கருத்தியல்களையும் சேகரித்து முறைப்படுத்தி எழுதி எலிமெண்ட்ஸ் (Elements) எனும் ஆய்வுக்கட்டுரையாக வெளியிட்டார்.



தேல்ஸ்
(640 BCE – 546 BCE)
படம். 5.2

called 'Elements'. He divided the 'Elements' into thirteen chapters, each called a book. These books influenced the whole world's understanding of geometry for generations to come.

In this chapter, we shall discuss Euclid's approach to geometry and shall try to link it with the present day geometry.



Euclid (325 BCE – 265 BCE)

Fig. 5.3

5.2 Euclid's Definitions, Axioms and Postulates

The Greek mathematicians of Euclid's time thought of geometry as an abstract model of the world in which they lived. The notions of point, line, plane (or surface) and so on were derived from what was seen around them. From studies of the space and solids in the space around them, an abstract geometrical notion of a solid object was developed. A solid has shape, size, position, and can be moved from one place to another. Its boundaries are called **surfaces**. They separate one part of the space from another, and are said to have no thickness. The boundaries of the surfaces are **curves** or straight **lines**. These lines end in **points**.

Consider the three steps from solids to points (solids-surfaces-lines-points). In each step we lose one extension, also called a **dimension**. So, a solid has three dimensions, a surface has two, a line has one and a point has none. Euclid summarised these statements as definitions. He began his exposition by listing 23 definitions in Book 1 of the 'Elements'. A few of them are given below :

1. A **point** is that which has no part.
2. A **line** is breadthless length.
3. The ends of a line are points.
4. A **straight line** is a line which lies evenly with the points on itself.
5. A **surface** is that which has length and breadth only.
6. The edges of a surface are lines.
7. A **plane surface** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.

If you carefully study these definitions, you find that some of the terms like part, breadth, length, evenly, etc. need to be further explained clearly. For example, consider his definition of a point. In this definition, 'a part' needs to be defined. Suppose if you define 'a part' to be that which occupies 'area', again 'an area' needs to be defined. So, to define one thing, you need to define many other things, and you may get a long chain of definitions without an end. For such reasons, mathematicians agree to leave

இவர் “எலிமெண்டல்” ன் தொகுப்பினை 13 அத்தியாங்களாக பிரித்து ஒவ்வொன்றையும் ஒரு புத்தகமாக வெளியிட்டார். இந்த புத்தகங்கள் உலகம் முழுவதும் அடுத்த தலைமுறையினர் வடிவியலைப் பற்றி அறிந்து கொள்வதில் மிகப்பெரும் தாக்கத்தை ஏற்படுத்தின.

இந்த அத்தியாயத்தில், வடிவியலில் யூக்ளிடிஸ் அணுகுமுறை குறித்து விவாதித்து, அதை தற்கால வடிவியலுடன் தொடர்புபடுத்த முயற்சிப்போம்.



யூக்ளிட் (கி.மு.325 – கி.மு.265)

5.2 யூக்ளிடிஸ் வரையறைகள் எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகள்

படம் 5.3

யூக்ளிடிஸ் சமகாலத்தில் வாழ்ந்த கிரேக்க கணிதமேதைகள் வடிவியலை தாங்கள் வாழ்ந்த உலகிற்கு ஒரு கருத்தியல் படைப்பாகவே எண்ணினர். தம்மைச் சுற்றியுள்ள சுற்றுப்புற சூழ்நிலைகளிலிருந்து புள்ளி, கோடு, சமதளம், புறப்பரப்பு போன்ற யுகத்தின் அடிப்படையிலான கருத்துக்களை உருவாக்கினர். வெற்றிடம் மற்றும் அவற்றை சுற்றியுள்ள திண்மங்கள் பற்றி ஆராயும் போது திண்மபொருட்களின் கருத்தியல் வடிவியல் பற்றிய கருத்துக்கள் வளர்ச்சியடைந்தன.

ஒரு திண்மப் பொருள் என்பது வடிவம், அளவு மற்றும் இருப்பிடம் ஆகியவற்றை கொண்டிருக்கும். மேலும் அதை ஓரிடத்திலிருந்து மற்றொரு இடத்திற்கு நகர்த்தலாம். அவற்றின் எல்லைகளை மேற்பரப்பு (அ) புறப்பரப்பு என்று அழைப்பர். இந்த மேற்பரப்பானது வெற்றிடத்தை ஒரு பகுதியிலிருந்து மற்றொரு பகுதியைப் பிரிக்கிறது. மேலும் புறப்பரப்பிற்கு தடிமன் கிடையாது. புறப்பரப்பின் எல்லைகளாக வளைவு கோடு அல்லது நேர்கோடுகள் இருக்கும். இத்தகைய கோடுகள் புள்ளிகளில் முடிவுப்பெறும்.

திண்ம பொருட்களிலிருந்து புள்ளிகள் வரை மூன்று படிகளை (திண்மங்கள்-புறப்பரப்புகள்-கோடுகள்-புள்ளிகள்) எடுத்துக்கொள்ளவும். ஒவ்வொரு படியிலும் பரிமாணம் என்று அழைக்கப்படும் ஒரு விரிவாக்கத்தை இழக்கிறோம். எனவே, ஒரு திண்மம் முப்பரிமாணத்தையும் ஒருபுறப்பரப்பு இருபரிமாணத்தையும், ஒரு கோடு ஒரு பரிமாணத்தையும், கொண்டிருக்கும். ஒரு புள்ளிக்கு எந்த பரிமாணமும் இல்லை. யூக்ளிட் இந்த கூற்றுகளை தொகுத்து வரையறைகளாக வெளியிட்டார். எலிமெண்ட்ஸ் எனும் தொகுப்பிலிருந்து புத்தகம் 1ல் 23 வரையறைகளை பட்டியலிட்டு தனது கருத்துக்களை வெளியிடத் தொடங்கினார். அவற்றுள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. ஒரு புள்ளிக்கு எந்த பாகமும் கிடையாது
2. ஒரு கோடு என்பது அகலமற்ற நீளம்
3. ஒரு கோட்டின் முனைகளே புள்ளிகள்
4. ஒரு நேர்க்கோடு என்பது ஒரே வரிசையில் நேராக புள்ளிகள் அமைந்த ஒரு கோடு
5. மேற்பரப்பிற்கு நீளம் மற்றும் அகலம் மட்டுமே உண்டு
6. மேற்பரப்பின் விளிம்புகளே கோடுகள்.
7. ஒரு சமதள புறப்பரப்பு என்பது நேர்க்கோடுகள் ஒரே சீராக அமைந்த ஒரு புறப்பரப்பு.

நீங்கள் மிகுந்த எச்சரிக்கையுடன் இக்கருத்துக்களை ஆராய்ந்து பார்க்கும் போது, பாகம், அகலம், நீளம் ஒரே சீராக முதலான சொற்களுக்கு கூடுதல் விளக்கங்கள் நமக்கு தேவைப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக புள்ளியை பற்றிய அவரது வரையறையை எடுத்துக் கொள்ளவும். இந்த வரையறையில் ஒரு பாகம் எனும் சொல் வரையறுக்கப்பட வேண்டும். ஒரு பாகம் எனும் சொல் வரையறுக்கப்பட்டால் அது சிறிதளவு பரப்பளவை ஆக்கிரமித்துக்கொள்கிறது எனில் மீண்டும் பரப்பளவு எனும் சொல்லுக்கு பொருள் தர வேண்டும்.

இவ்வாறாக ஒரு சொல்லை வரையறுக்க ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட அதிகமான சொற்களுக்கு விளக்கம் தரும்போது நீண்ட சங்கிலி போன்று முடிவு இல்லாமல் சென்று கொண்டே இருக்கும். இத்தகைய காரணங்களால், சில வடிவியல் சொற்களை வரையறுக்கப்படாத சொற்களாக கருத வேண்டும் என கணிதவியலாளர்கள் முடிவு செய்தனர்.

some geometric terms *undefined*. However, we do have a intuitive feeling for the geometric concept of a point than what the 'definition' above gives us. So, we represent a point as a dot, even though a dot has some dimension.

A similar problem arises in Definition 2 above, since it refers to breadth and length, neither of which has been defined. Because of this, a few terms are kept undefined while developing any course of study. So, in geometry, we *take a point, a line and a plane (in Euclid's words a plane surface) as undefined terms*. The only thing is that we can represent them intuitively, or explain them with the help of 'physical models'.

Starting with his definitions, Euclid assumed certain properties, which were not to be proved. These assumptions are actually 'obvious universal truths'. He divided them into two types: axioms and postulates. He used the term '**postulate**' for the assumptions that were specific to geometry. Common notions (often called **axioms**), on the other hand, were assumptions used throughout mathematics and not specifically linked to geometry. For details about axioms and postulates, refer to Appendix 1. Some of **Euclid's axioms**, not in his order, are given below :

- (1) Things which are equal to the same thing are equal to one another.
- (2) If equals are added to equals, the wholes are equal.
- (3) If equals are subtracted from equals, the remainders are equal.
- (4) Things which coincide with one another are equal to one another.
- (5) The whole is greater than the part.
- (6) Things which are double of the same things are equal to one another.
- (7) Things which are halves of the same things are equal to one another.

These 'common notions' refer to magnitudes of some kind. The first common notion could be applied to plane figures. For example, if an area of a triangle equals the area of a rectangle and the area of the rectangle equals that of a square, then the area of the triangle also equals the area of the square.

Magnitudes of the same kind can be compared and added, but magnitudes of different kinds cannot be compared. For example, a line cannot be compared to a rectangle, nor can an angle be compared to a pentagon.

The 4th axiom given above seems to say that if two things are identical (that is, they are the same), then they are equal. In other words, everything equals itself. It is the justification of the principle of superposition. Axiom (5) gives us the definition of 'greater than'. For example, if a quantity B is a part of another quantity A, then A can be written as the sum of B and some third quantity C. Symbolically, $A > B$ means that there is some C such that $A = B + C$.

இருப்பினும். வடிவியல் கூறான புள்ளிக்கு மேலே கொடுக்கப்பட்ட வரையறையை விட சிறப்பான மேலோங்கிய உள்ளுணர்வு நமக்கு இருக்கிறது. அதனால், அச்சப்புள்ளிக்கு (dot) சில பரிமாணங்கள் இருந்த போதிலும், அதை புள்ளியாகவே குறிக்கிறோம்.

மேலே உள்ள 2வது வரையறையிலும் இதேபோன்ற பிரச்சனை உள்ளது. இங்கே நீளம். அகலம் ஆகிய இரண்டும் வரையறுக்கப்படவில்லை அதனால், எந்த ஒரு ஆய்வின் போதும், புதிய கருத்துகளை உருவாக்கும் போதும் இதுபோன்று சில சொற்கள் வரையறுக்கப்படாத சொற்களாக விடப்படுகின்றன. நாம் வடிவியலில் புள்ளி, கோடு மற்றும் சமதளம் (யூக்ளிட் சொற்களில் சமதள புறப்பரப்பு) ஆகியவற்றை வரையறுக்கப்படாத சொற்களாக கருத வேண்டும். அதாவது, அவற்றை உள்ளுணர்வில் மனதிற்குள்ளேயே காட்சிப்படுத்திக் கொள்ளலாம் அல்லது இயல்பியல் மாதிரிகளை கொண்டு விவரிக்கலாம்.

யூக்ளிட் தனது வரையறைகளின் அடிப்படையில் நிரூபணம் செய்ய இயலாத சில வடிவியல் பண்புகளை கணித்தார். அவரது கணிப்புகள் வெளிப்படையான உலகளாவிய உண்மைகளாகவே இருந்தன. அவற்றை இரண்டு வகைகளாக பிரித்தார். அவை எடுகோள்கள் (Axioms) மற்றும் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் (Postulates) ஆகும். வடிவியல் சார்ந்த யுகத்தின் அடிப்படையிலான கருத்துகளுக்கு மட்டும் கோட்பாடுகள் (Postulates) என்றும், வடிவியல் மட்டுமின்றி கணித அறிவியல் தொடர்பான அனைத்து கணிப்புகளும் உள்ளடக்கிய கருத்துக்கு எடுகோள்கள் (Axioms) என்றும் பெயரிட்டார். எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகள் தொடர்பான விவரங்களுக்கு இணைப்பு-1ஐ பார்க்கவும்.

யூக்ளிடன் எடுகோள்களில் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

- (1) ஒரே ராசிக்கு சமமாக உள்ள ராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்
- (2) சமமான ராசிகளுடன் சமமான ராசிகளை கூட்டினால் அவைகளின் மொத்தங்களும் சமம்.
- (3) சமமான ராசிகளிலிருந்து சமமான ராசிகளை கழித்தால் அவற்றின் மீதிகள் சமம்.
- (4) ஒன்றுக்கொன்று பொருந்தும் ராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
- (5) முழுமையானது, அதன் பகுதியை விட பெரியது.
- (6) சமமான ராசிகளின் இரு மடங்குகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
- (7) சமமான ராசிகளின் பாதிகள், ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

இத்தகைய பொதுவான கருத்துகள், மேற்காணும் சில ராசிகளின் பருமனைக் காட்டுகிறது.

முதலாவது பொது கருத்தினை சமதள படங்களுக்கு பொருந்தும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு என்பது ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவுக்கு சமம் மற்றும் அந்த செவ்வகத்தின் பரப்பளவு ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கு சமம் எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அந்த சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கு சமமாகிறது.

ஒரே வகை இராசிகளின் பருமன்களை ஒப்பிடலாம் மற்றும் கூட்டலாம். ஆனால் வெவ்வேறு வகை இராசிகளின் பருமன்களை ஒப்பிட இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நேர்கோட்டை ஒரு செவ்வகத்துடன் ஒப்பிடவும் முடியாது, ஒரு கோணத்தை ஒரு ஐங்கோணத்துடன் ஒப்பிடவும் முடியாது.

மேற்கூறிய 4-வது எடுகோளில் இரு ராசிகள் ஒன்றானால் (அதாவது, ஒரே அளவில் இருந்தால்) அவை இரண்டும் சமம் என கூறப்பட்டுள்ளது. அதாவது, ஒவ்வொரு ராசியும் அதற்கு அதுவே சமம் என்பதே இதன் பொருள். இச்சாதாரண கருத்தினை மேற்பொருந்திய தத்துவமாக கருதலாம். எடுகோள் (5) அதை விட பெரியது என்னும் சொல்லுக்கு வரையறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, இராசி 'B' என்பது இராசி 'A' ன் ஒரு பகுதி ஆகும். அப்போது இராசி 'A' ஐ இராசி 'B' மற்றும் 3வது இராசி 'C' களின் மொத்தமாக எழுதலாம். கணித குறியீட்டில் $A > B$ என்பது $A = B + C$ என இருக்குமாறு 'C' எனும் மற்றொரு இராசியை கொண்டிருக்கும்.

Now let us discuss **Euclid's five postulates**. They are :

Postulate 1 : *A straight line may be drawn from any one point to any other point.*

Note that this postulate tells us that at least one straight line passes through two distinct points, but it does not say that there cannot be more than one such line. However, in his work, Euclid has frequently assumed, without mentioning, that there is a *unique* line joining two distinct points. We state this result in the form of an axiom as follows:

Axiom 5.1 : *Given two distinct points, there is a unique line that passes through them.*

How many lines passing through P also pass through Q (see Fig. 5.4)? Only one, that is, the line PQ. How many lines passing through Q also pass through P? Only one, that is, the line PQ. Thus, the statement above is self-evident, and so is taken as an axiom.

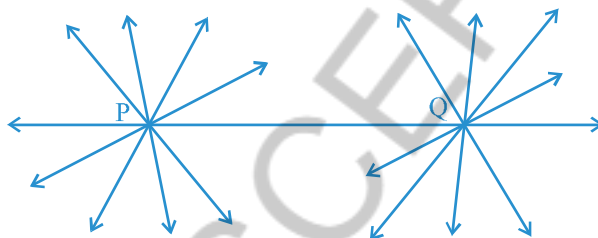


Fig. 5.4

Postulate 2 : *A terminated line can be produced indefinitely.*

Note that what we call a line segment now-a-days is what Euclid called a terminated line. So, according to the present day terms, the second postulate says that a line segment can be extended on either side to form a line (see Fig. 5.5).



Fig. 5.5

Postulate 3 : *A circle can be drawn with any centre and any radius.*

Postulate 4 : *All right angles are equal to one another.*

Postulate 5 : *If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side of it taken together less than two right angles, then the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the sum of angles is less than two right angles.*

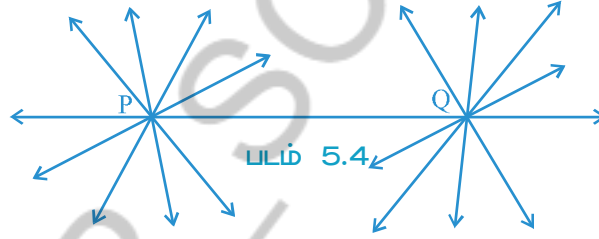
இப்போது யூக்ளிடிஸ் ஐந்து கோட்பாடுகளைப் பற்றி விவாதிப்போம் அவையாவன :

கோட்பாடு-1 : ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்க்கோடு வரையலாம்.

இக்கோட்பாட்டின்படி ஒரு நேர்க்கோடானது குறைந்தபட்சம் இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் வழியாக, கடந்து செல்வதை நாம் காணலாம். ஆனால், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் இங்கு கடந்து செல்ல இயலாது என்பதை கூட இது தெரிவிக்கவில்லை. இருப்பினும் யூக்ளிட் தனது ஆய்வின் போது, இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடானது தனித்த ஒரே ஒரு கோடாக இருப்பதை அடிக்கடி கணித்தார். இதை கீழ்க்கண்டவாறு எடுகோள் வடிவில் கூறலாம்.

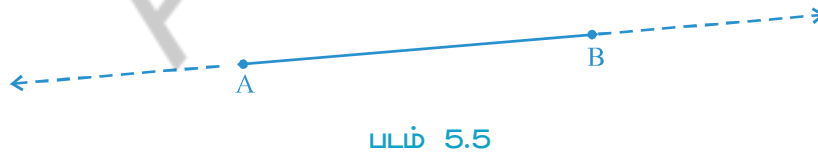
கோட்பாடு- 5.1: இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்ட போது, அவற்றின் வழியாக தனித்த ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு கடந்து செல்லும்.

புள்ளிகள் P மற்றும் Q வழியாக எத்தனை நேர்க்கோடுகள் கடந்து செல்கின்றன? (படம் 5.4-ஐ பார்க்க) PQ எனும் ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே. அதேபோல், புள்ளிகள் Q மற்றும் P வழியாக எத்தனை நேர்க்கோடுகள் கடந்து செல்கின்றன? PQ எனும் ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே. மேலே கொடுக்கப்பட்ட கூற்று சொந்த ஆதாரமாக இருப்பதால் அது எடுகோளாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது.



கோட்பாடு- 2 : ஒரு முடிவற்ற கோட்டை அளவில்லாமல் நீட்டிக்கலாம்.

தற்போது நாம் பயன்படுத்தும் கோட்டுத்துண்டு எனும் வார்த்தைக்கு பதிலாக யூக்ளிட் முடிவற்ற கோடு எனும் வார்த்தையை பயன்படுத்தினார்.



கோட்பாடு- 3 : ஏதேனும் ஒரு மையத்தையும், ஏதேனும் ஒரு ஆரத்தையும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையலாம்.

கோட்பாடு- 4 : அனைத்து செங்கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

கோட்பாடு- 5 : ஒரு நேர்க்கோடானது. இரண்டு நேர்க்கோடுகளின் வழியே குறுக்காக வெட்டும்போது, அதன் ஒரே பக்கத்தில் ஏற்படும் உட்கோணங்களின் மொத்தம் இரண்டு செங்கோணங்களை விட குறைவாக இருந்தால், அந்த இரண்டு நேர்க்கோடுகளையும் முடிவில்லாமல் நீட்டிக்கும்போது, அவை அதே பக்கத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

For example, the line PQ in Fig. 5.6 falls on lines AB and CD such that the sum of the interior angles 1 and 2 is less than 180° on the left side of PQ. Therefore, the lines AB and CD will eventually intersect on the left side of PQ.

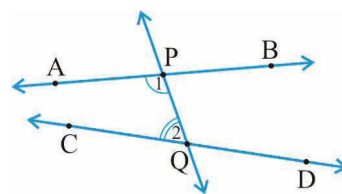


Fig. 5.6

A brief look at the five postulates brings to your notice that Postulate 5 is far more complex than any other postulate. On the other hand, Postulates 1 through 4 are so simple and obvious that these are taken as ‘self-evident truths’. However, it is not possible to prove them. So, these statements are accepted without any proof (see Appendix 1). Because of its complexity, the fifth postulate will be given more attention in the next section.

Now-a-days, ‘postulates’ and ‘axioms’ are terms that are used interchangeably and in the same sense. ‘Postulate’ is actually a verb. When we say “let us postulate”, we mean, “let us make some statement based on the observed phenomenon in the Universe”. Its truth/validity is checked afterwards. If it is true, then it is accepted as a ‘Postulate’.

A system of axioms is called **consistent** (see Appendix 1), if it is impossible to deduce from these axioms a statement that contradicts any axiom or previously proved statement. So, when any system of axioms is given, it needs to be ensured that the system is consistent.

After Euclid stated his postulates and axioms, he used them to prove other results. Then using these results, he proved some more results by applying deductive reasoning. The statements that were proved are called **propositions or theorems**. Euclid deduced 465 propositions in a logical chain using his axioms, postulates, definitions and theorems proved earlier in the chain. In the next few chapters on geometry, you will be using these axioms to prove some theorems.

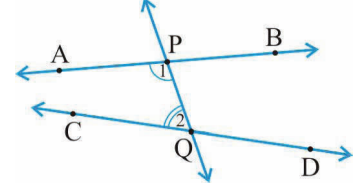
Now, let us see in the following examples how Euclid used his axioms and postulates for proving some of the results:

Example 1 : If A, B and C are three points on a line, and B lies between A and C (see Fig. 5.7), then prove that $AB + BC = AC$.



Fig. 5.7

எடுத்துக்காட்டாக கோடு PQ படம் 5.6ல் காட்டியவாறு கோடுகள் AB மற்றும் CD களின் மீது விழுகிறது. மேலும் கோடு 180° ஐ விட குறைவாக உள்ளது. அதனால் கோடுகள் AB மற்றும் CD ஆகிய இரண்டும் PQ ன் இடது பக்கமாகவே வெட்டிக்கொள்ளும்.



படம் 5.6

மேற்காணும் ஐந்து கோட்பாடுகளையும் கூர்ந்து ஆராயும் போது, மற்ற கோட்பாடுகளை விட கோட்பாடு 5 மிகவும் சிக்கலாக இருப்பதை நாம் காணலாம். மாறாக, கோட்பாடுகள் 1 முதல் 4 வரை மிகவும் எளிமையாக புரிந்துக்கொள்ளக்கூடியதாக இருப்பதால் அவற்றை தாமே நிரூபணம் தரும் உண்மைகளாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது.

இருப்பினும் இவற்றை நிரூபிப்பது சாத்தியமில்லை. எனவே, இத்தகைய கூற்றுகள் எந்த நிரூபணமும் இல்லாமல் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டன. (இணைப்பு 1ஐ பார்க்க) கோட்பாடு 5 மிகவும் சிக்கலானது என்பதால் அடுத்த பிரிவில் அதற்கு அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படும்.

இன்றைய நாட்களில் கோட்பாடுகள் மற்றும் எடுகோள்கள் ஆகிய சொற்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக ஒரே பொருள் தரும் சொற்களாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கோட்பாடு என்பது உண்மையில் ஒரு வினைச்சொல். பிரபஞ்சத்தில் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட அம்சங்களை உற்றுநோக்கி அதன் அடிப்படையில் கருத்துக்களை வெளியிடும்போது அதற்கு கோட்பாடு எனும் சொல்லை பயன்படுத்துவோம். அக்கருத்து அனைத்து வகையிலும் ஆய்வு செய்து சரிபார்க்கப்பட்டு அது உண்மையானால் கோட்பாடாக உலக அளவில் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

ஏதேனும் ஒரு எடுகோள் அல்லது ஏற்கனவே நிரூபணம் ஆன கருத்துக்களுக்கு முரண்பாடாக ஒரு கூற்றை உருவாக்க இயலாது எனில் அத்தகைய எடுகோள்களின் தொகுப்பை அல்லது அமைப்பை சீரான நிலைப்பு தன்மையுடையது என்று கூறலாம். (இணைப்பு 1-ஐ பார்க்க) எனவே, எத்தகைய எடுகோள்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும், அவை நிலைப்புத் தன்மை உடையதா என்பதை உறுதிப்படுத்திக்கொள்வது அவசியமாகிறது.

யூக்ளிட் தனது கோட்பாடுகளையும் எடுகோள்களையும் வெளியிட்ட பிறகு, பிறவகை ஆய்வு முடிவுகளை நிரூபிக்க அவற்றை பயன்படுத்தினார். அதை தொடர்ந்து அந்த முடிவுகளைக் கொண்டு விதிவிலக்கு பகுத்தறி முறையில் மேலும் சில ஆய்வு முடிவுகளுக்கு நிரூபணம் கொடுத்தார். இவ்வாறு நிரூபணம் செய்யப்பட்ட கூற்றுகளை முன்மொழிந்த அல்லது தேற்றங்கள் என்று அழைப்பர். யூக்ளிட் தொடர்ச்சியான தனது தர்க்கரீதியிலான ஆய்வின்போது ஆய்வில் முன்பு நிரூபணம் செய்யப்பட்ட எடுகோள்கள், கோட்பாடுகள், வரையறைகள் மற்றும் தேற்றங்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து 465 முன்மொழிவுகளை வருவித்தார். வடிவியல் பற்றி அடுத்து வரும் சில அத்தியாயங்களில் சில தோற்றங்களை நிரூபிக்க நாம் இந்த எடுகோள்களை பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

இப்போது, யூக்ளிட் தனது எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டு சிலவற்றின் முடிவுகளை எவ்வாறு நிரூபித்தார் என்பதை கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டில் நாம் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : A, B மற்றும் C என்பன ஒரு கோட்டின் மீது அமைந்த மூன்று புள்ளிகள் மற்றும் புள்ளி B என்பது A மற்றும் C க்கு இடையில் அமையும், (படம் 5.7-ஐ பார்க்க) எனில் $AB + BC = AC$ என நிரூபி.



படம் 5.7

Solution : In the figure given above, AC coincides with $AB + BC$.

Also, Euclid's Axiom (4) says that things which coincide with one another are equal to one another. So, it can be deduced that

$$AB + BC = AC$$

Note that in this solution, it has been assumed that there is a unique line passing through two points.

Example 2 : Prove that an equilateral triangle can be constructed on any given line segment.

Solution : In the statement above, a line segment of any length is given, say AB [see Fig. 5.8(i)]

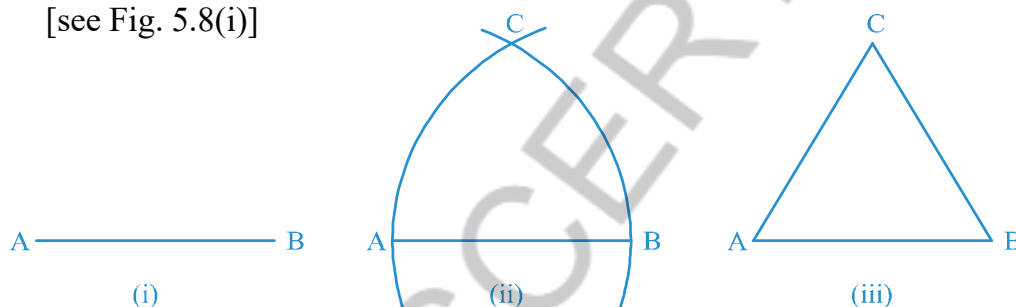


Fig. 5.8

Here, you need to do some construction. Using Euclid's Postulate 3, you can draw a circle with point A as the centre and AB as the radius [see Fig. 5.8(ii)]. Similarly, draw another circle with point B as the centre and BA as the radius. The two circles meet at a point, say C. Now, draw the line segments AC and BC to form $\triangle ABC$ [see Fig. 5.8 (iii)]

So, you have to prove that this triangle is equilateral, i.e., $AB = AC = BC$.

Now, $AB = AC$, since they are the radii of the same circle (1)

Similarly, $AB = BC$ (Radii of the same circle) (2)

From these two facts, and Euclid's axiom that things which are equal to the same thing are equal to one another, you can conclude that $AB = BC = AC$.

So, $\triangle ABC$ is an equilateral triangle.

Note that here Euclid has assumed, without mentioning anywhere, that the two circles drawn with centres A and B will meet each other at a point.

Now we prove a theorem, which is frequently used in different results:

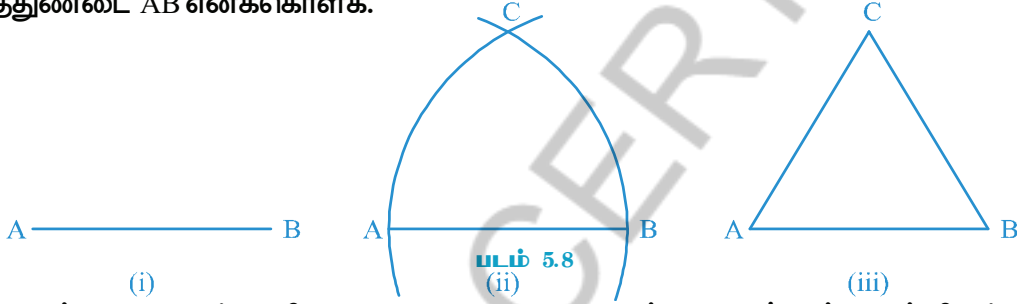
தீர்வு : மேற்காணும் படத்தில் AC என்பது $AB + BC$ ன் மேல் ஒன்றிப்போகிறது. மேலும், யூக்ளிடின் எடுகோள் (4)-ன் படி, இரண்டு ராசிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தினால் அவை ஒன்றுக்கொன்று சமம், எனவே, இதிலிருந்து நாம் அறிவது.

$$AB + BC = AC$$

இந்த தீர்வில், இரண்டு புள்ளிகள் வழியே தனித்த ஒரே ஒரு கோடு செல்கிறது என எடுத்துக்கொள்ளப்படுவதை நாம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மீது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரையலாம் என நிரூபி.

தீர்வு : மேற்காணும் கூற்றில், கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு நீளம் கொண்ட ஒரு கோட்டுத்துண்டை AB எனக்கொள்க.



இங்கே, படம் வரைவதற்கு சில வரைமுறைகளை செய்ய வேண்டும். யூக்ளிடின் கோட்பாடு 3-ஐ பயன்படுத்தி, புள்ளி A ஐ மையமாகவும் AB ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையலாம் (படம் 5.8 (ii) -ஐ பார்க்க). அதேபோல் B ஐ மையமாகவும் BA ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு மற்றொரு வட்டத்தை வரையலாம். இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி C எனக்கொள்க. இப்போது, கோட்டுத்துண்டுகள் AC மற்றும் BC களை வரைந்து $\triangle ABC$ ஐ உருவாக்கவும். (படம் 5.8 (iii) ஐ பார்க்க)

இப்போது, நீங்கள் உருவாக்கிய இந்த முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிரூபிக்கப்பட வேண்டும். அதாவது $AB = AC = BC$

இங்கு $AB = AC$, (ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்கள் என்பதால்) (1)

அதேபோல், $AB = BC$ (ஒரு வட்டத்தின் ஆரங்கள்) (2)

மேற்கூறிய இரண்டு காரணங்கள் மற்றும் யூக்ளிடின் எடுகோளிலிருந்து, இரண்டு சமமான ராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம், அதாவது, $AB = BC = AC$. எனும் முடிவுக்கு வரலாம்.

