MATHEMATICS

Textbook for Class X

Semester - 1

ENGLISH - TAMIL VERSION

EZX9W3

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2023

New Impression - 2024, 2025, 2026

DISCLAIMER

Any form of copying of the content, information and illustrations from this textbook is a punishable offence.

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser. The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 GSM, SS Maplitho. Title Page 220 GSM and White Art Card.

Published by Samagra Shiksha & SCERT - Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

AP SCERT

Vande Mataram

Vande Mataram!
Sujalam, suphalam, malayaja shitalam,
Shasyashyamalam, Mataram!
Vande Mataram!
Shubhrajyotsna pulakitayaminim,
Phullakusumita drumadala shobhinim,
Suhasinim sumadhura bhashinim,
Sukhadam varadam, Mataram!
Vande Mataram, Vande Mataram!

- Bankimchandra Chatterji

வந்தே மாதரம்

வந்தே மாதரம்!
சுஜலாம் சுபலாம் மலயஜ சீதலாம்
சஸ்யஷ்யாமலாம், மாதரம்!
வந்தே மாதரம்!
ஷுப்ரஜ்யோத்ஸ்னா புலகிதயாமினீம்,
புல்லகுசுமித த்ருமதல ஷோபினீம்
சுஹாஸினிம் சுமதரபாஷிணீம்
சுகதாம் வரதாம், மாதரம்!
வந்தே மாதரம்! வந்தே மாதரம்!

- பங்கிம் சந்திர சாட்டர்ஜி

APSCERT

Printed in India
at the A.P. Govt., Textbook Press,
Amaravati, Andhra Pradesh.

Our National Anthem | தேசிய கீதம்

Jana-gana-mana-adhinayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata
Panjaba-Sindhu-Gujarata-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
uchchala-jaladhi-taranga
Tava Subha name jage,
tava subha asisa mage,
gahe tava jaya-gatha.
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

- Rabindranath Tagore

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப ஸிந்த் குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே, தவ சுப ஆசிஸ
மாகே,
காஹே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே ஜய ஹே ஜய ஹே
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

` இரபிந்திரநாத்தாகூர்

AP SCERT

Pledge | உறுதிமொழி

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

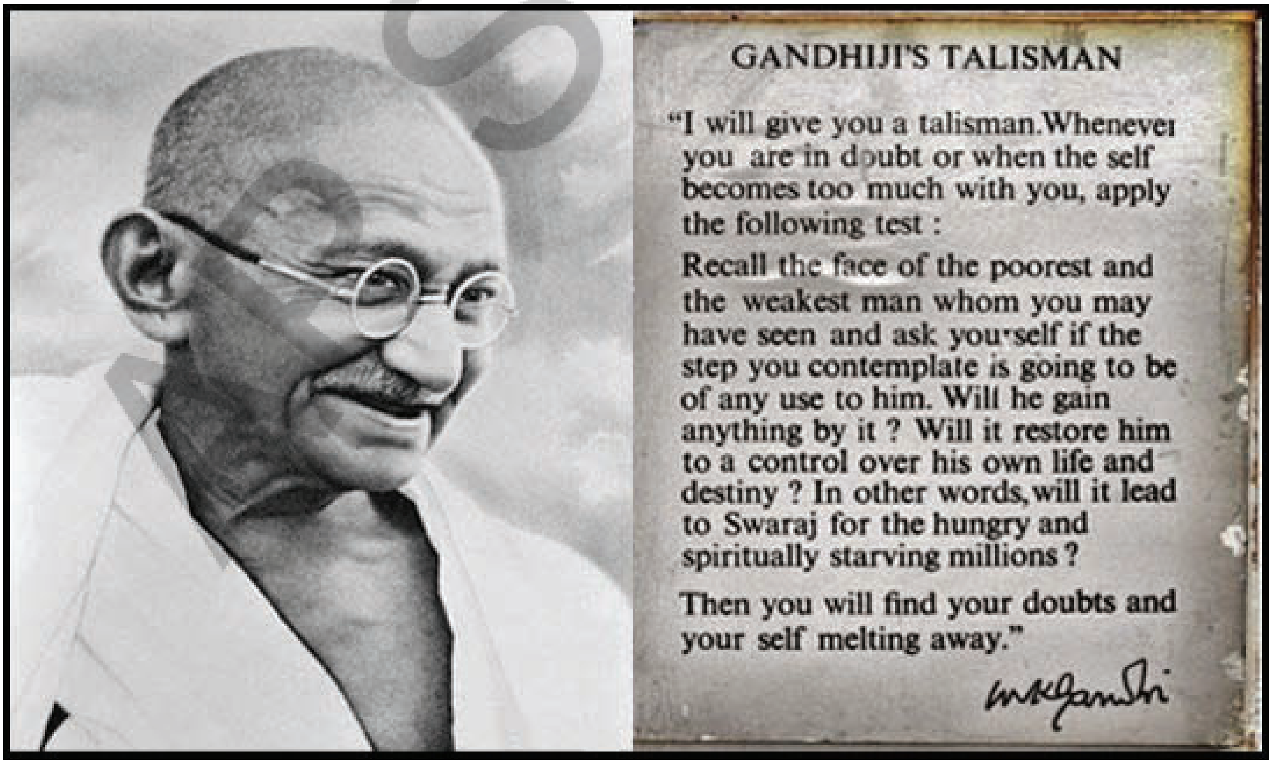
- Pydimarri Venkata Subba Rao

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறப்புகள்.!என் நாட்டை நான் பெரிதும் நேசிக்கிறேன். இந்நாட்டின் பழம் பெருமைக்காகவும் பன்முக மரபுச் சிறப்பிற்காகவும் நான் பெருமிதம் அடைகிறேன்.

இந்நாட்டின் பெருமைக்குத் தகுந்து விளங்கிட என்றும் பாடுபடுவேன். என்னுடைய பெற்றோர், ஆசிரியர்கள், எனக்கு வயதில் மூத்தோர் அனைவரையும் மதிப்பேன். எல்லோரிடமும் அன்பும் மரியாதையும் காட்டுவேன். விலங்குகளிடத்தில் கருணை காட்டுவேன்.

என் நாட்டிற்கும் என் மக்களுக்கும் உழைத்திட முனைந்து நிற்பேன். அவர்கள் நலமும் வளமும் பெறுவதிலே நான் என்றும் மகிழ்ச்சி காண்பேன்.

- பைடிமர்ரி வெங்கட சுப்பாராவ்



MATHEMATICS
கணிதம்
Class / வகுப்பு - X
Semester - 1

Contents
பொருளடக்கம்

Chapter	Content	Month	Pg.No.
	Learning Outcomes கற்றல் விளைவுகள்		(i-iv)
Chapter 1 அத்தியாயம் 1	Real Numbers மெய்யெண்கள்	June	2
Chapter 2 அத்தியாயம் 2	Polynomials பல்லுறுப்புக்கோவைகள்	June-July	20
Chapter 3 அத்தியாயம் 3	Pair of Linear Equations in two variables இருமாறிகளில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்	July	48
Chapter 4 அத்தியாயம் 4	Quadratic Equations இருபடிச்சமன்பாடுகள்	July	76
Chapter 5 அத்தியாயம் 5	Arithmetic Progressions கூட்டுத்தொடர் வரிசைகள்	July-August	98
Chapter 6 அத்தியாயம் 6	Triangles முக்கோணங்கள்	August	146
Chapter 7 அத்தியாயம் 7	Coordinate Geometry ஆயத்தொலை வடிவியல்	August-September	198
Appendix.1 பின்னிணைப்பு-1	Proofs in Mathematics கணித நிரூபணங்கள்		226
	Answers விடைகள்		268

U4Y8T7
Teacher corner

R5T1M8
Student corner

APSCERT

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
1	Real Numbers	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Acquire knowledge on rational and irrational numbers, their usage and operations on those numbers • Can express any composite number as a product of unique set of prime factors using fundamental theorem of arithmetic • Can prove an irrational number as irrational with the help of "Proof by contradiction". • Utilize fundamental theorem of arithmetic in real life situations effectively.
2	Polynomials	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Find zeroes of linear and quadratic polynomials and some cases of cubic polynomials. • Represent polynomials geometrically using graphs. • Establish relationship between zeroes and coefficients of a polynomial • Utilize the knowledge of polynomials in real life situations effectively.
3	Pair of Linear equations in two variables	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Find a solution for pair of intersecting lines graphically. • Identify the pairs of linear equations which are parallel and coincident through the ratios of co-efficients. • Find solutions for pairs of consistent lines, dependent lines and confirms pair of parallel lines are inconsistent or consistent through algebraic methods • Utilize the knowledge of solving pair of linear equations in real life situations effectively.
4	Quadratic equations	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Identify what type of equations are quadratic equations. • Distinguish between quadratic polynomial and quadratic equation • Frame a quadratic equation for any given situation involving quadratic equation. • Factorise any given quadratic equation • Comment on the nature of the roots of given quadratic equation. • Utilize the knowledge of quadratic equations in real life situations effectively.

AP SCERT

கற்றல் விளைவுகள்

வ. எண்	அத்தியாயத்தின் பெயர்	குறிப்பிட்ட கற்றல் விளைவுகள்
1	மெய்யெண்கள்	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களை பற்றிய அறிவை பெறுவர். அந்த எண்களை பயன்படுத்த கணித அடிப்படை செயல்களை பயன்படுத்தி கணித அடிப்படை செயல்களை செய்வர். • அடிப்படை எண் கணித தேற்றமானது ஒவ்வொரு பகு எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுத முடியும் என்று கூறுகின்றது. மேலும் சிறப்பான இந்த காரணிபடுத்துதல் தனித்துவமானது என அறிவர். • விகிதமுறா எண்களை விகிதமுறா எண் என்று முரன்பாடுமுறை நிரூபணம் மூலம் நிரூபிக்கலாம். • தம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தை பயன்படுத்துவர்.
2	பல்லுறுப்புக்கோணங்கள்	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • நேரிய மற்றும் இருப்பு கோவைகள், சில முப்படி கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடிப்பர். • வரைபடங்களை பயன்படுத்தி பல்லுறுப்பு கோவைகளை குறித்து காட்டுவர். • பூஜ்ஜியம் மற்றும் கெழு இடையே உள்ள தொடர்பை அறிவர். • தம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் பல்லுறுப்பு கோவைகளை பன்படுத்துவர்.
3	இருமாறிகளில் ஜோடி நேரிய பயன்பாடுகள்	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • வெட்டி கொள்ளும் கோடுகளின் தீர்வுகளை வரைபடம் மூலம் கண்டறிவர். • ஒரு ஜேடி நேரிய சமன்பாடுகள் இணையானவையா அல்லது ஒன்றும் கோடுகளா என்பதை விகிதங்களை ஒப்பிட்டு அறிவர். • இயற்கணித முறையில் இசைந்த கோடுகள், சார்நிலை கோடுகள் மற்றும் இணை கோடிகள் வெட்டி கொள்பவையா (அ) ஒவ்வாதவையா என தீர்வு காண்பர். • ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளை நம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் பயன்படுத்துவர்.
4	இருபடி சமன்பாடுகள்	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • எவ்வகையான சமன்பாடுகள் இருபடி சமன்பாடுகள் என கண்டறிவர். • இருபடி கோவைகள் மற்றும் இருபடி சமன்பாடுகள் இடையே உள்ள வேற்றுமையை அறிவர். • இருபடி சமன்பாடுகளாக உள்ள எந்த ஒரு சூழலையும் இருபடி சமன்பாடுகளாக மாற்றுவர். • கொடுக்கப்பட்ட இருபடி சமன்பாடுகளை காரணிபடுத்துவர். • இருபடி சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை அறிதல். • தம் அன்றாட வாழ்வில் இருபடி சமன்பாடுகளை பயன்படுத்துவர்.

AP SCERT

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
5	Arithmatic Progressions	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Explain what a progression is • Write an arithmetic progression with the given parameters • Find the common difference,nth term of any given arithmetic progression. • Extend any given arithmetic progression if the common difference and first term are given. • Find the problem of n terms in an arithmetic progression. • Utilize the knowledge of Arithmetic Progressions in real life situations effectively.
6	Triangles	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Define basic proportionality theorem. • Utilize basic proportionality theorem and it's converse in daily life situations • Find or assess whether two triangles are similar or not using different similarity rules like AAA/AA, SSS,SAS. • Apply the rules under basic proportionality and similarity of triangles by correlating both in given problems. • Utilize the knowledge of Triangles in real life situations effectively.
7	Co-ordinate Geometry	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Find distance between any two given points in a cartesian plane using formula • Find co-ordinates of any point which divides any line segment in a particular ratio. • Find the ratio in which a given point divides a line segment joining any two points • Find points of trisection of any given line segment. • Utilize the knowledge of Co-ordinate geometry in real life situations effectively.

AP SCERT

கற்றல் விளைவுகள்

வ. எண்	அத்தியாயத்தின் பெயர்	குறிப்பிட்ட கற்றல் விளைவுகள்
5	கூட்டுதொடர் வரிசை	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • தொடர் என்றால் என்ன அறிவர். • கொடுக்கப்பட்ட அளவீட்டை கூட்டுத்தொடரில் எழுதுவர். • கொடுக்கப்பட்ட கூட்டு தொடரின் பொது வித்தியாசம் மற்றும் n வது உறுப்பை கண்டறிவர். • முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் கொடுக்கப்பட்ட கூட்டு தொடரை விரித்து எழுதுவர். • கூட்டு தொடரின் 'n' கவது உறுப்பை கண்டறிவர். • தம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் கூட்டு தொடரை பயன் படுத்துவர்.
6	முக்கோணங்கள்	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • அடிப்படை விகித சம தேற்றத்தை வரையறுப்பர். • தம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் அடிப்படை விகித சம தேற்றம் மற்றும் அதன் மறுதலையை பயன்படுத்துவர். • கோ.கோ.கோ./கோ.கோ./ப.கோ.ப./ப.ப.ப. வடிவொத்தல் பண்புகளை பயன்படுத்தி இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையா அல்லது வடிவொத்தவை அல்லவா என கண்டறிவர். • கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளில் அடிப்படை விகித சமம் மற்றும் வடிவொத்த பண்புகளை பயன்படுத்தி தீர்ப்பர். • நம் அன்றாட வாழ்வில் முக்கோணங்களின் அறிவை பயன்படுத்துவர்.
7	ஆயத்தொலை வடிவியல்	**இப்பாடம் முடிந்தவுடன் மாணவர்கள் புரிந்துக்கொண்டவை** • சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி கார்டீசியன் தளத்தில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைபட்ட தூரத்தை கண்டறிவர். • ஒரு கோட்டு துண்டை குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை கண்டறிவர். • இரண்டு புள்ளிகளை இனைக்கும் கோட்டு துண்டை கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும் என கண்டறிவர். • கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டை முச்சமக்கூறிடும் புள்ளிகளை கண்டறிதல். • தமது அன்றாட வாழ்வில் ஆயத்தொலை வடிவியல் அறிவை பயன்படுத்துவர்.

AP SCERT

Real Numbers 1

1.1 Introduction

In Class IX, you began your exploration of the world of real numbers and encountered irrational numbers. We continue our discussion on real numbers in this chapter. We begin with two very important properties of positive integers in Sections 1.2 and 1.3, namely the Euclid's division algorithm and the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Euclid's division algorithm, as the name suggests, has to do with divisibility of integers. Stated simply, it says any positive integer a can be divided by another positive integer b in such a way that it leaves a remainder r that is smaller than b. Many of you probably recognise this as the usual long division process. Although this result is quite easy to state and understand, it has many applications related to the divisibility properties of integers. We touch upon a few of them, and use it mainly to compute the HCF of two positive integers.