எனவே $\triangle ABC$ என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

இங்கே, A மற்றும் B களை மையங்களாக கொண்ட வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனும் கருத்தினை எந்த இடத்திலும் குறிப்பிடாமல் யூக்ளிட் தனது நிரூபணத்தில் பயன்படுத்தி இருப்பதை கவனியுங்கள்.

இப்போது, நாம் வெவ்வேறு முடிவுகளில் பயன்படுத்தப்படும் மற்றொரு தேற்றத்தை நிரூபிப்போம்.

Theorem 5.1 : *Two distinct lines cannot have more than one point in common.*

Proof : Here we are given two lines l and m . We need to prove that they have only one point in common.

For the time being, let us suppose that the two lines intersect in two distinct points, say P and Q . So, you have two lines passing through two distinct points P and Q . But this assumption clashes with the axiom that only one line can pass through two distinct points. So, the assumption that we started with, that two lines can pass through two distinct points is wrong.

From this, what can we conclude? We are forced to conclude that two distinct lines cannot have more than one point in common.

EXERCISE 5.1

- Which of the following statements are true and which are false? Give reasons for your answers.
 - Only one line can pass through a single point.
 - There are an infinite number of lines which pass through two distinct points.
 - A terminated line can be produced indefinitely on both the sides.
 - If two circles are equal, then their radii are equal.
 - In Fig. 5.9, if $AB = PQ$ and $PQ = XY$, then $AB = XY$.



Fig. 5.9

- Give a definition for each of the following terms. Are there other terms that need to be defined first? What are they, and how might you define them?
 - parallel lines
 - perpendicular lines
 - line segment
 - radius of a circle
 - square
- Consider two 'postulates' given below:
 - Given any two distinct points A and B , there exists a third point C which is in between A and B .
 - There exist at least three points that are not on the same line.

Do these postulates contain any undefined terms? Are these postulates consistent? Do they follow from Euclid's postulates? Explain.

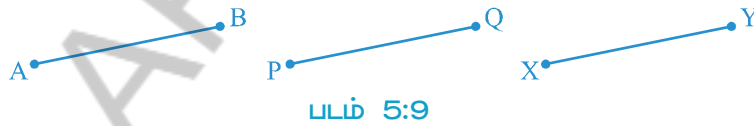
தேற்றம் 5.1: இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒரு பொதுப்புள்ளியை பெற்றிருக்காது.

நிருபணம் : இங்கே நமக்கு இரண்டு கோடுகள் l மற்றும் m ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு ஒரே ஒரு பொதுப்புள்ளி மட்டுமே உண்டு என நாம் நிரூபிக்க வேண்டியது அவசியம். அந்த இரு கோடுகளுக்கும், இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் P மற்றும் Q களில் வெட்டிக்கொள்கிறது எனக்கொள்வோம். இப்போது நமக்கு புள்ளிகள் P மற்றும் Q களின் வழியாக செல்லும் இரண்டு கோடுகள் கிடைக்கிறது. ஆனால் இக்கூற்று, இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளின் வழியாக தனித்த ஒரே ஒரு கோடு செல்கிறது எனும் யூக்ளிடிஸ் எடுகோளுக்கு முரண்பாடாக உள்ளது. எனவே, இரண்டு கோடுகள் இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் என்ற நம்முடைய கணிப்பு தவறானது.

இதிலிருந்து நாம் என்ன முடிவுக்கு வரலாம்? இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒரு பொதுப்புள்ளியை பெற்றிருக்காது.

பயிற்சி 5.1

- கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எவை மெய் மற்றும் எவை மெய்யற்றவை? உனது விடைக்கான காரணங்களை தருக.
 - ஒரு புள்ளியின் வழியாக ஒரே ஒரு கோடு மட்டுமே செல்லும்.
 - இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளின் வழியாக எண்ணற்ற கோடுகள் செல்லும்.
 - ஒரு முடிவற்ற கோட்டை இரண்டு பக்கமும் அளவில்லாமல் நீட்டிக்கொண்டே செல்லாம்.
 - இரண்டு வட்டங்கள் சமம் எனில் அவற்றின் ஆரங்களும் சமம்.
 - படம் 5.9 ல் $AB = PQ$ மற்றும் $PQ = XY$ எனில் $AB = XY$



- கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு சொற்களுக்கும் வரையறை தருக. இதைத் தவிர்த்து வரையறுக்கப்பட வேண்டிய சொற்கள் ஏதேனும் உள்ளனவா? அவை யாவை? அவற்றை நீங்கள் எவ்வாறு வரையறுப்பீர்கள்?
 - இணைகோடுகள்
 - செங்குத்துக்கோடுகள்
 - கோட்டுத்துண்டுகள்
 - வட்டத்தின் ஆரம்
 - சதுரம்.
- கீழே கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோட்பாடுகளை கவனியுங்கள்.
 - A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்ட போது, அவற்றிற்கு இடையே C எனும் புள்ளி அமைகிறது.
 - ஒரே கோட்டின் மீது அமையாதவாறு குறைந்தப்பட்சம் மூன்று புள்ளிகள் இருக்கும். இவை யூக்ளிடிஸ் கோட்பாட்டின் படி சரியானதா? விவரிக்கவும்.

4. If a point C lies between two points A and B such that $AC = BC$, then prove that $AC = \frac{1}{2}AB$. Explain by drawing the figure.
5. In Question 4, point C is called a mid-point of line segment AB. Prove that every line segment has one and only one mid-point.
6. In Fig. 5.10, if $AC = BD$, then prove that $AB = CD$.



Fig. 5.10

7. Why is Axiom 5, in the list of Euclid's axioms, considered a 'universal truth'? (Note that the question is not about the fifth postulate.)

5.3 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. Though Euclid defined a point, a line, and a plane, the definitions are not accepted by mathematicians. Therefore, these terms are now taken as undefined.
2. Axioms or postulates are the assumptions which are obvious universal truths. They are not proved.
3. Theorems are statements which are proved, using definitions, axioms, previously proved statements and deductive reasoning.
4. Some of Euclid's axioms were :
 - (1) Things which are equal to the same thing are equal to one another.
 - (2) If equals are added to equals, the wholes are equal.
 - (3) If equals are subtracted from equals, the remainders are equal.
 - (4) Things which coincide with one another are equal to one another.
 - (5) The whole is greater than the part.
 - (6) Things which are double of the same things are equal to one another.
 - (7) Things which are halves of the same things are equal to one another.
5. Euclid's postulates were :

Postulate 1 : A straight line may be drawn from any one point to any other point.

Postulate 2 : A terminated line can be produced indefinitely.

Postulate 3 : A circle can be drawn with any centre and any radius.

Postulate 4 : All right angles are equal to one another.

4. புள்ளி C என்பது A மற்றும் B ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே அமைகிறது. மேலும் $AC = BC$ எனில் $AC = \frac{1}{2}AB$ என நிரூபி. படம் வரைந்து விளக்குக.
5. வினா 4 ல் C என்பது AB கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு கோட்டுத்துண்டும் ஒரே ஒரு மையப்புள்ளியை மட்டும் பெற்றிருக்கும் என நிரூபி.
6. படம் 5.10 ல் $AC = BD$ எனில் $AB = CD$ என நிரூபி.



7. யூக்ளிடிஸ் எடுக்கோள்களின் வரிசையில் உள்ள எடுகோள் 5-ஐ ஏன் உலகளாவிய உண்மையாக ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டது? குறிப்பு : இந்த வினா யூக்ளிடிஸ் ஐந்தாவது கோட்பாடு தொடர்பானது அல்ல.

5.3 நாம் கற்றவை :

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்க்காணும் கருத்துக்களை நீங்கள் கற்றுக்கொண்டீர்கள்.

1. புள்ளி, கோடு, சமதளம் ஆகியவற்றை யூக்ளிட் வரையறுத்தாகும், அந்த வரையறைகளை கணித மேதைகள் ஏற்றுக்கொள்ளவில்லை. அதனால் இந்த சொற்கள் வரையறுக்கப் படாதவை என நாம் கருத வேண்டும்.
2. எடுகோள்கள் அல்லது கோட்பாடுகள் என்பன வெளிப்படையான உலகளாவிய உண்மைகளின் கூற்றுகள் ஆகும். ஆனால் அவைகள் நிரூபிக்கப்படவில்லை.
3. தேற்றங்கள் என்பவை வரையறைகள், எடுகோள்கள், ஏற்கனவே நிரூபிக்கப்பட்ட கருத்துக்கள் மற்றும் விதிவிலக்குமுறையில் பகுத்தறிதல் ஆகியவற்றைக்கொண்டு நிரூபணம் செய்யப்பட்ட கூற்றுகளாகும்.
4. யூக்ளிடிஸ் எடுகோள்களில் சில :
 - (1) இராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
 - (2) சமமான இராசிகளுடன், சமமான இராசிகளை கூட்டினால் அவற்றின் மொத்தங்கள் சமம்.
 - (3) சமமான இராசிகளிலிருந்து சமமான இராசிகளை கழித்தால், அவற்றின் மீதிகள் சமம்.
 - (4) ஒன்றுக்கொன்று பொருந்தும் இராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
 - (5) முழுமையானது, அதன் பகுதியை விட பெரியது.
 - (6) சமமான இராசிகளின் இரு மடங்குகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
 - (7) சமமான இராசிகளின் பாதிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
5. யூக்ளிடிஸ் கோட்பாடுகளின் சில :

கோட்பாடு 1 : ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்க்கோட்டை வரையலாம்.

கோட்பாடு 2 : ஒரு முடிவுற்ற கோட்டை அளவில்லாமல் நீட்டிக்கலாம்.

கோட்பாடு 3 : ஏதேனும் ஒரு மையத்தையும், ஏதேனும் ஒரு ஆரத்தையும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையலாம்.

கோட்பாடு 4 : அனைத்து செங்கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

**CHAPTER 6****LINES AND ANGLES****6.1 Introduction**

In Chapter 5, you have studied that a minimum of two points are required to draw a line. You have also studied some axioms and, with the help of these axioms, you proved some other statements. In this chapter, you will study the properties of the angles formed when two lines intersect each other, and also the properties of the angles formed when a line intersects two or more parallel lines at distinct points. Further you will use these properties to prove some statements using deductive reasoning (see Appendix 1). You have already verified these statements through some activities in the earlier classes.

In your daily life, you see different types of angles formed between the edges of plane surfaces. For making a similar kind of model using the plane surfaces, you need to have a thorough knowledge of angles. For instance, suppose you want to make a model of a hut to keep in the school exhibition using bamboo sticks. Imagine how you would make it? You would keep some of the sticks parallel to each other, and some sticks would be kept slanted. Whenever an architect has to draw a plan for a multistoried building, she has to draw intersecting lines and parallel lines at different angles. Without the knowledge of the properties of these lines and angles, do you think she can draw the layout of the building?

In science, you study the properties of light by drawing the ray diagrams. For example, to study the refraction property of light when it enters from one medium to the other medium, you use the properties of intersecting lines and parallel lines. When two or more forces act on a body, you draw the diagram in which forces are represented by directed line segments to study the net effect of the forces on the body. At that time, you need to know the relation between the angles when the rays (or line segments) are parallel to or intersect each other. To find the height of a tower or to find the distance of a ship from the light house, one needs to know the angle formed between the horizontal and the line of sight. Plenty of



M5A7R5

அத்தியாயம் 6

கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள்

6.1 முன்னுரை :

ஒரு கோடு வரைவதற்கு குறைந்தது இரண்டு புள்ளிகள் தேவை என்பதை நீங்கள் அத்தியாயம் 5 ல் படித்துள்ளீர்கள். மேலும் இதனுடன் சில வெளிப்படை உண்மைகளையும் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். இந்த வெளிப்படை உண்மையின் உதவியுடன் சில கூற்றுகளையும் நிரூபித்தீர்கள். இந்த அத்தியாயத்தில் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் போது உருவாகும் கோணங்களின் பண்புகளையும் மேலும் ஒரு நேர்க்கோடு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இணை கோடுகளை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளும் போது ஏற்படும் கோணங்களின் பண்புகளை பற்றியும் கற்போம். மேலும் நீங்கள் பகுத்தறி முறை மூலம் சில கூற்றுகளை நிரூபிப்பதற்கு முன்னர் இத்தகைய பண்புகளை கூற்றுகளை ஏற்கனவே நீங்கள் முந்தைய வகுப்புகளில் சரிபார்த்துள்ளீர்கள்.

உங்களுடைய அன்றாட வாழ்க்கையில் சமதளங்களின் விளிம்புகளுக்கிடையே பல்வேறு விதமான கோணங்கள் உருவாகி இருப்பதை பார்த்திருப்பீர்கள். இவ்வாறான உருவ மாதிரிகளை உருவாக்க கோணங்கள் பற்றிய முழுமையான அறிவு தேவைப்படுகிறது. ஒருவேளை நீங்கள் மூங்கில் குச்சிகளை பயன்படுத்தி குடிசை உருவமாதிரி ஒன்றை செய்து பள்ளிக்கூடப் பொருட்காட்சியில் வைக்க வேண்டுமென்றால் அதை எவ்வாறு செய்திருப்பார்கள் என்று கற்பனை செய்துபார். சில குச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவும், சில குச்சிகள் சாய்வாகவும் வைத்திருப்பார்கள். கட்டிடக்கலை நிபுணர் அடுக்குமாடி கட்டிடங்களை கட்டுவதற்கான திட்ட வரைபடங்கள் வரைந்திருப்பதை எப்பொழுதாவது பார்த்ததுண்டா? அவற்றில் பல்வேறுபட்ட கோணங்களில் சில கோடுகள் இணையாகவும், சில கோடுகள் குறுக்கு வெட்டாகவும் வரையப்பட்டிருக்கும். இத்தகைய கோடுகள் மற்றும் கோணங்களின் பண்புகள் பற்றிய தெளிவு இன்றி அடுக்குமாடி குடியிருப்பு திட்ட வரைபடங்களை வரையமுடியுமா? என நினைத்துப்பாருங்கள்.

அறிவியல் பாடத்தில் ஒளிக்கதிர் வரைந்து ஒளியின் பண்புகளை நாம் படித்திருக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு ஊடகத்திலிருந்து மற்றொரு ஊடகத்திற்கு ஒளிக்கதிர் நுழையும்போது ஒளியின் பிரபதிபலிப்பு பண்பினை படிக்க நாம் இணைகோடுகள் மற்றும் குறுக்குவெட்டுக் கோடுகளின் பண்புகளை பயன்படுத்துகிறோம். ஒரு பொருளின் மீது இரண்டு அல்லது அதற்கு அதிகமான விசைகள் செயல்படும்போது அந்த விசைகளின் தொகுப்பினை கற்கவும், எந்த ஒரு விசையின் படத்தையும் நாம் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் குறிக்கின்றோம். அதே நேரத்தில் நீங்கள் கதிர்கள் அல்லது கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும்போது ஏற்படும் கோணங்கள் மற்றும் இவற்றிற்கு இடையில் உள்ள தொடர்பை அறிந்துகொள்ள வேண்டும். ஒரு கோபுரத்தின் உயரத்தை கணக்கிடவும் அல்லது கலங்கரை விளக்கிலிருந்து ஒரு கப்பல் உள்ள தூரத்தை கண்டறியவும் பார்வை கோட்டிற்கும் கிடைமட்ட கோட்டிற்கும் இடையே ஏற்படும் கோணத்தை அறிய வேண்டும்.

other examples can be given where lines and angles are used. In the subsequent chapters of geometry, you will be using these properties of lines and angles to deduce more and more useful properties.

Let us first revise the terms and definitions related to lines and angles learnt in earlier classes.

6.2 Basic Terms and Definitions

Recall that a part (or portion) of a line with two end points is called a **line-segment** and a part of a line with one end point is called a **ray**. Note that the line segment AB is denoted by $\overline{AB}$, and its length is denoted by AB. The ray AB is denoted by $\overrightarrow{AB}$, and a line is denoted by $\overleftrightarrow{AB}$. However, **we will not use these symbols**, and will denote the line segment AB, ray AB, length AB and line AB by the same symbol, AB. The meaning will be clear from the context. Sometimes small letters l, m, n , etc. will be used to denote lines.

If three or more points lie on the same line, they are called **collinear points**; otherwise they are called **non-collinear points**.

Recall that an **angle** is formed when two rays originate from the same end point. The rays making an angle are called the **arms** of the angle and the end point is called the **vertex** of the angle. You have studied different types of angles, such as acute angle, right angle, obtuse angle, straight angle and reflex angle in earlier classes (see Fig. 6.1).

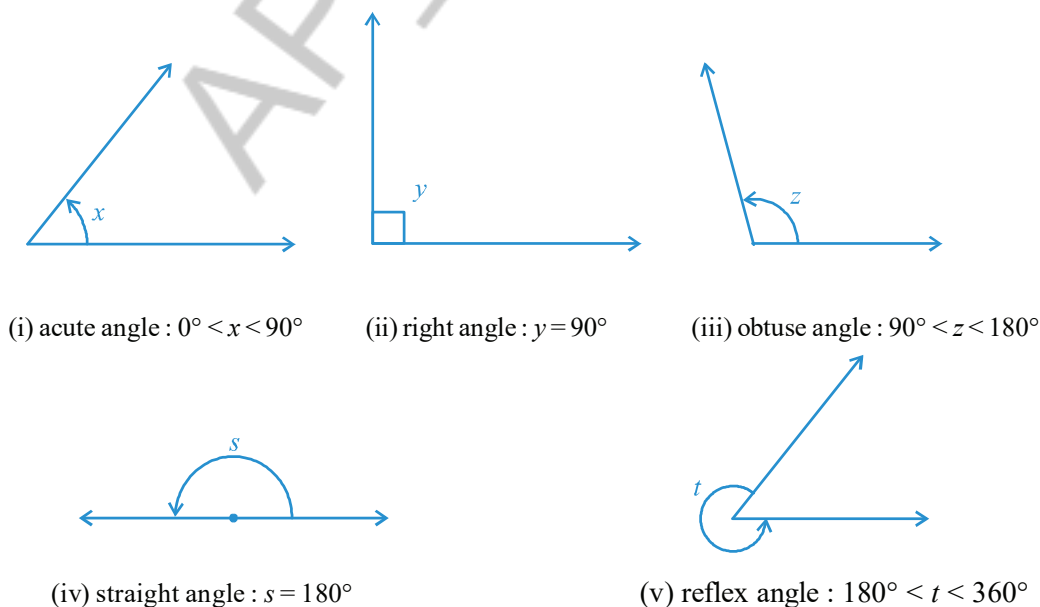


Fig. 6.1 : Types of Angles

நேர்க்கோடுகள் மற்றும் கோணங்களை பயன்படுத்தும் எண்ணற்ற எடுத்துக்காட்டுகளை கூறலாம். தொடர்ந்து வரும் வடிவியல் பாடங்களில் நீங்கள் கோடுகள் மற்றும் கோணங்களின் பண்புகளை பயன்படுத்தி மேலும் பல பயனுள்ள பண்புகளை தெரிந்துகொள்வீர்கள்.

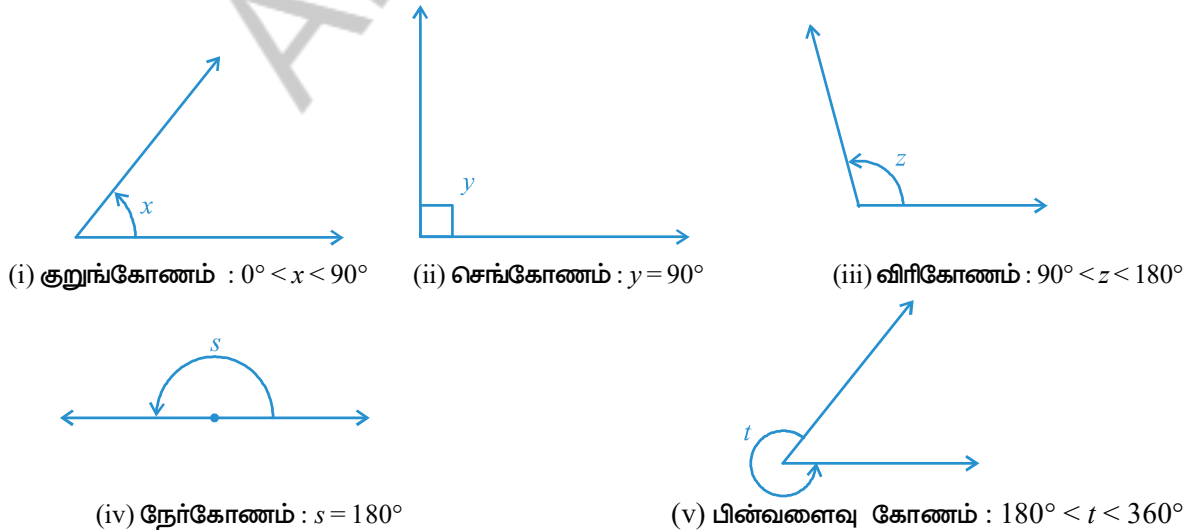
முதலில் முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுக்கொண்ட கோடுகள் மற்றும் கோணங்களுடன் தொடர்புடைய கருத்துக்கள் மற்றும் வரையறைகளை மீள்பார்வை செய்வோம்.

6.2 அடிப்படை சொற்கள் மற்றும் வரையறைகள்

இரண்டு முடிவுப்புள்ளிகளுடன் இருக்கும் கோட்டின் ஒரு பகுதி கோட்டுத்துண்டு எனவும், ஒரு முடிவுப்புள்ளியுடன் இருக்கும் கோட்டின் பகுதியை கதிர் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது என்பதை நினைவுப்படுத்திக் கொள்வோம். கோட்டுத்துண்டு AB என்றும் அதனுடைய நீளத்தை $\overline{AB}$ என்றும் குறித்துக்காட்டுகிறோம். கதிர் AB ஐ $\overrightarrow{AB}$ என்றும் கோடு AB ஐ $\overleftrightarrow{AB}$ என்றும் குறித்துக்காட்டுகிறோம். ஆயினும் நாம் இந்த குறிகளை பயன்படுத்துவதில்லை. மாறாக கோட்டுத்துண்டு AB கதிர் AB நீளம் AB நேர்க்கோடு AB என்ற ஒரே மாதிரியான குறியிட்டால் குறிப்போம். இதனால் AB என்பது அதன் அமைப்பிலிருந்து பொருள் மாறுபடுகிறது. சில சமங்களில் கோடுகளை ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களான l, m, n, போன்றவற்றால் குறிக்கிறோம்.

மூன்று அல்லது அதற்கு அதிகமான புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் அவற்றை ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தபுள்ளிகள் ஒரு கோடமைவு புள்ளிகள் எனவும் அவ்வாறு அமையாவிடில் அவற்றை நேர்க்கோட்டில் அமையா புள்ளிகள் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

இரண்டு கதிர்கள் ஒரு பொதுவான முடிவு புள்ளியிலிருந்து தொடங்கும்போது கோணம் ஏற்படுகிறது என்பதை நினைப்படுத்திக்கொள்வோம். கோணத்தை உண்டாக்கும் இந்த கதிர்களை கோணத்தின் புயங்கள் எனவும் அந்த கதிரினுடைய முடிவுப்புள்ளியை கோணத்தின் உச்சி என்றும் அழைக்கிறோம். முந்தைய வகுப்புகளில் குறுங்கோணம், செங்கோணம், விரிகோணம், நேர்கோணம் மற்றும் பின் வளைவு கோணம் போன்ற பலவகையான கோணங்களைப் பற்றி படித்துள்ளீர்கள். (படம் 6.1 பார்)



படம் 6.1 : கோணங்களின் வகைகள்

An **acute** angle measures between 0° and 90° , whereas a **right angle** is exactly equal to 90° . An angle greater than 90° but less than 180° is called an **obtuse angle**. Also, recall that a **straight angle** is equal to 180° . An angle which is greater than 180° but less than 360° is called a **reflex angle**. Further, two angles whose sum is 90° are called **complementary angles**, and two angles whose sum is 180° are called **supplementary angles**.

You have also studied about adjacent angles in the earlier classes (see Fig. 6.2). Two angles are **adjacent**, if they have a common vertex, a common arm and their non-common arms are on different sides of the common arm. In Fig. 6.2, $\angle ABD$ and $\angle DBC$ are adjacent angles. Ray BD is their common arm and point B is their common vertex. Ray BA and ray BC are non common arms. Moreover, when two angles are adjacent, then their sum is always equal to the angle formed by the two non-common arms. So, we can write

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$

Note that $\angle ABC$ and $\angle ABD$ are not adjacent angles. Why? Because their non-common arms BD and BC lie on the same side of the common arm BA.

If the non-common arms BA and BC in Fig. 6.2, form a line then it will look like Fig. 6.3. In this case, $\angle ABD$ and $\angle DBC$ are called **linear pair of angles**.

You may also recall the **vertically opposite angles** formed when two lines, say AB and CD, intersect each other, say at the point O (see Fig. 6.4). There are two pairs of vertically opposite angles.

One pair is $\angle AOD$ and $\angle BOC$. Can you find the other pair?

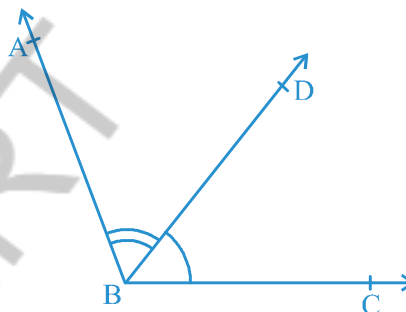


Fig. 6.2 : Adjacent angles

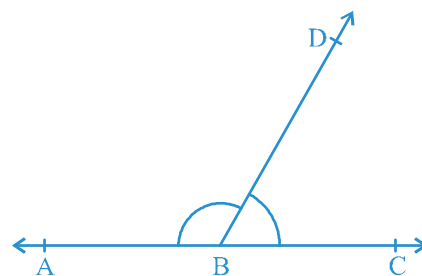


Fig. 6.3 : Linear pair of angles

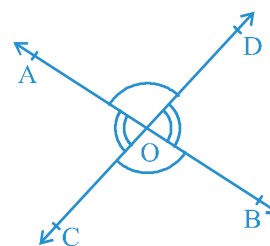


Fig. 6.4 : Vertically opposite angles

குறுங்கோணம் 0° மற்றும் 90° அளவுக்கு இடையிலும், 90° அளவுக்கு சமமான கோணத்தை செங்கோணம் எனவும், 90° மற்றும் 180° இடையிலுள்ள கோணத்தை விரிகோணம் என்றும், 180° க்கு சமமாக இருப்பதை நேர்க்கோணம் என்றும், 180° ஐ விட அதிகமாகவும் ஆனால் 360° ஐ விட குறைவாகவும் உள்ள கோணத்தை பின்வளைவு கோணம் என்று அழைக்கப் படுவதை நினைவுக்கு கொண்டு வருவோம். மேலும் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 90° ஆக இருப்பதை நிரப்புக்கோணம் எனவும், இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக இருப்பதை மிகை நிரப்புக்கோணம் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

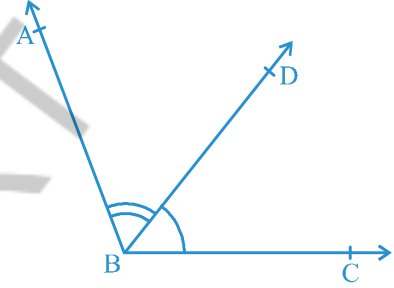
அடுத்துள்ள கோணங்களைப் பற்றி முந்தைய வகுப்புகளில் படித்துள்ளீர்கள் (படம் 6.2ஐ பாடி). இரண்டு கோணங்கள் பொது உச்சியையும் பொது புயத்தையும் பெற்றிருந்து பொதுவாக இல்லாத புயங்கள் பொது புயத்திற்கு இரு புயங்களிலும் அமைந்திருந்தால் அவற்றை அடுத்துள்ள கோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம். படம் 6.2இல் $\angle ABD$ மற்றும் $\angle DBC$ ஆகியவை அடுத்துள்ள கோணங்கள், கதிர் BD இவற்றின் பொதுவான புயம் மற்றும் புள்ளி B இவற்றின் பொதுவான உச்சி. கதிர் BA மற்றும் கதிர் BC பொது அல்லாத புயங்கள். அதுமட்டுமல்லாமல் இரண்டு கோணங்கள் அடுத்துள்ள கோணங்கள் எனில் அவற்றின் மொத்தம் பொது அல்லாத புயங்களால் ஏற்படும் கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமம். ஆகையால் $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ என எழுதலாம்.

$\angle ABC$ மற்றும் $\angle ABD$ ஆகியவை அடுத்துள்ள கோணங்கள் அல்ல என்பதை கவனி. ஏன்? ஏனெனில் பொதுவான புயம் BA க்கு ஒரே பக்கத்தில் ஒரு பக்கத்தில் BD மற்றும் BC என்ற பொது அல்லாத புயங்கள் உள்ளன.

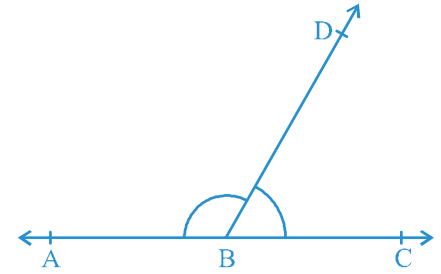
படம் 6.2இல் பொது அல்லாத புயங்கள் BA மற்றும் BC ஒரு நேர்க்கோட்டை ஏற்படுத்தினால் அது படம் 6.3ஐ போல் இருக்கும். இப்பொழுது $\angle ABD$ மற்றும் $\angle DBC$ ஆகியவற்றை கோட்டு கோண ஜோடிகள் என்பர்.

AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று புள்ளி O இல் வெட்டிக்கொள்ளும் போது ஏற்படும் குத்தெதிர் கோணங்கள் ஏற்படும் என்பதை நினைவு கூறுங்கள்.

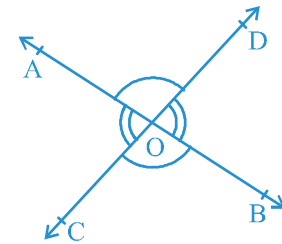
$\angle AOD$ மற்றும் $\angle BOC$. ஆகியவை ஒரு ஜோடி குத்தெதிர் கோணங்கள் ஆகும் மற்றொரு ஜோடி குத்தெதிர் கோணத்தை உங்களால் கண்டுபிடிக்க முடியுமா?



படம் 6.2 : அடுத்துள்ள கோணங்கள்



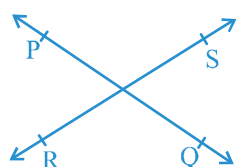
படம் 6.3 : கோட்டு கோண ஜோடிகள்



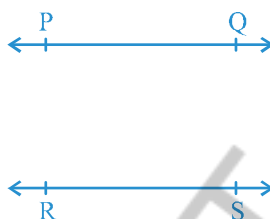
படம் 6.4 : குத்தெதிர் கோணங்கள்

6.3 Intersecting Lines and Non-intersecting Lines

Draw two different lines PQ and RS on a paper. You will see that you can draw them in two different ways as shown in Fig. 6.5 (i) and Fig. 6.5 (ii).



(i) Intersecting lines



(ii) Non-intersecting (parallel) lines

Fig. 6.5 : Different ways of drawing two lines

Recall the notion of a line, that it extends indefinitely in both directions. Lines PQ and RS in Fig. 6.5 (i) are intersecting lines and in Fig. 6.5 (ii) are parallel lines. Note that the lengths of the common perpendiculars at different points on these parallel lines is the same. This equal length is called the *distance between two parallel lines*.

6.4 Pairs of Angles

In Section 6.2, you have learnt the definitions of some of the pairs of angles such as complementary angles, supplementary angles, adjacent angles, linear pair of angles, etc. Can you think of some relations between these angles? Now, let us find out the relation between the angles formed when a ray stands on a line. Draw a figure in which a ray stands on a line as shown in Fig. 6.6. Name the line as AB and the ray as OC. What are the angles formed at the point O? They are $\angle AOC$, $\angle BOC$ and $\angle AOB$.

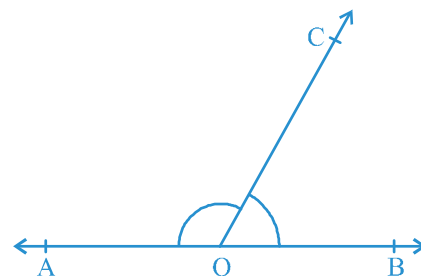


Fig. 6.6 : Linear pair of angles

Can we write $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$? (1)

Yes! (Why? Refer to adjacent angles in Section 6.2)

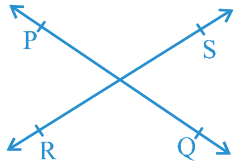
What is the measure of $\angle AOB$? It is 180° . (Why?) (2)

From (1) and (2), can you say that $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$? Yes! (Why?)

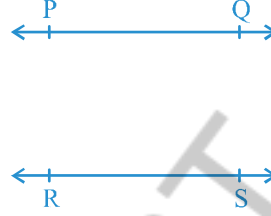
From the above discussion, we can state the following Axiom:

6.3 வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகள் மற்றும் வெட்டிக்கொள்ளாத கோடுகள்

ஒரு தாளின் மீது PQ மற்றும் RS எனும் இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகளை வரைக. படம் 6.5 (i) மற்றும் படம் 6.5 (ii)இல் காட்டியவாறு அவற்றை வெவ்வேறு வழிகளில் வரைய முடியும் என்பதை கவனி.



(i) வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகள்



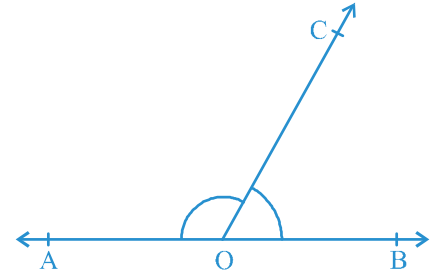
(ii) வெட்டிக்கொள்ளாத (இணை) கோடுகள்

படம் 6.5: இரண்டு கோடுகளை வெவ்வேறு வழிகளில் வரைதல்

ஒரு நேர்க்கோட்டை அதன் குறியீட்டை பொறுத்து இரண்டு திசைகளிலும் முடிவில்லாமல் நீட்டி வரையலாம் என்பதை நினைவு கூறுங்கள். படம் 6.5 (i) ல் PQ மற்றும் RS ஆகியவை வெட்டும் கோடுகள் மற்றும் படம் 6.5 (ii) ல் அவை இணைகோடுகளாக இருக்கின்றன. இந்த இணைகோடுகளின் மீது வெவ்வேறான புள்ளிகளில் உள்ள பொதுவான செங்குத்து நீளங்கள் சமமாக இருப்பதை கவனி. இந்த சமமான நீளத்தை இரண்டு இணைகோடுகளுக்கிடப்பட்ட தூரம் என்று அழைப்பர்.

6.4 கோணங்களின் ஜோடிகள்

6.2 பிரிவில் நிரப்புக்கோணங்கள், மிகை நிரப்புக் கோணங்கள், அடுத்துள்ள கோணங்கள், கோட்டு கோணங்கள் போன்றவற்றின் வரையறைகளை கற்றுள்ளீர்கள், இத்தகைய கோணங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகள் சிலவற்றை நினைத்துப் பார்த்தீர்களா? இப்பொழுது ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமையும்படி படம் ஒன்று வரைக. அதில் கோடு AB மற்றும் கதிர் OC என பெயரிடுக. எவ்வகையான கோணங்கள் O இல் ஏற்படுகின்றன? அவை $\angle AOC$, $\angle BOC$ மற்றும் $\angle AOB$. ஆகும்.



படம் 6.6: கோட்டு கோண ஜோடிகள்

$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ என எழுத முடியுமா? (1)

ஆம் (ஏன்?) 6.2 பிரிவில் உள்ள அடுத்துள்ள கோணங்களை பாருங்கள்

$\angle AOB$ இன் அளவு எவ்வளவு? அவை 180° ஆகும் (ஏன்?)..... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ என உங்களால் கூறமுடியுமா?

ஆம் (ஏன்?) மேற்கண்ட முடிவினை கலந்தாலோசித்த பிறகு பின்வரும் வெளிப்படை உண்மையாய் நம்மால் கூறமுடியும்.

Axiom 6.1 : *If a ray stands on a line, then the sum of two adjacent angles so formed is 180° .*

Recall that when the sum of two adjacent angles is 180° , then they are called a **linear pair of angles**.

In Axiom 6.1, it is given that ‘a ray stands on a line’. From this ‘given’, we have concluded that ‘the sum of two adjacent angles so formed is 180° ’. Can we write Axiom 6.1 the other way? That is, take the ‘conclusion’ of Axiom 6.1 as ‘given’ and the ‘given’ as the ‘conclusion’. So it becomes:

(A) If the sum of two adjacent angles is 180° , then a ray stands on a line (that is, the non-common arms form a line).

Now you see that the Axiom 6.1 and statement (A) are in a sense the reverse of each others. We call each as converse of the other. We do not know whether the statement (A) is true or not. Let us check. Draw adjacent angles of different measures as shown in Fig. 6.7. Keep the ruler along one of the non-common arms in each case. Does the other non-common arm also lie along the ruler?

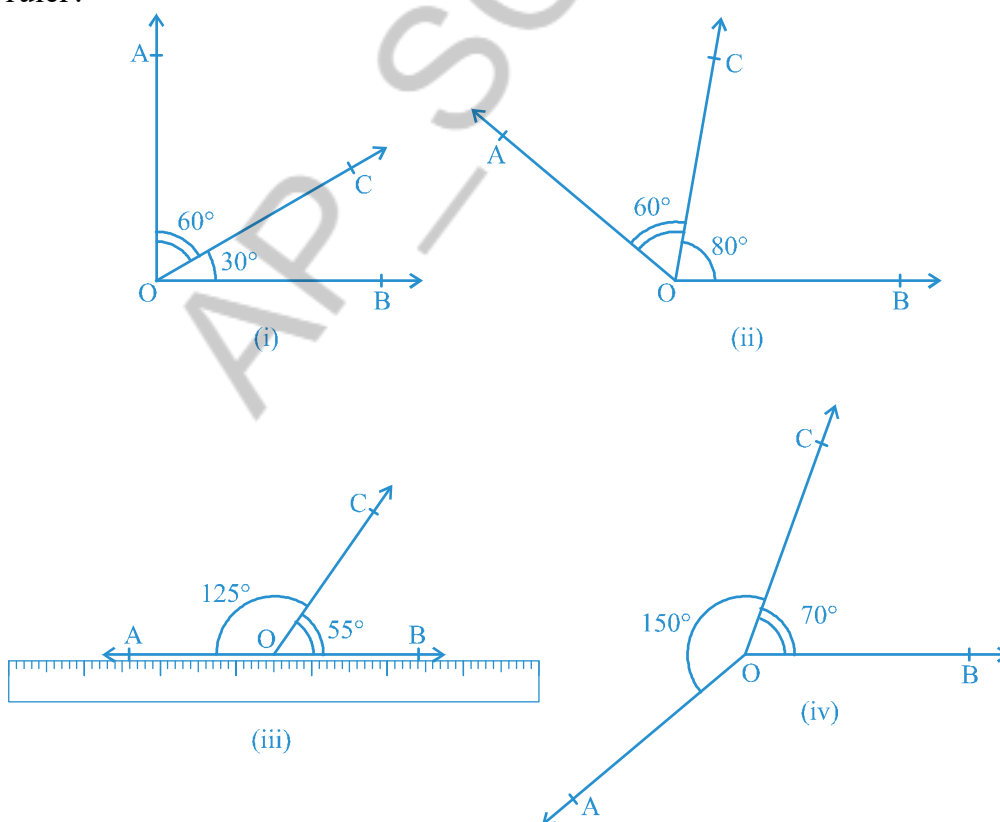


Fig. 6.7 : Adjacent angles with different measures

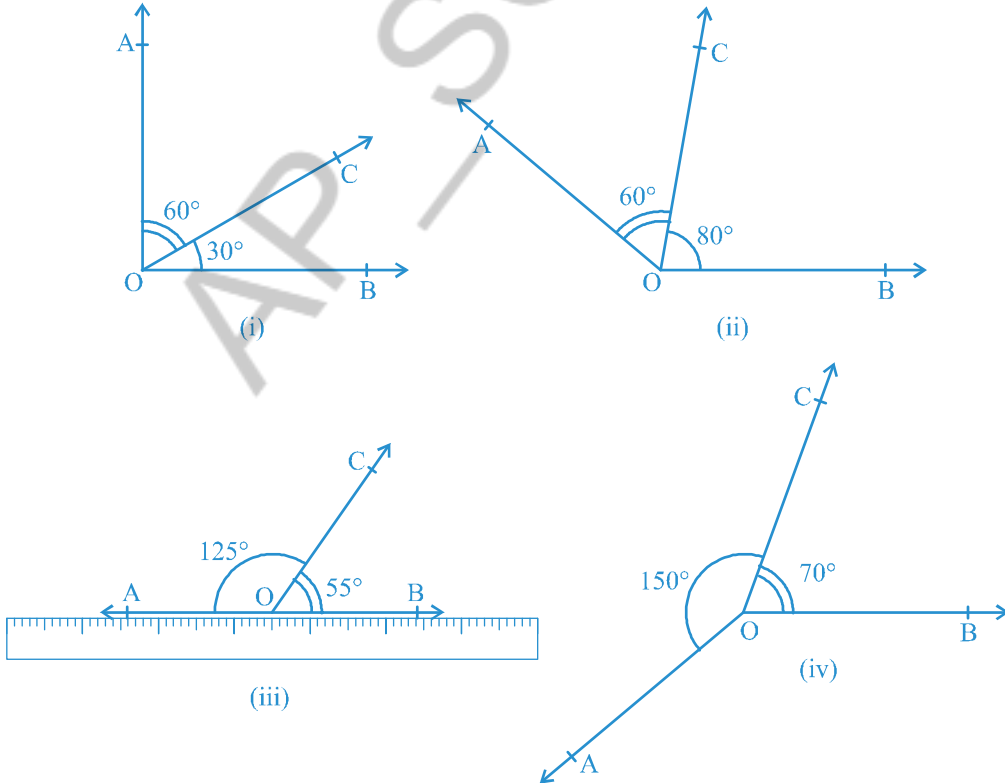
வெளிப்படை உண்மை 6.1 : ஒரு கோட்டின் மீது ஒரு கதிர் அமையுமானால் அதனால் உருவாகும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° . ஆகும்.

இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில் அந்த கோணங்கள் கோட்டுக்கோண ஜோடிகள் என்று அழைக்கப்படுவதை நினைவு கூறுங்கள்.

வெளிப்படை உண்மை 6.1இல் ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமைந்துள்ளது என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதனால் ஏற்படும் இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் என்ற முடிவுக்கு நாம் வரலாம் வெளிப்படை உண்மை 6.1ஐ வேறு முறையில் எழுத முடியுமா? அதாவது வெளிப்படை உண்மை 6.1ன் தொகுப்பை முடிவாகவும், முடிவை தொகுப்பாகவும் எடுத்துக்கொண்டால் இது பின்வருமாறு இருக்கும்.

(A) இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° இருக்குமேயானால் அவை ஒரு கோட்டின் மீது ஒரு கதிர் அமைந்திருக்கும் (அதாவது பொது அல்லாத புயங்கள் நேர்கோட்டை ஏற்படுத்தும்)

இப்பொழுது நீங்கள் வெளிப்படை உண்மை 6.1 மற்றும் கூற்று (A) ஆகியவை ஒன்று மற்றொன்றின் மறுதலையாக இருப்பதை காண முடிகிறது. நாம் இவற்றை ஒன்று மற்றொன்றின் மறுதலை என்கிறோம். கூற்று (A) உண்மையா அல்லது உண்மையற்றதா என நமக்கு தெரியாது. இப்பொழுது இதை சரிபார்ப்போம். படம் 6.7ல் காட்டியவாறு வெவ்வேறு கோண அளவுகளில் அடுத்துள்ள கோணங்களை வரைக. ஒவ்வொரு வகையிலும் பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்களில் ஒரு புயத்தின் விளிம்போடு அளவுகோலை வைக்கவும். பொதுவாக இல்லாத மற்றொரு புயத்தின் விளிம்போடு அளவுகோல் பொருந்துகிறதா?



படம் 6.7 : வெவ்வேறு அளவுகளையுடைய அடுத்துள்ள கோணங்கள்

You will find that only in Fig. 6.7 (iii), both the non-common arms lie along the ruler, that is, points A, O and B lie on the same line and ray OC stands on it. Also see that $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$. From this, you may conclude that statement (A) is true. So, you can state in the form of an axiom as follows:

Axiom 6.2 : *If the sum of two adjacent angles is 180° , then the non-common arms of the angles form a line.*

For obvious reasons, the two axioms above together is called the **Linear Pair Axiom**.

Let us now examine the case when two lines intersect each other.

Recall, from earlier classes, that when two lines intersect, the vertically opposite angles are equal. Let us prove this result now. See Appendix 1 for the ingredients of a proof, and keep those in mind while studying the proof given below.

Theorem 6.1 : *If two lines intersect each other, then the vertically opposite angles are equal.*

Proof : In the statement above, it is given that ‘two lines intersect each other’. So, let AB and CD be two lines intersecting at O as shown in Fig. 6.8. They lead to two pairs of vertically opposite angles, namely,

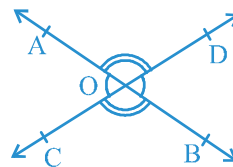


Fig. 6.8 : Vertically opposite angles

(i) $\angle AOC$ and $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ and $\angle BOC$.

We need to prove that $\angle AOC = \angle BOD$ and $\angle AOD = \angle BOC$.

Now, ray OA stands on line CD.

Therefore, $\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$ (Linear pair axiom) (1)

Can we write $\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$? Yes! (Why?) (2)

From (1) and (2), we can write

$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

This implies that $\angle AOC = \angle BOD$ (Refer Section 5.2, Axiom 3)

Similarly, it can be proved that $\angle AOD = \angle BOC$

Now, let us do some examples based on Linear Pair Axiom and Theorem 6.1.

படம் 6.7 (iii) இல் மட்டுமே பொதுவாக அல்லாத இரண்டு புயங்களின் விளிம்போடு ஒன்றுகிறது என்பதை காணலாம். அதாவது A, O மற்றும் B ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளன. மேலும் கதிர் OC கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளது. அதுமட்டுமல்லாமல் $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ என்பதை காணலாம் இதிலிருந்து கூற்று (A) உண்மை என்ற முடிவுக்கு வரலாம். எனவே இதனை வெளிப்படை உண்மை வடிவில் பின்வருமாறு கூறலாம்.

வெளிப்படை உண்மை 6.2 : இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில் அந்த கோணங்களின் பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டை உருவாக்கும்.

பொருத்தமான காரணத்திற்காக மேலுள்ள இரண்டு வெளிப்படை உண்மைகளையும் சேர்த்து நேர்க்கோட்டு ஜோடி வெளிப்படை உண்மை என்கிறோம்.

இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் போது இவை எவ்வாறு இருக்கும் என்பதை பரிசீலிப்போம்.

இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளுவதால் ஏற்படும் குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம் என்பதை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றதை நினைவு கூறுங்கள் இப்பொழுது இதன் முடிவுகளை நிரூபணத்திற்கு தேவையானவற்றை பின் இணைப்பு 1இல் பார்க்கவும். கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிப்பதற்கு இவற்றை நினைவில் கொள்ளுங்கள்.

தேற்றம் 1 : இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்வதால் ஏற்படும் குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்.

நிரூபணம் 1 : மேலுள்ள கூற்றில் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகையால் படம் 6.8 இல் காட்டியவாறு AB மற்றும் CD எனும் இரண்டும் கோடுகள் O வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன என்க. அவை இரண்டு ஜோடி குத்தெதிர் கோணங்கள் ஏற்படுத்தும் இவற்றிற்கு

(i) $\angle AOC$ மற்றும் $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ மற்றும் $\angle BOC$ என பெயரிடுவோம். நாம் இப்போது $\angle AOC = \angle BOD$ மற்றும் $\angle AOD = \angle BOC$ என நிரூபிக்க வேண்டும். இப்பொழுது CD எனும் கோட்டின் மீது OA, கதிர் உள்ளது. எனவே $\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$ கோட்டு கோண ஜோடி வெளிப்படை உண்மை

(1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$? என எழுத முடியுமா? (2)

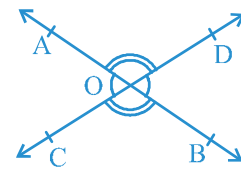
(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

இதிலிருந்து $\angle AOC = \angle BOD$ (பிரிவு 5.2 வெளிப்படை உண்மை 3ஐ பாடி)

இதேபோன்று $\angle AOD = \angle BOC$ என நிரூபிக்கலாம்.

இப்பொழுது கோட்டுஜோடி வெளிப்படை உண்மை மற்றும் தேற்றம் 6.1ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட சில எடுத்துக்காட்டுக்களை செய்வோம்.



படம் 6.8 : குத்தெதிர்கோணங்கள்

Example 1 : In Fig. 6.9, lines PQ and RS intersect each other at point O. If $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$, find all the angles.

Solution : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$

(Linear pair of angles)

But $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$

(Given)

Therefore, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

Similarly, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

Now, $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (Vertically opposite angles)

and $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (Vertically opposite angles)

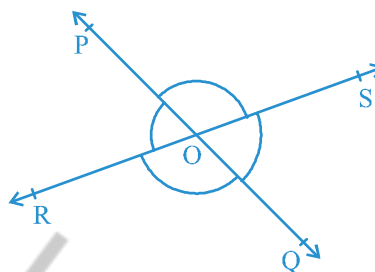


Fig. 6.9

Example 2 : In Fig. 6.10, ray OS stands on a line POQ. Ray OR and ray OT are angle bisectors of $\angle POS$ and $\angle SOQ$, respectively. If $\angle POS = x$, find $\angle ROT$.

Solution : Ray OS stands on the line POQ.

Therefore, $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

But, $\angle POS = x$

Therefore, $x + \angle SOQ = 180^\circ$

So, $\angle SOQ = 180^\circ - x$

Now, ray OR bisects $\angle POS$, therefore,

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

Similarly, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$$

$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

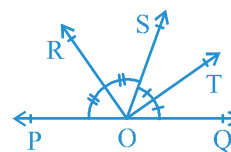


Fig. 6.10

எடுத்துக்காட்டு 1 : படம் 6.9 இல் PQ மற்றும் RS எனும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று O புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ எனில் அனைத்து கோணங்களையும் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$

(கோட்டு கோண ஜோடி)

ஆனால் $\angle POR : \angle ROQ =$

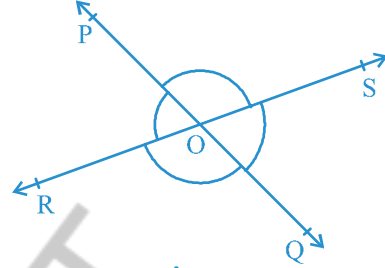
(கொடுக்கப்பட்டவை)

ஆகவே $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

இவ்வாறே $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

இப்பொழுது $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

மற்றும் $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)



எடுத்தக்காட்டு 2 : படம் 6.10 இல் POQ எனும் கோட்டின் மீது OS எனும் கதிர் அமைந்துள்ளது. கதிர்கள் OR மற்றும் OT என்பன முறையே $\angle POS$ மற்றும் $\angle SOQ$ ஆகியவற்றின் கோண இருசமவெட்டிகள் ஆகும். $\angle POS = x$ எனில் $\angle ROT$ கண்டுபிடி.

தீர்வு : POQ எனும் கோட்டின் மீது OS எனும் கதிர் அமைந்துள்ளது.

ஆகவே $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

ஆனால் $\angle POS = x$

ஆகவே $x + \angle SOQ = 180^\circ$

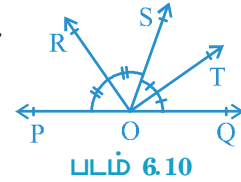
எனவே $\angle SOQ = 180^\circ - x$

இப்பொழுது கதிர் OR, ஆனது $\angle POS$ ஐ இருசமக்கூறிடுகிறது.

$$\begin{aligned}\angle ROS &= \frac{1}{2} \times \angle POS \\ &= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ஆகவே } \angle SOT &= \frac{1}{2} \times \angle SOQ \\ &= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x) \\ &= 90^\circ - \frac{x}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{இவ்வாறே } \angle ROT &= \angle ROS + \angle SOT \\ &= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2} \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$



Now,

$$\begin{aligned}\angle ROT &= \angle ROS + \angle SOT \\ &= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2} \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

Example 3 : In Fig. 6.11, OP, OQ, OR and OS are four rays. Prove that $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$.

Solution : In Fig. 6.11, you need to produce any of the rays OP, OQ, OR or OS backwards to a point. Let us produce ray OQ backwards to a point T so that TOQ is a line (see Fig. 6.12).

Now, ray OP stands on line TOQ.

Therefore, $\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ (1)
(Linear pair axiom)

Similarly, ray OS stands on line TOQ.

Therefore, $\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ (2)

But $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

So, (2) becomes

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ \quad (3)$$

Now, adding (1) and (3), you get

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ \quad (4)$$

But $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

Therefore, (4) becomes

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$$

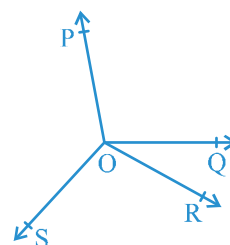


Fig. 6.11

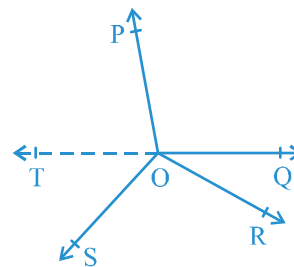


Fig. 6.12

EXERCISE 6.1

1. In Fig. 6.13, lines AB and CD intersect at O. If $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ and $\angle BOD = 40^\circ$, find $\angle BOE$ and reflex $\angle COE$.

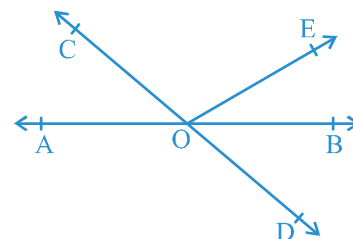


Fig. 6.13

எடுத்துக்காட்டு 3: படம் 6.11இல் OP, OQ, OR மற்றும் OS என்பன நான்கு கதிர்கள் எனில் $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$ என நிரூபி.

தீர்வு : படம் 6.11இல் OP, OQ, OR அல்லது OS ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை ஒரு புள்ளி வரை பின்புறமாக நீட்டிக்கவும். கதிர் OQ ஐ T வரை பின்புறமாக நீட்டிக்கவும். எனவே TOQ ஒரு நேர்க்கோடு (படம் 6.12ஐ பாடி)

இப்பொழுது OP ஆனது TOQ கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது.

ஆகவே $\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ (1)

(கோட்டு கோணஜோடி வெளிப்படை உண்மை)

இவ்வாறே கதிர் OS, ஆனது TOQ கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது

ஆகவே $\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ (2)

ஆனால் $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

எனவே (2) லிருந்து,

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ \quad (3)$$

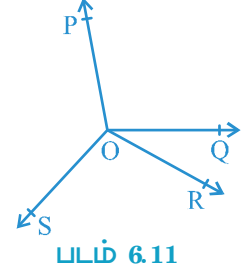
இப்பொழுது (1) மற்றும் (3) ஐ கட்ட நாம் பெறுவது

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ \quad (4)$$

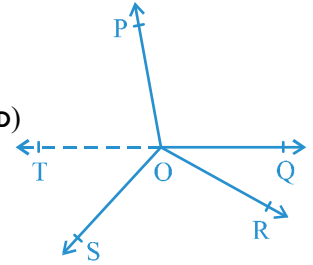
ஆனால் $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

எனவே (4) லிருந்து,

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$$



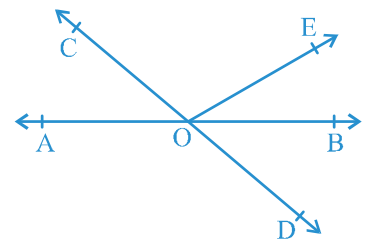
படம் 6.11



படம் 6.12

பயிற்சி 6.1

- படம் 6.13 ல் AB மற்றும் CD கோடுகள் O ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ மற்றும் $\angle BOD = 40^\circ$ எனில் $\angle BOE$ மற்றும் பின்வளைவு கோணம் $\angle COE$ கண்டுபிடி.



படம் 6.13

2. In Fig. 6.14, lines XY and MN intersect at O. If $\angle POY = 90^\circ$ and $a : b = 2 : 3$, find c .

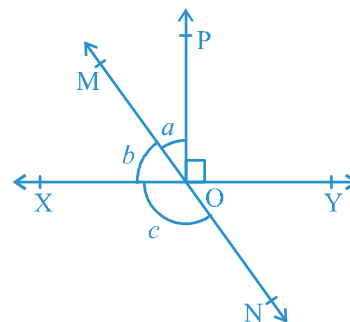


Fig. 6.14

3. In Fig. 6.15, $\angle PQR = \angle PRQ$, then prove that $\angle PQS = \angle PRT$.

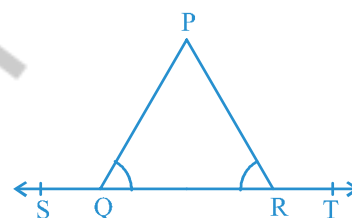


Fig. 6.15

4. In Fig. 6.16, if $x + y = w + z$, then prove that AOB is a line.

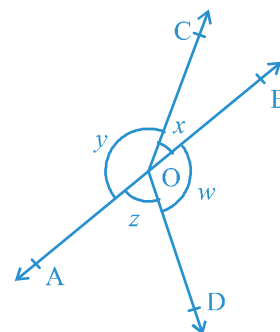


Fig. 6.16

5. In Fig. 6.17, POQ is a line. Ray OR is perpendicular to line PQ. OS is another ray lying between rays OP and OR. Prove that

$$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS).$$

6. It is given that $\angle XYZ = 64^\circ$ and XY is produced to point P. Draw a figure from the given information. If ray YQ bisects $\angle ZYP$, find $\angle XYQ$ and reflex $\angle QYP$.

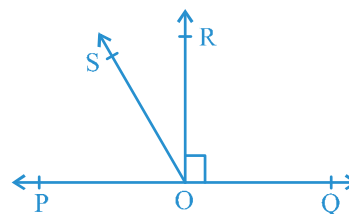
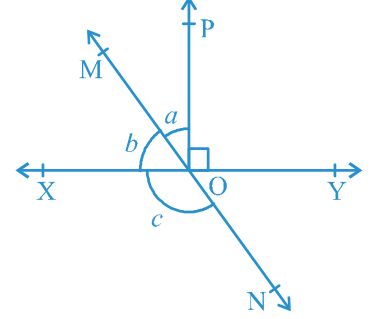


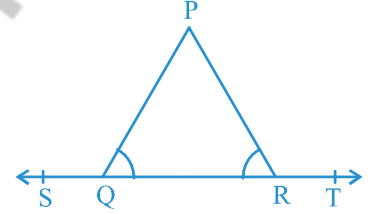
Fig. 6.17

2. படம் 6.14 இல் XY மற்றும் MN எனும் கோடுகள் O ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle POY = 90^\circ$ மற்றும் $a : b = 2 : 3$ எனில் c ஐ கண்டுபிடி.



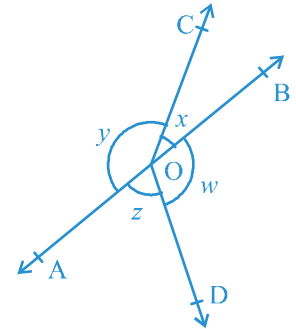
படம் 6.14

3. படம் 6.15 இல் $\angle PQR = \angle PRQ$
 $\angle PQS = \angle PRT$ என நிரூபி.



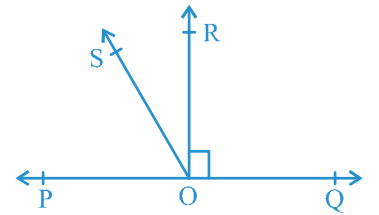
படம். 6.15

4. படம் 6.16 இல் $x + y = w + z$ எனில் AOB என்பது ஒரு நேர்க்கோடு என்பதை நிரூபி.



படம் 6.16

5. படம். 6.17 இல் POQ என்பது ஒரு நேர்க்கோடு. கதிர் OR என்பது PQ கோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ளது. OS என்பது OP மற்றும் OR கதிர்களுக்கு இடையே உள்ள மற்றொரு கதிர் ஆகும். $\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$ என நிரூபி.
6. $\angle XYZ = 64^\circ$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் XY ஐ P என்ற புள்ளிவரை நீட்டி வரைக. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்றவாறு படம் வரைக. கதிர் YQ ஆனது $\angle ZYP$ ஐ இருசமக்கூறிடுகிறது எனில் $\angle XYQ$ மற்றும் பின்வளைவு கோணம் $\angle QYP$ ஐ கண்டுபிடி.



படம் 6.17

6.5 Lines Parallel to the Same Line

If two lines are parallel to the same line, will they be parallel to each other? Let us check it. See Fig. 6.18 in which line $m \parallel$ line l and line $n \parallel$ line l .

Let us draw a line t transversal for the lines, l , m and n . It is given that line $m \parallel$ line l and line $n \parallel$ line l .

Therefore, $\angle 1 = \angle 2$ and $\angle 1 = \angle 3$

(Corresponding angles axiom)

So, $\angle 2 = \angle 3$ (Why?)

But $\angle 2$ and $\angle 3$ are corresponding angles and they are equal.

Therefore, you can say that

Line $m \parallel$ Line n

(Converse of corresponding angles axiom)

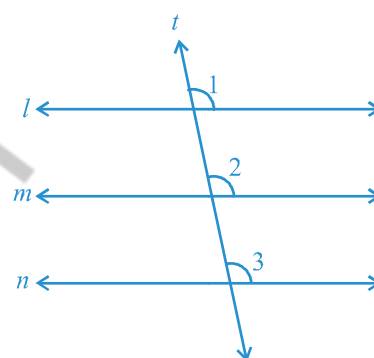


Fig. 6.18

This result can be stated in the form of the following theorem:

Theorem 6.6 : Lines which are parallel to the same line are parallel to each other.

Note : The property above can be extended to more than two lines also.

Now, let us solve some examples related to parallel lines.

Example 4 : In Fig. 6.19, if $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135^\circ$ and $\angle MYR = 40^\circ$, find $\angle XMY$.

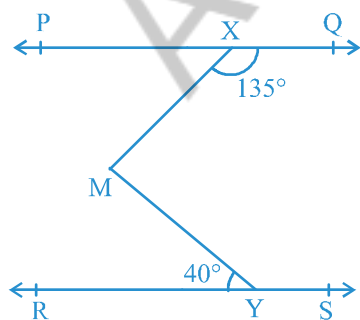


Fig. 6.19

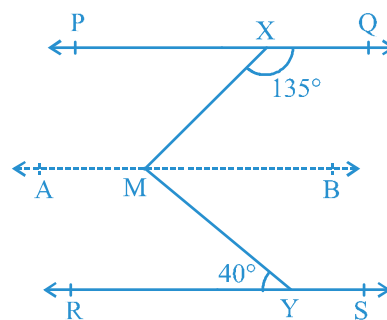


Fig. 6.20

Solution : Here, we need to draw a line AB parallel to line PQ , through point M as shown in Fig. 6.20. Now, $AB \parallel PQ$ and $PQ \parallel RS$.