The Fundamental Theorem of Arithmetic, on the other hand, has to do something with multiplication of positive integers. You already know that every composite number can be expressed as a product of primes in a unique way—this important fact is the Fundamental Theorem of Arithmetic. Again, while it is a result that is easy to state and understand, it has some very deep and significant applications in the field of mathematics. We use the Fundamental Theorem of Arithmetic for two main applications. First, we use it to prove the irrationality of many of the numbers you studied in Class IX, such as $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $\sqrt{5}$. Second, we apply this theorem to explore when exactly the decimal expansion of a rational number, say $\frac{p}{q} (q \neq 0)$, is terminating and when it is non-terminating repeating. We do so by looking at the prime factorisation of the denominator q of $\frac{p}{q}$. You will see that the prime factorisation of q will completely reveal the nature of the decimal expansion of $\frac{p}{q}$.

So let us begin our exploration.

APSCERT

W5N9A4

மெய்யெண்கள் 1

1.1 அறிமுகம்

மெய் எண்களின் உலகத்தைப்பற்றி 9ஆம் வகுப்பில் சிலவற்றிற்கு அறிமுகமாகி இருப்பீர்கள். மேலும் விகிதமுறா எண்களை குறித்தும் கற்று இருப்பீர்கள். இந்த அத்தியாயத்தில் மெய்எண்களை குறித்து மேலும் சில கருத்துக்களை விவாதிக்க உள்ளோம். இந்த விவாதத்தை மிகை முழுக்களின் சில முக்கியமான பண்புகளை பிரிவு 1.2 மற்றும் 1.3-ல் விவாதிக்க உள்ளோம். இதன் பெயர்கள் முறையே யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை மற்றும் அடிப்படை எண்ணியல் கணித தேற்றம்.

பெயருக்கேற்றார் போலவே யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையானது முழுக்களின் வகுத்தலோடு தொடர்புடையது. எளிமையாக கூறவேண்டுமானால் a எனும் மிகை முழுவை b எனும் மற்ற மிகை முழு வகுக்கும் போது மீதி r ஆகும். இந்த r ஆனது b யை விடசிறியது. உங்களில் பலர் இதை வழக்கமாக நீள் வகுத்தல் முறை என்று படித்திருக்கிறீர்கள். இது கூறுவதற்கும் புரிந்துக்கொள்ளுவதற்கும் எளிமையாக இருந்தாலும் இது முழு எண்களின் வகுபடும் பண்புகளுடன் தொடர்புடைய பல பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. அவற்றில் சிலவற்றை நாம் பயன்படுத்தப்போகிறோம். முக்கியமாக இரண்டு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது காரணி (மீ.பொ.க) ஆகும்.

மறுபுறம் அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் இரண்டு மிகை முழுக்களின் பெருக்கலுடன் தொடர்புடைய சில பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பகு எண்ணையும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுத முடியும் என்பதையும் மேலும் இந்த செயல்முறை ஒவ்வொரு பகு எண்ணுக்கும் தனித்துவமானது என்பதையும் அறிந்திருப்பீர்கள். இது எண்ணியல் தேற்றத்தில் முக்கியமான பங்களிப்பாய் இருக்கிறது. இது கூறுவதற்கும் புரிந்து கொள்வதற்கும் எளிமையாக இருந்தாலும் கணித துறையில் ஆழமான மற்றும் குறிப்பிடதக்க பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தின் இரண்டு முக்கியமான பயன்பாடுகளில் ஒன்று 9ஆம் வகுப்பில் விகிதமுறா எண்களான $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ ஆகியவற்றின் நிரூபணம் மற்றொன்று விகிதமுறு எண்களை தசம வடிவில் விரித்து எழுதுவது அதாவது விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ஐ முடிவுறு அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணாக எழுதுவது. இதை விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q}$ ன் பகுதி qயை பகா காரணிப்படுத்துவதின் மூலமாக விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q}$ வின் தசம விரிவாக்கத்தின் இயல்பை கண்டறிய முடியும். இப்போது நமது ஆய்வைத் தொடங்குவோம்.

1.2 The Fundamental Theorem of Arithmetic

In your earlier classes, you have seen that any natural number can be written as a product of its prime factors. For instance, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, and so on. Now, let us try and look at natural numbers from the other direction. That is, can any natural number be obtained by multiplying prime numbers? Let us see.

Take any collection of prime numbers, say 2, 3, 7, 11 and 23. If we multiply some or all of these numbers, allowing them to repeat as many times as we wish, we can produce a large collection of positive integers (In fact, infinitely many). Let us list a few :

$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\quad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

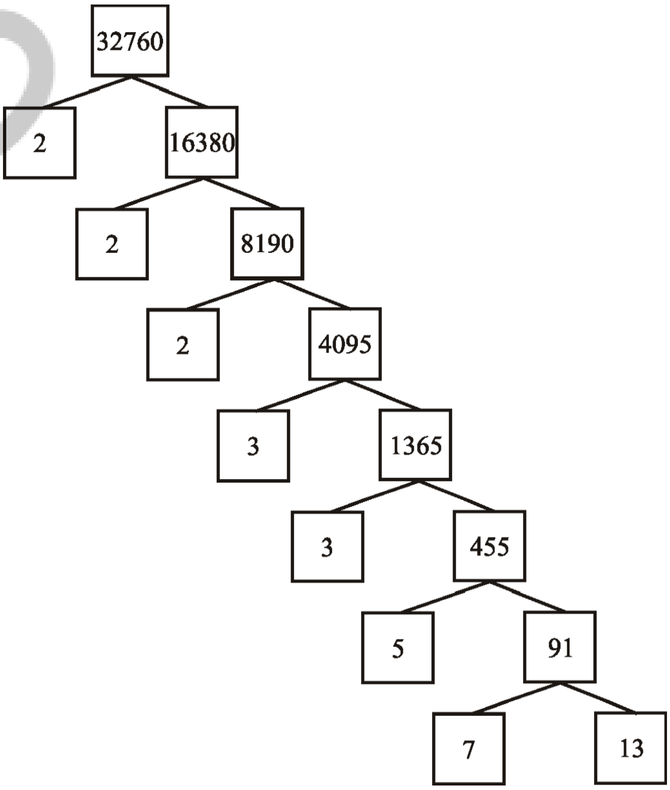
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\quad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

and so on.

Now, let us suppose your collection of primes includes all the possible primes. What is your guess about the size of this collection? Does it contain only a finite number of integers, or infinitely many? Infact, there are infinitely many primes. So, if we combine all these primes in all possible ways, we will get an infinite collection of numbers, all the primes and all possible products of primes. The question is – can we produce all the composite numbers this way? What do you think? Do you think that there may be a composite number which is not the product of powers of primes? Before we answer this, let us factorise positive integers, that is, do the opposite of what we have done so far.

We are going to use the factor tree with which you are all familiar. Let us take some large number, say, 32760, and factorise it as shown.



1.2 அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்

முன் வகுப்புகளில் எந்த ஒரு இயல் எண்ணையும் பகா காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத முடியும் என்று படித்திருப்பீர்கள். உதாரணமாக $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ மற்றும் பல இப்போது இந்த இயல் எண்களை வேறு கோணத்தில் பார்க்க முயற்சிப்போம். அதாவது பகாஎண்களை பெருக்குவதன் மூலமாக இயல் எண்களை பெற முடியுமா? இப்போது பார்ப்போம்.

2, 3, 7, 11 மற்றும் 23 எனும் பகா எண்களின் தொகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த எண்களில் சில எண்ணிக்கையோ அல்லது அனைத்து எண்களையோ நாம் விரும்பும் எண்ணிக்கையில் மீண்டும் மீண்டும் பெருக்கி மிகப்பெரிய எண்களின் பெருக்கல் பலன்களின் தொகுப்பை பெற முடியும் (பலவழிகளில்). சில பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

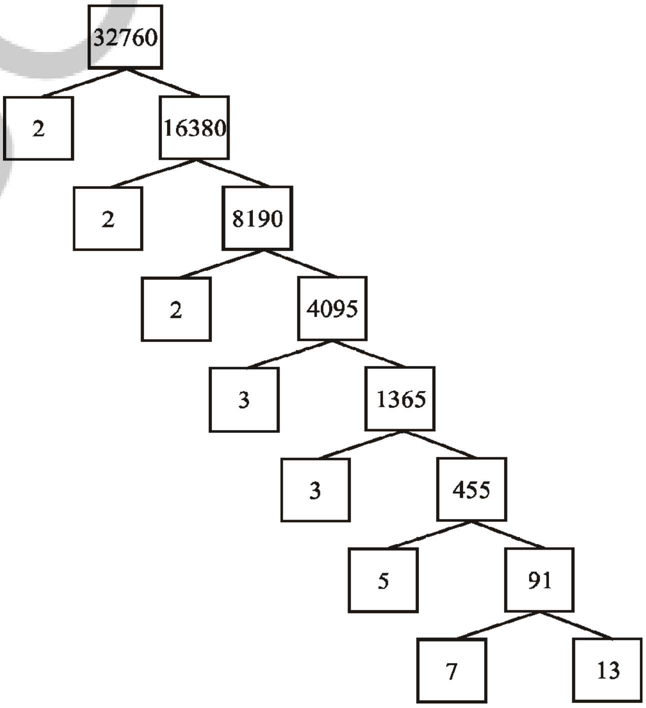
$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\quad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\quad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

மேலும் பல,

நீ எடுத்துக்கொண்ட பகா எண்களின் தொகுப்பானது சாத்தியமான அனைத்து பகா எண்களையும் கொண்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். இந்த தொகுப்பின் அளவை பற்றி உன்னால் ஊகிக்க முடியுமா? இந்த தொகுப்பானது முடிவுறு எண்ணிக்கை யிலான முழுக்களை அல்லது முடிவுறா எண்ணிக்கையிலான முழுக்களை பெற்றுள்ளதா? ஆம் முடிவுறா எண்ணிக்கையிலான பகா எண்களை பெற்றுள்ளது. இவைகளை நாம் முடிந்த மட்டும் எல்லா வழிகளிலேயும் இணைக்கும் போது நமக்கு முடிவிலா எண்களின் தொகுப்பு கிடைக்கின்றன. இவை அனைத்தும் சாத்தியமான எல்லா பகா எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஆகும். எல்லா பகு எண்களையும் இதே முறையில் பகா எண்களின் பெருக்கல் எண்ணாக எழுத முடியுமா? நீ என்ன நினைக்கிறாய் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்குத் தொகையாக இல்லாத ஒரு பகு எண் இருக்க வாய்ப்பு உண்டா? இந்த வினாவிற்கு விடை அளிப்பதற்கு முன்பாக மிகை முழுக்களை நாம் முன் செய்தது போன்று வேறு கோணத்தில் காரணிப்படுத்த முயற்சிப்போம்.



நாம் அனைவருக்கும் நன்கு தெரிந்த காரணிச் செடி என்ற முறையைப் பயன்படுத்த காரணிப்படுத்தலில் செய்ய போகிறோம். சில பெரிய எண்களை அதாவது 32760ஐ படத்தில் காட்டியபடி காரணிப்படுத்துவோம்.

So we have factorised 32760 as $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ as a product of primes, i.e., $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ as a product of powers of primes. Let us try another number, say, 123 456789. This can be written as $3^2 \times 3803 \times 3607$. Of course, you have to check that 3803 and 3607 are primes! (Try it out for several other natural numbers yourself.) This leads us to a conjecture that every composite number can be written as the product of powers of primes. In fact, this statement is true, and is called the **Fundamental Theorem of Arithmetic** because of its basic crucial importance to the study of integers. Let us now formally state this theorem.

Theorem 1.1 (Fundamental Theorem of Arithmetic) : *Every composite number can be expressed (factorised) as a product of primes, and this factorisation is unique, apart from the order in which the prime factors occur.*

An equivalent version of Theorem 1.2 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in Euclid's Elements, before it came to be known as the Fundamental Theorem of Arithmetic. However, the first correct proof was given by Carl Friedrich Gauss in his *Disquisitiones Arithmeticae*.

Carl Friedrich Gauss is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with Archimedes and Newton. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

The Fundamental Theorem of Arithmetic says that every composite number can be factorised as a product of primes. Actually it says more. It says that given any composite number it can be factorised as a product of prime numbers in a **'unique'** way, except for the order in which the primes occur. That is, given any composite number there is one and only one way to write it as a product of primes, as long as we are not particular about the order in which the primes occur. So, for example, we regard $2 \times 3 \times 5 \times 7$ as the same as $3 \times 5 \times 7 \times 2$, or any other possible order in which these primes are written. This fact is also stated in the following form:

இப்போது நாம் 32760 ஐ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ எனும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுதினோம். அதாவது, $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலன் ஆகும். 123456789 எனும் மற்றொரு எண்ணிற்கு இதை முயற்சிப்போம். இதை $3^2 \times 3803 \times 3607$ எனும்படி எழுதலாம். ஆம் 3803 மற்றும் 3607 ஐ பகா எண்களா? என்று சோதிக்க வேண்டும். (வேறு சில இயல் எண்களுக்கு இதை முயற்சி செய்து பார்) இது பின்வரும் கருதுக்கோள்களுக்கு வழிவகுக்கிறது. ஒவ்வொரு பகு எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுத முடியும். இந்த கூற்று சரியானது **இது அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது.** இது முழுக்களைப் பற்றிய முக்கியமான படிப்பினை ஆகும். இப்பொழுது இந்த தேற்றத்தை சரியான முறையில் எழுதுவோம்.

தேற்றம் 1.1 (அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்) : *ஒவ்வொரு பகு எண்ணையும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுத முடியும். பகா காரணிகளின் எழுதப்படும் வரிசையை தவிர்த்து இந்த காரணிப்படுத்தல் தனித்துவமானது.*

அடிப்படை எண்கணித தேற்றமானது ஒவ்வொரு பகுஎண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுத முடியும் என்று கூறுகின்றது. மேலும் சிறப்பாக இந்த

தேற்றம் 1.2 அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் என்று அழைக்கப்படுவதற்கு முன்பாகவே அதற்கு இணையான ஒரு வரையறை யூக்ளிட்டின் மூலங்கள் எனும் புத்தகம் IX ல் ஆய்வு பொருள் 14ல் பதிவு செய்யப்பட்டிருந்தது. இப்படியிருப்பினும் கார்ல் பெட்ரிச் கௌஸ் என்பவரால் சரியான ஒருநிரூபணம் எண் கணித ஆராய்ச்சிக் கட்டுரையில் கொடுக்கப்பட்டது.

கார்ல் பெட்ரிச் கௌஸ் என்பவரை கணித வல்லுநர்களின் இளவரசர் என்று அழைக்கிறார்கள். மிக சிறந்த மூன்று கணித வல்லுநர்களாக ஆர்க்கிமிடிஸ் மற்றும் நியூட்டன் ஆகியவரோடு கௌஸ் என்பவரும் கருதப்படுகிறார். ஆனால் இம்மூவரில் கௌஸ் தனிச்சிறப்புடையவர். கணித மற்றும் அறிவியலில் இவர் அடிப்படையான பங்களிப்பை அளித்துள்ளார்.

கார்ல் பெட்ரிச் கௌஸ் (1777 – 1855)

காரணிப்படுத்தல் தனித்துவமானது என்றும் கூறுகிறது. ஆனால் பகா எண்களின் எந்த வரிசையில் வேண்டுமானாலும் எழுதிக் கொள்ளலாம். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட பகு எண்ணை ஒரே வழி முறையில் மட்டுமே பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனின் வரிசை நாம் கருத்தில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டிய அவசியமில்லை. உதாரணமாக $2 \times 3 \times 5 \times 7$ யை எனும் வரிசையை $3 \times 5 \times 7 \times 2$ எனவும் வேறு சாத்தியமான வழிகளிலும் எழுதிக் கொள்ளலாம். இதை அடிப்படையாகக் கொண்டு பின்வரும் கூற்றை எழுதலாம். அதாவது,

ஒரு இயல் எண்ணின் பகா காரணியாக்கல் என்பது அதன் பகா காரணிகளின் வரிசையைத் தவிர்த்து தனித்துவமானது.

The prime factorisation of a natural number is unique, except for the order of its factors.

In general, given a composite number x, we factorise it as $x = p_1 p_2 \ldots p_n$, where $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are primes and written in ascending order, i.e., $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$. If we combine the same primes, we will get powers of primes. For example,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

Once we have decided that the order will be ascending, then the way the number is factorised, is unique.