6.5 ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள்

இரண்டு கோடுகள் ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக இருந்தால் அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்குமா? இதை சரிபார்ப்போம். படம் 6.18ஐ பார் $m \parallel l$ மற்றும் $n \parallel l$ என இருக்குமாறு l, m மற்றும் n ினும் கோடுகளை வரைந்து அதன் மீது t எனும் குறுக்கு வெட்டியை வரைக. $m \parallel l$ மற்றும் $n \parallel l$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையால் $\angle 1 = \angle 2$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 3$

(ஒத்த கோணங்களின் வெளிப்படை உண்மை)

எனவே $\angle 2 = \angle 3$ (ஏன்?)

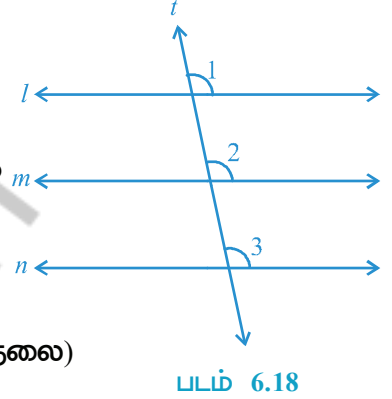
ஆனால் $\angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ ஆகியவை ஒத்த கோணங்கள் மற்றும் $m \parallel n$ என அவை சமம்.

ஆகியவை

$m \parallel n$ என கூறலாம்.

(ஒத்த கோணங்களின் வெளிப்படை உண்மைகள் மறுதலை)

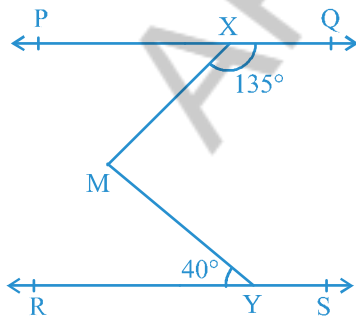
இதன் முடிவை பின்வரும் தேற்றமாக கூறலாம்.



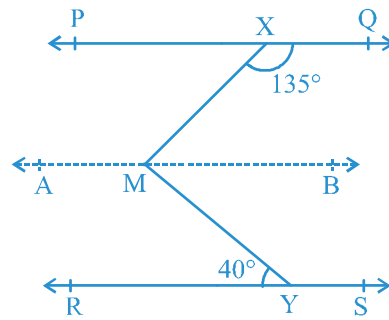
தேற்றம் 6.6 : ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகும்.

குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்ட பண்பானது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கோடுகளும் சரிபார்க்க முடியும். இப்பொழுது இணைகோடுகளுடன் தொடர்புடைய சில எடுத்துக்காட்டுகளை தீர்ப்போம்.

தேற்றம் 4 : படம் 6.19ல் $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135^\circ$ மற்றும் $\angle MYR = 40^\circ$, எனில் $\angle XMY$ கண்டுபிடி.



படம் 6.19



படம் 6.20

தீர்வு : இங்கு 6.20 இல் காட்டியவாறு PQ கோட்டிற்கு இணையாக M எனும் புள்ளி வழியே AB எனும் கோட்டை வரைய வேண்டும் இப்பொழுது $AB \parallel PQ$ மற்றும் $PQ \parallel RS$.

Therefore, $AB \parallel RS$ (Why?)

Now, $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$

($AB \parallel PQ$, Interior angles on the same side of the transversal XM)

But $\angle QXM = 135^\circ$

So, $135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

Therefore, $\angle XMB = 45^\circ$ (1)

Now, $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, Alternate angles)

Therefore, $\angle BMY = 40^\circ$ (2)

Adding (1) and (2), you get

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$$

That is, $\angle XMY = 85^\circ$

Example 5 : If a transversal intersects two lines such that the bisectors of a pair of corresponding angles are parallel, then prove that the two lines are parallel.

Solution : In Fig. 6.21, a transversal AD intersects two lines PQ and RS at points B and C respectively. Ray BE is the bisector of $\angle ABQ$ and ray CG is the bisector of $\angle BCS$; and $BE \parallel CG$.

We are to prove that $PQ \parallel RS$.

It is given that ray BE is the bisector of $\angle ABQ$.

Therefore, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

Similarly, ray CG is the bisector of $\angle BCS$.

Therefore, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

But $BE \parallel CG$ and AD is the transversal.

Therefore, $\angle ABE = \angle BCG$

(Corresponding angles axiom) (3)

Substituting (1) and (2) in (3), you get

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

That is, $\angle ABQ = \angle BCS$

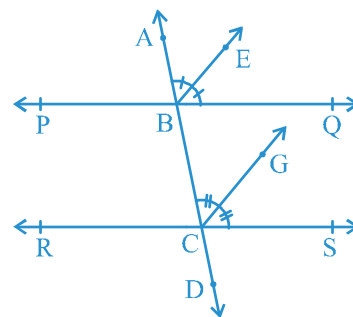


Fig. 6.21

ஆகையால் $AB \parallel RS$ (ஏன்?)

இப்பொழுது $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$

($AB \parallel PQ$, XM என்ற குறுக்கு வெட்டிக்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ள கோணங்கள்)

ஆனால் $\angle QXM = 135^\circ$

எனவே $135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

ஆகவே $\angle XMB = 45^\circ$ (1)

இப்பொழுது $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

ஆகையால் $\angle BMY = 40^\circ$ (2)

(1) மற்றும் (2) ஐ கூட்ட நாம் பெறுவது

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$$

அதாவது $\angle XMY = 85^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 5 : இரண்டு நேர்க்கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒத்த கோணங்களின் கோண இருசமவெட்டிகள் இணையாக இருந்தால் அந்த இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் இணை என நிரூபி.

தோர்வு : படம் 6.21இல் AD எனும் குறுக்குவெட்டி PQ மற்றும் RS எனும் B மற்றும் C புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. கதிர் BE என்பது $\angle ABQ$ ன் கோண இருசமவெட்டி மற்றும் CG என்பது $\angle BCS$ ன் கோண இருசமவெட்டி மற்றும் $BE \parallel CG$.

நாம் $PQ \parallel RS$ என நிரூபிக்க

கதிர் BE என்பது $\angle ABQ$ ன் இருசமவெட்டி என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

ஆகையால் $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

இவ்வாறே CG என்பது $\angle BCS$ ன் இருசமவெட்டி ஆகும்.

ஆகையால் $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

ஆனால் $BE \parallel CG$ மற்றும் AD ஒரு குறுக்கு வெட்டி

ஆகையால் $\angle ABE = \angle BCG$

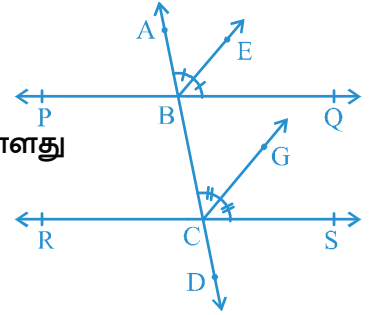
(ஒத்த கோணங்களின் வெளிப்படை உண்மை)

(3)

(1) மற்றும் (2) இல் பிரதியிட நாம் (3) ஐ பெறுகிறோம்.

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

அதாவது $\angle ABQ = \angle BCS$



படம் 6.21

But, they are the corresponding angles formed by transversal AD with PQ and RS; and are equal.

Therefore, $PQ \parallel RS$

(Converse of corresponding angles axiom)

Example 6 : In Fig. 6.22, $AB \parallel CD$ and $CD \parallel EF$. Also $EA \perp AB$. If $\angle BEF = 55^\circ$, find the values of x , y and z .

Solution : $y + 55^\circ = 180^\circ$

(Interior angles on the same side of the transversal ED)

Therefore, $y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

Again $x = y$

($AB \parallel CD$, Corresponding angles axiom)

Therefore $x = 125^\circ$

Now, since $AB \parallel CD$ and $CD \parallel EF$, therefore, $AB \parallel EF$.

So, $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$ (Interior angles on the same side of the transversal EA)

Therefore, $90^\circ + z + 55^\circ = 180^\circ$

Which gives $z = 35^\circ$

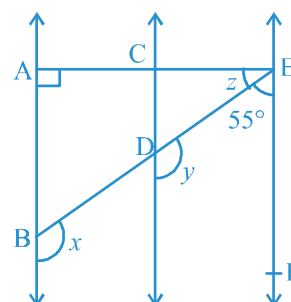


Fig. 6.22

EXERCISE 6.2

1. In Fig. 6.23, if $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ and $y : z = 3 : 7$, find x .

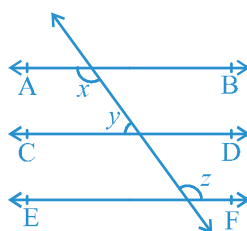


Fig. 6.23

ஆனால் இவை AD எனும் PQ மற்றும் RS எனும் ஜதை கோடுகளுக்கான ஒத்த கோண ஜோடி ஆகும். மேலும் சமம்.

ஆகையால் $PQ \parallel RS$ (ஒத்த கோணங்களின் வெளிப்படை உண்மையின் மறுதலை)

எடுத்துக்காட்டு 6 : படம் 6.22 இல் $AB \parallel CD$ மற்றும் $CD \parallel EF$, $EA \perp AB$ மேலும் $\angle BEF = 55^\circ$ எனில் x, y மற்றும் z இன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $y + 55^\circ = 180^\circ$

(ED எனும் குறுக்குவெட்டுக்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ள உட்கோணங்கள்)

ஆகையால் $y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

மீண்டும் $x = y$

($AB \parallel CD$, ஒத்து கோணங்களின் வெளிப்படை உண்மை)

ஆகையால் $x = 125^\circ$

இப்பொழுது $AB \parallel CD$ மற்றும் $CD \parallel EF$, இதிலிருந்து $AB \parallel EF$.

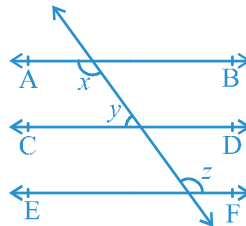
எனவே $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$ (எனும் குறுக்குவெட்டுக்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ள உட்கோணங்கள்)

ஆகவே $90^\circ + z + 55^\circ = 180^\circ$

இதிலிருந்து, $z = 35^\circ$

பயிற்சி 6.2

1. படம் 6.23 இல் $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ மற்றும் $y : z = 3 : 7$ எனில் x ஐ கண்டுபிடி.



படம். 6.23

2. In Fig. 6.24, if $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ and $\angle GED = 126^\circ$, find $\angle AGE$, $\angle GEF$ and $\angle FGE$.

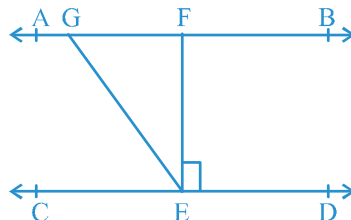


Fig. 6.24

3. In Fig. 6.25, if $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110^\circ$ and $\angle RST = 130^\circ$, find $\angle QRS$.

[Hint : Draw a line parallel to ST through point R.]

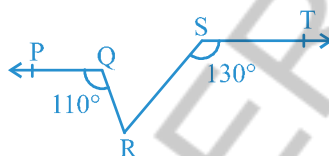


Fig. 6.25

4. In Fig. 6.26, if $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50^\circ$ and $\angle PRD = 127^\circ$, find x and y .

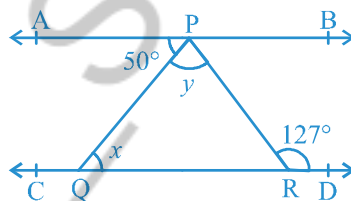


Fig. 6.26

5. In Fig. 6.27, PQ and RS are two mirrors placed parallel to each other. An incident ray AB strikes the mirror PQ at B, the reflected ray moves along the path BC and strikes the mirror RS at C and again reflects back along CD. Prove that $AB \parallel CD$.

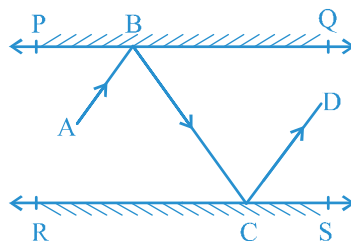
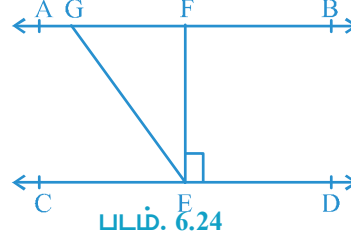


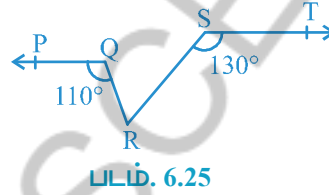
Fig. 6.27

2. படம் 6.24 ல் $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ மற்றும் $\angle GED = 126^\circ$, எனில் $\angle AGE$, $\angle GEF$ மற்றும் $\angle FGE$ ஐ கண்டுபிடி.

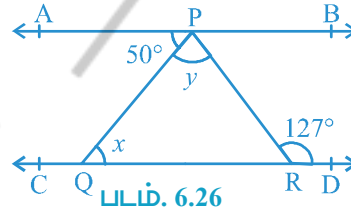


3. படம் 6.25ல் $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110^\circ$ மற்றும் $\angle RST = 130^\circ$ எனில் $\angle QRS$ கண்டுபிடி

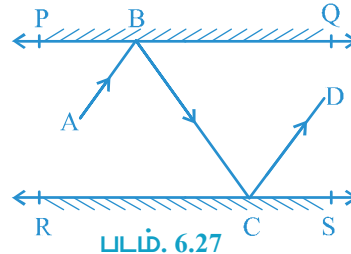
[குறிப்பு : 6.2ல் R புள்ளியின் ST க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக.]



4. படம் 6.26 ல் $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50^\circ$ மற்றும் $\angle PRD = 127^\circ$ எனில் x மற்றும் y கண்டுபிடி.



5. படம் 6.27 ல் PQ மற்றும் RS என்பன ஒன்றுக்கொன்று இணையாக வைக்கப்பட்ட சமதள ஆடிகள். படுகதிர் AB, சமதள ஆடி PQ ஐ B புள்ளியில் தொட்டு எதிரொளித்து, BC எனும் எதிரொளிப்பு கதிராக சமதள ஆடி RS ஐ C எனும் புள்ளியில் தொட்டு, CD கதிராக எதிரொளிக்கிறது எனில் $AB \parallel CD$ என நிரூபி.



6. If the ratio of the supplement of an angle to the complement of the same angle is 8:3, the angle is:
- A) 36°
 - B) 45°
 - C) 54°
 - D) 60°
7. The sum of the complement and the supplement of an angle is 200° . Find the value of the angle.
- A) 30°
 - B) 35°
 - C) 70°
 - D) 140°

6.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. If a ray stands on a line, then the sum of the two adjacent angles so formed is 180° and vice-versa. This property is called as the Linear pair axiom.
2. If two lines intersect each other, then the vertically opposite angles are equal.
3. Lines which are parallel to a given line are parallel to each other.

6. ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தின் மிகைநிரப்பு மற்றும் நிரப்பு கோணங்களின் விகிதம் 8:3 எனில் அந்த கோணம்
 A) 36°
 B) 45°
 C) 54°
 D) 60°
7. ஒரு கோணத்தின் நிரப்பு மற்றும் மிகை நிரப்பு கோணங்களின் மொத்தம் 200° எனில் அந்த கோணம்
 A) 30°
 B) 35°
 C) 70°
 D) 140°

6.6 தொகுப்பு

இந்த அத்தியாயத்தில் நீங்கள் பின்வரும் கருத்துக்களை படித்துள்ளீர்கள்.

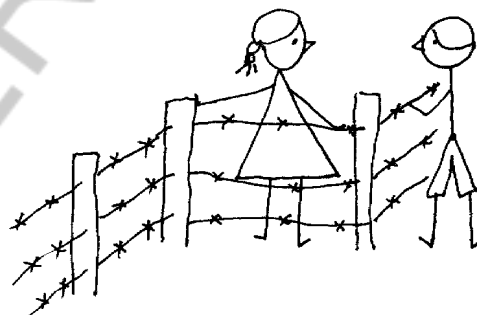
1. ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமையுமானால் அதனால் உருவாகும். அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் மற்றும் எதிரெதிர் மாறல் இந்த பண்புகள் நேர்க்கோட்டு கோண வெளிப்படை உண்மை என்று அழைக்கப்படுகிறது.
2. இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்வதால் ஏற்படும் குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம் ஆகும்.
3. கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கும்.

APPENDIX 1

PROOFS IN MATHEMATICS

A1.1 Introduction

Suppose your family owns a plot of land and there is no fencing around it. Your neighbour decides one day to fence off his land. After he has fenced his land, you discover that a part of your family's land has been enclosed by his fence. How will you prove to your neighbour that he has tried to encroach on your land? Your first step may be to seek the help of the village elders to sort out the difference in boundaries. But, suppose opinion



is divided among the elders. Some feel you are right and others feel your neighbour is right. What can you do? Your only option is to find a way of establishing your claim for the boundaries of your land that is acceptable to all. For example, a government approved survey map of your village can be used, if necessary in a court of law, to prove (claim) that you are correct and your neighbour is wrong.

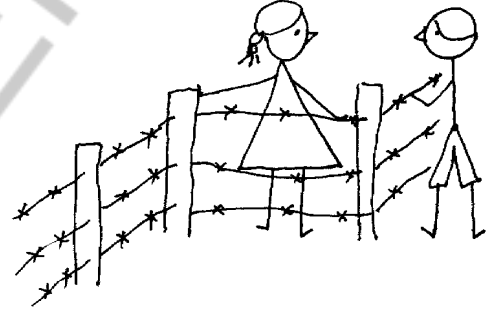
Let us look at another situation. Suppose your mother has paid the electricity bill of your house for the month of August, 2005. The bill for September, 2005, however, claims that the bill for August has not been paid. How will you disprove the claim made by the electricity department? You will have to produce a receipt proving that your August bill has been paid.

You have just seen some examples that show that in our daily life we are often called upon to prove that a certain statement or claim is true or false. However, we also accept many statements without bothering to prove them. But, in mathematics we only accept a statement as true or false (except for some axioms) if it has been proved to be so, according to the logic of mathematics.

கணித நிரூபணங்கள்

A1.1 அறிமுகம்

உங்களுடைய குடும்பத்தினர் ஒரு நிலத்தை வாங்கியுள்ளனர். ஆனால் அதனைச் சுற்றி வேலி போடவில்லை. உங்களுடைய அண்டை நிலத்தவர் அவருடைய நிலத்தை சுற்றி வேலி போட முடிவு செய்தார். உங்கள் நிலம் அவரது வேலிக்குள் ஆக்கிரமிப்பு செய்யப்பட்டுள்ளது என்பதை அவர் வேலி போட்ட பிறகு அறிந்தீர்கள். உங்கள் அண்டை நிலத்துக்காரர் உங்கள் நிலத்தை ஆக்கிரமித்துள்ளார் என்பதை எவ்வாறு நிரூபிப்பீர்கள்? உங்கள் கிராமத்து பெரியவர்கள் உதவியை நாடி வேலிக்கு உட்பட்ட பகுதியை மீட்டுத்தர கேட்கலாம். சிலர் உங்கள் கருத்து சரி எனவும், சிலர் உங்கள் அண்டை வீட்டுக்காரர் கருத்து சரி எனவும் கூறலாம். நீங்கள் என்ன செய்வீர்கள்? உங்கள் நிலத்தை மீட்க எல்லோராலும் ஒத்துக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு வழியை நீங்கள் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். எடுத்தக்காட்டாக அரசாங்கத்தால் அங்கீகரிக்கப்பட்ட உங்கள் கிராமத்தின் நில அளவு வரைபடத்தை உபயோகிக்கலாம் அல்லது தேவையானால் நீதிமன்றத்தில் சட்டத்தை நாடி உங்கள் கருத்தை சரி என்றும் உங்கள் அண்டை நிலத்தாரின் கருத்து தவறு என்றும் நிரூபிக்கலாம்.



மற்றொரு சூழ்நிலையை எடுத்துக்கொள்வோம். உங்கள் தாய் உங்களின் மின்சார கட்டணம் ஆகஸ்ட் 2005 க்கு கட்டினார். ஆனால் செப்டம்பர் 2005 ரசீதில் ஆகஸ்ட் 2005 மாத கட்டணம் செலுத்தவில்லை என வந்துள்ளது. மின்சார துறையினர் கூறியுள்ளது தவறு என்பதை எவ்வாறு நிரூபிப்பீர்கள்? நீங்கள் ஆகஸ்ட் மாதம் மின்சார கட்டணம் செலுத்தி விட்டீர்கள் என்பதை நீங்கள் ஆகஸ்ட் மாத ரசீதை காட்டி நிரூபிக்கலாம்.

நம் அன்றாட வாழ்வில் சில வாக்கியங்கள் அல்லது கூற்றுகளை உண்மை அல்லது பொய் என்று நிரூபிக்க வேண்டியுள்ள சில எடுத்துக்காட்டுகளை கண்டோம். பல வாக்கியங்களை நிரூபிக்க வேண்டிய எந்த நிர்பந்தமும் இல்லாமல் ஒத்துக்கொள்கிறோம். ஆனால் கணிதத்தில் ஒரு கூற்று தவறு அல்லது சரி என ஒத்துக்கொள்ள கணிதத்தில் தர்க்க வழியில் நிரூபிக்க படவேண்டும். (சில அடிகோள்களை தவிர).

In fact, proofs in mathematics have been in existence for thousands of years, and they are central to any branch of mathematics. The first known proof is believed to have been given by the Greek philosopher and mathematician Thales. While mathematics was central to many ancient civilisations like Mesopotamia, Egypt, China and India, there is no clear evidence that they used proofs the way we do today.

In this chapter, we will look at what a statement is, what kind of reasoning is involved in mathematics, and what a mathematical proof consists of.

A1.2 Mathematically Acceptable Statements

In this section, we shall try to explain the meaning of a mathematically acceptable statement. A ‘statement’ is a sentence which is not an order or an exclamatory sentence. And, of course, a statement is not a question! For example,

“What is the colour of your hair?” is not a statement, it is a question.

“Please go and bring me some water.” is a request or an order, not a statement.

“What a marvellous sunset!” is an exclamatory remark, not a statement.

However, “The colour of your hair is black” is a statement.

In general, statements can be one of the following:

- *always true*
- *always false*
- *ambiguous*

The word ‘ambiguous’ needs some explanation. There are two situations which make a statement ambiguous. The first situation is when we cannot decide if the statement is always true or always false. For example, “Tomorrow is Thursday” is ambiguous, since enough of a context is not given to us to decide if the statement is true or false.

The second situation leading to ambiguity is when the statement is subjective, that is, it is true for some people and not true for others. For example, “Dogs are intelligent” is ambiguous because some people believe this is true and others do not.

Example 1 : State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

- (i) There are 8 days in a week.
- (ii) It is raining here.
- (iii) The sun sets in the west.

மேலும் உண்மையாகவே ஆயிரம் ஆண்டுகளாகவே கணிதத்தில் நிரூபணங்கள் உள்ளன. மேலும் அவை கணிதத்தின் அனைத்து பிரிவுகளுக்கும் மையமாகவே உள்ளன. முதல் அறிந்த நிரூபணம் கிரேக்க தத்துவ ஞானி மற்றும் கணித அறிஞர் தாலஸ் என்பவரால் அளிக்கப்பட்டது. மெசபடோமியா. எகிப்து, சீனா மற்றும் இந்தியா போன்ற பழங்கால நாகரிகங்களுக்கு கணிதம் மையம் என்று அறிந்தாலும் நாம் தற்பொழுது உபயோகிப்பது போல் நிரூபணங்களை உபயோகித்தனர் என்பதற்கு தகுந்த சான்றுகள் இல்லை.

இந்த பாடத்தில் வாக்கியம் அல்லது கூற்று என்றால் என்ன? எவ்வித காரணங்கள் இடம் பெற்றுள்ளன? கணித நிரூபணத்தில் இருப்பவை எவை என்பதைப் பற்றி காணலாம்.

A1.2 கணிதத்தில் ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட வாக்கியங்கள்

இந்தப் பிரிவில் கணிதத்தில் ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட வாக்கியங்கள் என்பதை விளக்க முயற்சி செய்வோம். 'வாக்கியம்' என்பது ஒரு கட்டளை வாக்கியமோ அல்லது ஆச்சரியமாக கூறும் வாக்கியமோ அன்று. மேலும் இது கேள்வி வாக்கியமோ அன்று. எடுத்துக்காட்டாக,

“உன்னுடைய கூந்தல் எந்த நிறம்?” இது வாக்கியம் அல்ல, கேள்வி.

“தயவுசெய்து எனக்கு தண்ணீர் எடுத்த வா” இது பணிவு அல்லது கட்டளை. ஆனால் வாக்கியம் அல்ல.

“சூரிய அஸ்தமனம் எவ்வளவு அழகாக உள்ளது!” இது ஆச்சரியம், வாக்கியம் அல்ல. ஆனால், “உன்னுடைய கூந்தலின் நிறம் கருப்பு” என்பது வாக்கியம்.

பொதுவாக வாக்கியங்கள் பின்வருவனவற்றில் ஏதாவது ஒரு வகையாக இருக்கும்.

- எப்பொழுதும் உண்மை
- எப்பொழுதும் பொய்
- தெளிவற்றவை

‘தெளிவற்றவை’ என்பதற்கு சில விளக்கம் தேவை. பொதுவாக ஒரு வாக்கியத்தை தெளிவற்றவை எனக்கூறுவதற்கு இரண்டு சூழ்நிலைகள் உள்ளன. முதல் சூழ்நிலை கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியத்தை எப்பொழுதும் உண்மை அல்லது எப்பொழுதும் பொய் என்று நம்மால் கூறமுடியாது. எடுத்துக்காட்டாக நாளை வியாழக்கிழமை என்ற வாக்கியம் தெளிவற்றது. சரியான வாரத்தைகள் கொடுக்கப்படாததால் இந்த வாக்கியம் உண்மை என்றோ அல்லது பொய் என்றோ கூற முடியாது.

இரண்டாவது சூழ்நிலையானது, கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியம் பொருளைச் சார்ந்தது. அது சிலருக்கு உண்மையாகவும் சிலருக்கு பொய்யாகவும் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, நாய்கள் புத்திகூர்மை உடையவை என்பது தெளிவற்றது. ஏனெனில் சிலர் இதனை உண்மை என்றும் சிலர் பொய் என்றும் கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : பின்வரும் வாக்கியங்கள் எப்பொழுதும் உண்மை, எப்பொழுதும் பொய் அல்லது தெளிவற்றது என வகைப்படுத்தக.

- (i) வாரத்தில் 8 நாட்கள் உள்ளன.
- (ii) இங்கு மழை பெய்கிறது.
- (iii) சூரியன் மேற்கில் மறைகிறது.

- (iv) Gauri is a kind girl.
- (v) The product of two odd integers is even.
- (vi) The product of two even natural numbers is even.

Solution :

- (i) This statement is always false, since there are 7 days in a week.
- (ii) This statement is ambiguous, since it is not clear where 'here' is.
- (iii) This statement is always true. The sun sets in the west no matter where we live.
- (iv) This statement is ambiguous, since it is subjective—Gauri may be kind to some and not to others.
- (v) This statement is always false. The product of two odd integers is always odd.
- (vi) This statement is always true. However, to justify that it is true we need to do some work. It will be proved in Section A1.4.

As mentioned before, in our daily life, we are not so careful about the validity of statements. For example, suppose your friend tells you that in July it rains everyday in Manantavadi, Kerala. In all probability, you will believe her, even though it may not have rained for a day or two in July. Unless you are a lawyer, you will not argue with her!

As another example, consider statements we often make to each other like “it is very hot today”. We easily accept such statements because we know the context even though these statements are ambiguous. ‘It is very hot today’ can mean different things to different people because what is very hot for a person from Kumaon may not be hot for a person from Chennai.



But a mathematical statement cannot be ambiguous. *In mathematics, a statement is only acceptable or valid, if it is either true or false.* We say that a statement is true, if it is always true otherwise it is called a false statement.

For example, $5 + 2 = 7$ is always true, so ‘ $5 + 2 = 7$ ’ is a true statement and $5 + 3 = 7$ is a false statement.

- (iv) கௌரி அன்பான பெண்.
- (v) இரண்டு ஒற்றை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் ஓர் இரட்டை எண்.
- (vi) இரண்டு இரட்டை இயல் எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஓர் இரட்டை எண்.

தீர்வு:

- (i) எப்பொழுதும் பொய். ஏனெனில் வாரத்திற்கு 7 நாட்கள்.
- (ii) தெளிவற்றது. 'இங்கு' என்பது சரியாக விளக்கப்படவில்லை.
- (iii) எப்பொழுதும் உண்மை. சூரியன் எப்பொழுதும் மேற்கில் மறையும்.
- (iv) தெளிவற்றது. கௌரி என்ற பெண் சிலருக்கு அன்பானவளாகவும், சிலருக்கு அன்பில்லாதவளாகவும் இருக்கலாம்.
- (v) எப்பொழுதும் பொய். இரண்டு ஒற்றை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் ஓர் ஒற்றை எண்.
- (vi) எப்பொழுதும் உண்மை. இருப்பினும் இதை நிரூபிக்க நாம் சில வேலைகளை செய்ய வேண்டியுள்ளது. பிரிவு A1.4 ல் இது நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

நாம் முதலில் கூறியபடி, வாக்கியங்களில் உண்மைகளில் நாம் அதிகம் கவனம் செலுத்துவது இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக, உன்னுடைய நண்பன் கேரளாவில் மானஸ்தவடியில் ஜலை மாதத்தில் தினமும் மழை பெய்யும் என்று கூறுகிறான். ஜலை மாதத்தில் ஒன்று அல்லது இரண்டு நாள் மழை பெய்யாவிடிலும் நீ, உன்னுடைய நண்பன் சொன்ன கூற்றை நம்புவதற்கு எல்லா சாத்திய கூறுகள் உண்டு. நீ வக்கீலாக இருந்தால் தான் நீ அவனிடம் வாதாடுவாய்!.

மற்றொரு எடுத்தக்காட்டில், “இன்று மிகவும் வெப்பமாக உள்ளது” இது நாம் அடிக்கடி உபயோகிக்கும் ஒரு வாக்கியம். நாம் இது போன்ற வாக்கியங்கள் தெளிவற்றவையாக இருந்தாலும் அவற்றை ஒத்துக் கொள்கிறோம். ‘இன்று மிகவும் வெப்பமாக உள்ளது’ என்ற வாக்கியம் வேறுபட்ட மனிதர்களுக்கு வேறுபட்ட பொருளை தரும். ஏனெனில் குயூமானில் உள்ள மனிதனுக்கு மிகவும் வெப்பம் என்பது சென்னையிலுள்ள மனிதனுக்கு வெப்பமாக இருக்காது.



ஆனால் கணித வாக்கியம் என்பது தெளிவற்றவையாக இருக்க கூடாது. கணிதத்தில் வாக்கியம் அல்லது கூற்று என்பது உண்மை அல்லது பொய் என்றாலும் அது ஒத்துக்கொள்ளக் கூடியதாக அல்லது ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடியதாக இருக்கும். ஒரு வாக்கியம் உண்மை எனில் அது எப்பொழுதும் உண்மை இல்லாவிடில் அது பொய் வாக்கியம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $5 + 2 = 7$ என்பது எப்பொழுதும் உண்மை. ஆகவே ‘ $5 + 2 = 7$ ’ என்பது உண்மை வாக்கியம். $5 + 3 = 7$ என்பது பொய் வாக்கியம்.

Example 2 : State whether the following statements are true or false:

- (i) The sum of the interior angles of a triangle is 180° .
- (ii) Every odd number greater than 1 is prime.
- (iii) For any real number x , $4x + x = 5x$.
- (iv) For every real number x , $2x > x$.
- (v) For every real number x , $x^2 \geq x$.
- (vi) If a quadrilateral has all its sides equal, then it is a square.

Solution :

- (i) This statement is true. You have already proved this in Chapter 6.
- (ii) This statement is false; for example, 9 is not a prime number.
- (iii) This statement is true.
- (iv) This statement is false; for example, $2 \times (-1) = -2$, and -2 is not greater than -1 .
- (v) This statement is false; for example, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, and $\frac{1}{4}$ is not greater than $\frac{1}{2}$.
- (vi) This statement is false, since a rhombus has equal sides but need not be a square.

You might have noticed that to establish that a statement is not true according to mathematics, all we need to do is to find one case or example where it breaks down. So in (ii), since 9 is not a prime, it is an example that shows that the statement “Every odd number greater than 1 is prime” is not true. Such an example, that counters a statement, is called a *counter-example*. We shall discuss counter-examples in greater detail in Section A1.5.

You might have also noticed that while Statements (iv), (v) and (vi) are false, they can be restated with some conditions in order to make them true.

Example 3 : Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements.

- (i) For every real number x , $2x > x$.
- (ii) For every real number x , $x^2 \geq x$.
- (iii) If you divide a number by itself, you will always get 1.
- (iv) The angle subtended by a chord of a circle at a point on the circle is 90° .
- (v) If a quadrilateral has all its sides equal, then it is a square.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பின்வரும் வாக்கியங்கள் உண்மை அல்லது பொய் எனக்கூறு:

- (i) முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° .
- (ii) 1 ஐ விட அதிகமாக ஒவ்வொரு ஒற்றை எண்ணும் பகா எண்.
- (iii) எல்லா மெய் எண்கள் x க்கும், $4x + x = 5x$.
- (iv) ஒவ்வொரு மெய் எண் x க்கும், $2x > x$.
- (v) ஒவ்வொரு மெய் எண் x க்கும், $x^2 \geq x$.
- (vi) ஒரு நாற்கரத்தில் உள்ள எல்லா பக்கங்களும் சமம் எனில் அது சதுரம்.

தீர்வு :

- (i) இது உண்மை வாக்கியம். அலகு 6 ல் இது நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.
- (ii) இது உண்மை வாக்கியம். எடுத்துக்காட்டாக, 9 என்பது பகா எண் அல்ல.
- (iii) இது உண்மை வாக்கியம்.
- (iv) இது பொய் வாக்கியம். எ.கா.: $2 \times (-1) = -2$ மற்றும் -2 என்பது -1 ஐ விட பெரியது அல்ல.
- (v) இது பொய் வாக்கியம். எ.கா.: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{4}$ என்பது $\frac{1}{2}$ ஐ விட பெரியது அல்ல.
- (vi) இது பொய் வாக்கியம். ஏனெனில் சாய்சதுரத்திற்கு எல்லா பக்கங்களும் சமம். ஆகவே அது சதுரமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

கணிதத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியம் பொய் என நிரூபிப்பதற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டைக் கொண்டு அதனை நிரூபிக்க வேண்டியுள்ளது. ஆகவே (ii) ல் “1 ஐ விட அதிகமான ஒவ்வொரு ஒற்றை எண்ணும் பகா எண் என்பது தவறு” எடுத்துக்காட்டாக 9 பகா எண் அல்ல. இந்த வகை எடுத்துக்காட்டு வாக்கியத்தை எதிர்த்துக் கூறுவதால் இவை எதிர் உதாரணம் எனக் கூறலாம். எதிர் உதாரணம் பற்றி பிரிவு A1.5 ல் நாம் விரிவாக காணலாம்.

வாக்கியங்கள் (iv), (v) மற்றும் (vi) ஆகியவை பொய் என்றாலும் அவற்றை உண்மை வாக்கியங்களாக மாற்ற அவற்றை மாற்றி எழுத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : பின்வரும் வாக்கியங்களை, உண்மை வாக்கியங்களாக, அதற்கான காரணங்களுடன் மாற்றி எழுதுக.

- (i) ஒவ்வொரு இயல் எண் x க்கும் $2x > x$.
- (ii) ஒவ்வொரு இயல் எண் x க்கும் $x^2 \geq x$.
- (iii) ஒரு எண்ணை அதே எண்ணால் வகுத்தால் 1 கிடைக்கும்.
- (iv) ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணினால் வட்டத்தின் மீது எதிரமைந்த கோணம் 90° .
- (v) ஒரு நாற்கரத்தில் எல்லா பக்கங்களும் சமம் எனில் அது சதுரம்.

Solution :

- (i) If $x > 0$, then $2x > x$.
- (ii) If $x \leq 0$ or $x \geq 1$, then $x^2 \geq x$.
- (iii) If you divide a number except zero by itself, you will always get 1.
- (iv) The angle subtended by a diameter of a circle at a point on the circle is 90° .
- (v) If a quadrilateral has all its sides and interior angles equal, then it is a square.

EXERCISE A1.1

1. State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.
 - (i) There are 13 months in a year.
 - (ii) Diwali falls on a Friday.
 - (iii) The temperature in Magadi is 26°C .
 - (iv) The earth has one moon.
 - (v) Dogs can fly.
 - (vi) February has only 28 days.
2. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers.
 - (i) The sum of the interior angles of a quadrilateral is 350° .
 - (ii) For any real number x , $x^2 \geq 0$.
 - (iii) A rhombus is a parallelogram.
 - (iv) The sum of two even numbers is even.
 - (v) The sum of two odd numbers is odd.
3. Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements.
 - (i) All prime numbers are odd.
 - (ii) Two times a real number is always even.
 - (iii) For any x , $3x + 1 > 4$.
 - (iv) For any x , $x^3 \geq 0$.
 - (v) In every triangle, a median is also an angle bisector.

A1.3 Deductive Reasoning

The main logical tool used in establishing the truth of an **unambiguous** statement is *deductive reasoning*. To understand what deductive reasoning is all about, let us begin with a puzzle for you to solve.

தீர்வு :

- (i) $x > 0$ எனில் $2x > x$.
- (ii) $x \leq 0$ அல்லது $x \geq 1$ எனில் $x^2 \geq x$.
- (iii) 0 ஐ தவிர மற்ற எண்களை அதே எண்களால் வகுத்தால் 1 கிடைக்கும்.
- (iv) ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தினால் வட்டத்தின் மீதமைந்த புள்ளியால் எதிரமையும் கோணம் 90° .
- (v) ஒரு நாற்கரத்தில் எல்லா பக்கங்களும், எல்லா உட்கோணங்களும் சமம் எனில் அது சதுரம்.

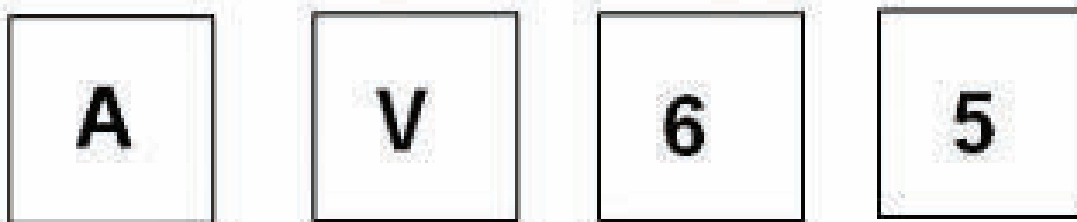
பயிற்சி A1.1

1. பின்வரும் வாக்கியங்கள் எப்பொழுதும் உண்மையா? எப்பொழுதும் பொய்யா? அல்லது தெளிவற்றவையா? எனக்கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
 - (i) ஒரு வருடத்தில் 13 மாதங்கள் உள்ளன.
 - (ii) தீபாவளி வெள்ளிக்கிழமையன்று வரும்.
 - (iii) மாகடியின் வெப்பநிலை 26°C
 - (iv) பூமிக்கு ஒரே ஒரு சந்திரனே உள்ளது.
 - (v) நாய்களால் பறக்க முடியும்.
 - (vi) பிப்ரவரி மாதத்தில் 28 நாட்களே உள்ளன.
2. பின்வரும் வாக்கியங்கள் உண்மை அல்லது பொய் வாக்கியமா? எனக் கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
 - (i) ஒரு நாற்கரத்தின் அனைத்து உட்கோணங்களின் கூடுதல் 350° .
 - (ii) அனைத்து மெய்யெண்கள் x க்கும் $x^2 \geq 0$.
 - (iii) சாய்சதுரம் என்பது ஓர் நாற்கரம் ஆகும்.
 - (iv) இரண்டு இரட்டை எண்களின் கூடுதல் ஓர் இரட்டை எண்.
 - (v) இரண்டு ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் ஓர் ஒற்றை எண்.
3. பின்வரும் வாக்கியங்களை, உண்மை வாக்கியங்களாக மாற்றுவதற்கான உரிய நிபந்தனைகளை எழுதுக.
 - (i) அனைத்து பகா எண்களும் ஒற்றை எண்கள்.
 - (ii) ஓர் மெய் எண்ணின் இருமடங்கானது ஓர் இரட்டை எண்.
 - (iii) x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $3x + 1 > 4$.
 - (iv) x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $x^3 \geq 0$.
 - (v) ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடு என்பது கோணங்களின் இருசம வட்டி.

A1.3 பகுத்தறிதல்

தெளிவான வாக்கியத்தின் உண்மையை நிலைநாட்ட உபயோகப்படுத்தப்படும் முக்கியமான தர்க்க வழி பகுத்தறிதல் ஆகும். பகுத்தறிதல் என்றால் என்ன என்பதை அறிந்துக் கொள்ள, நீங்கள் ஒரு புதிரை தீர்ப்பதன் மூலம் நாம் தொடங்கலாம்.

You are given four cards. Each card has a number printed on one side and a letter on the other side.



Suppose you are told that these cards follow the rule:

“If a card has an even number on one side, then it has a vowel on the other side.”

What is the **smallest number** of cards you need to turn over to check if the rule is true?

Of course, you have the option of turning over all the cards and checking. But can you manage with turning over a fewer number of cards?

Notice that the statement mentions that a card with an even number on one side has a vowel on the other. It does not state that a card with a vowel on one side must have an even number on the other side. That may or may not be so. The rule also does not state that a card with an odd number on one side must have a consonant on the other side. It may or may not.

So, do we need to turn over ‘A’? No! Whether there is an even number or an odd number on the other side, the rule still holds.

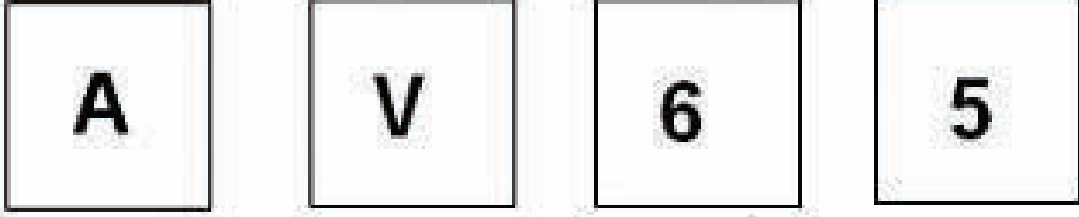
What about ‘5’? Again we do not need to turn it over, because whether there is a vowel or a consonant on the other side, the rule still holds.

But you do need to turn over V and 6. If V has an even number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if 6 has a consonant on the other side, then the rule has been broken.

The kind of reasoning we have used to solve this puzzle is called **deductive reasoning**. It is called ‘deductive’ because we arrive at (i.e., deduce or infer) a result or a statement from a previously established statement using logic. For example, in the puzzle above, by a series of logical arguments we deduced that we need to turn over only V and 6.

Deductive reasoning also helps us to conclude that a particular statement is true, because it is a special case of a more general statement that is known to be true. For example, once we prove that the product of two odd numbers is always odd, we can immediately conclude (without computation) that 70001×134563 is odd simply because 70001 and 134563 are odd.

உங்களுக்கு நான்கு அட்டைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு அட்டையிலும் ஓர் எண் ஒரு புறமும், ஓர் எழுத்து மற்றொரு புறமும் அச்சடிக்கப்பட்டுள்ளது.



“அட்டையின் ஒரு புறம் இரட்டை எண் இருந்தால், அதன் மறுபுறம் உயிரெழுத்து அச்சடிக்கப்பட்டிருக்கும்”

நீ குறைந்தபட்சம் எத்தனை அட்டைகளை திருப்பி, கொடுக்கப்பட்ட விதி சரி என நிரூபிப்பாய்?

எல்லா அட்டைகளையும் திருப்பி கொடுக்கப்பட்ட விதியை சரி பார்க்கலாம். ஆனால் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையில் அட்டைகளைத் திருப்பி சரிபார்க்க உன்னால் முடியுமா?

அட்டையின் ஒருபுறம் இரட்டை எண் எனில் மறுபுறம் ஆங்கில உயிரெழுத்து என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஆங்கில உயிரெழுத்து ஒருபுறம் இருந்தால், மறுபுறம் கண்டிப்பாக இரட்டை எண் என கொடுக்கப்படவில்லை. இரட்டை எண் இருக்கலாம். இல்லாமலும் போகலாம். அதே போல் ஒற்றை எண் ஒருபுறம் இருந்தால் மறுபுறம் ஆங்கில மெய்யெழுத்து இருக்கும் என்பதும் குறிப்பிடவில்லை.

ஆகவே நாம் ‘A’ அட்டையை திருப்பி சரிபார்க்கலாமா! முடியாது. மறுபுறம் இரட்டை எண் அல்லது ஒற்றை எண்ணாக இருக்கலாம். விதி எப்பொழுதும் பொருந்தும்.

‘5’ அட்டையை திருப்பலாமா? இதையும் திருப்பி சரிபார்க்க முடியாது. மறுபுறம் ஆங்கில உயிரெழுத்து இருந்தாலும், இல்லாவிட்டாலும் விதி இப்பொழுதும் பொருந்தும்.

ஆகவே, நீ V மற்றும் 6 என்ற அட்டைகளையே திருப்பி பார்க்கவேண்டும். V இன் மறுபுறம் இரட்டை எண் இருந்தால் விதி தவறு. அதே போல் 6 ன் மறுபுறம் ஆங்கில மெய்யெழுத்து இருந்தாலும் விதி தவறு.

இந்த புதிரை தீர்க்க உபயோகித்த இதை போன்ற பகுத்தறிதலானது துப்பறியும் பகுத்தறிதல் எனப்படுகின்றது. இவ்வாறு அழைக்கப்பட காரணம், நாம் முன்பே தர்க்க முறையில் கண்டறிந்து உண்மைகளை உபயோகித்து முடிவை அடைகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, மேலுள்ள புதிரில் தர்க்க முறையில் விவாதித்து நாம் V மற்றும் 6 என்ற அட்டைகளை மட்டும் திருப்பினால் போதும் என்ற முடிவுக்கு வந்தோம்.

துப்பறியும் பகுத்தறிதல் கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியம் உண்மை வாக்கியமா? என்ற முடிவிற்கு வர உதவி புரிகிறது. ஏனெனில் அந்த வாக்கியங்கள் உண்மை வாக்கியம் என அறியப்பட்டது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒருமுறை நாம் இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்குத்தொகை ஒரு ஒற்றை எண் என ஒருமுறை நிரூபித்தால், நாம் 70001 மற்றும் 134563 ன் பெருக்கற்பலனும் ஓர் ஒற்றை எண் என்பதை பெருக்காமலே கூறி விடலாம். ஏனெனில் 70001×134563 என்பவை ஓர் ஒற்றை எண்களாகும்.

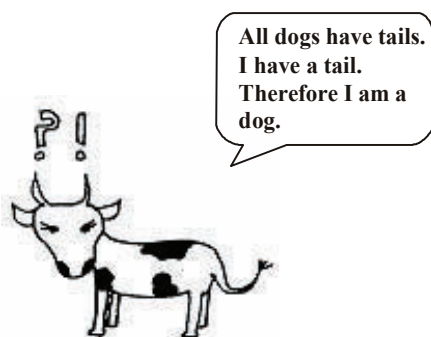
Deductive reasoning has been a part of human thinking for centuries, and is used all the time in our daily life. For example, suppose the statements “The flower Solaris blooms, only if the maximum temperature is above 28°C on the previous day” and “Solaris bloomed in Imaginary Valley on 15th September, 2005” are true. Then using deductive reasoning, we can conclude that the maximum temperature in Imaginary Valley on 14th September, 2005 was more than 28°C .

Unfortunately we do not always use correct reasoning in our daily life! We often come to many conclusions based on faulty reasoning. For example, if your friend does not smile at you one day, then you may conclude that she is angry with you. While it may be true that “if she is angry with me, she will not smile at me”, it may also be true that “if she has a bad headache, she will not smile at me”. Why don’t you examine some conclusions that you have arrived at in your day-to-day existence, and see if they are based on valid or faulty reasoning?

EXERCISE A1.2

1. Use deductive reasoning to answer the following:

- (i) Humans are mammals. All mammals are vertebrates. Based on these two statements, what can you conclude about humans?
- (ii) Anthony is a barber. Dinesh had his hair cut. Can you conclude that Antony cut Dinesh’s hair?
- (iii) Martians have red tongues. Gulag is a Martian. Based on these two statements, what can you conclude about Gulag?
- (iv) If it rains for more than four hours on a particular day, the gutters will have to be cleaned the next day. It has rained for 6 hours today. What can we conclude about the condition of the gutters tomorrow?
- (v) What is the fallacy in the cow’s reasoning in the cartoon below?



பல நூற்றாண்டுகளாக துப்பறியும் பகுத்தறிதல் என்பது மனிதனுடைய சிந்திக்கும் திறனில் ஒரு பகுதியாகும். மேலும் இதனை நம்முடைய தினசரி வாழ்வில் எப்பொழுதும் உபயோகிக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, “ சோலரிஸ் என்ற பூக்கள் முதல்நாள் வெப்பநிலை 28°C க்கும் அதிகமாக இருந்தால் தான் பூக்கும். மற்றும் “2005 செப்டம்பர் 15 அன்று சோலரிஸ் என்ற பூக்கள் மலர்ந்தது என்ற வாக்கியங்களை கவனிக்கவும். இவற்றை பகுத்தறிதல் கொண்டு நாம் 2005 செப்டம்பர் 14 அன்று வெப்பநிலை 28°C ” க்கு அதிகமாக இருந்தது என்ற முடிவுக்கு வரலாம்.

ஆனால் துரதிர்ஷ்டவசமாக நம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் நாம் சரியான காரணங்களை உபயோகிப்பதில்லை. அநேக முடிவுகளை நாம் அடிக்கடி தவறான காரணங்களை கொண்டு எடுத்த விடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, உன்னுடைய நண்பன் உன்னைப் பார்த்து ஒரு நாள் சிரிக்கவில்லை எனில் உடனே “நீ அவன் உன் மீது கோபமாக இருப்பதால் தான் என்னைப் பார்த்து சிரிக்கவில்லை” என்பது சரியாக இருந்தாலும் கூட அவனுக்கு தலைவலி அதிகமாய் இருந்ததால் என்னை பார்த்து சிரிக்கவில்லை என்பதும் சரியாக இருக்கும். நீங்கள் உங்களுடைய வாழ்க்கையில் பல சமயங்களில் எடுத்த முடிவுகள் ஒத்துக்கொள்ளக் கூடிய காரணங்கள் என ஆராய்ச்சி செய்யக் கூடாது.

பயிற்சி A1.2

1. துப்பறியும் பகுத்தறிவை உபயோகித்து பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளி.
 - (i) மனிதர்கள் அனைவரும் பாலூட்டிகள் எல்லா பாலூட்டிகளும் முதுகெலும்புள்ளவை. இந்த இரு வாக்கியங்களை கொண்டு மனிதர்களைப் பற்றி உன் முடிவு என்ன?
 - (ii) ஆண்டனி என்பவர் முடி திருத்தம் செய்பவர். தினேஷ் தன்னுடைய முடியை திருத்திக் கொண்டான். இந்த இரண்டு வாக்கியங்களைக் கொண்டு ஆண்டனியிடம் தினேஷ் முடி திருத்திக் கொண்டான் என்ற முடிவுக்கு வரமுடியுமா?
 - (iii) செவ்வாய் கிரகத்தில் உள்ளவர்கள் சிவப்பு நாகை உடையவர். குலாங் ஒரு செவ்வாய்கிரக வாசி, இந்த இரண்டு வாக்கியங்களை கொண்டு குலாங் பற்றிய உன்னுடைய முடிவு என்ன?
 - (iv) ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் 4 மணி நேரத்திற்கு மேல் மழை பெய்தால் அடுத்தநாள் வடிகால்கள் சுத்தம் செய்யப்பட வேண்டும். ஒரு நாள் 6 மணி நேரம் மழை பெய்தது. மறுநாள் வடிகால்களின் நிலை குறித்து நாம் என்ன முடிவினை கூறமுடியும்?
 - (v) கீழ்க்காணும் கேலிசித்திரத்திலுள்ள பசுவின் பகுத்தறிதலில் உள்ள போலி வாதத்தை எவ்வாறு குறிப்பிடுவாய்?



2. Once again you are given four cards. Each card has a number printed on one side and a letter on the other side. Which are the only two cards you need to turn over to check whether the following rule holds?

“If a card has a consonant on one side, then it has an odd number on the other side.”



A1.4 Theorems, Conjectures and Axioms

So far we have discussed statements and how to check their validity. In this section, you will study how to distinguish between the three different kinds of statements mathematics is built up from, namely, a theorem, a conjecture and an axiom.

You have already come across many theorems before. So, what is a theorem? A mathematical statement whose truth has been established (proved) is called a *theorem*. For example, the following statements are theorems, as you will see in Section A1.5.

Theorem A1.1 : *The sum of the interior angles of a triangle is 180° .*

Theorem A1.2 : *The product of two even natural numbers is even.*

Theorem A1.3 : *The product of any three consecutive even natural numbers is divisible by 16.*

A *conjecture* is a statement which we believe is true, based on our mathematical understanding and experience, that is, our mathematical intuition. The conjecture may turn out to be true or false. If we can prove it, then it becomes a theorem. Mathematicians often come up with conjectures by looking for patterns and making intelligent mathematical guesses. Let us look at some patterns and see what kind of intelligent guesses we can make.

Example 4 : Take any three consecutive even numbers and add them, say,

$$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, 20 + 22 + 24 = 66.$$

Is there any pattern you can guess in these sums? What can you conjecture about them?

Solution : One conjecture could be :

- (i) the sum of three consecutive even numbers is even.

Another could be :

- (ii) the sum of three consecutive even numbers is divisible by 6.

2. மறுபடியும் 4 அட்டைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு அட்டையிலும் ஒரு எண் ஒரு புறமும், ஓர் எழுத்து மறுபுறமும் அச்சடிக்கப்பட்டுள்ளது. எந்த இரண்டே இரண்டு அட்டைகளை திருப்பி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விதி சரியாக பொருந்துகிறது என காண்போம்?

“அட்டையின் ஒரு புறம் ஆங்கில மெய் எழுத்து இருந்தால் மறுபுறம் ஒற்றை எண் இருக்கும்”



A1.4 தேற்றங்கள், அனுமானங்கள் மற்றும் அடிகோள்கள்

இதுவரை நாம் வாக்கியங்கள் பற்றியும் அவற்றின் உண்மை தன்மை பற்றியும் விவாதித்தோம். இந்த பிரிவில் மூன்று வகை வாக்கியங்களான கணிதம் தோன்ற உதவிய தேற்றங்கள், அனுமானங்கள், அடிகோள்களை எவ்வாறு வேறுபடுத்துவது என்பது பற்றியும் படிக்கலாம்.

இதற்கு முன்பு நீங்கள் பல தேற்றங்களை படித்துள்ளீர்கள். ஆகவே தேற்றம் என்றால் என்ன? தேற்றம் என்பது உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்ட ஓர் கணித வாக்கியம் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் வாக்கியங்கள் பிரிவு A1.5.ல் நீங்கள் பார்த்த தேற்றங்கள்.

தேற்றம் A1.1 : ஒரு முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° .

தேற்றம் A1.2 : இரண்டு இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஓர் இரட்டை எண்.

தேற்றம் A1.3 : மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் பெருக்குத்தொகை 16 ஆல் வகுபடும்.

அனுமானங்கள் என்பது உண்மையான வாக்கியங்கள் என்று நம்மால் நம் அனுபவங்களால் ஒத்துக்கொள்ளப்பட்ட கணித வாக்கியங்கள், அனுமானங்கள் உண்மையாகவோ, பொய்யாகவோ மாறலாம். அதன் உண்மையை நிரூபித்தால் அது தேற்றங்களாகும். கணித அறிஞர்கள் சில அனுமானங்களை அதன் அமைப்பைக் கொண்டு புத்தசாலியான கணித ஊகிப்புகளை கொண்டு வந்தனர். சில அமைப்புகளை கொண்டு எந்தவித ஊகிப்பினை நம்மால் கொண்டுவர முடியும் என பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களை எடுத்துக்கொள். பின் அவற்றை கூட்டுக. எடுத்துக்காட்டாக,

$$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, 20 + 22 + 24 = 66.$$

இந்த கூட்டுத்தொகையில் ஏதேனும் அமைப்பு இருப்பதாக உன்னால் ஊகிக்க முடிகிறதா? இவற்றைப் பற்றிய உன் அனுமானம் என்ன?

தீர்வு : ஒரு அனுமானம்,

(i) மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் கூடுதல் ஓர் இரட்டை எண்.

(ii) மற்றொன்று, மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் கூடுதல் 6 ஆல் வகுபடும்.

Example 5 : Consider the following pattern of numbers called the Pascal's Triangle:

Line	Sum of numbers						
1			1				1
2			1	1			2
3			1	2	1		4
4			1	3	3	1	8
5		1	4	6	4	1	16
6	1	5	10	10	5	1	32
7		:			:		:
8		:			:		:

What can you conjecture about the sum of the numbers in Lines 7 and 8? What about the sum of the numbers in Line 21? Do you see a pattern? Make a guess about a formula for the sum of the numbers in line n .

Solution : Sum of the numbers in Line 7 = $2 \times 32 = 64 = 2^6$

Sum of the numbers in Line 8 = $2 \times 64 = 128 = 2^7$

Sum of the numbers in Line 21 = 2^{20}

Sum of the numbers in Line $n = 2^{n-1}$

Example 6 : Consider the so-called triangular numbers T_n :

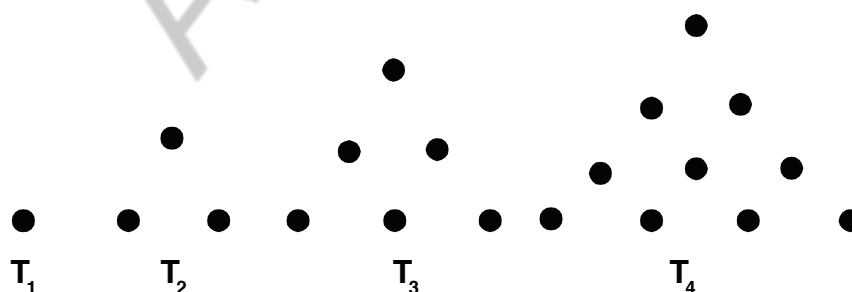


Fig. A1.1

The dots here are arranged in such a way that they form a triangle. Here $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, and so on. Can you guess what T_5 is? What about T_6 ? What about T_n ?

எடுத்துக்காட்டு 5 : பின்வரும் எண்களின் அமைப்பை எடுத்துக்கொள். இது பாஸ்கல் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.

வரிசை	எண்களின் கூடுதல்						
1			1			1	
2			1	1		2	
3			1	2	1	4	
4			1	3	3	1	8
5		1	4	6	4	1	16
6	1	5	10	10	5	1	32
7		:			:		:
8		:			:		:

7 மற்றும் 8வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் பற்றிய உன்னுடைய அனுமானம் என்னவாக இருக்கும்? 21வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் என்ன? ஏதாவது அமைப்பு உனக்கு தோன்றுகிறதா? வரிசை n ல் உள்ள எண்களின் கூடுதல் காண ஒரு சூத்திரத்தை ஊகிப்பாய்.

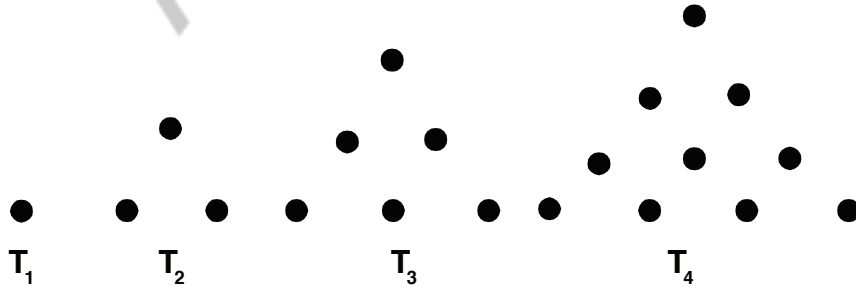
தீர்வு : 7வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2^{20}$

n வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2^{n-1}$

எடுத்துக்காட்டு 6 : பின்வரும் முக்கோண எண்கள் T_n ஐ கவனிக்கவும்.



படம். A1.1

இங்கு புள்ளிகள் முக்கோணம் அமையுமாறு வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இங்கு $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, இன்னும் பல. T_5 ன் மதிப்பு என்ன என்று உன்னால் ஊகிக்க முடிகிறதா? T_6 ன் மதிப்பு யாது? T_n ன் மதிப்பு யாது?

Make a conjecture about T_n .

It might help if you redraw them in the following way.

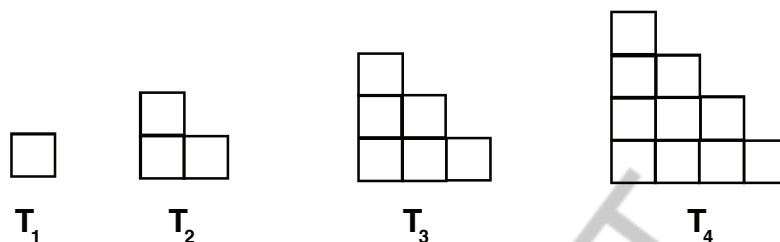


Fig. A1.2

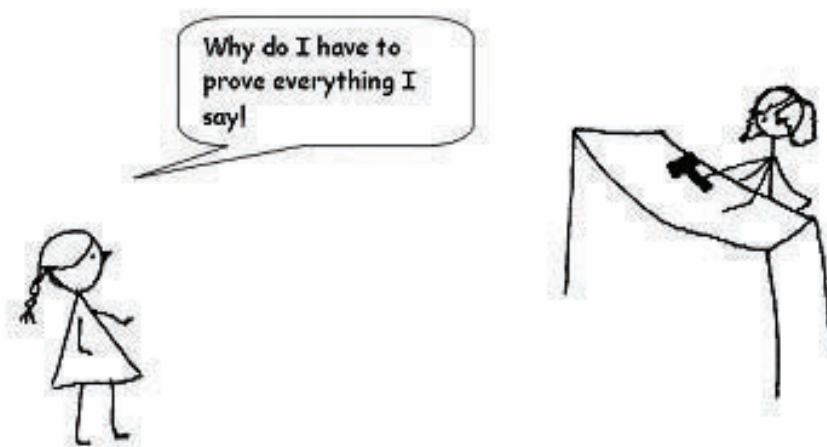
Solution : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

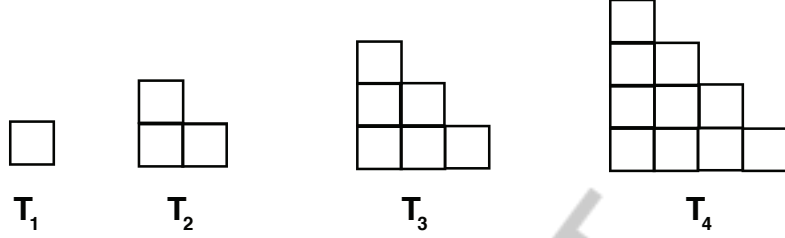
A favourite example of a conjecture that has been open (that is, it has not been proved to be true or false) is the Goldbach conjecture named after the mathematician Christian Goldbach (1690 – 1764). This conjecture states that “*every even integer greater than 4 can be expressed as the sum of two odd primes.*” Perhaps you will prove that this result is either true or false, and will become famous!