The Fundamental Theorem of Arithmetic has many applications, both within mathematics and in other fields. Let us look at some examples.

Example 1 : Consider the numbers 4^n, where n is a natural number. Check whether there is any value of n for which 4^n ends with the digit zero.

Solution : If the number 4^n, for any n, were to end with the digit zero, then it would be divisible by 5. That is, the prime factorisation of 4^n would contain the prime 5. This is not possible because $4^n = (2)^{2n}$; so the only prime in the factorisation of 4^n is 2. So, the uniqueness of the Fundamental Theorem of Arithmetic guarantees that there are no other primes in the factorisation of 4^n. So, there is no natural number n for which 4^n ends with the digit zero.

You have already learnt how to find the HCF and LCM of two positive integers using the Fundamental Theorem of Arithmetic in earlier classes, without realising it! This method is also called the *prime factorisation method*. Let us recall this method through an example.

Example 2 : Find the LCM and HCF of 6 and 20 by the prime factorisation method.

Solution : We have : $6 = 2^1 \times 3^1$ and $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$.

You can find HCF(6, 20) = 2 and LCM(6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, as done in your earlier classes.

Note that HCF(6, 20) = 2^1 = **Product of the smallest power of each common prime factor in the numbers.**

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **Product of the greatest power of each prime factor, involved in the numbers.**

From the example above, you might have noticed that HCF(6, 20) × LCM(6, 20) = 6 × 20. In fact, we can verify that **for any two positive integers *a* and *b*, HCF (*a*, *b*) × LCM (*a*, *b*) = *a* × *b*.** We can use this result to find the LCM of two positive integers, if we have already found the HCF of the two positive integers.

AP SCERT

பொதுவாக கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பகு எண் xஐ $x = p_1 p_2 \ldots p_n$ என எழுதலாம். இங்கு p_1, $p_2, \ldots, p_n$ என்பவை ஏறுவரிசையில் எழுதபட்ட பகா எண்கள். அதாவது $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ இந்த நிலையில் ஒரே விதமான காரணிகள் கிடைக்கப் பெறும் போது பகா எண்களின் அடுக்குகள் கிடைக்கும். ஒரு முறை நாம் இந்த எண்களின் ஏறுவரிசையில் உள்ளது எனக் கொண்டால் இந்த பெருக்கல் அமைப்பு தனித்துவமானது. எடுத்துக்காட்டாக,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

இந்த பகா எண்களின் வரிசை ஏறுவரிசை என்பதால் 32760 எனும் பகு எண்ணின் காரணியாக்கல் தனித்துவமானது. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்திற்கு பல பயன்பாடுகள் உண்டு அவற்றுள் சிலவற்றை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : 4^n என்ற எண்ணை கருதுவோம். இங்கு n ஓர் இயல் எண் n ன் எந்த மதிப்பிற்காவது 4^n பூஜ்ஜியத்தில் முடிவடையுமா என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : n ஓர் இயல் எண் 4^n என்ற எண் பூஜ்ஜியத்துடன் முடிவடைய வேண்டுமெனில் அது 5ல் சரியாக வகுபட வேண்டும் அதாவது 4^n என்ற எண்ணின் பகா காரணிகளில் 5 என்ற பகா எண் இருக்க வேண்டும். ஆனால் இது சாத்தியமல்ல ஏனெனில் $4^n = (2)^{2n}$. ஆகவே 4^n ன் காரணிகளில் இருக்கக்கூடிய ஒரே ஒரு பகா எண் 2 மட்டுமே. பகா காரணிகளில் 5 இல்லாத காரணத்தால் 4^n பூஜ்ஜியத்தில் முடியுமாறு n என்ற இயல் எண் ஏதுமில்லை.

அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி இரண்டு மிகை எண்களின் மீ.பொ.கா. (மீப்பெரு பொது காரணி) மற்றும் மீ.சி.ம.(மீச்சிறு பொது மடங்கு) ஆகியவற்றை எவ்வாறு காண்பது என்பதை ஏற்கனவே கற்றிருக்கிறீர்கள். இந்த முறை பகா காரணியாக்கல் முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் நாம் இதை ஒருமுறை நினைவு கூறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : 6 மற்றும் 20ன் மீ.சி.ம. மற்றும் மீ.பொ.கா.வை பகா காரணியாக்கல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : நமக்கு கிடைப்பது $6 = 2^1 \times 3^1$ மற்றும் $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

$(6, 20)$ன் மீ.பொ.கா $= 2$ மற்றும் $(6, 20)$ ன் மீ.சி.ம. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

$(6, 20)$ன் மீ.பொ.கா $= 2^1 =$ எண்களின் பொது காரணிகளின் மிகச்சிறிய அடுக்குகளின் பெருக்கல்.

$(6, 20)$ ன் மீ.சி.ம$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 =$எண்களின் ஒவ்வொரு பகாக்காரணிகளின் மிகப்பெரிய அடுக்குகளின் பெருக்கல்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து $(6, 20)$ ன் மீ.பொ.க. $\times$ $(6, 20)$ன் மீ.சி.ம. $= 6 \times 20$ என அறிகிறோம். **a ,b எனும் எந்த இரு மிகை முழுக்களுக்கும் (a, b)ன் மீ.பொ.கா $\times$ (a, b)ன் மீ.சி.ம $= a \times b$.** இரண்டு எண்களின் மீ.பொ.கா. தெரியும் போது இந்த முறையை பயன்படுத்தி மீ.சி.ம. வை கண்டறியலாம்.

AP SCERT

Example 3: Find the HCF of 96 and 404 by the prime factorisation method. Hence, find their LCM.

Solution : The prime factorisation of 96 and 404 gives :

$$96 = 2^5 \times 3, \; 404 = 2^2 \times 101$$

Therefore, the HCF of these two integers is $2^2 = 4$.

Also, $\text{LCM}(96, 404) = \dfrac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

Example 4 : Find the HCF and LCM of 6, 72 and 120, using the prime factorisation method.

Solution : We have :

$$6 = 2 \times 3, \; 72 = 2^3 \times 3^2, \; 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Here, 2^1 and 3^1 are the smallest powers of the common factors 2 and 3, respectively.

So, $\text{HCF}(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 and 5^1 are the greatest powers of the prime factors 2, 3 and 5 respectively involved in the three numbers.

So, $\text{LCM}(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

Remark : Notice, $6 \times 72 \times 120 \neq \text{HCF}(6, 72, 120) \times \text{LCM}(6, 72, 120)$. So, the product of three numbers is not equal to the product of their HCF and LCM.

EXERCISE 1.1

1. Express each number as a product of its prime factors:

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. Find the LCM and HCF of the following pairs of integers and verify that LCM × HCF = product of the two numbers.

   (i) 26 and 91 (ii) 510 and 92 (iii) 336 and 54

3. Find the LCM and HCF of the following integers by applying the prime factorisation method.

   (i) 12, 15 and 21 (ii) 17, 23 and 29 (iii) 8, 9 and 25

4. Given that HCF (306, 657) = 9, find LCM (306, 657).
5. Check whether 6^n can end with the digit 0 for any natural number n.
6. Explain why $7 \times 11 \times 13 + 13$ and $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ are composite numbers.

AP SCERT

எடுத்துக்காட்டு 3: பகா காரணியாக்கல் முறையை பயன்படுத்தி 96 மற்றும் 404ன் மீ.பொ.கா. கண்டுபிடி. அதன் மூலம் மீ.சி.ம.வை கண்டுபிடி.

தீர்வு : 96 மற்றும் 404 பகா காரணியாக்கல் பின்வருமாறு

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

எனவே, 96 மற்றும் 404ன் மீ.பொ.கா. $2^2 = 4$.

மேலும் $(96, 404)$ ன் மீ.சி.ம. $= \dfrac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

எடுத்துக்காட்டு 4 : 6, 72 மற்றும் 120ன் மீ.பொ.கா. மற்றும் மீ.சி.ம.வை பகா காரணியாக்கல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : நமக்கு கிடைப்பது,

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

இங்கு, 2^1 மற்றும் 3^1 முறையே பொது காரணிகள் 2 மற்றும் 3ன் குறைந்தபட்ச அடுக்குகளாகும்.

எனவே, $(6, 72, 120)$ன் மீ.பொ.கா. $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 மற்றும் 5^1 என்பன முறையே பகா காரணிகளின் உயர்ந்த அடுக்குகளாகும்.

எனவே, $(6, 72, 120)$ ன் மீ.சி.ம. $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

குறிப்பு: $6 \times 72 \times 120 \neq (6, 72, 120)$ ன் மீ.பொ.கா. $\times\ (6, 72, 120)$ன் மீ.சி.ம. எனவே மூன்று எண்களின் பெருக்கல் பலன் அந்த எண்களின் மீ.பொ.கா. மற்றும் மீ.சி.ம. பெருக்கல் பலனுக்கு சமமல்ல.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் எண்களை பகாக்காரணிகளின் பெருக்கல் பலனாக எழுது.
   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
2. பின்வரும் முழுக்களின் மீ.சி.ம மற்றும் மீ.பொ.கா. கண்டுபிடித்து மீ.சி.ம. $\times$ மீ.பொ.கா. $=$ இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலன் எனும் உறவை சரிபார்.
   (i) 26 மற்றும் 91 (ii) 510 மற்றும் 92 (iii) 336 மற்றும் 54
3. பின்வரும் முழுக்களின் மீ.சி.ம. மற்றும். மீ.பொ.கா.வை பகா காரணியாக்கல் முறையில் கண்டுபிடி.
   (i) 12, 15 மற்றும் 21 (ii) 17, 23 மற்றும் 29 (iii) 8, 9 மற்றும் 25
4. $(306, 657)$ன் மீ.பொ.கா. $= 9$, எனில் $(306, 657)$ன் மீ.சி.ம.வை கண்டுபிடி.
5. 6^n எனும் எண் n ன் எந்த இயல் எண்ணுக்கும் பூஜ்ஜியத்தில் முடிவடையும் எனக்காட்டு.
6. $7 \times 11 \times 13 + 13$ மற்றும் $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ஆகியவை பகு எண் என நிரூபி.

AP SCERT

7. There is a circular path around a sports field. Sonia takes 18 minutes to drive one round of the field, while Ravi takes 12 minutes for the same. Suppose they both start at the same point and at the same time, and go in the same direction. After how many minutes will they meet again at the starting point?

1.3 Revisiting Irrational Numbers

In Class IX, you were introduced to irrational numbers and many of their properties. You studied about their existence and how the rationals and the irrationals together made up the real numbers. You even studied how to locate irrationals on the number line. However, we did not prove that they were irrationals. In this section, we will prove that $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ and, in general, $\sqrt{p}$ is irrational, where p is a prime. One of the theorems, we use in our proof, is the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Recall, a number 's' is called *irrational* if it cannot be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. Some examples of irrational numbers, with which you are already familiar, are :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{etc.}$$

Before we prove that $\sqrt{2}$ is irrational, we need the following theorem, whose proof is based on the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Theorem 1.2 : *Let p be a prime number. If p divides a^2, then p divides a, where a is a positive integer.*

***Proof :** Let the prime factorisation of a be as follows :

$a = p_1 p_2 \ldots p_n$, where $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are primes, not necessarily distinct.

Therefore, $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$.

Now, we are given that p divides a^2. Therefore, from the Fundamental Theorem of Arithmetic, it follows that p is one of the prime factors of a^2. However, using the uniqueness part of the Fundamental Theorem of Arithmetic, we realise that the only prime factors of a^2 are $p_1, p_2, \ldots, p_n$. So p is one of $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Now, since $a = p_1 p_2 \ldots p_n$, p divides a.

We are now ready to give a proof that $\sqrt{2}$ is irrational.

The proof is based on a technique called 'proof by contradiction'. (This technique is discussed in some detail in Appendix 1).

* Not from the examination point of view.

AP SCERT

7. ஒரு விளையாட்டு திடலில் ஒரு வட்ட வடிவ பாதை ஒன்று உள்ளது. சோனியா 18 நிமிடங்களில் அதை சுற்றி வருவாள். ரவிக்கு 12 நிமிடங்கள் தேவைப்படுகிறது. இருவரும் ஒரே இடத்தில் இருந்து ஒரே நேரத்தில் நடக்க தொடங்கும்போது எத்தனை நிமிடங்களுக்கு பிறகு அவர்கள் மீண்டும் சந்திப்பார்கள்?

1.3 விகித முறா எண்களின் மறுபார்வை

ஒன்பதாம் வகுப்பில் விகிதமுறா எண்களை பற்றியும் அதன் பண்புகளை பற்றியும் படித்தீர்கள் மேலும் விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் இரண்டும் சேர்ந்து எப்படி மெய்யெண்களை உருவாக்குகின்றன என்பதை பற்றியும் படித்திருப்பீர்கள். விகிதமுறா எண்களை எப்படி எண் கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டப்படுகிறது என்பதை பற்றியும் படித்திருப்பீர்கள். ஆனால் விகிதமுறா எண்களின் நிரூபணத்தை பற்றி படித்திருக்கமாட்டோம். இந்த அத்தியாயத்தில் விகிதமுறா எண்கள், அதாவது $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ பொதுவாக $\sqrt{p}$ (p பகா எண்) ஆகியவற்றின் நிரூபணத்தை பார்க்கப்போகிறோம். இந்த நிரூபணங்களுக்காக அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தை பயன்படுத்தப்போகிறோம்.

's' எனும் எண்ணை $\frac{p}{q}$, இங்கு p, q முழுக்கள் $q \neq 0$ எனும் வடிவில் எழுத முடியாவிட்டால் அதை விகிதமுறா எண் என அழைக்கப்படுவதை நினைவு கூறுங்கள். நமக்கு முன்னரே தெரிந்த சில விகிதமுறா எண்கள்:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots$,எனும் பல.

$\sqrt{2}$ ஐ விகிதமுறா எண் என நிரூபிக்கும் முன்பாக பின்வரும் தேற்றம் நமக்கு தேவைப்படுகிறது. இந்த தேற்றத்தின் நிரூபணம் அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தை மூலமாக கொண்டுள்ளது.

தேற்றம் 1.2 : *p ஒரு பகா எண். a^2ஐ p வகுக்குமெனில், aவையும் p வகுக்கும். இங்கு a ஒரு மிகை முழு.*

***நிரூபணம் :** a ன் பகா காரணியாக்கலை பின்வருமாறு கருதுவோம்.

$a = p_1 p_2 \ldots p_n$, இங்கு $p_1, p_2, \ldots, p_n$ பகா எண்கள் ஒரே மாதிரியான எண்களாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எனவே, $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$.

p ஆனது a^2வை வகுக்கும் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றப்படி p ஆனது a^2ன் ஒரு பகா காரணி. அடிப்படை எண்கணித தேற்றத்தை தனித்துவத்தை பயன்படுத்தப்படும் போது a^2 ன் பகா காரணியாகும். இப்போது $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

எனவே, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ களில் pயும் ஒரு காரணியாகும்.

இப்போது,$a = p_1 p_2 \ldots p_n$, aஐ pவகுக்கும்.

நாம் இப்போது $\sqrt{2}$ எனும் விகிதமுறா எண்ணின் நிரூபணத்திற்கு ஆயுத்தமாக உள்ளோம். இந்த நிரூபணம் 'முரண்பாடு முறை நிரூபணம்' எனும் உக்தியை சார்ந்தது. (இந்த உக்தியை பற்றி பின் இணைப்பு-1ல் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.)

* தேர்வுக்கான நோக்கில் அல்ல

AP SCERT

Theorem 1.3 : $\sqrt{2}$ *is irrational.*

Proof : Let us assume, to the contrary, that $\sqrt{2}$ is rational.

So, we can find integers r and s ($\neq 0$) such that $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.

Suppose r and s have a common factor other than 1. Then, we divide by the common factor to get $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, where a and b are coprime.

So, $b\sqrt{2} = a$.

Squaring on both sides and rearranging, we get $2b^2 = a^2$. Therefore, 2 divides a^2.

Now, by Theorem 1.3, it follows that 2 divides a.

So, we can write $a = 2c$ for some integer c.

Substituting for a, we get $2b^2 = 4c^2$, that is, $b^2 = 2c^2$.

This means that 2 divides b^2, and so 2 divides b (again using Theorem 1.3 with $p = 2$).

Therefore, a and b have at least 2 as a common factor.

But this contradicts the fact that a and b have no common factors other than 1.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $\sqrt{2}$ is rational.

So, we conclude that $\sqrt{2}$ is irrational.

Example 5 : Prove that $\sqrt{3}$ is irrational.

Solution : Let us assume, to the contrary, that $\sqrt{3}$ is rational.

That is, we can find integers a and b ($\neq 0$) such that $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

Suppose a and b have a common factor other than 1, then we can divide by the common factor, and assume that a and b are coprime.

So, $b\sqrt{3} = a$.

Squaring on both sides, and rearranging, we get $3b^2 = a^2$.

Therefore, a^2 is divisible by 3, and by Theorem 1.3, it follows that a is also divisible by 3.

தேற்றம் 1.3 : $\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண்.

தீர்வு : முரண்பாடு முறை மூலம் $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண் என்க.

$\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.எனும் படி r மற்றும் $s\ (\neq 0)$ எனும் இரண்டு முழுக்களை கண்டறியலாம்.

ஒரு வேளை r மற்றும் s 1ஐ தவிர பொது காரணி ஏதும் இல்லை எனில் நமக்கு கிடைப்பது

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a , b சார்பகா எண்கள்.

$b\sqrt{2} = a.$

இருபுறமும் வர்கப்படுத்த நமக்கு கிடைப்பது $2b^2 = a^2$. எனவே a^2ஐ 2 வகுக்கும். தேற்றம் 1.3 மூலம் a வையும் 2 வகுக்கும்.

எனவே $a = 2c$ என எழுதலாம். *(c ஒரு முழு எண்).*

aன் மதிப்பை பிரதியிட நாம் பெறுவது, $2b^2 = 4c^2$, அதாவது, $b^2 = 2c^2$.

இதன் பொருள், b^2ஐ 2 வகுக்கும். எனவே bவையும் 2 வகுக்கும். (தேற்றம் 1.3ன் படி).

எனவே, a மற்றும் b 2 ஐ பொது காரணியாக பெற்றிருக்க வேண்டும்.

ஆனால் இது a மற்றும் b 1ஐ தவிர எந்தவொரு பொது காரணியையும் பெற்றிருக்கவில்லை எனும் கூற்றுக்கு முரண்பாடனது.

இந்த முரண்பாடு $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண் என தவறாக எடுத்து கொண்டதன் விளைவேயாகும்.

ஆகையால் $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் என முடிவு செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : $\sqrt{3}$ விகிதமுறா எண் என நிரூபி.

தீர்வு : முரண்பாடாக $\sqrt{3}$ ஐ விகிதமுறு எண் என கொள்வோம்.

எனவே, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. எனும் படி a மற்றும் $b\ (\neq 0)$ எனும் இரண்டு முழுக்களை கண்டறியலாம்.

a மற்றும் b க்கு 1ஐ தவிர வேறேதும் பொது காரணி இல்லையெனில் a மற்றும் b சார்பகா எண்கள் ஆகும்.

எனவே, $b\sqrt{3} = a\cdot$

இருபுறமும் வர்கப்படுத்த நமக்கு கிடைப்பது $3b^2 = a^2$.

எனவே, a^2 ஐ 3 வகுக்கும் தேற்றம் 1.3ன் படி a வையும் 3 வகுக்கும்.

$b\ (b \neq 0)$

APSCERT

So, we can write $a = 3c$ for some integer c.

Substituting for a, we get $3b^2 = 9c^2$, that is, $b^2 = 3c^2$.

This means that b^2 is divisible by 3, and so b is also divisible by 3 (using Theorem 1.3 with $p = 3$).

Therefore, a and b have at least 3 as a common factor.

But this contradicts the fact that a and b are coprime.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $\sqrt{3}$ is rational. So, we conclude that $\sqrt{3}$ is irrational.

In Class IX, we mentioned that :

- the sum or difference of a rational and an irrational number is irrational and
- the product and quotient of a non-zero rational and irrational number is irrational.

We prove some particular cases here.

Example 6 : Show that $5 - \sqrt{3}$ is irrational.

Solution : Let us assume, to the contrary, that $5 - \sqrt{3}$ is rational.

That is, we can find coprime a and b ($b \neq 0$) such that $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

Therefore, $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

Rearranging this equation, we get $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$.

Since a and b are integers, we get $5 - \frac{a}{b}$ is rational, and so $\sqrt{3}$ is rational.

But this contradicts the fact that $\sqrt{3}$ is irrational.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $5 - \sqrt{3}$ is rational.

So, we conclude that $5 - \sqrt{3}$ is irrational.

Example 7 : Show that $3\sqrt{2}$ is irrational.

Solution : Let us assume, to the contrary, that $3\sqrt{2}$ is rational.

That is, we can find coprime a and b ($b \neq 0$) such that $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

AP SCERT

எனவே நமக்கு கிடைப்பது, $a = 3c$, c ஒரு முழு.

aன் மதிப்பை பிரதியிட நமக்கு கிடைப்பது, $3b^2 = 9c^2$, அதாவது, $b^2 = 3c^2$.

இதன் பொருள் என்னவெனில் b^2ஐ 3 வகுக்கும். எனவே b யையும் 3 வகுக்கும்.(தேற்றம் 1.3ன்படி).
எனவே, a மற்றும் b ஆகியவைக்கு 3ம் ஒரு பொது காரணியாகிறது.
ஆனால் இது a மற்றும் b ஆகியவை சார்பகா எண்கள் எனும் கோட்பாட்டுக்கு முரணானது.
$\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என நினைத்து கொண்டதன் விளைவாகவே இந்த முரண்பாடு எழுந்தது. எனவே $\sqrt{3}$ விகிதமுறா எண்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் நாம் குறிப்பிட்டபடி:

- ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் விகிதமுறா எண்ணின் கூடுதல் அல்லது வேறுபாடு எப்போதும் விகிதமுறா எண்.
- பூஜ்ஜியமற்ற ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் பெருக்கல்பலன் மற்றும் ஈவு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : $5 - \sqrt{3}$ விகித முறா எண் எனக்காட்டு.

தீர்வு: முரண்பாடு முறையின் மூலம் $5 - \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என்க.

எனவே, $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$. எனும்படி a மற்றும் b $(b \neq 0)$ எனும் சார்பகா எண்களை நாம் கண்டறியலாம்.

எனவே, $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

சமன்பாட்டை மாற்றியமைக்க நமக்கு கிடைப்பது $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$.

a ,b முழுக்கள். எனவே, $5 - \frac{a}{b}$ ஒரு விகிதமுறு எண். எனவே இதற்கு சமமான $\sqrt{3}$ யும் ஒரு விகிதமுறு எண்.
இது $\sqrt{3}$ விகிதமுறா எண் எனும் கோட்பாட்டிற்கு முரணானது.
$5 - \sqrt{3}$ விகிதமுறு எண் என நினைத்து கொண்டதன் விளைவாகவே இந்த முரண்பாடு ஏற்பட்டது.
எனவே, $5 - \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் என முடிவு செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : $3\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண் எனக்காட்டு.

தீர்வு: முரண்பாடு முறையின் மூலம் $3\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண் என்க.

எனவே, $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. எனும்படி a மற்றும் b $(b \neq 0)$ சார்பகா எண்களை பெறலாம்.

AP SCERT

Rearranging, we get $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$.

Since 3, a and b are integers, $\frac{a}{3b}$ is rational, and so $\sqrt{2}$ is rational.

But this contradicts the fact that $\sqrt{2}$ is irrational.

So, we conclude that $3\sqrt{2}$ is irrational.

EXERCISE 1.2

1. Prove that $\sqrt{5}$ is irrational.

2. Prove that $3 + 2\sqrt{5}$ is irrational.

3. Prove that the following are irrationals :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. The Fundamental Theorem of Arithmetic :

Every composite number can be expressed (factorised) as a product of primes, and this factorisation is unique, apart from the order in which the prime factors occur.

2. If p is a prime and p divides a^2, then p divides a, where a is a positive integer.

3. To prove that $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ are irrationals.

A NOTE TO THE READER

You have seen that :

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, where p, q, r are positive integers (see Example 8). However, the following results hold good for three numbers p, q and r :

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

AP SCERT

மாற்றியமைக்க நமக்கு கிடைப்பது $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$.

$3, a$ மற்றும் b ஆகியவை முழுக்கள்.எனவே $\frac{a}{3b}$ விகிதமுறு எண்.எனவே $\sqrt{2}$ ம் விகிதமுறுஎண். ஆனால் இது $\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண் எனும் கோட்பாட்டிற்கு முரணானது.

எனவே, $3\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண் ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. $\sqrt{5}$ விகிதமுறா எண் என நிரூபி.
2. $3 + 2\sqrt{5}$ விகிதமுறா எண் என நிரூபி.
3. பின்வருவனவற்றை விகிதமுறா எண் என நிரூபி.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் பின்வருவனவற்றை பற்றி படித்தோம்.:

1. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்.

   ஒவ்வொரு பகு எண்ணையும் பகா எண்களின் பெருக்கல்பலனாக எழுதலாம். இது தனித்துவமானது. கிடைக்கும் பகா காரணிகளை வரிசைகிரமப்படி எழுதுகிறோம்.

2. p ஒரு பகா எண் p ஆனது a^2 ஐ வகுக்கும் எனில் p ஆனது a வையும் வகுக்கும் இங்கு a என்பது மிகை முழு.

3. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ விகிதமுறா எண்களின் நிரூபணம்.

கற்போரின் கவனத்திற்கு

(p, q, r)ன் மீ.பொ.கா. $\times$ (p, q, r)ன் மீ.சி.ம. $\neq p \times q \times r$ இங்கு p, q, r மிகை முழுக்கள் (எடுத்துக்காட்டு 8ஐ பார்க்கவும்) என நமக்கு தெரியும் ஆனாலும் பின்வரும் உறவானது p, q மற்றும் r எனும் மூன்று எண்களுக்கான சிறப்பான ஒன்று:

$$(p, q, r)\text{ன் மீ.சி.ம.} = \frac{p.q.r.\ (p, q, r)\text{ன் மீ.பொ.கா.}}{(p, q)\text{ன் மீ.பொ.கா.}\ .(q, r)\text{ன் மீ.பொ.கா.}\ .(p, r)\text{ன் மீ.பொ.கா.}}$$

$$(p, q, r)\text{ன் மீ.பொ.கா.} = \frac{p.q.r.\ (p, q, r)\text{ன் மீ.சி.ம}}{(p, q)\text{ன் மீ.சி.ம.}\ .\ (q, r)\text{ன் மீ.சி.ம.}\ .\ (p, r)\text{ன் மீ.சி.ம.}}$$

APSCERT

F6Y6M5

POLYNOMIALS 2

2.1 Introduction

In Class IX, you have studied polynomials in one variable and their degrees. Recall that if $p(x)$ is a polynomial in x, the highest power of x in $p(x)$ is called **the degree of the polynomial** $p(x)$. For example, $4x + 2$ is a polynomial in the variable x of degree 1, $2y^2 - 3y + 4$ is a polynomial in the variable y of degree 2, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ is a polynomial in the variable x of degree 3 and $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ is a polynomial in the variable u of degree 6. Expressions like $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ etc., are not polynomials.

A polynomial of degree 1 is called a **linear polynomial**. For example, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, etc., are all linear polynomials. Polynomials such as $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$, etc., are not linear polynomials.

A polynomial of degree 2 is called a **quadratic polynomial**. The name 'quadratic' has been derived from the word 'quadrate', which means 'square'. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ are some examples of quadratic polynomials (whose coefficients are real numbers). More generally, any quadratic polynomial in x is of the form $ax^2 + bx + c$, where a, b, c are real numbers and $a \neq 0$. A polynomial of degree 3 is called a **cubic polynomial**.

APSCERT

G9W7E9

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் 2

AP SCERT

2.1 அறிமுகம்

நாம் IX ஆம் வகுப்பில் ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியை படித்திருக்கிறோம். $p(x)$ என்பது x ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் x ன் மிகப்பெரிய அடுக்கை நாம் $p(x)$ **கோவையின் படி** என்கிறோம் என்பதை நினைவு கூர்க. எடுத்துக்காட்டாக $4x + 2$ என்பது x ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதன் படி 1, $2y^2 - 3y + 4$ என்பது y ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதன் படி 2, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ என்பது x ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதன் படி 3 மற்றும் $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ என்பது u ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதன் படி 6. ஆனால் $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ போன்றவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள் அல்ல.

1 ஐ படியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை **நேரிய பல்லுறுப்பு கோவை** எனப்படும். $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, போன்றவை நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு எடுத்துக்காட்டாகும். $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$, போன்றவை நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் அல்ல.

2 ஐ படியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் **இருபடி பல்லுறுப்பு கோவை** ஆகும். 'quadratic' என்ற சொல் 'quadrate' எனும் சொல்லிலிருந்து வந்தது. இதன் பொருள் 'வர்க்கம்' ஆகும். $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ போன்றவை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு சில உதாரணங்கள் ஆகும். (இவற்றின் கெழுக்கள் மெய் எண்கள் ஆகும்). $ax^2 + bx + c$ என்பது x ஐ மாறியாக கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பொது வடிவம் ஆகும். இங்கு a, b, c ஆகியவை மெய் எண்கள் மேலும் $a \neq 0$. படி 3 ஐ உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை **முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை** எனப்படும்.

Some examples of a cubic polynomial are $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}\,x^3$, $3 - x^2 + x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$. In fact, the most general form of a cubic polynomial is

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

where, a, b, c, d are real numbers and $a \neq 0$.

Now consider the polynomial $p(x) = x^2 - 3x - 4$. Then, putting $x = 2$ in the polynomial, we get $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$. The value '$-6$', obtained by replacing x by 2 in $x^2 - 3x - 4$, is the value of $x^2 - 3x - 4$ at $x = 2$. Similarly, $p(0)$ is the value of $p(x)$ at $x = 0$, which is -4.

If $p(x)$ is a polynomial in x, and if k is any real number, then the value obtained by replacing x by k in $p(x)$, is called **the value of $p(x)$ at $x = k$**, and is denoted by $p(k)$.

What is the value of $p(x) = x^2 - 3x - 4$ at $x = -1$? We have :

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

Also, note that $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$.

As $p(-1) = 0$ and $p(4) = 0$, -1 and 4 are called the zeroes of the quadratic polynomial $x^2 - 3x - 4$. More generally, a real number k is said to be a **zero of a polynomial $p(x)$**, if $p(k) = 0$.

You have already studied in Class IX, how to find the zeroes of a linear polynomial. For example, if k is a zero of $p(x) = 2x + 3$, then $p(k) = 0$ gives us $2k + 3 = 0$, i.e., $k = -\frac{3}{2}\cdot$

In general, if k is a zero of $p(x) = ax + b$, then $p(k) = ak + b = 0$, i.e., $k = \frac{-b}{a}\cdot$ So, the zero of the linear polynomial $ax + b$ is $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{(Constant term)}}{\text{Coefficient of } x}$.

Thus, the zero of a linear polynomial is related to its coefficients. Does this happen in the case of other polynomials too? For example, are the zeroes of a quadratic polynomial also related to its coefficients?

In this chapter, we will try to answer these questions. We will also study the division algorithm for polynomials.

2.2 Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial

You know that a real number k is a zero of the polynomial $p(x)$ if $p(k) = 0$. But why are the zeroes of a polynomial so important? To answer this, first we will see the **geometrical** representations of linear and quadratic polynomials and the geometrical meaning of their zeroes.