You might have wondered – do we need to prove everything we encounter in mathematics, and if not, why not?



T_n பற்றிய உன்னுடைய அனுமானத்தை அமை.

அந்த எண்களை பின்வருமாறு வரைந்தால் அது உங்களுக்கு உதவி புரியலாம்.



படம். A1.2

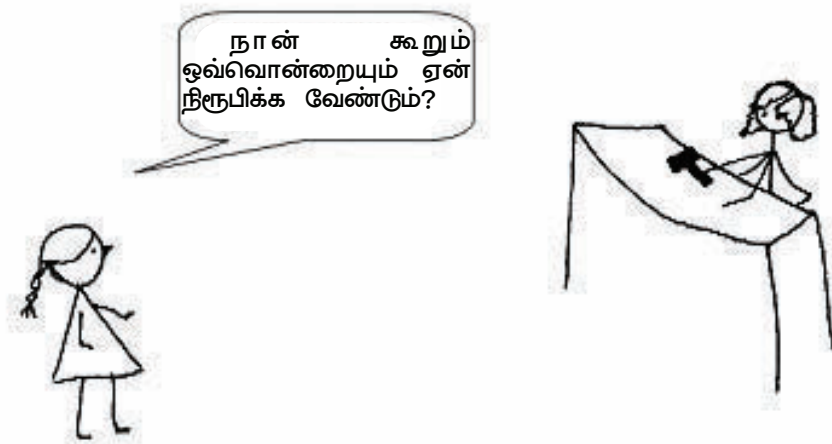
தீர்வு : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

அனுமானத்திற்கு புகழ்பெற்ற ஓர் எடுத்துக்காட்டு. (இன்னும் அதனை உண்மையா அல்லது பொய்யா என்று நிரூபிக்க முடியவில்லை) கோல்டுபேக் (1690 – 1764) பெயரின் மீதுள்ள கோல்டுபேக் அனுமானம். “4 ஐ விட அதிகமான ஒவ்வொரு இரட்டை எண்ணையும் இரண்டு ஒற்றை எண்களின் கூடுதலாக எழுத முடியும்.” இதனை சரியா அல்லது தவறா என்று நீங்கள் நிரூபித்தால் நீங்கள் புகழ் பெறுவீர்கள்.

நீங்கள் ஆச்சரியப்படலாம் – கணிதத்தில் உபயோகிக்கும் ஒவ்வொன்றையும் நிரூபிக்க வேண்டும் அல்லது நிரூபிக்க வேண்டாம் எனில் ஏன்?



The fact is that every area in mathematics is based on some statements which are assumed to be true and are not proved. These are ‘self-evident truths’ which we take to be true without proof. These statements are called *axioms*. In Chapter 5, you would have studied the axioms and postulates of Euclid. (We do not distinguish between axioms and postulates these days.)

For example, the first postulate of Euclid states:

A straight line may be drawn from any point to any other point.

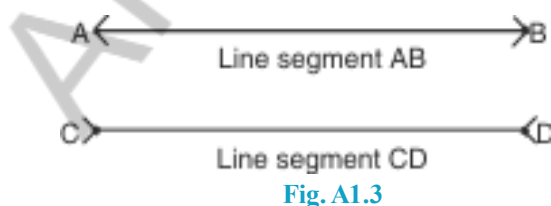
And the third postulate states:

A circle may be drawn with any centre and any radius.

These statements appear to be perfectly true and Euclid assumed them to be true. Why? This is because we cannot prove everything and we need to start somewhere. We need some statements which we accept as true and then we can build up our knowledge using the rules of logic based on these axioms.

You might then wonder why we don’t just accept all statements to be true when they appear self-evident. There are many reasons for this. Very often our intuition can be wrong, pictures or patterns can deceive and the only way to be sure that something is true is to prove it. For example, many of us believe that if a number is multiplied by another, the result will be larger than both the numbers. But we know that this is not always true: for example, $5 \times 0.2 = 1$, which is less than 5.

Also, look at the Fig. A1.3. Which line segment is longer, AB or CD?



It turns out that both are of exactly the same length, even though AB appears shorter!

You might wonder then, about the validity of axioms. Axioms have been chosen based on our intuition and what appears to be self-evident. Therefore, we expect them to be true. However, it is possible that later on we discover that a particular axiom is not true. What is a safeguard against this possibility? We take the following steps:

- (i) Keep the axioms to the bare minimum. For instance, based on only axioms and five postulates of Euclid, we can derive hundreds of theorems.

கணிதத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவும் உண்மை என்று ஒத்துக்கொள்ளப்பட்ட அல்லது இதுவரை நிரூபிக்கப்படாத சில உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது. இவை சுய தெளிவான உண்மைகள் எனப்படுகின்றன. இவற்றை எவ்வித நிரூபணமும் இன்றி உண்மை என ஒத்துக் கொள்ளலாம். இவை அடிக்கோள்கள் எனப்படுகின்றன. அலகு 5 ல் அடிக்கோள்கள் மற்றும் ஒப்புக்கொள்கைகளை பற்றி படித்துள்ளீர்கள். (தற்பொழுது அடிக்கோள்கள் மற்றும் ஒப்புக்கொள்கைகளை நாம் வேறுபடுத்துவதில்லை).

எடுத்துக்காட்டாக, யூக்ளிடிஸ் முதல் ஒப்புக்கொள்கையானது,

ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்கோடு வரைய முடியும்.

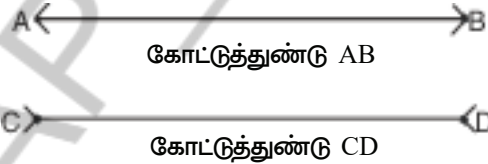
மூன்றாவது ஒப்புக்கொள்கையானது,

எந்தவொரு மையப்புள்ளியிலிருந்தும், எந்தவொரு ஆரத்திலும் வட்டம் வரையலாம்.

இந்த வாக்கியங்கள் முழுவதும் உண்மையான வாக்கியங்களாக தோன்றினாலும் யூக்ளிட் இவற்றை உண்மையாக இருக்கலாம் என கருதினார். ஏன்? நம்மால் ஒவ்வொன்றையும் நிரூபிக்க முடியாது. மேலும் நாம் ஏதாவது ஒரு இடத்தில் தொடங்க வேண்டியிருக்கும். நம்மால் உண்மை என ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட வாக்கியங்கள் நமக்கு தேவை. பின் அவற்றை கொண்டு தர்க்க ரீதியில் அடிக்கோள்களின் உதவியைக் கொண்டு நம்மால் நம் கணித அறிவை வளர்த்துக் கொள்ளலாம்.

அனைத்து சுய தெளிவான வாக்கியங்களையும் உண்மை என ஒத்துக்கொள்ளக் கூடாது? இதற்கு பல காரணங்கள், நமது அனுமானங்கள் தவறாக, படங்களும் அமைப்பும் ஏமாற்றலாம். வாக்கியங்கள் உண்மை என ஒத்துக்கொள்ள அவை நிரூபிக்கப்பட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு எண்ணை மற்றொரு எண்ணால் பெருக்க கிடைக்கும் பெருக்குத்தொகை அந்த இரண்டு எண்களை விட பெரியதாக இருக்கும் என நம்மில் பலரும் நினைத்துக் கொண்டுள்ளோம். ஆனால் இது எப்பொழுதும் உண்மை அல்ல. எடுத்துக்காட்டாக, $5 \times 0.2 = 1$, இது 5 ஐ விட சிறியது.

மேலும் படம். A1.3 ஐ பார்க்க. AB அல்லது CD ல் எந்த கோட்டுத்துண்டு பெரியது?



படம். A1.3

AB பார்ப்பதற்கு சிறியதாக தோன்றினாலும் இவை இரண்டும் ஒரே நீளமாக உள்ளன!

அடிக்கோள்களின் ஒத்துக்கொள்ளும் தன்மையை அறிந்தால் நீங்கள் ஆச்சரியப்படலாம். அடிக்கோள்கள் நம் உள்ளுணர்வின் அடிப்படையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. மேலும் தானாக நிரூபிக்கப்பட்டது போல் தோன்றுகிறது. ஆகவே நாம் அவற்றை உண்மையாக இருக்கும் என நினைக்கிறோம். குறிப்பிட்ட அடிக்கோள் ஆனது பின்நாளில் தவறாக இருக்க வாய்ப்புகள் உள்ளது. இந்த வாய்ப்புகளை எவ்வாறு பாதுகாப்பது? பின்வரும் வழிகளை பின்பற்றலாம்.

- அடிக்கோள்கள் மிகவும் குறைந்த எண்ணிக்கையில் இருத்தல் வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, சில அடிக்கோள்கள் மற்றும் யூக்ளிடிஸ் 5 ஒப்புக்கொள்கைகளை கொண்டு நூற்றுக்கும் மேற்பட்ட தேற்றங்களை நம்மால் உருவாக்க முடியும்.

- (ii) Make sure the axioms are consistent.

We say a collection of axioms is *inconsistent*, if we can use one axiom to show that another axiom is not true. For example, consider the following two statements. We will show that they are inconsistent.

Statement 1: No whole number is equal to its successor.

Statement 2: A whole number divided by zero is a whole number.

(Remember, **division by zero is not defined**. But just for the moment, we assume that it is possible, and see what happens.)

From Statement 2, we get $\frac{1}{0} = a$, where a is some whole number. This implies that, $1 = 0$. But this disproves Statement 1, which states that no whole number is equal to its successor.

- (iii) A false axiom will, sooner or later, result in a contradiction. We say that *there is a contradiction, when we find a statement such that, both the statement and its negation are true*. For example, consider Statement 1 and Statement 2 above once again.

From Statement 1, we can derive the result that $2 \neq 1$.

Now look at $x^2 - x^2$. We will factorise it in two different ways as follows:

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ and

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

So, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

From Statement 2, we can cancel $(x - x)$ from both sides.

We get $x = 2x$, which in turn implies $2 = 1$.

So we have both the statement $2 \neq 1$ and its negation, $2 = 1$, true. This is a contradiction. The contradiction arose because of the false axiom, that a whole number divided by zero is a whole number.

So, the statements we choose as axioms require a lot of thought and insight. We must make sure they do not lead to inconsistencies or logical contradictions. Moreover, the choice of axioms themselves, sometimes leads us to new discoveries. From Chapter 5, you are familiar with Euclid's fifth postulate and the discoveries of non-Euclidean geometries. You saw that mathematicians believed that the fifth postulate need not be a postulate and is actually a theorem that can be proved using just the first four postulates. Amazingly these attempts led to the discovery of non-Euclidean geometries.

We end the section by recalling the differences between an axiom, a theorem and a conjecture. An **axiom** is a mathematical statement which is assumed to be true without proof; a **conjecture** is a mathematical statement whose truth or falsity is yet to be established; and a **theorem** is a mathematical statement whose truth has been logically established.

- (ii) அடிகோள்கள் நிலையான கருத்தை உடையவை என்பதில் உறுதியாக இருக்கவும். பல அடிகோள்கள் நிலையற்றவை. ஒரு அடிகோளை கொண்டு மற்றொரு அடிகோள் உண்மை அல்ல என்பதை நிரூபிக்கலாம். பின்வரும் இரண்டு வாக்கியங்களை கவனிக்க அவை நிலையற்றவை என்பதை நாம் நிரூபிக்கலாம்.

வாக்கியம்1: எந்த ஒரு முழு எண்ணும் அதன் அடுத்த எண்ணிற்கு சமமாக இருக்காது.

வாக்கியம்2: ஒரு முழு எண்ணை 0 ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது ஒரு முழு எண்.

(0 ஆல் வகுப்பது என்பது வரையறுக்க முடியாது என்பதை நாம் அறிவோம். ஆனால் உதாரணத்திற்கு 0 ஆல் வகுக்க முடியும் என்றும் வகுத்தால் என்ன நிகழும் என்பதை பற்றியும் பார்க்கலாம்)

வாக்கியம் 2 லிருந்து, $\frac{1}{0} = a$, இங்கு a ஏதேனும் ஒரு முழு எண். அது $1 = 0$ என குறிப்பிடுகிறது. வாக்கியம்1 ஆனது எந்த ஒரு முழு எண்ணும் அதன் அடுத்த எண்ணிற்கு சமமாக இருக்காது என்ற விதிக்கு முரணானது.

- (iii) ஒரு தவறான கோட்பாடு, விரைவில் அல்லது பின்னர் ஒரு முரண்பட்ட கருத்திற்கு வழிவகுக்கிறது. ஒரு வாக்கியம் அல்லது அதன் முரண்பாடு வாக்கியம் இரண்டும் உண்மை. ஆனால் அதை முரண்பாடு என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, முதல் வாக்கியத்திலிருந்து, $2 \neq 1$ என்ற முடிவை நாம் பெறலாம்.

$x^2 - x^2$ என்பதை எடுத்துக்கொள்க. இதனை பின்வரும் இரண்டு முறைகளில் காரணிப்படுத்தலாம்.

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ மற்றும்

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

ஆகவே, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

வாக்கியம் 2 லிருந்து, $(x - x)$ இருபுறமும் நீக்கினால் $x = 2x$ கிடைக்கும். இது $2 = 1$ என்பதை தருகிறது.

ஆகவே, $2 \neq 1$ என்ற வாக்கியமும் அதன் வேறுபாடு $2 = 1$ என்பதும் உண்மை. இது ஒரு கருத்து வேறுபாடு. இதுபோன்றே ஒரு முழு எண்ணை 0ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது ஓர் முழு எண் என்ற கருத்து வேறுபாடு தோன்றியதன் காரணம் ஒரு பொய்யான அடிகோள் ஆகும்.

ஆகவே, அடிகோள்களாக நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் வாக்கியம் அதிகமாக யோசித்தே தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். அவை நிலையற்ற தன்மையையும் தர்க்க கருத்து வேறுபாடுகளுக்கும் காரணமாய் இருக்க கூடாது என்பதில் நாம் உறுதியாக இருக்க வேண்டும். நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் அடிகோள்கள் சில நேரங்களில் புதிய கண்டுபிடிப்புகளுக்கு காரணமாகின்றன. அலகு 5 லிருந்து, யூக்ளிடிஸ் ஐந்தாவது ஒப்புக்கொள்கையையும், யூக்ளிடிஸ் அல்லாத வடிவியல் கண்டுபிடிப்புகளையும் காரணமாகின்றன.

அடிகோள், தேற்றம், அனுமானம் இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டை நினைவுபடுத்தி கொண்டு இந்த பிரிவினை முடிவு செய்வோம். அடிகோள் என்பது எந்த ஒரு நிரூபணமும் இன்று உண்மையென்று ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட ஒரு கணித வாக்கியம். அனுமானங்கள் என்பது அதன் உண்மை அல்லது பொய் இன்னும் நிரூபிக்கப்படவில்லை. தேற்றங்கள் என்பது அதன் உண்மை தர்க்கரீதியில் நிரூபிக்கப்பட்ட கணித வாக்கியங்கள்.

EXERCISE A1.3

1. Take any three consecutive even numbers and find their product; for example, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$, and so on. Make three conjectures about these products.

2. Go back to Pascal's triangle.

Line 1 : $1 = 11^0$

Line 2 : $1 \ 1 = 11^1$

Line 3 : $1 \ 2 \ 1 = 11^2$

Make a conjecture about Line 4 and Line 5. Does your conjecture hold? Does your conjecture hold for Line 6 too?

3. Let us look at the triangular numbers (see Fig.A1.2) again. Add two consecutive triangular numbers. For example, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$.

What about $T_4 + T_5$? Make a conjecture about $T_{n-1} + T_n$.

4. Look at the following pattern:

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12321$$

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

Make a conjecture about each of the following:

$$111111^2 =$$

$$1111111^2 =$$

Check if your conjecture is true.

5. List five axioms (postulates) used in this book.

A1.5 What is a Mathematical Proof?

Let us now look at various aspects of proofs. We start with understanding the difference between verification and proof. Before you studied proofs in mathematics, you were mainly asked to verify statements.

For example, you might have been asked to verify with examples that “the product of two even numbers is even”. So you might have picked up two random even numbers,

பயிற்சி A1.3

1. அடுத்தடுத்த மூன்று இரட்டை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு அதன் பெருக்குத் தொகையை கணக்கிடுக. எடுத்துக்காட்டாக, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ மற்றும் பல. இந்த பெருக்கல் பலன்களுக்கு 3 அனுமானங்கள் அமைக்கவும்.
2. பாஸ்கல் முக்கோணத்தை அமைக்கவும்.
வரிசை 1 : $1 = 11^0$
வரிசை 2 : $1 \ 1 = 11^1$
வரிசை 3 : $1 \ 2 \ 1 = 11^2$
வரிசை 4 மற்றும் வரிசை 5 ஐ கணித்து எழுதுக. உன்னுடைய கணிப்பு பொருந்துமா? வரிசை 6 க்கும் பொருந்துமா?
3. முக்கோண எண்களை (படம்.A1.2) மறுபடியும் எடுத்துக்கொள். இரண்டு அடுத்தடுத்த எண்களின் கூடுதலை காண்க. எடுத்துக்காட்டாக, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$. $T_4 + T_5$ மதிப்பு யாது? $T_{n-1} + T_n$ குறித்து ஒரு கணிப்பை எழுதுக.
4. பின்வரும் அமைப்பை கவனி.
 $1^2 = 1$
 $11^2 = 121$
 $111^2 = 12321$
 $1111^2 = 1234321$
 $11111^2 = 123454321$
பின்வருவனவற்றை கணித்து எழுதுக.
 $111111^2 =$
 $1111111^2 =$
உன்னுடைய கணிப்பு சரியா என சரிபார்.
5. இப்பாடப் புத்தகத்திலுள்ள 5 அடிகோள்களை எழுதுக.

A1.5 கணித நிரூபணம் என்றால் என்ன?

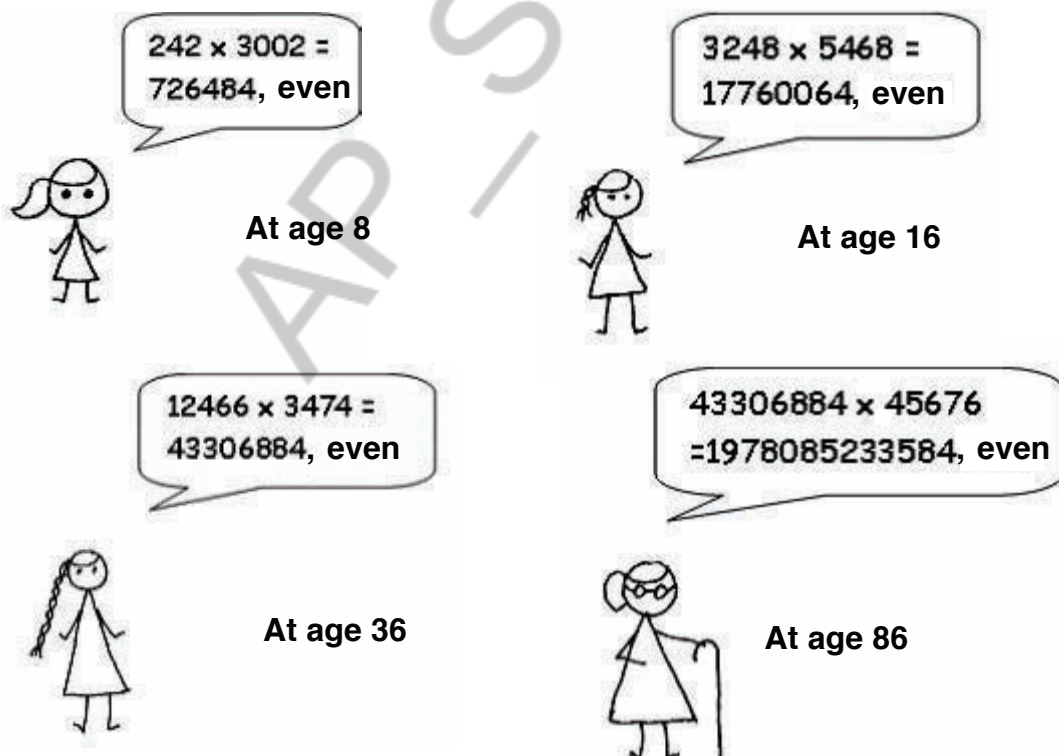
நிரூபணத்தில் பல்வேறு நிலைகளை நாம் காண்போம். நாம் சரிபார்த்தல் (verification) மற்றும் நிரூபணத்திற்கு (proof) இடையே உள்ள வேறுபாடுகளை புரிந்துகொள்வோம். கணிதத்தில் நிரூபணம் பற்றி படிப்பதற்கு முன் வாக்கியங்களை சரிபார்க்க வேண்டி கேட்கப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு இரட்டை எண்களின் பெருக்குத்தொகை ஓர் இரட்டை எண் என்பதனை உதாரணங்களுடன் சரிபார்க்க சொல்லுவாம்.

say 24 and 2006, and checked that $24 \times 2006 = 48144$ is even. You might have done so for many more examples.

Also, you might have been asked as an activity to draw several triangles in the class and compute the sum of their interior angles. Apart from errors due to measurement, you would have found that the interior angles of a triangle add up to 180° .

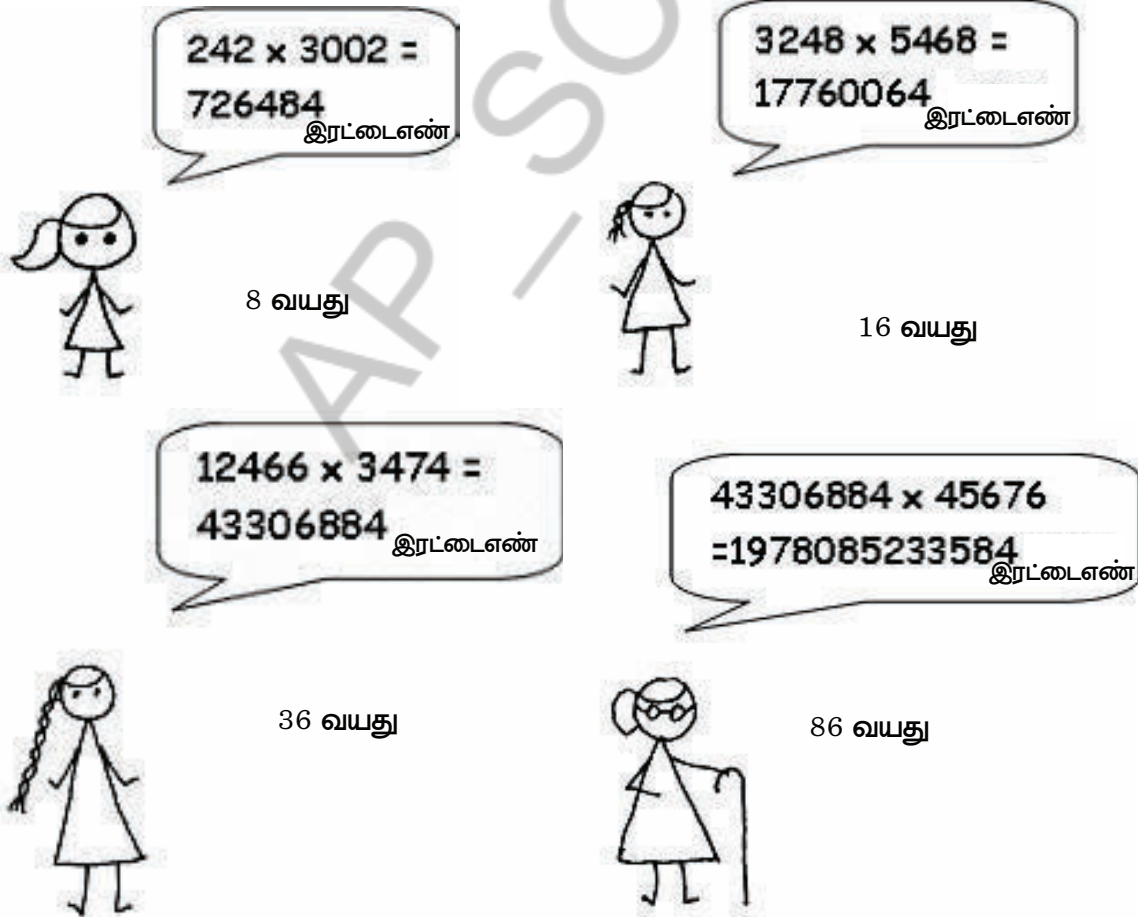
What is the flaw in this method? There are several problems with the process of verification. While it may help you to make a statement you believe is true, you cannot be *sure* that it is true in *all* cases. For example, the multiplication of several pairs of even numbers may lead us to guess that the product of two even numbers is even. However, it does not ensure that the product of all pairs of even numbers is even. You cannot physically check the products of all possible pairs of even numbers. If you did, then like the girl in the cartoon, you will be calculating the products of even numbers for the rest of your life. Similarly, there may be some triangles which you have not yet drawn whose interior angles do not add up to 180° . We cannot measure the interior angles of all possible triangles.



ஆகவே நீங்கள் இரண்டு இரட்டை எண்களான 24 மற்றும் 2006 ஐ எடுத்துக்கொண்டு, அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $24 \times 2006 = 48144$ ஒரு இரட்டை எண் என பார்க்கலாம். மேலும் பல எடுத்துக்காட்டுகளை கொண்டு செய்யலாம்.

அதே போல் உங்கள் வகுப்பில் பல முக்கோணங்களை வரைந்து அவற்றின் உட்கோணங்களின் கூடுதலை காணச்சொல்லி ஒரு செயல் கொடுக்கப்படலாம். நீங்கள் அளக்கும் பொழுது உண்டாகும் சிறு தவறுகளை விட்டு, ஒரு முக்கோணத்தில் உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° என்பதை நீங்கள் கண்டறியலாம்.

இந்த முறையில் உள்ள குறைபாடுகள் என்ன? சரிபார்த்தல் (verification) முறையில் பல பிரச்சினைகள் உள்ளன. இது உங்கள் கூற்றினை உண்மை என நம்புவதற்கு உதவலாம். ஆனால் அது எல்லா சமயங்களிலும் உண்மை என உறுதியாக கூறமுடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, அநேக இரட்டை எண்களின் பெருக்கல் பலன் இரட்டை எண் என்ற நினைப்பினை தரும். கூற்றில் எல்லா இரட்டை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டை எண் என உறுதியாக சொல்ல முடியாது. அதே போல் எல்லா இரட்டை எண் ஜோடிகளையும் பெருக்கி பார்க்க முடியாது. இவ்வாறு பெருக்கி பார்ப்பதென்றால் கீழே உள்ள பெண்ணைப் போன்று உங்கள் வாழ்க்கையில் மீதி உள்ள எல்லா நாட்களிலும் பெருக்கிக்கொண்டே இருக்க வேண்டும். அதே போல் சில முக்கோணங்களின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° வராமலும் இருக்கலாம். எல்லா முக்கோணங்களையும் அளந்து பார்க்க முடியாது.



Moreover, verification can often be misleading. For example, we might be tempted to conclude from Pascal's triangle (Q.2 of Exercise A1.3), based on earlier verifications, that $11^5 = 15101051$. But in fact $11^5 = 161051$.

So, you need another approach that does not depend upon verification for some cases only. There is another approach, namely 'proving a statement'. A process which can establish the truth of a mathematical statement based purely on logical arguments is called a *mathematical proof*.

In Example 2 of Section A1.2, you saw that to establish that a mathematical statement is false, it is enough to produce a single counter-example. So while it is not enough to establish the validity of a mathematical statement by checking or verifying it for thousands of cases, it is enough to produce one counter-example to *disprove* a statement (i.e., to show that something is false). This point is worth emphasising.



To show that a mathematical statement is false, it is enough to find a single counter-example.

So, $7 + 5 = 12$ is a counter-example to the statement that the sum of two odd numbers is odd.

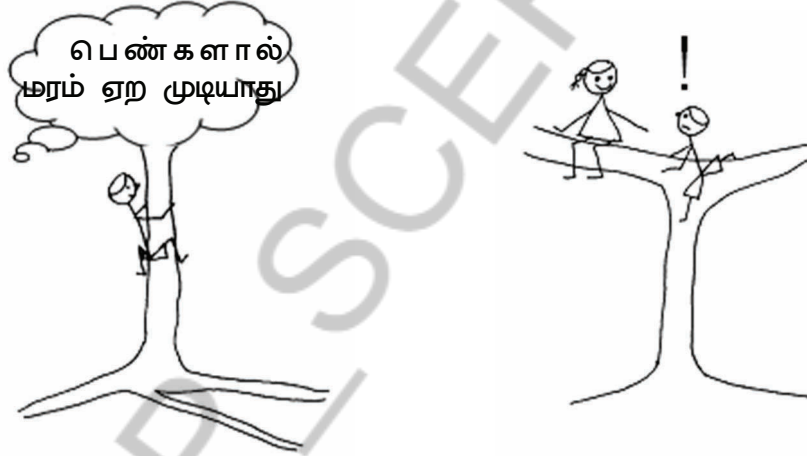
Let us now look at the list of basic ingredients in a proof:

- (i) To prove a theorem, we should have a rough idea as to how to proceed.
- (ii) The information already given to us in a theorem (i.e., the hypothesis) has to be clearly understood and used.

சில சமயங்களில் சரிபார்த்தல் தவறான வழிகாட்டும். எடுத்தக்காட்டாக, (பயிற்சி A1.3, Q.2) ல் உள்ள பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் படி, $11^5 = 15101051$ ஆனால் $11^5 = 161051$ ஆகும்.

ஆகவே, சில சமயங்களில் சரிபார்த்தலை தவிர்த்து வேறுமுறை உங்களுக்கு தேவைப்படலாம். மற்றொரு முறை வாக்கியத்தை நிரூபித்தல் ஆகும். கணித வாக்கியத்தின் உண்மையினை தர்க்க ரீதியில் வாதிட்டு அதனை நிலை நிறுத்துவதே கணித நிரூபணம் ஆகும்.

பிரிவு A1.2 ல் எடுத்தக்காட்டு 2 ல் கணித வாக்கியம் பொய் என நிரூபிக்க, ஒரே ஒரு எடுத்தக்காட்டு போதுமானது என நீங்கள் பார்த்துள்ளீர்கள். ஆகவே ஒரு கணித வாக்கியத்தின் உண்மை தன்மையினை ஆயிரம் உதாரணங்களை சோதித்து அல்லது சரிபார்ப்பதற்கு பதிலாக ஒரே உதாரணம் அதை பொய் என நிரூபிப்பதற்கு போதுமானது.



ஒரு கணித வாக்கியம் பொய் எனில் அதனை நிரூபிக்க ஒரே ஒரு உதாரணம் போதுமானது.

ஆகவே, $7 + 5 = 12$ என்பது இரண்டு ஒற்றைபடை எண்களின் கூடுதல் ஓர் ஒற்றை எண் என்பதை நிரூபிக்க ஒரே ஒரு உதாரணம் போதும்.

நிரூபணத்தில் காணப்படும் அடிப்படை முலப்பொருட்களைப் பற்றி பார்ப்போம்.

- ஒரு வாக்கியத்தினை நிரூபிக்க, எவ்வாறு அதனை அடைவது என்பதைப் பற்றிய தோராயமான (rough) கருத்து வேண்டும்.
- தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் சரியாக புரிந்துகொள்ளப்பட வேண்டும் மற்றும் உபயோகப்படுத்தப்பட வேண்டும்.

For example, in Theorem A1.2, which states that the product of two even numbers is even, we are given two even natural numbers. So, we should use their properties. In the Factor Theorem (in Chapter 2), you are given a polynomial $p(x)$ and are told that $p(a) = 0$. You have to use this to show that $(x - a)$ is a factor of $p(x)$. Similarly, for the converse of the Factor Theorem, you are given that $(x - a)$ is a factor of $p(x)$, and you have to use this hypothesis to prove that $p(a) = 0$.