APSCERT

$2-x^3, x^3, \sqrt{2}\,x^3,\ 3-x^2+x^3,\ 3x^3-2x^2+x-1$ போன்றவை முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பொது வடிவம்

$$ax^3+bx^2+cx+d \text{ ஆகும்,}$$

இங்கு a, b, c, d ஆகியவை மெய் எண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

இப்போது $p(x) = x^2 - 3x - 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $x = 2$ என பிரதியிட்டால் $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ என நமக்கு கிடைக்கும். $x^2 - 3x - 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x க்கு பதிலாக 2 ஐ பிரதியிட்டால் இதன் மதிப்பு '-6'. இதேபோல் $x = 0$ எனும்போது $p(x)$ ன் மதிப்பு $p(0) = -4$ ஆகும்.

$p(x)$ என்பது x ஐ மாறியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மேலும் k என்பது ஒரு மெய் எண் எனில் $p(x)$ ல் x க்கு பதிலாக k ஐ பிரதியிட கிடைக்கும் மதிப்பு $p(k)$ என எழுதுகிறோம்.

$x = -1$ எனில் $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ன் மதிப்பு என்ன?

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

இதேபோல், $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0.$

$p(-1) = 0$ மற்றும் $p(4) = 0$, எனவே -1 மற்றும் 4 என்பவை $x^2 - 3x - 4$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் எனப்படும். பொதுவாக $\boldsymbol{p(x)}$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் k க்கு $p(k) = 0$ எனில் k என்பது **அக்கோவையின் பூஜ்ஜியம்** எனப்படும்.

நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என IX ம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம். உதாரணமாக $p(x) = 2x + 3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் k எனில் $p(k) = 0$ அதாவது $2k + 3 = 0$, மேலும் $k = -\frac{3}{2}$.

பொதுவாக k என்பது $p(x) = ax + b$ ன் பூஜ்ஜியம் எனில் $p(k) = ak + b = 0$, அதாவது, $k = \frac{-b}{a}$. எனவே, நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை $ax + b$ ன் பூஜ்ஜியம் $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x \text{ ன் கெழு}}$.

எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் அதன் கெழுக்களுடன் தொடர்புடையது. உயர் அடுக்கு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களும் அவைகளின் கெழுக்களின் மீது ஆதாரப்பட்டுள்ளதா? உதாரணமாக முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களுக்கும் அவற்றின் கெழுக்களுக்கும் இடையே தொடர்பு உள்ளதா?

இந்த அத்தியாயத்தில் இந்த கேள்விக்கு பதிலை காண நாம் முயற்சி செய்வோம். மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகுத்தல் செய்வழியைப் பற்றி கற்போம்.

2.2 பல்லுறுப்புக் கோவை பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் பொருள்

$p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு k ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் $p(k) = 0$ எனில் $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் என்கிறோம். ஆனால் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் ஏன் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை? இதற்கு பதில் அறிய நாம் இப்போது நேரிய மற்றும் இருபடி கோவைகளின் **வரைபட** விளக்கங்கள் மேலும் அவற்றின் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் பொருளைப் பற்றி பார்ப்போம்.

AP SCERT

Consider first a linear polynomial $ax + b$, $a \neq 0$. You have studied in Class IX that the graph of $y = ax + b$ is a straight line. For example, the graph of $y = 2x + 3$ is a straight line passing through the points $(-2, -1)$ and $(2, 7)$.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

From Fig. 2.1, you can see that the graph of $y = 2x + 3$ intersects the x-axis mid-way between $x = -1$ and $x = -2$, that is, at the point $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. You also know that the zero of $2x + 3$ is $-\frac{3}{2}$. Thus, the zero of the polynomial $2x + 3$ is the x-coordinate of the point where the graph of $y = 2x + 3$ intersects the x-axis.

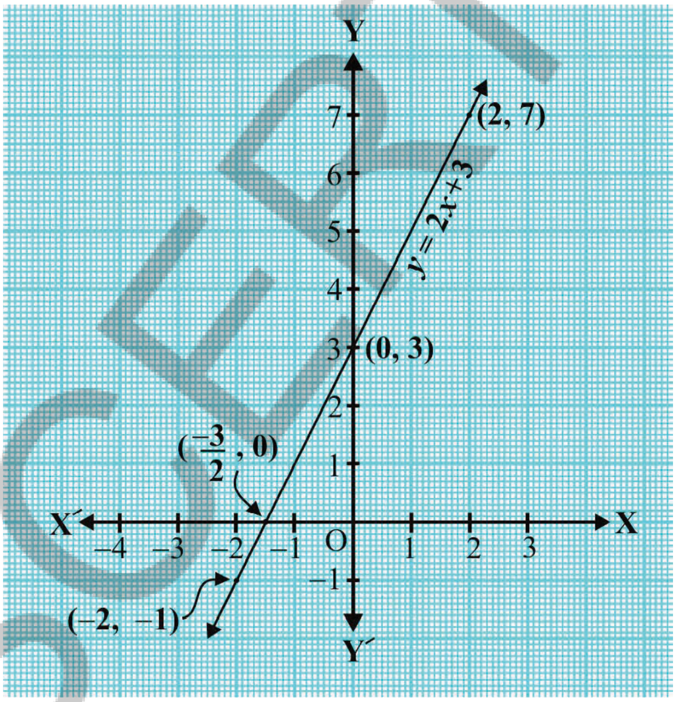


Fig. 2.1

In general, for a linear polynomial $ax + b$, $a \neq 0$, the graph of $y = ax + b$ is a straight line which intersects the x-axis at exactly one point, namely, $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. Therefore, the linear polynomial $ax + b$, $a \neq 0$, has exactly one zero, namely, the x-coordinate of the point where the graph of $y = ax + b$ intersects the x-axis.

Now, let us look for the geometrical meaning of a zero of a quadratic polynomial. Consider the quadratic polynomial $x^2 - 3x - 4$. Let us see what the graph* of $y = x^2 - 3x - 4$ looks like. Let us list a few values of $y = x^2 - 3x - 4$ corresponding to a few values for x as given in Table 2.1.

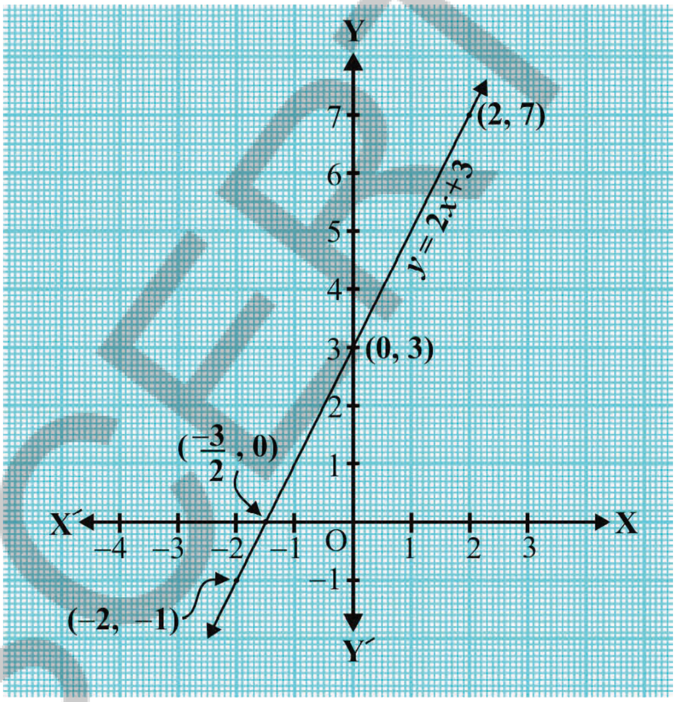
* Plotting of graphs of quadratic or cubic polynomials is not meant to be done by the students, nor is to be evaluated.

AP SCERT

$ax+b,\ a\neq 0$ எனும் நேரிய சமன்பாட்டை கவனி. $y=ax+b$ எனும் நேரிய கோவையின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு என IX ம் வகுப்பில் படித்துள்ளோம். உதாரணமாக $y=2x+3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு மேலும் இது $(-2,-1)$ மற்றும் $(2,7)$ எனும் புள்ளிகள் வழியே செல்கிறது.

x	-2	2
$y=2x+3$	-1	7

படம்.2.1 ஐ கவனிக்கும் போது, $y=2x+3$ ன் வரைபடம் x-அச்சை $x=-1$ மேலும் $x=-2$, க்கு இடையே வெட்டுகிறது. அதாவது $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ல் வெட்டுகிறது. ஆகவே $x=-\frac{3}{2}$ என்பது $2x+3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகும். அதாவது $2x+3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் என்பது $y=2x+3$ எனும் நேர்க்கோடு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x-அச்சு தூரமாகும்.



படம். 2.1

பொதுவாக $ax+b,\ a\neq 0$ எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $y=ax+b$ வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோட்டை குறிக்கிறது. மேலும் இக்கோடு x-அச்சை $\left(\frac{-b}{a},0\right)$ எனும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டும். எனவே $ax+b,\ a\neq 0$ எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜிய மதிப்பு என்பது $y=ax+b$ எனும் நேர்க்கோடு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x-அச்சு தூரமாகும்.

நாம் இப்போது இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களுக்கான வடிவியல் பொருளை தெரிந்து கொள்ளலாம். x^2-3x-4 எனும் இருபடிக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். $y=x^2-3x-4$ ன் வரைபடம்* எப்படி இருக்கும் என நாம் பார்ப்போம். அட்டவணை 2.1 ல் காட்டியவாறு x ன் சில மதிப்புகளுக்கு $y=x^2-3x-4$ ன் சில மதிப்புகளை பட்டியலிடுவோம்.

* இருபடி மற்றும் முப்படி பல்லுறுப்பு கோவைகளின் வரைபடம் வரைவோம் என்பதன் பொருள் மாணவர்கள் வரைய வேண்டுமென்பதல்ல. அதாவது மாணவர்களை மதிப்பிடும் நோக்கில் அல்ல.

Table 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

If we locate the points listed above on a graph paper and draw the graph, it will actually look like the one given in Fig. 2.2.

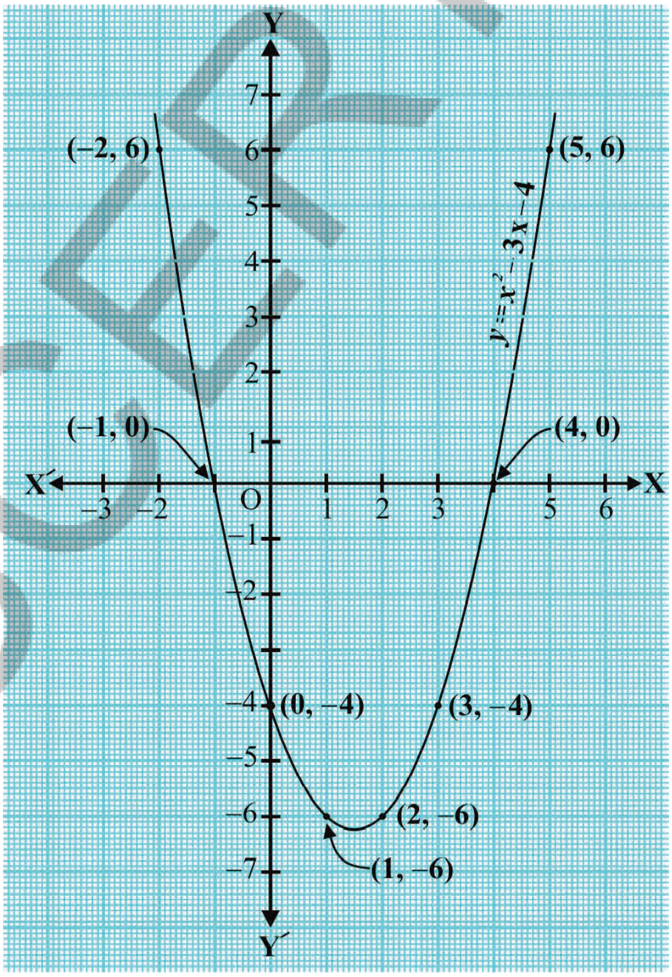


Fig. 2.2

In fact, for any quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, the graph of the corresponding equation $y = ax^2 + bx + c$ has one of the two shapes either open upwards like $\cup$ or open downwards like $\cap$ depending on whether $a > 0$ or $a < 0$. (These curves are called **parabolas**.)

You can see from Table 2.1 that -1 and 4 are zeroes of the quadratic polynomial. Also note from Fig. 2.2 that -1 and 4 are the x-coordinates of the points where the graph of $y = x^2 - 3x - 4$ intersects the x-axis. Thus, the zeroes of the quadratic polynomial $x^2 - 3x - 4$ are x-coordinates of the points where the graph of $y = x^2 - 3x - 4$ intersects the x-axis.

This fact is true for any quadratic polynomial, i.e., the zeroes of a quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, are precisely the x-coordinates of the points where the parabola representing $y = ax^2 + bx + c$ intersects the x-axis.

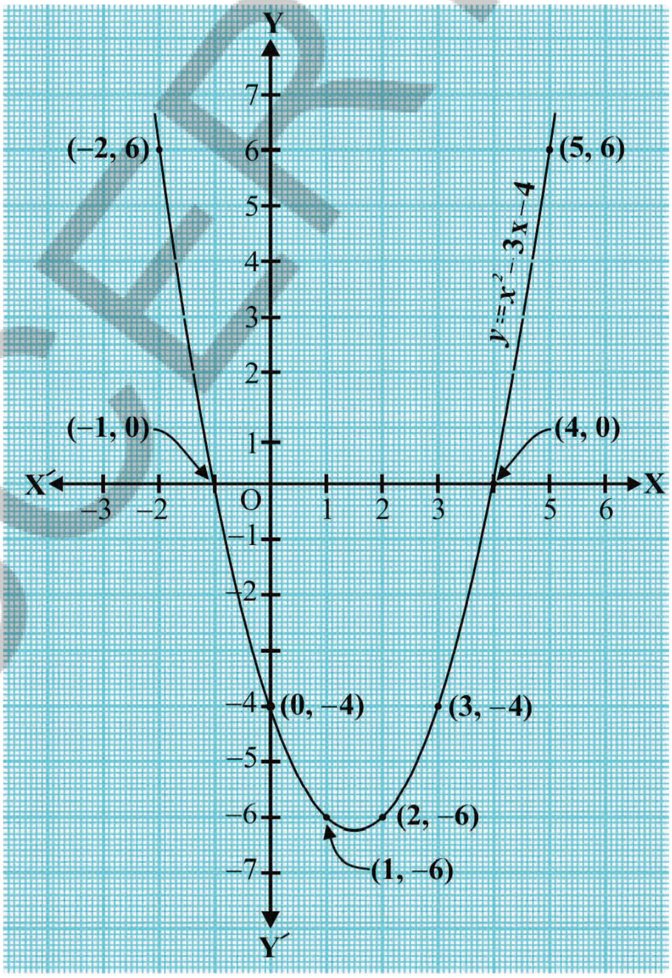
From our observation earlier about the shape of the graph of $y = ax^2 + bx + c$, the following three cases can happen:

அட்டவணை 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து வரைபடம் வரைவோம். இது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம்.2.2 ஐ போல் இருக்கும்.

ஏதேனும் ஒரு இருபடி கோவை $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ க்கு ஒத்த $y = ax^2 + bx + c$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் $\bigcup$ வடிவத்தில் மேற்புறமாக திறந்தோ அல்லது $\bigcap$ வடிவத்தில் கீழ்புறமாக திறந்தோ காணப்படும். இந்த வளைவு $a > 0$ அல்லது $a < 0$ மதிப்புகளை சார்ந்திருக்கும். (இந்த வளைவு அமைப்பை நாம் **பரவளையம்** என்கிறோம்.)



படம். 2.2

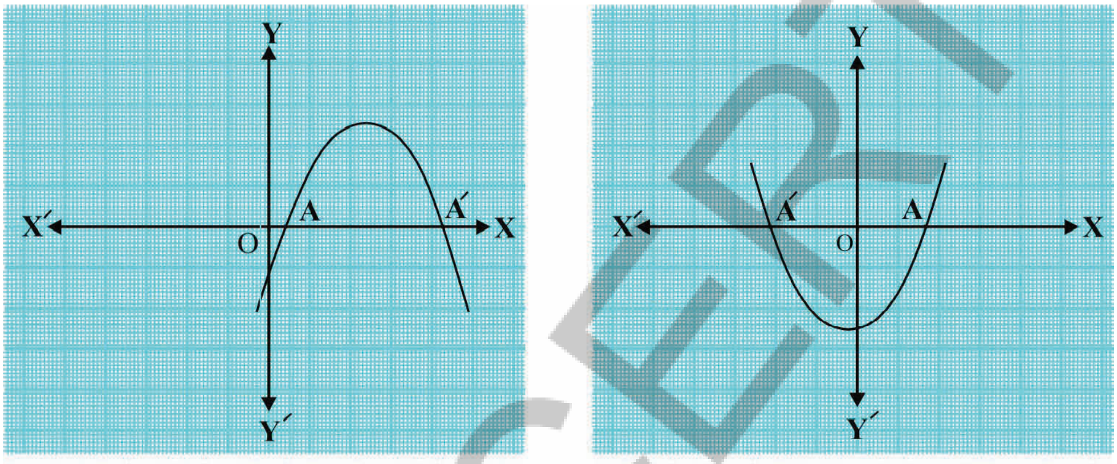
அட்டவணை 2.1 ஐ நாம் பார்த்தோமானால், கொடுக்கப்பட்ட இருபடி கோவையில் பூஜ்ஜியங்கள் -1 மேலும் 4 என அறியலாம். மேலும் படம் 2.2 ல் -1 மற்றும் 4 என்பவை x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் ஆகும். $y = x^2 - 3x - 4$ எனும் வரைபடத்தில் x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் அந்த இருபடி சமன்பாட்டின் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும். $x^2 - 3x - 4$ எனும் இருபடி கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் $y = x^2 - 3x - 4$ எனும் வரைபடம் x-அச்சை வெட்டும் x-அச்சு தூரங்கள் ஆகும்.

இது அனைத்து இருபடி பல்லுறுப்பு கோவைகளுக்கும் உண்மையாகும். அதாவது $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ எனும் இருபடி கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் $y = ax^2 + bx + c$, x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x-அச்சு தூரங்கள் ஆகும்.

நாம் மேற்கண்டவற்றிலிருந்து $y = ax^2 + bx + c$ ன் வரைபடத்தை கீழ்காணும் மூன்று வகைகளில் வகைப்படுத்தலாம்:

Case (i) : Here, the graph cuts x-axis at two distinct points A and A′.

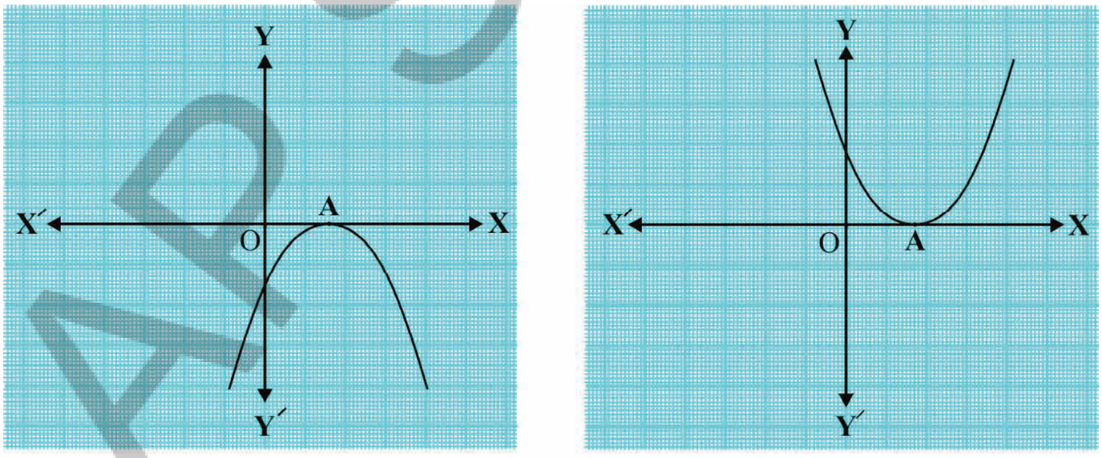
The x-coordinates of A and A′ are the **two zeroes** of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ in this case (see Fig. 2.3).



(i) (ii)

Fig. 2.3

Case (ii) : Here, the graph cuts the x-axis at exactly one point, i.e., at two coincident points. So, the two points A and A′ of Case (i) coincide here to become one point A (see Fig. 2.4).



(i) (ii)

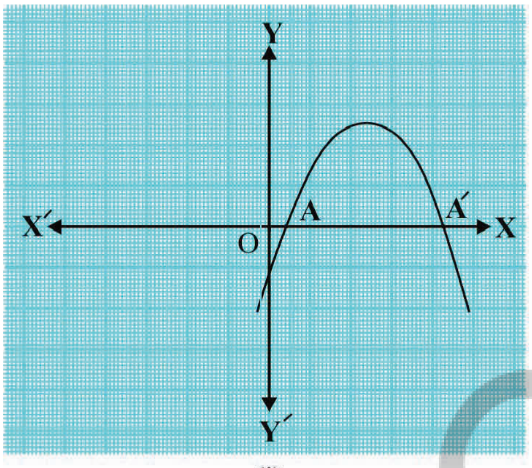
Fig. 2.4

The x-coordinate of A is the **only zero** for the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ in this case.

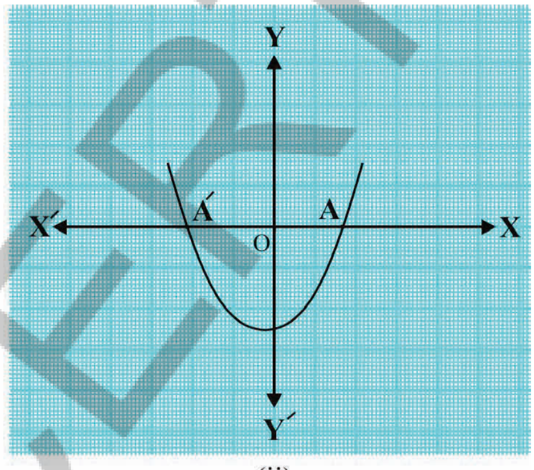
AP SCERT

வகை (i) : இந்த வகை வரைபடம் x-அச்சை A மற்றும் A′ எனும் இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

இங்கு A மற்றும் A′ புள்ளிகளின் x-அச்சு தூரங்கள் $ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடிக் கோவையின் **இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள்** ஆகும் (படம். 2.3 ஐ பார்).



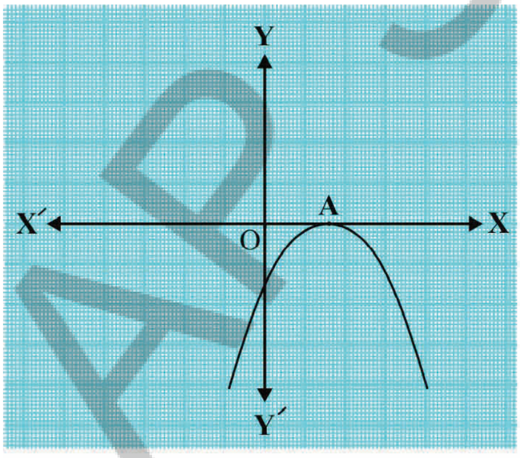
(i)



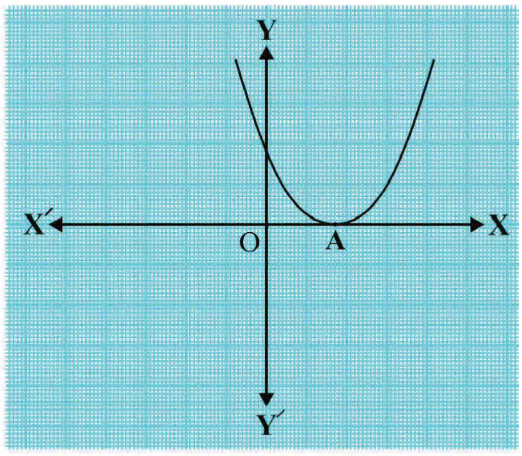
(ii)

படம். 2.3

வகை (ii) : இந்த வகையில் வரைபடம் x-அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது. அதாவது, இரண்டு ஒன்றிய புள்ளிகள். எனவே A மற்றும் A′ புள்ளிகள் வகை (i) ல் ஒன்றி ஒரே புள்ளி A ஆக மாறுகிறது (படம். 2.4 ஐ பார்).



(i)



(ii)

படம். 2.4

இந்த வகையில் $ax^2 + bx + c$ எனும் இருபடி கோவைக்கு A வின் x-அச்சு தூரம் ஒரே ஒரு **பூஜ்ஜியம்** ஆகிறது.

AP SCERT

Case (iii) : Here, the graph is either completely above the x-axis or completely below the x-axis. So, it does not cut the x-axis at any point (see Fig. 2.5).

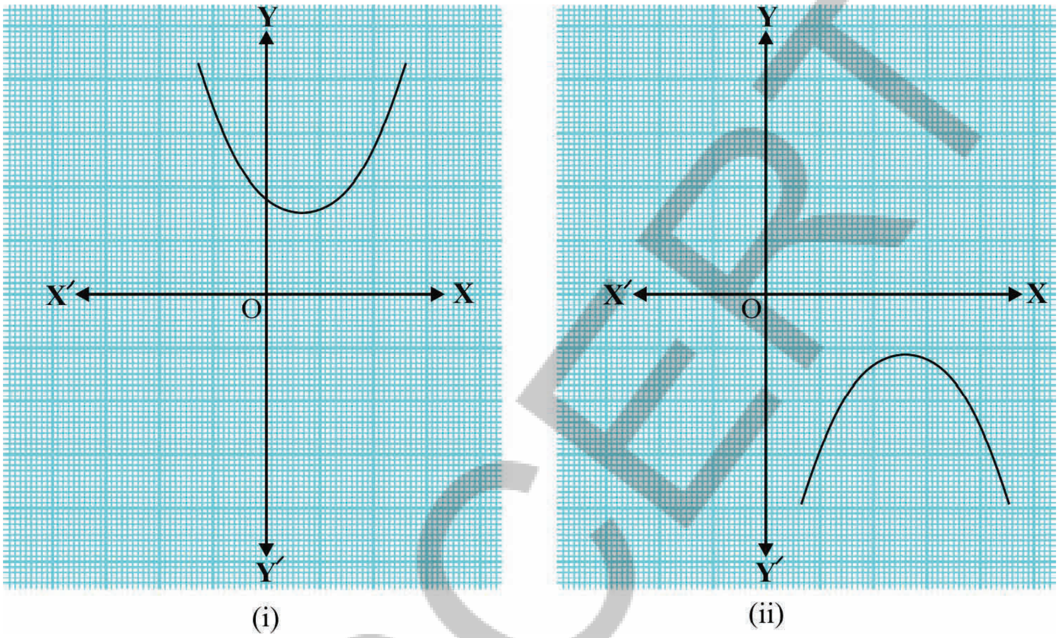


Fig. 2.5

So, the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ has **no zero** in this case.

So, you can see geometrically that a quadratic polynomial can have either two distinct zeroes or two equal zeroes (i.e., one zero), or no zero. This also means that a polynomial of degree 2 has atmost two zeroes.

Now, what do you expect the geometrical meaning of the zeroes of a cubic polynomial to be? Let us find out. Consider the cubic polynomial $x^3 - 4x$. To see what the graph of $y = x^3 - 4x$ looks like, let us list a few values of y corresponding to a few values for x as shown in Table 2.2.

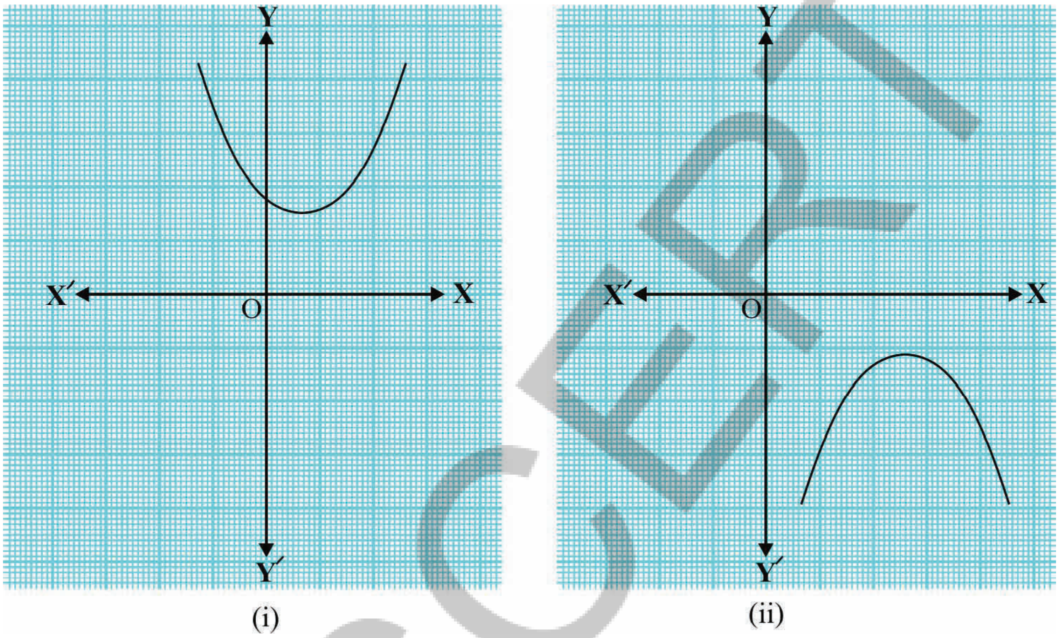
Table 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

Locating the points of the table on a graph paper and drawing the graph, we see that the graph of $y = x^3 - 4x$ actually looks like the one given in Fig. 2.6.

AP SCERT

வகை (iii) : இங்கு வரைபடம் முழுவதும் x-அச்சுக்கு மேலாகவோ அல்லது x-அச்சுக்கு கீழாகவோ x-அச்சை வெட்டாமல் உள்ளது (படம். 2.5 ஐ பார்).



படம். 2.5

எனவே, இவ்வகை இருபடி கோவை $ax^2 + bx + c$ க்கு **பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை**.

மேற்காணும் வடிவியல் சூழ்நிலைகளில் இருந்து ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு இரண்டு வெவ்வேறான பூஜ்ஜியங்கள் அல்லது இரு சமமான பூஜ்ஜியங்கள் (அதாவது ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம்) அல்லது பூஜ்ஜியங்கள் இல்லாமல் இருக்கலாம். இதன் கருத்து என்னவெனில் படி 2 ஐ கொண்ட ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சம் இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும்.

முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் முறையில் புரிந்துகொள்ள நீ எதிர்பார்ப்பது என்ன? $x^3 - 4x$ என்ற ஒரு முப்படி கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். $y = x^3 - 4x$ ன் வரைபடம் எவ்வாறு இருக்கும் என்பதை பார்க்க அட்டவணை 2.2 ல் உள்ளவாறு x க்கு சில மதிப்புகளை கொடுத்து அதற்கு ஒத்த y மதிப்புகளை காண்போம்.

அட்டவணை 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து வரைபடம் வரைவோம். $y = x^3 - 4x$ ன் வரைபடம் படம். 2.6 ல் உள்ளது போன்று இருக்கும்.

APSCERT

We see from the table above that -2, 0 and 2 are zeroes of the cubic polynomial $x^3 - 4x$. Observe that -2, 0 and 2 are, in fact, the x-coordinates of the only points where the graph of $y = x^3 - 4x$ intersects the x-axis. Since the curve meets the x-axis in only these 3 points, their x-coordinates are the only zeroes of the polynomial.

Let us take a few more examples. Consider the cubic polynomials x^3 and $x^3 - x^2$. We draw the graphs of $y = x^3$ and $y = x^3 - x^2$ in Fig. 2.7 and Fig. 2.8 respectively.