You can also use constructions during the process of proving a theorem. For example, to prove that the sum of the angles of a triangle is 180° , we draw a line parallel to one of the sides through the vertex opposite to the side, and use properties of parallel lines.

- (iii) A proof is made up of a successive sequence of mathematical statements. Each statement in a proof is logically deduced from a previous statement in the proof, or from a theorem proved earlier, or an axiom, or our hypothesis.
- (iv) The conclusion of a sequence of mathematically true statements laid out in a logically correct order should be what we wanted to prove, that is, what the theorem claims.

To understand these ingredients, we will analyse Theorem A1.1 and its proof. You have already studied this theorem in Chapter 6. But first, a few comments on proofs in geometry. We often resort to diagrams to help us prove theorems, and this is very important. However, each statement in the proof has to be established **using only logic**. Very often, we hear students make statements like “Those two angles are equal because in the drawing they look equal” or “that angle must be 90° , because the two lines look as if they are perpendicular to each other”. Beware of being deceived by what you see (remember Fig A1.3)! .

So now let us go to Theorem A1.1.

Theorem A1.1 : *The sum of the interior angles of a triangle is 180° .*

Proof : Consider a triangle ABC (see Fig. A1.4).

We have to prove that $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ (1)

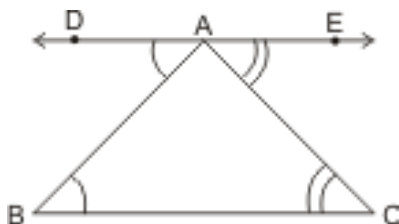


Fig A 1.4

எடுத்துக்காட்டாக, A1.2 ல் இரண்டு இரட்டை எண்களின் பெருக்கல்பலன் ஓர் இரட்டை எண் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே அவற்றின் பண்புகளை பயன்படுத்த வேண்டும். காரணி தேற்றத்தில், பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$ மற்றும் $p(a) = 0$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை நாம் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி என்பதை நிரூபிக்க பயன்படுத்த வேண்டும். அதே போல் காரணி தேற்றத்தின் மறுதலையில் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி மற்றும் $p(a) = 0$ என்று நிரூபிக்க பயன்படுத்த வேண்டும்.

தேற்றத்தினை நிரூபிக்க நாம் அமைப்புகளை பயன்படுத்தலாம். எடுத்தக்காட்டாக, முக்கோணத்தின் கூடுதல் 180° என நிரூபிக்க முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியில் அதன் எதிர்பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு நேர்கோடு வரைந்து இணை கோடுகளின் பண்புகளைக் கொண்டு நிரூபிக்கலாம்.

- (iii) தொடர்ச்சியான கணித வாக்கியங்களைக் கொண்டே நிரூபணம் அமைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வாக்கியமும் தர்க்க ரீதியில் அதன் முந்தைய வாக்கியத்திலிருந்து அல்லது அடிகோள்களிலிருந்து கருதி கண்டறியப்படுகிறது.
- (iv) தொடர்ச்சியான கணித உண்மை வாக்கியங்களின் முடிவானது தர்க்க ரீதியில் சரியான வரிசையில், எதனை நாம் நிரூபிக்க வேண்டுமோ, அதாவது தேற்றம் எதனை உண்மை என்று கூறுகிறதோ, அது வரையில் கொண்டு செல்ல வேண்டும்.

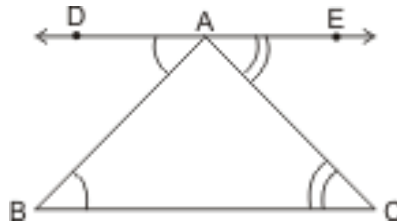
இந்த உட்பொருட்களை புரிந்துக்கொள்ள, தேற்றம் A1.1 ஐ பகுத்தறியலாம். நீங்கள் முன்பே பாடம் 6 ல் இந்த தேற்றத்தைப் படித்துள்ளீர்கள். நிரூபணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு வாக்கியமும் தர்க்க ரீதியில் அமைக்கப்பட்டது. “இரண்டு கோணங்கள் பார்ப்பதற்கு ஒரே மாதிரியாக இருப்பதால் அவை இரண்டும் சமம்” அல்லது “இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால் கோணம் 90° ஆகும்”. போன்ற வாக்கியங்களை மாணவர்கள் அடிக்கடி கூற கேட்டிருக்கிறோம். நீங்கள் பார்ப்பதைக் கொண்டு ஏமாற்றப்படலாம் என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். (படம் A1.3 ஐ நினைவில் கொள்க)!

நாம் இப்பொழுது தேற்றம் A1.1க்குச் செல்லலாம்.

தேற்றம் A1.1 : முக்கோணத்தின் உள்கோணங்களின் கூடுதல் 180° .

நிரூபணம் : ABC எனும் முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள். (படம் A1.4 ஐ கவனி).

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ என நிரூபிக்க வேண்டும். (1)



படம் A1.4

Construct a line DE parallel to BC passing through A. (2)

DE is parallel to BC and AB is a transversal.

So, $\angle DAB$ and $\angle ABC$ are alternate angles. Therefore, by Theorem 6.2, Chapter 6, they are equal, i.e. $\angle DAB = \angle ABC$ (3)

Similarly, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

Therefore, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

But $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$, since they form a straight angle. (6)

Hence, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$. (7)

Now, we comment on each step of the proof.

Step 1 : Our theorem is concerned with a property of triangles, so we begin with a triangle.

Step 2 : This is the key idea – the intuitive leap or understanding of how to proceed so as to be able to prove the theorem. Very often geometric proofs require a construction.

Steps 3 and 4 : Here we conclude that $\angle DAB = \angle ABC$ and $\angle CAE = \angle ACB$, by using the fact that DE is parallel to BC (our construction), and the previously proved Theorem 6.2, which states that if two parallel lines are intersected by a transversal, then the alternate angles are equal.

Step 5 : Here we use Euclid's axiom (see Chapter 5) which states that: "If equals are added to equals, the wholes are equal" to deduce

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE.$$

That is, the sum of the interior angles of the triangle are equal to the sum of the angles on a straight line.

Step 6 : Here we use the Linear pair axiom of Chapter 6, which states that the angles on a straight line add up to 180° , to show that $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$.

Step 7 : We use Euclid's axiom which states that "things which are equal to the same thing are equal to each other" to conclude that $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$. Notice that Step 7 is the claim made in the theorem we set out to prove.

We now prove Theorems A1.2 and A1.3 without analysing them.

Theorem A1.2 : *The product of two even natural numbers is even.*

Proof : Let x and y be any two even natural numbers.

We want to prove that xy is even.

புள்ளி A ல் BC க்கு இணையான கோடு DE ஐ வரைக. (2)

DE என்பது BC க்கு இணை மற்றும் AB ஒரு குறுக்குவெட்டி.

ஆகவே, $\angle DAB$ மற்றும் $\angle ABC$ என்பவை ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள். ஆகவே தேற்றம் 6.2, பாடம் 6 ன் படி, இக்கோணங்கள் சமம். எனவே, $\angle DAB = \angle ABC$ (3)

அதே போல், $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

ஆகவே, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

ஆனால் $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$, ஏனெனில் அவை நேர்கோட்டை உருவாக்குகின்றன. (6)

எனவே, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$. (7)

இப்பொழுது, நிரூபணத்தின் ஒவ்வொரு படியையும் ஆராய்வோம்.

படி 1: நமது தேற்றம் முக்கோணத்தின் பண்புகளோடு தொடர்பு உடையது. ஆகையால் நாம் முக்கோணத்தில் இருந்து தொடங்கலாம்.

படி 2: இது முக்கிய யோசனை. இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்க எவ்வாறு தொடங்குவது என்பதை யோசிக்க வேண்டும். வடிவியல் நிரூபணங்களுக்கு நமக்கு வரைதல் / அமைப்பு தேவைப்படும்.

படிகள் 3 மற்றும் 4: மேலும் DE என்பது BC க்கு இணை (அமைப்பு) என்ற கருத்தை கொண்டு நாம் $\angle DAE = \angle ABC$ மற்றும் $\angle CAE = \angle ACB$ எனலாம். முன்பே நிரூபித்த தேற்றம் 6.2ல் கூறியுள்ள படி, இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டும்போது உண்டாகும் கோணங்கள் சமம்.

படி 5: நாம் யூக்ளிட் அடிகோள், அதாவது சமமானவைகளை சமமானவற்றோடு கூட்டினால் கிடைக்கும் மொத்தமும் சமம் என்பதைக் கொண்டு,

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE \text{ என எழுதலாம்.}$$

அதாவது முக்கோணத்தின் உள் கோணங்களின் கூடுதல் நேர்கோட்டின் மீதுள்ள கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமம்.

படி 6: இங்கு பாடம் 6 ல் உள்ள அடுத்துள்ள கோணங்கள் அடிகோளைக்கொண்டு, அதாவது ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் கோணங்களின் கூடுதல் 180° என்பதைக் கொண்டு $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$ என எழுதலாம்.

படி 7: $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$ என எழுத, யூக்ளிடின் அடிகோள் அதாவது இரு வெவ்வேறு பொருட்கள் ஒரே பொருளுக்கு சமமானால் அவை இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் என்பதை பயன்படுத்தலாம்.

இப்பொழுது A1.2 மற்றும் A1.3 தேற்றங்களை ஆராயாமல் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் A1.2 : இரண்டு இரட்டை இயல் எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஓர் இரட்டை எண்.

நிரூபணம் : x மற்றும் y என்பன ஏதேனும் இரண்டு இரட்டை இயல் எண்கள் என்க.

xy என்பது ஓர் இரட்டை எண் என நிரூபிக்கப்படவேண்டும்.

Since x and y are even, they are divisible by 2 and can be expressed in the form

$x = 2m$, for some natural number m and $y = 2n$, for some natural number n .

Then $xy = 4mn$. Since $4mn$ is divisible by 2, so is xy .

Therefore, xy is even.

Theorem A1.3 : *The product of any three consecutive even natural numbers is divisible by 16.*

Proof : Any three consecutive even numbers will be of the form $2n$, $2n + 2$ and $2n + 4$, for some natural number n . We need to prove that their product $2n(2n + 2)(2n + 4)$ is divisible by 16.

$$\begin{aligned}\text{Now, } 2n(2n + 2)(2n + 4) &= 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2) \\ &= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2).\end{aligned}$$

Now we have two cases. Either n is even or odd. Let us examine each case.

Suppose n is even : Then we can write $n = 2m$, for some natural number m .

$$\text{And, then } 2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2).$$

Therefore, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ is divisible by 16.

Next, suppose n is odd. Then $n + 1$ is even and we can write $n + 1 = 2r$, for some natural number r .

$$\begin{aligned}\text{We then have : } 2n(2n + 2)(2n + 4) &= 8n(n + 1)(n + 2) \\ &= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1) \\ &= 16r(2r - 1)(2r + 1)\end{aligned}$$

Therefore, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ is divisible by 16.

So, in both cases we have shown that the product of any three consecutive even numbers is divisible by 16.

We conclude this chapter with a few remarks on the difference between how mathematicians discover results and how formal rigorous proofs are written down. As mentioned above, each proof has a key intuitive idea (sometimes more than one). Intuition is central to a mathematician's way of thinking and discovering results. Very often the proof of a theorem comes to a mathematician all jumbled up. A mathematician will often experiment with several routes of thought, and logic, and examples, before she/he can hit upon the correct solution or proof. It is only after the creative phase subsides that all the arguments are gathered together to form a proper proof.

It is worth mentioning here that the great Indian mathematician Srinivasa Ramanujan used very high levels of intuition to arrive at many of his statements, which

x மற்றும் y என்பவை இரட்டை எண் எனில் அவை 2 ஆல் வகுபடும். ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் m க்கு $x=2m$, மற்றும் ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் n க்கு $y=2n$ வடிவில் வெளிப்படுத்தலாம். அப்பொழுது $xy=4mn$ என்பது 2 ஆல் வகுபடும். எனவே, xy என்பதும் 2 ஆல் வகுபடும். எனவே, xy என்பது இரட்டை எண் ஆகும்.

தேற்றம் A1.3 : ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலன் 16 ஆல் வகுபடும்.

நிரூபணம்: ஏதேனும் ஒரு இயல்எண் n எனில், அடுத்தடுத்த மூன்று இயல்எண்கள் $2n, 2n+2$ மற்றும் $2n+4$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இவற்றின் பெருக்கற்பலன் $2n(2n+2)(2n+4)$ என்பது 16 ஆல் வகுபடும் என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} \text{இப்பொழுது, } 2n(2n+2)(2n+4) &= 2n \times 2(n+1) \times 2(n+2) \\ &= 2 \times 2 \times 2n(n+1)(n+2) = 8n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

இப்பொழுது நம்மிடம் இரண்டு வழிகள் உள்ளன. ஒன்று n என்பது ஒற்றை எண் அல்லது இரட்டை எண். இரண்டையும் சரிபார்ப்போம்.

n என்பது இரட்டை எண் எனில், m க்கு $n=2m$ என எழுதலாம்.

$$\text{மேலும், அப்பொழுது } 2n(2n+2)(2n+4) = 8n(n+1)(n+2) = 16m(2m+1)(2m+2).$$

ஆகவே, $2n(2n+2)(2n+4)$ என்பது 16 ஆல் வகுபடும்.

பிறகு, n என்பது ஓர் ஒற்றை எண் எனில் $n+1$ என்பது ஓர் இரட்டை எண். மேலும் இயல் எண் r க்கு $n+1=2r$ என எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} \text{ஆகவே, } 2n(2n+2)(2n+4) &= 8n(n+1)(n+2) \\ &= 8(2r-1) \times 2r \times (2r+1) \\ &= 16r(2r-1)(2r+1) \end{aligned}$$

எனவே, $2n(2n+2)(2n+4)$ என்பது 16 ஆல் வகுபடும்.

ஆகவே, இரண்டு வழிகளிலும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலன் 16 ஆல் வகுபடும் என நிரூபித்தோம்.

கணித வல்லுனர்கள் எவ்வாறு முடிவை கண்டறிந்தார்கள் மற்றும் எவ்வாறு நிரூபணத்தை எழுதினார்கள் என்பதற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டினை பற்றிய சில குறிப்புகளுடன் இந்த பாடத்தினை முடிக்கலாம். மேலே குறிப்பிட்டபடி, ஒவ்வொரு நிரூபணமும் ஒரு முக்கிய குறிப்பு (ஒன்றைவிட அதிகமாக) உண்டு. ஒவ்வொரு கணித வல்லுனர்களின் சிந்திக்கும் வழி மற்றும் முடிவுகளை கண்டறிதல் சுய அறிவை அடிப்படையாக கொண்டது. கணித அறிஞர்களுக்கு நிரூபணம் தானாக கிடைத்ததாகும். ஒரு கணித அறிஞர் தன்னுடைய முடிவை அல்லது சரியான நிரூபணத்தை அடைவதற்கு பல வழிகளில் சிந்திக்கவேண்டும். தர்க்க ரீதியில் யோசிக்க வேண்டும். உதாரணங்கள் பலவற்றை சிந்திக்க வேண்டும். எல்லா விவாதங்களும் ஒன்றாக சேர்ந்து ஒரு புதிய நிலை தோன்றுதலே நிரூபணம் ஆகும்.

he claimed were true. Many of these have turned out to be true and are well known theorems. However, even to this day mathematicians all over the world are struggling to prove (or disprove) some of his claims (conjectures).



Srinivasa Ramanujan
(1887–1920)
Fig. A1.5

EXERCISE A1.4

- Find counter-examples to disprove the following statements:
 - If the corresponding angles in two triangles are equal, then the triangles are congruent.
 - A quadrilateral with all sides equal is a square.
 - A quadrilateral with all angles equal is a square.
 - For integers a and b , $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
 - $2n^2 + 11$ is a prime for all whole numbers n .
 - $n^2 - n + 41$ is a prime for all positive integers n .
- Take your favourite proof and analyse it step-by-step along the lines discussed in Section A1.5 (what is given, what has been proved, what theorems and axioms have been used, and so on).
- Prove that the sum of two odd numbers is even.
- Prove that the product of two odd numbers is odd.
- Prove that the sum of three consecutive even numbers is divisible by 6.
- Prove that infinitely many points lie on the line whose equation is $y = 2x$.
(Hint : Consider the point $(n, 2n)$ for any integer n .)
- You must have had a friend who must have told you to think of a number and do various things to it, and then without knowing your original number, telling you what number you ended up with. Here are two examples. Examine why they work.
 - Choose a number. Double it. Add nine. Add your original number. Divide by three. Add four. Subtract your original number. Your result is seven.
 - Write down any three-digit number (for example, 425). Make a six-digit number by repeating these digits in the same order (425425). Your new number is divisible by 7, 11 and 13.

புகழ்பெற்ற இந்திய கணித அறிஞர் ஸ்ரீநிவாச இராமானுசரின் பல கூற்றுகள் உண்மை என கூறப்பட்டவை. அவை அவருக்கு தோன்றிய உள்ளுணர்வினாலே கூறியவை என்பதை நாம் கூற பெருமைப்படவேண்டும். அக்கூற்றுகள் அனைத்தும் உண்மை என்றும், புகழ்பெற்ற தேற்றங்கள் எனவும் மாறியவை, உலகில் உள்ள கணித அறிஞர்கள் இன்றும் அவருடைய கருத்துக்களை நிரூபிக்கவும் (அல்லது பொய் என்று நிரூபிக்கவும்) போராடி வருகிறார்கள்.



ஸ்ரீநிவாச இராமானுசம்
(1887-1920)
படம். A1.5

பயிற்சி A1.4

- பின்வரும் வாக்கியங்களை பொய் என நிரூபிக்க எதிர் உதாரணங்களை தருக.
 - இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில், அந்த முக்கோணங்கள் சர்வ சமம்.
 - எல்லா பக்கங்களும் சமமாக உள்ள நாற்கரம் ஒரு சதுரம்.
 - எல்லா கோணங்களும் சமமாக உள்ள நாற்கரம் ஒரு சதுரம்.
 - மெய்யெண்கள் a மற்றும் b க்கு $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
 - முழு எண் n அனைத்திற்கும் $2n^2 + 11$ என்பது ஒரு பகா எண் ஆகும்.
 - எல்லா மிகைமுழு n க்கும் $n^2 - n + 41$ என்பது ஒரு பகா எண் ஆகும்.
- உனக்கு விருப்பமான நிரூபணத்தைக்கொண்டு, பிரிவு A1.5 ல் கூறியுள்ள ஒவ்வொரு வரியையும் ஆய்வு செய்க. (கொடுக்கப்பட்டது எது? நிரூபிக்கவேண்டியது எது? எந்த அடிகோல்கள் மற்றும் தேற்றங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன மற்றும் பல).
- இரண்டு ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் ஒரு இரட்டை எண் என நிரூபி.
- இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு இரட்டை எண் என நிரூபி
- மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் கூடுதல் 6 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.
- $y = 2x$ என்ற சமன்பாட்டிற்கான நேர்கோட்டின் மீது எண்ணற்ற புள்ளிகள் உள்ளன. (குறிப்பு: ஏதேனும் ஒரு முழு n க்கு, $(n, 2n)$ என்ற புள்ளியை எடுத்தக்கொள்க)
- உன்னுடைய நண்பன், உன்னை ஓர் எண்ணை நினைத்துக் கொள்ளச் சொல்லி, பல செயல்களை செய்யச் சொல்லி, நீ நினைத்த எண்ணை அறியாமலே, கடைசியில் நீ பெற்ற விடையைக் கூறுவான். இங்கு இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகள் உள்ளன. அவற்றை சரிபார்.
 - ஓர் எண்ணை நினைத்துக்கொள். அதனை இருமடங்காக மாற்று. ஒன்பதை கூட்டு. நீ நினைத்த எண்ணைக் கூட்டு. மூன்றால் வகு, நான்கை கூட்டு, நீ நினைத்த எண்ணை கழி. உன்னுடைய விடை ஏழு ஆகும்.
 - ஏதேனும் மூன்று இலக்க எண்ணை எழுது. (எடுத்துக்காட்டாக, 425). அதே எண்ணை இரண்டு முறை எழுதி, ஆறு இலக்க எண்ணாக மாற்று(425425). உன்னுடைய புதியஎண்7,11 மற்றும் 13 ஆல் வகுபடும்.

A1.6 Summary

In this Appendix, you have studied the following points:

1. In mathematics, a statement is only acceptable if it is either always true or always false.
2. To show that a mathematical statement is false, it is enough to find a single counter-example.
3. Axioms are statements which are assumed to be true without proof.
4. A conjecture is a statement we believe is true based on our mathematical intuition, but which we are yet to prove.
5. A mathematical statement whose truth has been established (or proved) is called a theorem.
6. The main logical tool in proving mathematical statements is deductive reasoning.
7. A proof is made up of a successive sequence of mathematical statements. Each statement in a proof is logically deduced from a previously known statement, or from a theorem proved earlier, or an axiom, or the hypothesis.

A1.6 தொகுப்பு

இந்த பின்இணைப்பில் நாம் பின்வரும் கருத்துக்களை படித்துள்ளோம்.

1. கணிதத்தில் வாக்கியம் அல்லது கூற்று என்பது எப்பொழுதும் உண்மை அல்லது எப்பொழுதும் பொய்யாக இருந்தால் மட்டுமே ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.
2. கணித வாக்கியம் என்பது பொய் என நிரூபிக்க ஒரே ஒரு எதிர் உதாரணம் போதும்.
3. அடிகோள்கள் என்பவை எவ்வித நிரூபணமின்றி உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட கூற்றுகள்.
4. கருதுகோள்கள் என்பவை நமது உள்ளுணர்வினால் உண்மை என்று நம்பப்பட்ட இன்னும் நிரூபிக்கப்படாத வாக்கியங்கள்.
5. உண்மை என்று நிரூபிக்கப்பட்ட கணித வாக்கியமே தேற்றம் எனப்படும். உண்மை நிரூபிக்கப்படுவதே தேற்றம்.
6. கணித வாக்கியத்தை நிரூபிக்க உதவும் தர்க்கமுறை துப்பறியும் பகுத்தறிவு.
7. தொடர்ச்சியான கணித கூற்றுகளைக் கொண்டே நிரூபணம் அமைகிறது. நிரூபணத்தின் ஒவ்வொரு வாக்கியமும் முன்பே அறிந்த வாக்கியங்களிலிருந்து, முன்பே நிரூபிக்கப்பட்ட தேற்றங்களிலிருந்து அல்லது அடிகோள்கள் அல்லது கருதுகோள்களிலிருந்து எழுதப்பட்டது.

ANSWERS/HINTS

EXERCISE 1.1

1. Yes. $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ etc., denominator q can also be taken as negative integer.
2. There can be infinitely many rationals between numbers 3 and 4, one way is to take them
 $3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$. Then the six numbers are $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$.
3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$. Therefore, five rationals are : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$
4. (i) True, since the collection of whole numbers contains all the natural numbers.
 (ii) False, for example -2 is not a whole number.
 (iii) False, for example $\frac{1}{2}$ is a rational number but not a whole number.

EXERCISE 1.2

1. (i) True, since collection of real numbers is made up of rational and irrational numbers.
 (ii) False, no negative number can be the square root of any natural number.
 (iii) False, for example 2 is real but not irrational.
2. No. For example, $\sqrt{4} = 2$ is a rational number.
3. Repeat the procedure as in Fig. 1.8 several times. First obtain $\sqrt{4}$ and then $\sqrt{5}$.

விடைகள் / குறிப்புகள்

பயிற்சி 1.1

1. ஆம். $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ மேலும் பல. பகுதி q ஐ எதிர்குறை முழுஎண்ணாக கொள்ளலாம்.
2. 3 மற்றும் 4 க்கு இடையே முடிவிலா விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.
 $3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$ எனில் 6 எண்கள் $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$.
3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$. ஐந்து விகிதமுறு எண்கள் : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$
4. (i) சரி. ஏனெனில் முழுஎண்களின் சேர்ப்பு என்பது இயல்எண்களை கொண்டிருக்கும்.
(ii) தவறு. எடுத்துக்காட்டாக -2 என்பது ஒரு முழுஎண் அல்ல.
(iii) தவறு. எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் ஆனால் முழு எண் அல்ல.

பயிற்சி 1.2

1. (i) சரி. விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தொகுப்பே மெய்யெண்கள்.
(ii) தவறு. எந்தவொரு இயல் எண்ணின் விகிதமுறுவர்க்கமூலம் எதிர் எண்ணாக இருக்காது.
(iii) தவறு. 2 என்பது மெய்யெண் ஆனால் விகிதமுறா எண் அல்ல.
2. தவறு. எடுத்துக்காட்டாக $\sqrt{4} = 2$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்.
3. படம் 1.8 ல் கொடுக்கப்பட்ட முறையில் மீண்டும் மீண்டும் செய்தால் முதலில் $\sqrt{4}$ பின்பு $\sqrt{5}$ கிடைக்கும்.

EXERCISE 1.3

1. (i) 0.36, terminating. (ii) $0.\overline{09}$, non-terminating repeating.
 (iii) 4.125, terminating. (iv) $0.\overline{230769}$, non-terminating repeating.
 (v) $0.\overline{18}$ non-terminating repeating. (vi) 0.8225 terminating.
2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$,
 $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$
3. (i) $\frac{2}{3}$ [Let $x = 0.666 \dots$. So $10x = 6.666 \dots$ or, $10x = 6 + x$ or, $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]
 (ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$
4. 1 [Let $x = 0.9999 \dots$. So $10x = 9.999 \dots$ or, $10x = 9 + x$ or, $x = 1$]
5. $0.\overline{0588235294117647}$
6. The prime factorisation of q has only powers of 2 or powers of 5 or both.
7. 0.01001000100001... , 0.202002000200002... , 0.003000300003... .
8. 0.75075007500075000075... , 0.767076700767000767... , 0.808008000800008... .
9. (i) and (v) irrational; (ii), (iii) and (iv) rational.

EXERCISE 1.4

1. (i) Irrational (ii) Rational (iii) Rational (iv) Irrational
 (v) Irrational
2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3
3. There is no contradiction. Remember that when you measure a length with a scale or any other device, you only get an approximate rational value. So, you may not realise that either c or d is irrational.
4. Refer Fig. 1.17.
5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

பயிற்சி 1.3

- (i) 0.36 முடிவறு தசம எண் (ii) $0.\overline{09}$, முடிவறா சுழல் தசம எண்
(iii) 4.125, முடிவறு தசம எண் (iv) $0.\overline{230769}$, முடிவறா சுழல் தசம எண்
(v) $0.\overline{18}$ முடிவறா சுழல் தசம எண் (vi) 0.8225 முடிவறு தசம எண்
- $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$,
 $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$
- (i) $\frac{2}{3} [x = 0.666. . \text{ என்க. ஆகவே } 10x = 6.666. . \text{ அல்லது } 10x = 6 + x \text{ அல்லது } x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}]$
(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$
- 1 $[x = 0.9999. . \text{ என்க. ஆகவே } 10x = 9.999. . \text{ அல்லது } 10x = 9 + x \text{ அல்லது } x = 1]$
- $0.\overline{0588235294117647}$
- q ன் பகா காரணிகள் இரண்டின் அடுக்குகளிலோ அல்லது 5 ன் அடுக்குகளிலோ அல்லது இரண்டிலுமோ இருக்கும்.
- $0.01001000100001. . .$, $0.202002000200002. . .$, $0.003000300003. . .$
- $0.75075007500075000075. . .$, $0.767076700767000767. . .$, $0.808008000800008. . .$
- (i) மற்றும் (v) விகிதமுறா (ii), (iii) மற்றும் (iv) விகிதமுறு

பயிற்சி 1.4

- (i) விகிதமுறா எண் (ii) விகிதமுறு எண் (iii) விகிதமுறு எண்
(iv) விகிதமுறா எண் (v) விகிதமுறா எண்
- (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3
- எந்தவித முரண்பாடும் கிடையாது. நீங்கள் நீளத்தை அளவுகோல் அல்லது வேறு ஏதேனும் கருவியை பயன்படுத்தி அளந்தால் உங்களுக்கே தோராயமான விகிதமுறு எண் கிடைக்கும். ஆகவே c அல்லது d விகிதமுறு எண் எனக்கூற முடியும்.
- படம் 1.17 ஐ ஒப்பிடுக.

- (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

EXERCISE 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 52. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5} \left[(125)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1} \right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

4. D

5. D

EXERCISE 2.1

1. (i) and (ii) are polynomials in one variable, (v) is a polynomial in three variables,

(iii), (iv) are not polynomials, because in each of these exponent of the variable is not a whole number.

2. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (You can write some more polynomials with different coefficients.)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) quadratic (ii) cubic (iii) quadratic (iv) linear

(v) linear (vi) quadratic (vii) cubic

6. B

EXERCISE 2.2

1. (i) 3 (ii) -6 (iii) -3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3

3. (i) Yes (ii) No (iii) Yes (iv) Yes

(v) Yes (vi) Yes

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ is a zero, but $\frac{2}{\sqrt{3}}$ is not a zero of the polynomial (viii) No

4. (i) -5 (ii) 5 (iii) $-\frac{5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

பயிற்சி 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 52. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5} \left[(125)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1} \right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

4. D 5. D

பயிற்சி 2.1

1. (i) மற்றும் (ii) ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (v) 3 மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(iii), (iv) பல்லுறுப்புக்கோவைகள் அல்ல. ஏனெனில் மாறியின் அடுக்கு முழுஎண் அல்ல.

2. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4; \sqrt{2}y^{100}$ (மேலும் பல பல்லுறுப்பு கோவைகளை மாறுபட்ட குணகங்கள் கொண்டு எழுதலாம்)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) இருபடி (ii) மூப்படி (iii) இருபடி (iv) ஒருபடி
(v) ஒருபடி (vi) இருபடி (vii) மூப்படி

6. B

பயிற்சி 2.2

1. (i) 3 (ii) -6 (iii) -3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3

3. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) ஆம் (iv) ஆம்
(v) ஆம் (vi) ஆம்

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ என்பது பூஜ்ஜியம் ஆனால் $\frac{2}{\sqrt{3}}$ என்பது பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியம் அல்ல.

(viii) இல்லை

4. (i) -5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

EXERCISE 2.3

- $(x + 1)$ is a factor of (i), but not the factor of (ii), (iii) and (iv).
- (i) Yes (ii) No (iii) Yes
- (i) -2 (ii) $-(2 + \sqrt{2})$ (iii) $\sqrt{2} - 1$ (iv) $\frac{3}{2}$
- (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$
- (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$
(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

EXERCISE 2.4

- (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$
(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$
- (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984
- (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$
- (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$
(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$
(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$
(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$
(vi) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$
- (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$
- (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$
(iii) $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

பயிற்சி 2.3

1. $(x + 1)$ என்பது (i) ன் காரணி. (ii), (iii) மற்றும் (iv) ன் காரணி அல்ல
2. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) ஆம்
3. (i) -2 (ii) $-(2 + \sqrt{2})$ (iii) $\sqrt{2} - 1$ (iv) $\frac{3}{2}$
4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$
5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$
(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

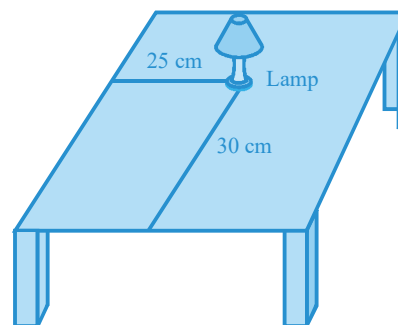
பயிற்சி 2.4

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$
(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$
2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984
3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$
4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$
(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$
(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$
(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$
(vi) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$
5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$
6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$
(iii) $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992
8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$
- (iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$ (iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$
- (v) $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$
10. (i) $(3y + 5z)(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$ (ii) $(4m - 7n)(16m^2 + 49n^2 + 28mn)$
11. $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$
12. Simplify RHS.
13. Put $x + y + z = 0$ in Identity VIII.
14. (i) -1260. Let $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$. Here $a + b + c = 0$. Use the result given in Q13.
- (ii) 16380
15. (i) One possible answer is : Length = $5a - 3$, Breadth = $5a - 4$
- (ii) One possible answer is : Length = $7y - 3$, Breadth = $5y + 4$
16. (i) One possible answer is : 3, x and $x - 4$.
- (ii) One possible answer is : $4k$, $3y + 5$ and $y - 1$.
17. x , $x+2$ and $x+2$

EXERCISE 3.1

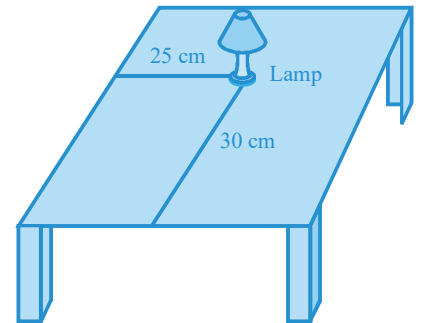
1. Consider the lamp as a point and table as a plane. Choose any two perpendicular edges of the table. Measure the distance of the lamp from the longer edge, suppose it is 25 cm. Again, measure the distance of the lamp from the shorter edge, and suppose it is 30 cm. You can write the position of the lamp as (30, 25) or (25, 30), depending on the order you fix.