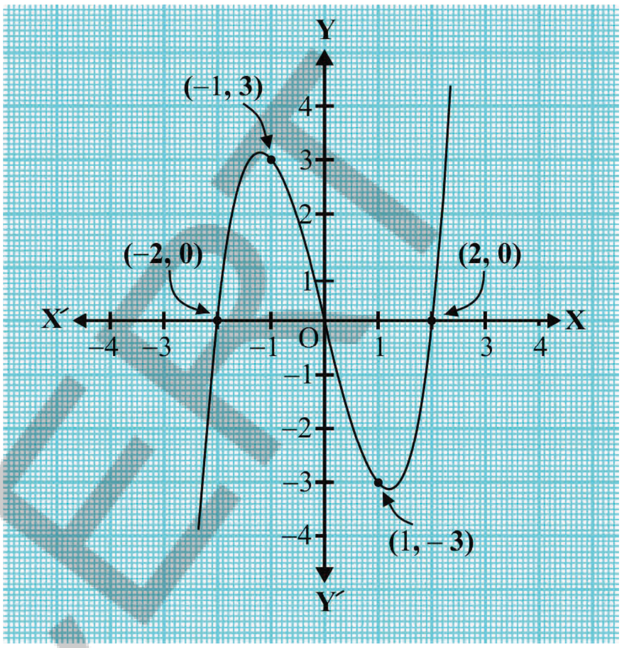


Fig. 2.6

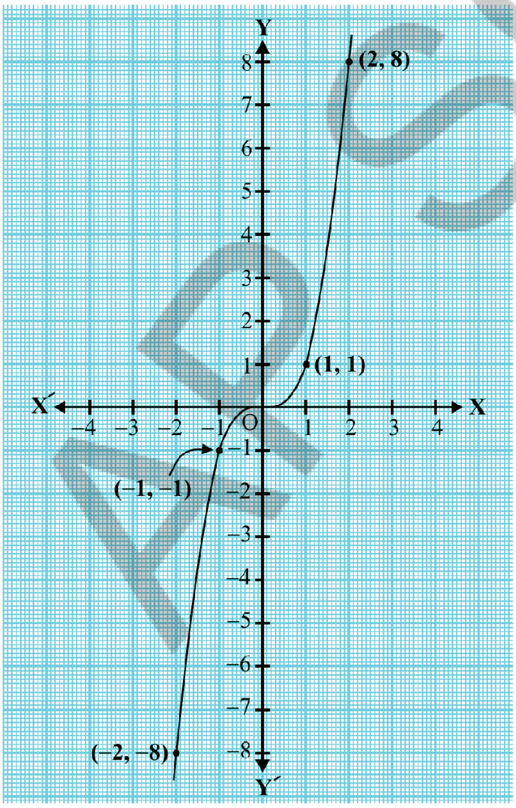


Fig. 2.7

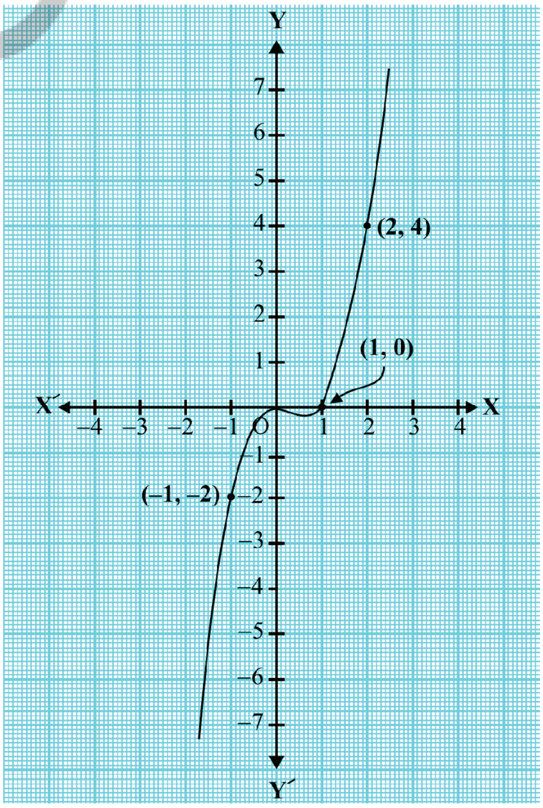
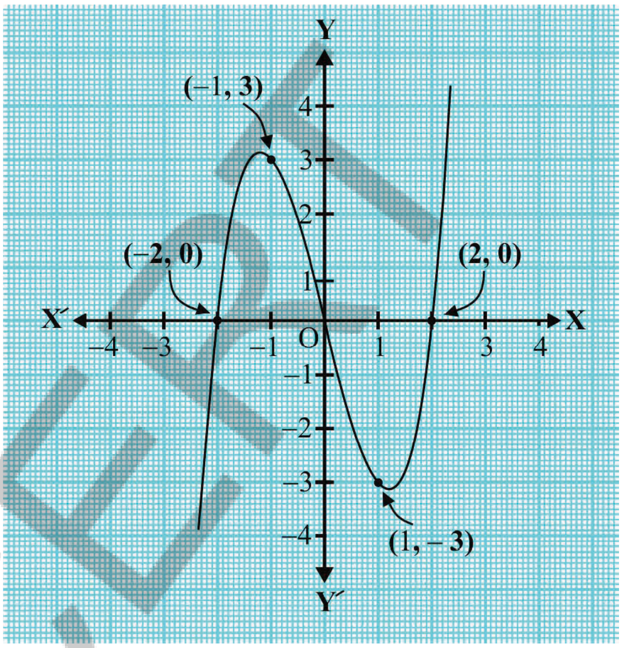


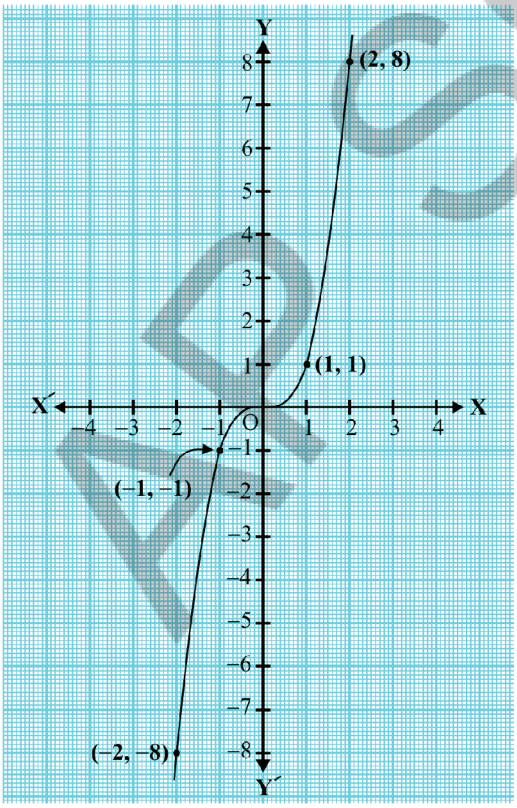
Fig. 2.8

$x^3 - 4x$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு -2, 0 மற்றும் 2 என்பவை பூஜ்ஜியங்கள் என அறியலாம். $y = x^3 - 4x$ எனும் வரைபடம் x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x- அச்சு தூரங்கள் $-2, 0$ மற்றும் 2 ஆகும். இந்த வளைவு x-அச்சை 3 புள்ளிகளில் மட்டும் வெட்டுகின்றன. x-அச்சின் அச்சு தூரங்கள் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

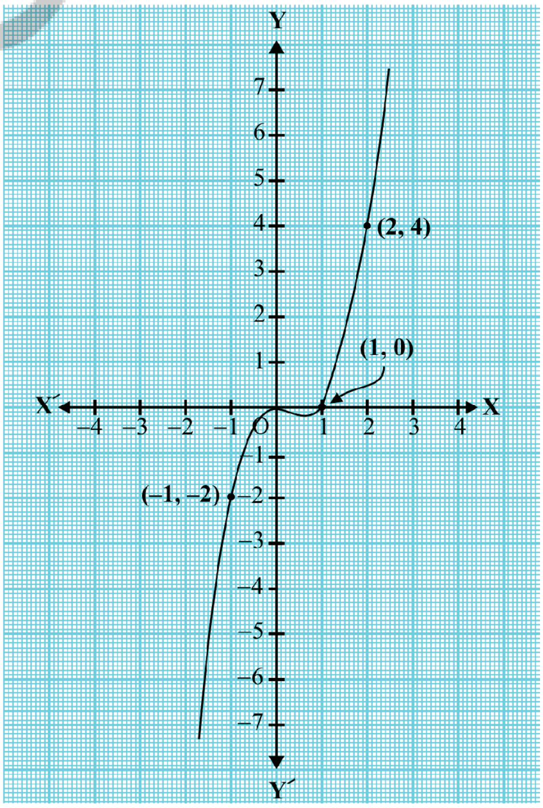


படம். 2.6

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம். முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் x^3 மற்றும் $x^3 - x^2$ ஆகியவற்றை எடுத்துக்கொள்வோம். படம் 2.7 மற்றும் படம் 2.8 ல் உள்ளவாறு $y = x^3$ மற்றும் $y = x^3 - x^2$ வரைபடத்தை வரைவோம்.



படம். 2.7



படம். 2.8

Note that 0 is the only zero of the polynomial x^3. Also, from Fig. 2.7, you can see that 0 is the x-coordinate of the only point where the graph of $y = x^3$ intersects the x-axis. Similarly, since $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$, 0 and 1 are the only zeroes of the polynomial $x^3 - x^2$. Also, from Fig. 2.8, these values are the x-coordinates of the only points where the graph of $y = x^3 - x^2$ intersects the x-axis.

From the examples above, we see that there are at most 3 zeroes for any cubic polynomial. In other words, any polynomial of degree 3 can have at most three zeroes.

Remark : In general, given a polynomial $p(x)$ of degree n, the graph of $y = p(x)$ intersects the x-axis at atmost n points. Therefore, a polynomial $p(x)$ of degree n has at most n zeroes.

Example 1 : Look at the graphs in Fig. 2.9 given below. Each is the graph of $y = p(x)$, where $p(x)$ is a polynomial. For each of the graphs, find the number of zeroes of $p(x)$.

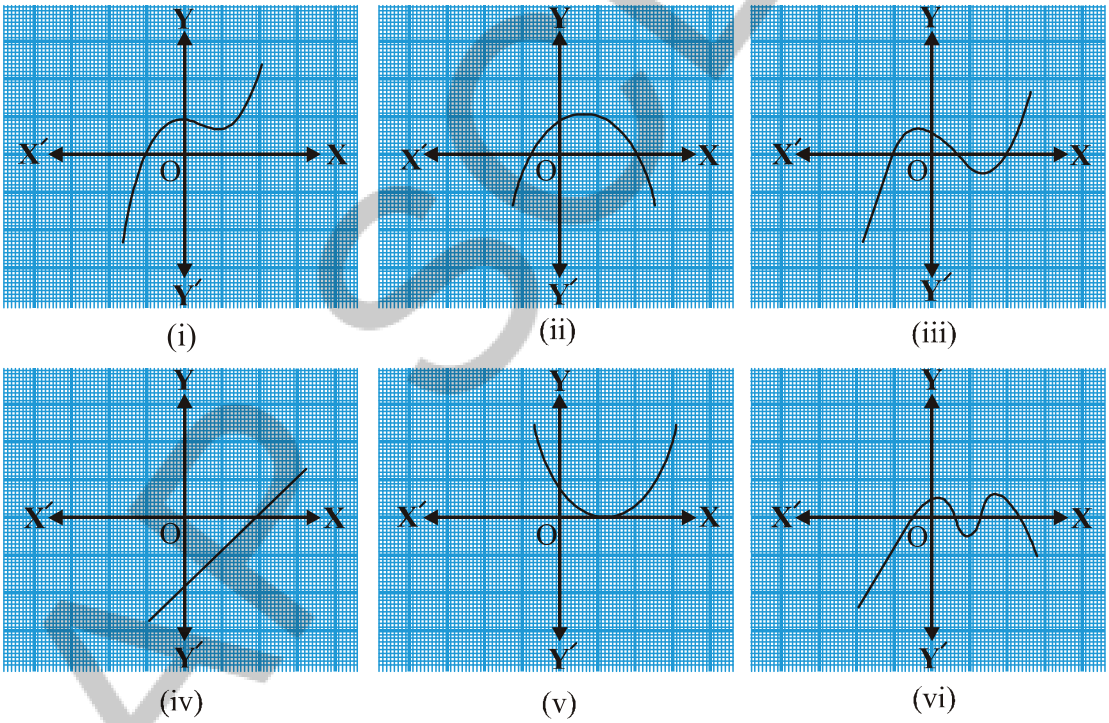


Fig. 2.9

Solution :

(i) The number of zeroes is 1 as the graph intersects the x-axis at one point only.

(ii) The number of zeroes is 2 as the graph intersects the x-axis at two points.

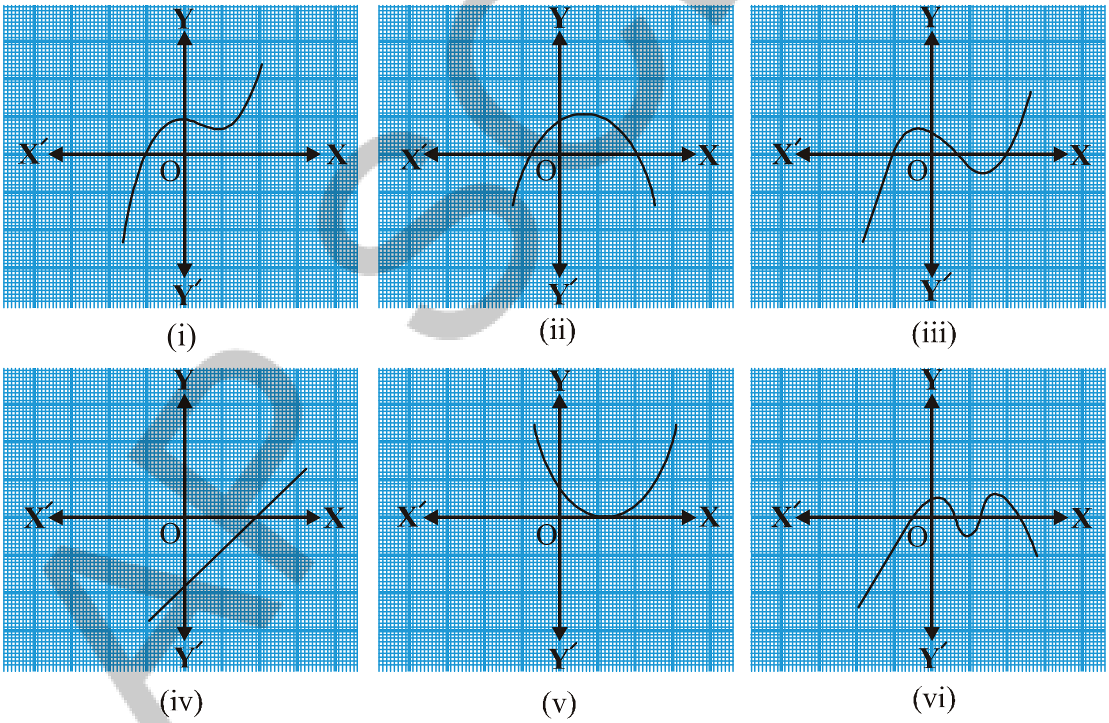
(iii) The number of zeroes is 3. (Why?)

படம் 2.7 லிருந்து x^3 எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் 0 மட்டும் என்பதை கவனிக்க. $y = x^3$ வரைபடத்தில் x-அச்சை 0 என்ற ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டுகிறது. இவ்வாறே $y = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, $x^3 - x^2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் 0 மற்றும் 1 ஆகும். படம்.2.8 லிருந்து $y = x^3 - x^2$ என்ற வரைபடம் x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சு தூரங்கள் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

மேற்காணும் உதாரணங்கள் மூலம் ஒரு முப்படி கோவைக்கு அதிகபட்சம் 3 பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும் என அறியலாம். அதாவது படி 3 ஆக கொண்ட ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக 3 பூஜ்ஜியம் மட்டும் இருக்கும்.