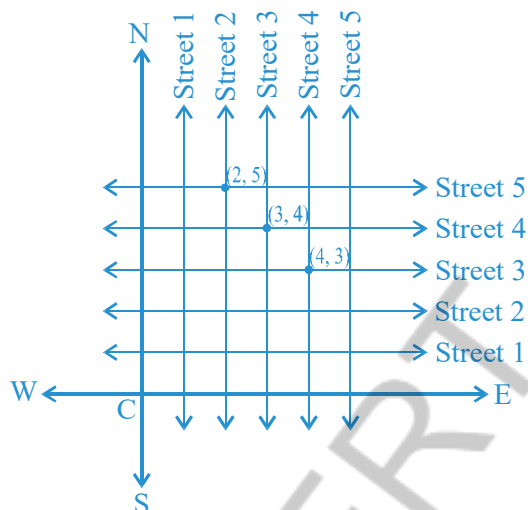
7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992
8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$
- (iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$ (iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$
- (v) $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$
10. (i) $(3y + 5z)(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$ (ii) $(4m - 7n)(16m^2 + 49n^2 + 28mn)$
11. $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$
12. RHS ஐ சுருக்குக.
13. முற்றொருமை VIII ல் $x + y + z = 0$ என பிரதியிடுக.
14. (i) -1260 , $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$ என்க. இங்கு $a + b + c = 0$. வினா 13 ல் உள்ள விடையை உபயோகி.
- (ii) 16380
15. (i) ஒரு சாத்தியமான விடை, நீளம் $= 5a - 3$, அகலம் $= 5a - 4$
- (ii) ஒரு சாத்தியமான விடை, நீளம் $= 7y - 3$, அகலம் $= 5y + 4$
16. (i) ஒரு சாத்தியமான விடை, 3, x மற்றும் $x - 4$.
- (ii) ஒரு சாத்தியமான விடை, $4k$, $3y + 5$ மற்றும் $y - 1$.
17. x , $x+2$ and $x+2$

பயிற்சி 3.1

1. மேசையை தளம் என்று கருதி, விளக்கை புள்ளி என்றும் கொள்க. மேசையின் இரு செங்குத்து முனைகளை எடுத்துக்கொள்க. நீளமான முனையிலிருந்து விளக்கு உள்ள தூரத்தை அளக்கவும். அது 25 செ.மீ. என்க. மீண்டும் குறைவான நீளம் உள்ள முனையிலிருந்து விளக்கு உள்ள தூரத்தை 30 செ.மீ. என்க. விளக்கின் இடத்தை (30,25) அல்லது (25,30) என நீங்கள் எடுத்தக்கொண்ட வரிசையில் எழுதலாம்.



2. The Street plan is shown in figure given below.



Both the cross-streets are marked in the figure above. They are *uniquely* found because of the two reference lines we have used for locating them.

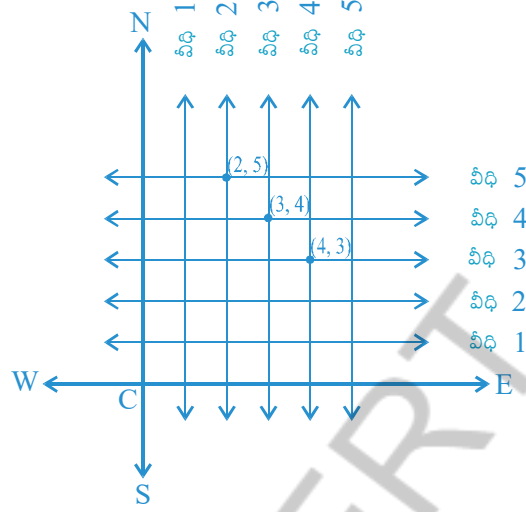
EXERCISE 3.2

- (i) The x - axis and the y - axis (ii) Quadrants (iii) The origin
- (i) $(-5, 2)$ (ii) $(5, -5)$ (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) -3 (vii) $(0, 5)$ (viii) $(-3, 0)$
- (B)

EXERCISE 4.1

- $x - 2y = 0$
- $2x + 3y - 9.35 = 0; a = 2, b = 3, c = -9.35$
 - $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$
 - $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$
 - $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$
 - $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$
 - $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$
 - $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$
 - $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

2. தெருவின் அமைப்பு கீழ்க்கண்டவாறு உள்ளது.



இரண்டு குறுக்குத் தெருக்களும் (cross-streets) படத்திலுள்ளவாறு குறிப்பிடப் பட்டுள்ளன. இவை தனித்து காணப்படுகின்றன. ஏனெனில் அவற்றை குறிப்பிட இரண்டு கோடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

பயிற்சி 3.2

- (i) x - அச்ச மற்றும் y - அச்ச (ii) கால் பகுதிகள் (iii) ஆதிப்புள்ளி
- (i) $(-5, 2)$ (ii) $(5, -5)$ (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) -3 (vii) $(0, 5)$ (viii) $(-3, 0)$
- (B)

பயிற்சி 4.1

- $x - 2y = 0$
- $2x + 3y - 9.35 = 0; a = 2, b = 3, c = -9.35$
 - $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$
 - $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$
 - $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$
 - $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$
 - $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$
 - $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$
 - $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

EXERCISE 4.2

1. (iii), because for every value of x , there is a corresponding value of y and vice-versa.
2. (i) $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, -1)$
 (ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$
 (iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$
3. (i) No (ii) No (iii) Yes (iv) No (v) No
4. 7

EXERCISE 5.1

1. (i) False. This can be seen visually by the student.
 (ii) False. This contradicts Axiom 5.1.
 (iii) True. (Postulate 2)
 (iv) True. If you superimpose the region bounded by one circle on the other, then they coincide. So, their centres and boundaries coincide. Therefore, their radii will coincide.
 (v) True. The first axiom of Euclid.
3. There are several undefined terms which the student should list. They are consistent, because they deal with two different situations - (i) says that given two points A and B, there is a point C lying on the line in between them; (ii) says that given A and B, you can take C not lying on the line through A and B.

These 'postulates' do not follow from Euclid's postulates. However, they follow from Axiom 5.1.

4. $AC = BC$
 So, $AC + AC = BC + AC$ (Equals are added to equals)
 i.e., $2AC = AB$ (BC + AC coincides with AB)
 Therefore, $AC = \frac{1}{2} AB$
5. Make a temporary assumption that different points C and D are two mid-points of AB. Now, you show that points C and D are not two different points.
6. $AC = BD$ (Given) (1)
 $AC = AB + BC$ (Point B lies between A and C) (2)
 $BD = BC + CD$ (Point C lies between B and D) (3)

பயிற்சி 4.2

1. (iii) ஏனெனில் x ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் தொடர்புடைய y ன் மதிப்பு உண்டு. அதே போல் y ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் தொடர்புடைய x ன் மதிப்பு உண்டு.
2. (i) $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, -1)$
 (ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$
 (iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$
3. (i) இல்லை (ii) இல்லை (iii) ஆம் (iv) இல்லை (v) இல்லை
4. 7

பயிற்சி 5.1

1. (i) மெய்யல்ல. மாணவர்களால் கண்ணால் பார்க்க முடியும்.
 (ii) மெய்யல்ல. அடிகோள் 5.1 க்கு முரண்பாடானது.
 (iii) மெய். (எடுகோள் 2)
 (iv) மெய். இரண்டு வட்டங்களால் சூழப்பட்ட பகுதியை ஒன்றின் மீது ஒன்று வைத்தால் அவை ஒன்றோடு ஒன்று பொருந்தும். ஆகவே அவற்றின் மையங்கள் மற்றும் சுற்றுபகுதி பொருந்தும். ஆகவே அவற்றின் ஆரங்கள் பொருந்தும்.
 (v) மெய். யூக்ளிடின் முதல் அடிகோள்.
3. மாணவர்களால் உருவாக்கப்பட்ட பட்டியில் வரையறுக்கப்படாத பல உறுப்புகள் உள்ளன. அவை நிலையானவை. ஏனெனில் அவை இரண்டு வெவ்வேறு சூழ்நிலைகளை கொண்டுள்ளது. (i) புள்ளி C ஆனது கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள் A மற்றும் B க்கு இடையில் அமையும் எனக்கூறுகிறது. (ii) புள்ளி C ஆனது கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள் A மற்றும் B க்கு இடையில் அமையாது எனக்கூறுகிறது.
 இந்த எடுகோளானது யூக்ளிடின் எடுகோள் 5.1 ஐ பின்பற்றுகிறது.
4. $AC = BC$
 ஆகவே $AC + AC = BC + AC$ (சமமானவை சமமானவற்றுடன் கூட்டப்பட்டுள்ளது)
 எனவே $2AC = AB$ ($BC + AC = AB$ என பொருந்துகிறது)
 ஆகவே, $AC = \frac{1}{2} AB$
5. C மற்றும் D என்பவை AB ன் இரண்டு வெவ்வேறு மையப்புள்ளிகள் எனும் தற்காலிக கணிப்பை கொள்க. C மற்றும் D என்பவை வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல எனக்காட்டுக.
6. $AC = BD$ (கொடுக்கப்பட்டது) (1)
 $AC = AB + BC$ (B புள்ளி A மற்றும் C க்கு இடையில் அமையும்) (2)
 $BD = BC + CD$ (C புள்ளி B மற்றும் D க்கு இடையில் அமையும்) (3)

Substituting (2) and (3) in (1), you get

$$AB + BC = BC + CD$$

So, $AB = CD$ (Subtracting equals from equals)

7. Since this is true for any thing in any part of the world, this is a universal truth.

EXERCISE 6.1

1. $30^\circ, 250^\circ$ 2. 126° 4. Sum of all the angles at a point = 360°
 5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ and $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. 6. $122^\circ, 302^\circ$

EXERCISE 6.2

1. 126° 2. $126^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ 3. 60° 4. $50^\circ, 77^\circ$
 5. Angle of incidence = Angle of reflection. At point B, draw $BE \perp PQ$ and at point C, draw $CF \perp RS$.
 6. A 7. B

EXERCISE A1.1

1. (i) False. There are 12 months in a year.
 (ii) Ambiguous. In a given year, Diwali may or may not fall on a Friday.
 (iii) Ambiguous. At some time in the year, the temperature in Magadi, may be 26°C .
 (iv) Always true.
 (v) False. Dogs cannot fly.
 (vi) Ambiguous. In a leap year, February has 29 days.
 2. (i) False. The sum of the interior angles of a quadrilateral is 360° .
 (ii) True (iii) True (iv) True
 (v) False, for example, $7 + 5 = 12$, which is not an odd number.
 3. (i) All prime numbers greater than 2 are odd.
 (ii) Two times a natural number is always even. (iii) For any $x > 1$, $3x + 1 > 4$.
 (iv) For any $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$.
 (v) In an equilateral triangle, a median is also an angle bisector.

(2) மற்றும் (3) ஆகியவற்றை (1) ல் பிரதியிட்டால்,

$$AB + BC = BC + CD$$

எனவே, $AB = CD$ (சமமானவை சமமானவற்றிலிருந்து கழித்தல்)

7. ஏனெனில் உலகில் எந்த பகுதியிலும் எல்லாவற்றிற்கும் இது உண்மை. இது அண்டத்திற்கே உண்மை.

பயிற்சி 6.1

1. $30^\circ, 250^\circ$ 2. 126° 4. ஒரு புள்ளியில் எல்லா கோணங்களின் கூடுதல் $= 360^\circ$
5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ மற்றும் $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. 6. $122^\circ, 302^\circ$

பயிற்சி 6.2

1. 126° 2. $126^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ 3. 60° 4. $50^\circ, 77^\circ$
5. படுகோணம் = விலகு கோணம். புள்ளி B ல் $BE \perp PQ$ உள்ளவாறு BE ஐ மேலும் புள்ளி C ல் $CF \perp RS$ உள்ளவாறு CF ஐயும் வரைக.
6. A 7. B

பயிற்சி A1.1

1. (i) பொய், ஒரு வருடத்திற்கு 12 மாதங்கள்
(ii) தெளிவற்றது: கொடுக்கப்பட்ட வருடத்தில் தீபாவளி வரலாம். வராமல் போகலாம்.
(iii) தெளிவற்றது: வருடத்தில்; சில சமயங்களில் மாகடியின் வெப்பநிலை $26^\circ C$ ஆக இருக்கலாம்.
(iv) எப்பொழுதும் உண்மை.
(v) பொய். நாய்களால் பறக்க முடியாது.
(vi) தெளிவற்றது: லீப் வருடத்தில் பிப்ரவரி மாதத்தில் 29 நாட்கள் இருக்கும்.
2. (i) பொய். நாற்கரத்தின் உள்கோணங்களின் கூடுதல் 360° .
(ii) உண்மை (iii) உண்மை (iv) உண்மை
(v) பொய். எடுத்துக்காட்டாக $7 + 5 = 12$ என்பது ஒற்றைபடை எண் அல்ல
3. (i) 2 ஐ விட பெரிய அனைத்து பகா எண்களும் ஒற்றைபடை எண்கள்.
(ii) ஓர் இயல் எண்ணின் இருமடங்கு எப்பொழுதும் இரட்டைபடை எண்.
(iii) $x > 1$ எனில் x ன் எந்த மதிப்பிற்கும் $3x + 1 > 4$ ஆகும்.
(iv) $x \geq 0$ எனில் x ன் எந்த மதிப்பிற்கும் $x^3 \geq 0$ ஆகும்.
(v) சமபக்க முக்கோணத்தின் நடுக்கோடு எப்பொழுதும் கோணங்களின் இருசமவெட்டி.

EXERCISE A1.2

- (i) Humans are vertebrates. (ii) No. Dinesh could have got his hair cut by anybody else. (iii) Gulag has a red tongue. (iv) We conclude that the gutters will have to be cleaned tomorrow. (v) All animals having tails need not be dogs. For example, animals such as buffaloes, monkeys, cats, etc. have tails but are not dogs.
- You need to turn over B and 8. If B has an even number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if 8 has a consonant on the other side, then the rule has been broken.

EXERCISE A1.3

- Three possible conjectures are:
 - The product of any three consecutive even numbers is even.
 - The product of any three consecutive even numbers is divisible by 4.
 - The product of any three consecutive even numbers is divisible by 6.
- Line 4: $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; Line 5: $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$; the conjecture holds for Line 4 and Line 5; No, because $11^5 \neq 15101051$.
- $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.
- $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$
- Student's own answer. For example, Euclid's postulates.

EXERCISE A1.4

- You can give any two triangles with the same angles but of different sides.
 - A rhombus has equal sides but may not be a square.
 - A rectangle has equal angles but may not be a square.
 - For $a = 3$ and $b = 4$, the statement is not true.
 - For $n = 11$, $2n^2 + 11 = 253$ which is not a prime.
 - For $n = 41$, $n^2 - n + 41$ is not a prime.
- Student's own answer.
- Let x and y be two odd numbers. Then $x = 2m + 1$ for some natural number m and $y = 2n + 1$ for some natural number n .
 $x + y = 2(m + n + 1)$. Therefore, $x + y$ is divisible by 2 and is even.
- See Q.3. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.
 Therefore, xy is not divisible by 2, and so it is odd.

பயிற்சி A1.2

- (i) மனிதர்கள் பாலூட்டிகள் (ii) இல்லை. தினைஷ் யாரிடம் வேண்டுமானாலும் முடியை திருத்திக் கொள்ளலாம் (iii) குலாக் சிவப்புநிற நாகைகை கொண்டிருக்கும் (iv) வடிகால்கள் நாளை சுத்தம் செய்யப்படும் என்ற முடிவிற்கு வரலாம் (v) வாலைக் கொண்டுள்ள எல்லா மிருகங்களும் நாயாக இருக்க வேண்டியதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக எருது, குரங்கு, பூனை போன்றவை வாலை கொண்டிருந்தாலும் அவைகள் நாய்கள் அல்ல.
- நீங்கள் B மற்றும் 8 அட்டைகளை திருப்ப வேண்டும். B யின் மறுபக்கம் இரட்டைப்படை எண் இருந்தால் விதி தவறாகும். அதே போல் 8 ன் மறுபக்கம் மெய்யெழுத்து இருந்தால் விதி தவறாகும்.

பயிற்சி A1.3

- மூன்று அனுமானங்கள் உள்ளன.
 - ஏதேனும் 3 அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஓர் இரட்டை
 - ஏதேனும் 3 அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலன் 4 ஆல் வகுபடும்.
 - ஏதேனும் 3 அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலன் 6 ஆல் வகுபடும்.
- 4வது வரிசை : 1 3 3 1 = 11^3 ; 5வது வரிசை : 1 4 6 4 1 = 11^4 ; அனுமானம் 4வது வரிசை மற்றும் 5வது வரிசைக்கு பொருந்தும். ஏனெனில் $11^5 \neq 15101051$
- $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.
- $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$
- மாணாக்கர்களின் சுய விடைகள். எடுத்துக்காட்டாக யூக்ளிடின் எடுகோள்கள்.

பயிற்சி A1.4

- (i) சமமான பக்கங்கள் மற்றும் மாறுபட்ட பக்கங்கள் உள்ள ஏதேனும் இரண்டு முக்கோணங்கள்
 - சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் சமம். ஆனால் அது சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
 - செவ்வகத்தின் கோணங்கள் சமம். ஆனால் சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
 - $a = 3$ மற்றும் $b = 4$ என்ற மதிப்பிற்கு கூற்று உண்மையல்ல.
 - $n = 11$ எனில் $2n^2 + 11 = 253$ என்பது பகா எண் அல்ல.
 - $n = 41$ எனில் $n^2 - n + 41$ என்பது பகா எண் அல்ல.
- மாணவர்களின் சுய பதில்.
- x மற்றும் y என்பவை இரண்டு ஒற்றை படை எண்கள் என்க. $x = 2m + 1$. m என்பது ஒரு இயல் எண். $y = 2n + 1$ n என்பது ஒரு இயல் எண்.
 $x + y = 2(m + n + 1)$. $x + y$ என்பது 2 ஆல் வகுபடும் மற்றும் ஓர் இரட்டைப்படை எண்.
- வினா எண் 3 ஐ பார்க்கவும். $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.
 xy என்பது '2' ஆல் வகுபடாது. ஆகவே ஒற்றைப்படை எண்.

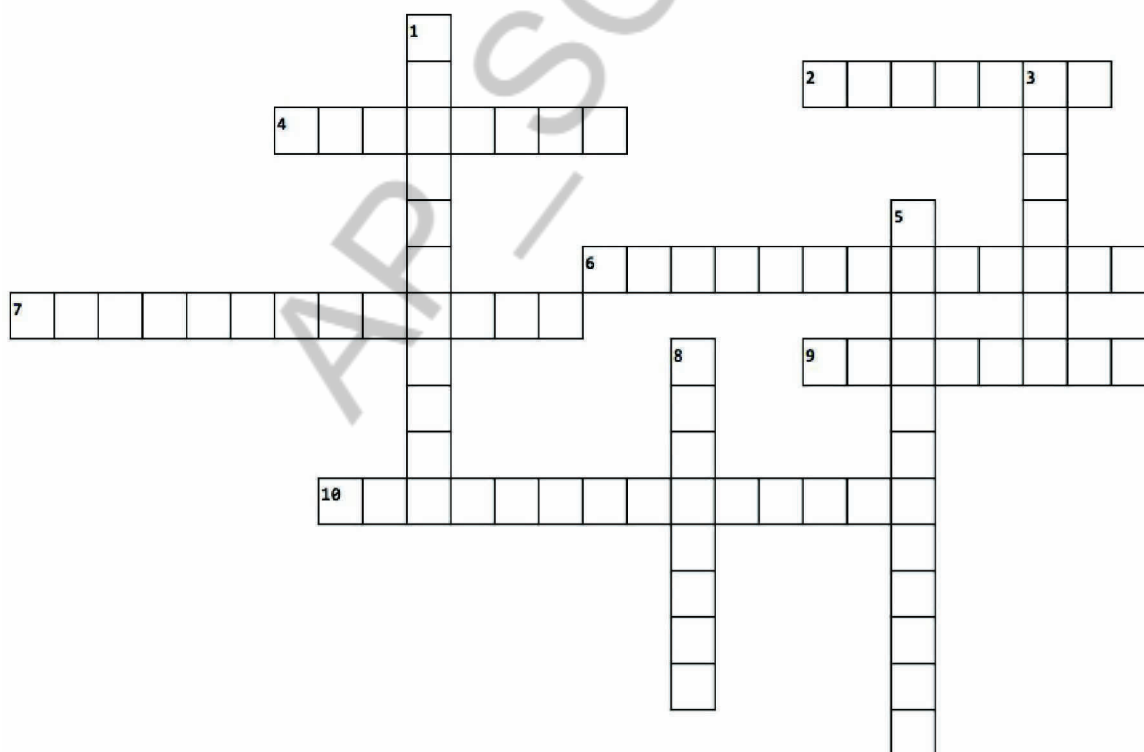
5. Let $2n$, $2n + 2$ and $2n + 4$ be three consecutive even numbers. Then their sum is $6(n + 1)$, which is divisible by 6.

7. (i) Let your original number be n . Then we are doing the following operations:

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n + 3 \rightarrow n + 3 + 4 = n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7.$$

(ii) Note that $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Take any three digit number say, abc . Then $abc \times 1001 = abcabc$. Therefore, the six digit number $abcabc$ is divisible by 7, 11 and 13.

Cross word puzzle



5. $2n, 2n+2$ மற்றும் $2n+4$ என்பவை மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்கள் என்க. அவற்றின் கூடுதல் $6(n+1)$ என்பது '6' ஆல் வகுபடும்.
7. (i) உங்களுடைய உண்மை எண் n என்க. பிறகு கீழ்க்கண்ட செயல்களை செய்யலாம்.

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow 2n+9+n=3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n+3 \rightarrow n+3+4 = n+7 \rightarrow n+7-n = 7.$$

- (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ என்பதை கவனி. ஏதேனும் 3 இலக்க எண் abc எடுத்துக் கொள்க. $abc \times 1001 = abcabc$ ஆகவே '6' இலக்க எண் $abcabc$ ஆனது 7, 11 மற்றும் 13 ஆல் வகுபடும்.

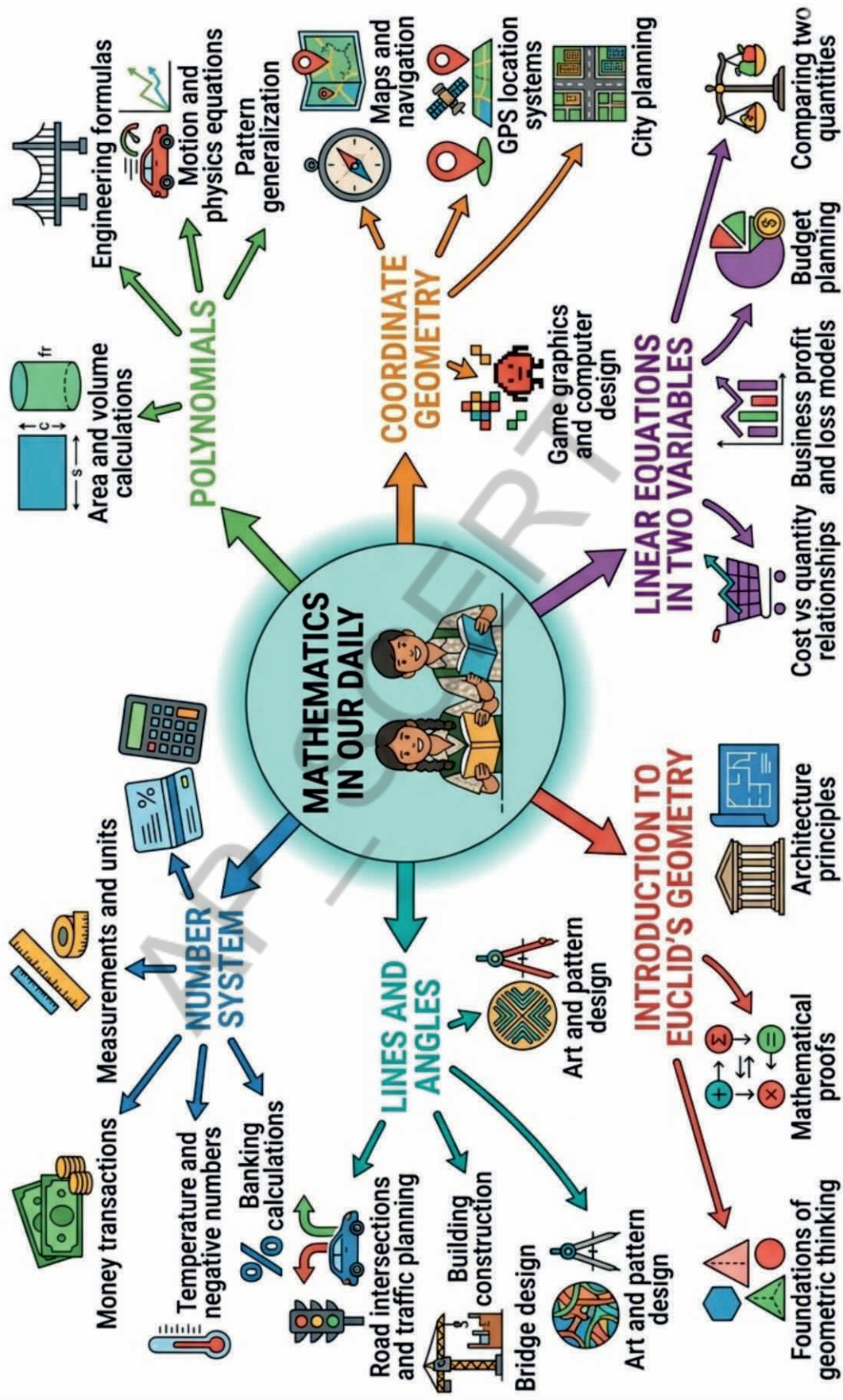
Across

2. polygons having equal sides and angles(7)
4. simple closed polygon made up of three sides(8)
6. pair of angles which their sum of measures of angles is 90 degrees(13)
7. distance around a circular region of a circle(13)
9. numbers include positive,negative and zero(8)
10. the operation 'of'represents(14)

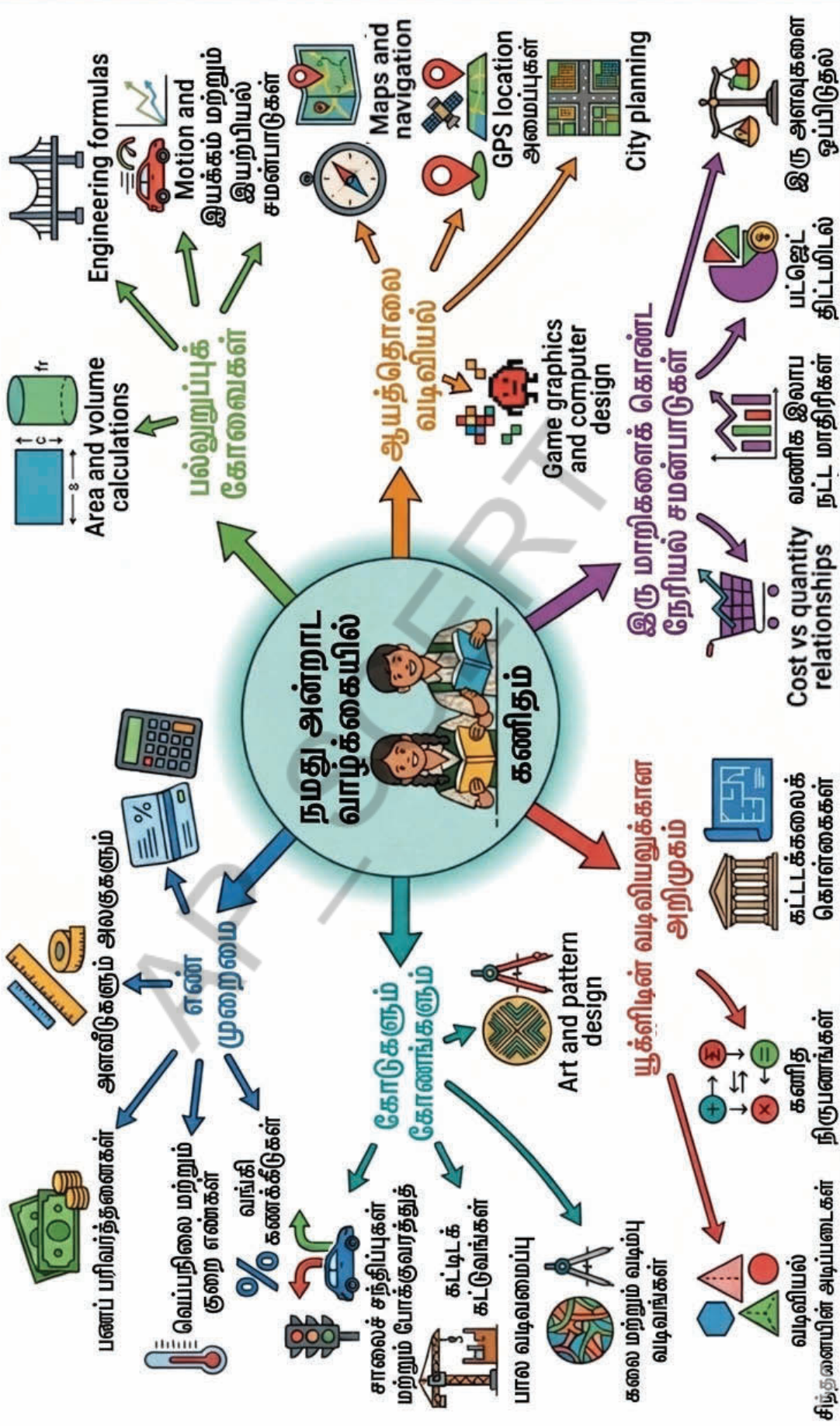
Down

1. a line that intersects 2 or 3 lines at distinct points(11)
3. another name to arithmetic mean(7)
5. LHS(12)
8. part of a whole(8)

MATHEMATICS IN OUR DAILY LIFE – CLASS 9 CONNECTIONS



நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் கணிதம் – 9-ஆம் வகுப்புத் தொடர்புகள்





FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

- (a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;
- (b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;
- (c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;
- (d) to defend the country and render national service when called upon to do so;
- (e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;
- (f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;
- (g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;
- (h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;
- (i) to safeguard public property and to abjure violence.
- (j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;
- (k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- **Constitution of India,**
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expelled from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.