குறிப்பு : பொதுவாக, n படி கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$, $y = p(x)$ என்ற வரைபடம் x-அச்சை அதிகபட்சமாக n புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக்கூறலாம். எனவே n ஐ படியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ க்கு அதிகபட்சமாக n பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடங்கள்.2.9 ஐ கவனி. ஒவ்வொன்றும் $y = p(x)$ ன் வரைபடம் ஆகும். இங்கு $p(x)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும். ஒவ்வொரு வரைபடத்திலிருந்து $p(x)$ ன் பூஜ்ஜிய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடியுங்கள்.



படம். 2.9

தீர்வு :

(i) வரைபடம் x-அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது. எனவே பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 1.

(ii) வரைபடம் x-அச்சை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 2.

(iii) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 3. (ஏன்?)

(iv) The number of zeroes is 1. (Why?)

(v) The number of zeroes is 1. (Why?)

(vi) The number of zeroes is 4. (Why?)

EXERCISE 2.1

1. The graphs of $y = p(x)$ are given in Fig. 2.10 below, for some polynomials $p(x)$. Find the number of zeroes of $p(x)$, in each case.

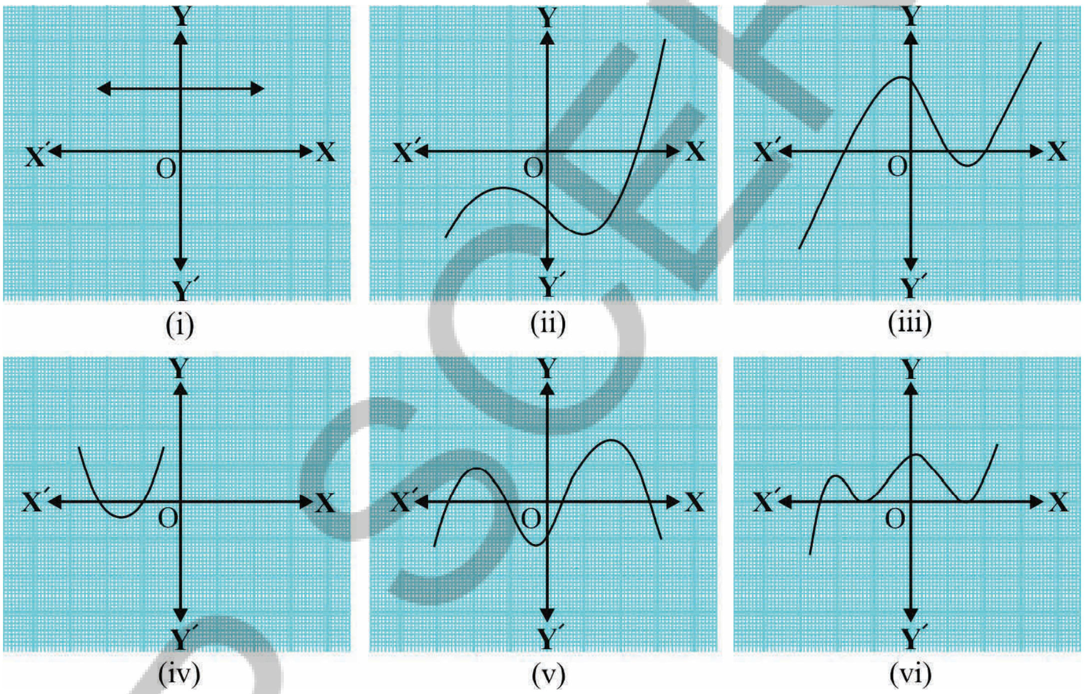


Fig. 2.10

2.3 Relationship between Zeroes and Coefficients of a Polynomial

You have already seen that zero of a linear polynomial $ax + b$ is $-\frac{b}{a}$. We will now try to answer the question raised in Section 2.1 regarding the relationship between zeroes and coefficients of a quadratic polynomial. For this, let us take a quadratic polynomial, say $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$. In Class IX, you have learnt how to factorise quadratic polynomials by splitting the middle term. So, here we need to split the middle term '$-8x$' as a sum of two terms, whose product is $6 \times 2x^2 = 12x^2$. So, we write

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$
$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

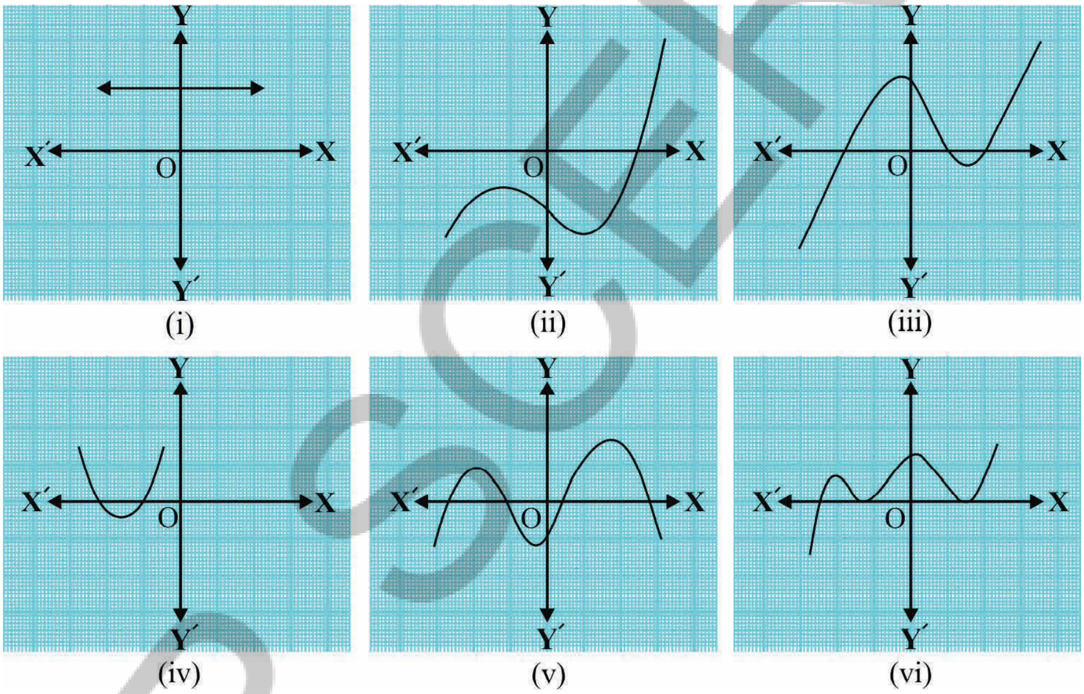
(iv) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 1. (ஏன்?)

(v) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 1. (ஏன்?)

(vi) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 4. (ஏன்?)

பயிற்சி 2.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 2.10 ல் உள்ள படங்கள் $y = p(x)$ ன் வரைபடங்கள் ஆகும். $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.



படம். 2.10

2.3 பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்களுக்கும் பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

$ax + b$ எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் $-\frac{b}{a}$ என நமக்குத் தெரியும். 2.1 பிரிவில் கேட்கப்பட்ட வினாவிற்கு நாம் இப்போது விடையை காண்போம். ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயான தொடர்பை அறிய முயற்சிப்போம். இதற்காக ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். IX ம் வகுப்பில் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை அதன் நடு உறுப்பை பிரித்தல் முறையில் காரணிப்படுத்தும் முறையை கற்றீர்கள். நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட கோவையில் நடு உறுப்பு '$-8x$' ஐ இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதலாக பிரிப்போம். இதன் பெருக்கற்பலன் $6 \times 2x^2 = 12x^2$. எனவே,

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$

$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

So, the value of $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ is zero when $x - 1 = 0$ or $x - 3 = 0$, i.e., when $x = 1$ or $x = 3$. So, the zeroes of $2x^2 - 8x + 6$ are 1 and 3. Observe that :

$$\text{Sum of its zeroes} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2}$$

$$\text{Product of its zeroes} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$$

Let us take one more quadratic polynomial, say, $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$. By the method of splitting the middle term,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2)$$
$$= (3x - 1)(x + 2)$$

Hence, the value of $3x^2 + 5x - 2$ is zero when either $3x - 1 = 0$ or $x + 2 = 0$, i.e., when $x = \frac{1}{3}$ or $x = -2$. So, the zeroes of $3x^2 + 5x - 2$ are $\frac{1}{3}$ and -2. Observe that :

$$\text{Sum of its zeroes} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2}$$

$$\text{Product of its zeroes} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$$

In general, if α* and β* are the zeroes of the quadratic polynomial $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, then you know that $x - \alpha$ and $x - \beta$ are the factors of $p(x)$. Therefore,

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ where } k \text{ is a constant}$$
$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

Comparing the coefficients of x^2, x and constant terms on both the sides, we get

$$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta) \text{ and } c = k\alpha\beta.$$

This gives
$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

* α, β are Greek letters pronounced as 'alpha' and 'beta' respectively. We will use later one more letter 'γ' pronounced as 'gamma'.

APSCERT

$x-1=0$ அல்லது $x-3=0$ எனும் போது $p(x)=2x^2-8x+6$ பூஜ்ஜியமாகிறது. எனவே $2x^2-8x+6$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் 1 மற்றும் 3 ஆகும்.

$$\text{இங்கு பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம்} = 1+3=4=\frac{-(-8)}{2}=\frac{-(x \text{ ன் கெழு})}{x^2 \text{ ன் கெழு}}$$

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன்} = 1\times 3=3=\frac{6}{2}=\frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் கெழு}}$$

நாம் இப்போது மற்றொரு இருபடிக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். $p(x)=3x^2+5x-2$. நடு உறுப்பை பிரித்து எழுத,

$$3x^2+5x-2 = 3x^2+6x-x-2 = 3x(x+2)-1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

எனவே, $3x-1=0$ அல்லது $x+2=0$ எனும்போது $3x^2+5x-2$ பூஜ்ஜியமாகிறது.

அதாவது $x=\frac{1}{3}$ அல்லது $x=-2$. ஆதலால் $3x^2+5x-2$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் $\frac{1}{3}$ மேலும் -2 ஆகும். இதிலிருந்து நாம் பின்வரும் தொடர்பை காணலாம் :

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம்} = \frac{1}{3}+(-2)=\frac{-5}{3}=\frac{-(x \text{ ன் கெழு})}{x^2 \text{ ன் கெழு}}$$

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன்} = \frac{1}{3}\times(-2)=\frac{-2}{3}=\frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் கெழு}}$$

பொதுவாக, $p(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் α* மற்றும் β* எனில் $x-\alpha$ மற்றும் $x-\beta$ ஆகியவை $p(x)$ ன் காரணிகள் ஆகும். எனவே,

$$ax^2+bx+c = k(x-\alpha)(x-\beta), \text{ இங்கு } k \text{ ஒரு மாறிலி}$$
$$= k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$$
$$= kx^2-k(\alpha+\beta)x+k\alpha\beta$$

இதை $p(x)$ ன் x^2, x கெழுக்களுடனும் மற்றும் மாறிலி உறுப்புடனும் ஒப்பிட, நாம் பெறுவது

$$a=k,\ b=-k(\alpha+\beta) \text{ மற்றும் } c=k\alpha\beta.$$

இதிலிருந்து $$\alpha+\beta=\frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \text{ என கிடைக்கிறது.}$$

---

* α,β என்பவை கிரேக்க எழுத்துகள். இவைகளை 'ஆல்பா' மற்றும் 'பீட்டா' என படிக்கிறோம். இவ்வாறே மற்றொரு எழுத்து 'γ' வை கூட பயன்படுத்துகிறோம். இதை 'காமா' என படிக்கிறோம்.

APSCERT

i.e., sum of zeroes $= \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2}$,

product of zeroes $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$.

Let us consider some examples.

Example 2 : Find the zeroes of the quadratic polynomial $x^2 + 7x + 10$, and verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

Solution : We have

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

So, the value of $x^2 + 7x + 10$ is zero when $x + 2 = 0$ or $x + 5 = 0$, i.e., when $x = -2$ or $x = -5$. Therefore, the zeroes of $x^2 + 7x + 10$ are -2 and -5. Now,

$$\text{sum of zeroes} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2},$$

$$\text{product of zeroes} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}.$$

Example 3 : Find the zeroes of the polynomial $x^2 - 3$ and verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

Solution : Recall the identity $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Using it, we can write:

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

So, the value of $x^2 - 3$ is zero when $x = \sqrt{3}$ or $x = -\sqrt{3}$.

Therefore, the zeroes of $x^2 - 3$ are $\sqrt{3}$ and $-\sqrt{3}$.

Now,

$$\text{sum of zeroes} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2},$$

$$\text{product of zeroes} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}.$$

AP SCERT

எனவே, ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின்

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம்} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(x \text{ ன் கெழு})}{x^2 \text{ ன் கெழு}},$$

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன்} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் கெழு}}.$$

கீழ்வரும் உதாரணங்களை கவனி.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $x^2 + 7x + 10$ எனும் இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களை கண்டறிந்து பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

தீர்வு : $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$ ஆகும்.

எனவே, $x + 2 = 0$ அல்லது $x + 5 = 0$ எனும் போது $x^2 + 7x + 10$ ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகிறது. அதாவது, $x = -2$ அல்லது $x = -5$. எனவே, $x^2 + 7x + 10$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் -2 மற்றும் -5. இப்போது,

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம்} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ ன் கெழு})}{x^2 \text{ ன் கெழு}},$$

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன்} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் கெழு}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $x^2 - 3$ ன் பூஜ்ஜியங்களை கண்டறிந்து பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

தீர்வு : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. எனும் முற்றொருமையை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளுங்கள். இதை பயன்படுத்தி:

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

எனவே, $x = \sqrt{3}$ or $x = -\sqrt{3}$. எனும் போது $x^2 - 3$ ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகிறது.

ஆகவே, $x^2 - 3$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் $\sqrt{3}$ மற்றும் $-\sqrt{3}$. ஆகும்.

இப்போது,

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம்} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ ன் கெழு})}{x^2 \text{ ன் கெழு}},$$

$$\text{பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன்} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2 \text{ ன் கெழு}}.$$

AP SCERT

Example 4 : Find a quadratic polynomial, the sum and product of whose zeroes are – 3 and 2, respectively.

Solution : Let the quadratic polynomial be $ax^2 + bx + c$, and its zeroes be α and β.
We have

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

and $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

If $a = 1$, then $b = 3$ and $c = 2$.

So, one quadratic polynomial which fits the given conditions is $x^2 + 3x + 2$.

You can check that any other quadratic polynomial that fits these conditions will be of the form $k(x^2 + 3x + 2)$, where k is real.

Let us now look at cubic polynomials. Do you think a similar relation holds between the zeroes of a cubic polynomial and its coefficients?

Let us consider $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$.

You can check that $p(x) = 0$ for $x = 4, -2, \frac{1}{2}$. Since $p(x)$ can have atmost three zeroes, these are the zeores of $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$. Now,

$$\text{sum of the zeroes} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(\text{Coefficient of } x^2)}{\text{Coefficient of } x^3},$$

$$\text{product of the zeroes} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^3}.$$

However, there is one more relationship here. Consider the sum of the products of the zeroes taken two at a time. We have

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } x^3}.$$

In general, it can be proved that if α, β, γ are the zeroes of the cubic polynomial $ax^3 + bx^2 + cx + d$, then

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் மேலும் பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் முறையே -3 மற்றும் 2, எனில் கோவையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $ax^2 + bx + c$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் α மற்றும் β என்க.

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

மற்றும் $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

நாம் $a = 1$ எனக் கொண்டால் $b = 3$ மற்றும் $c = 2$.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு நமக்கு தேவையான இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 + 3x + 2$ ஆகும்.

$k(x^2 + 3x + 2)$ இங்கு k ஓர் மெய் எண். ஏதேனும் ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு இவை பொருந்துமா என சரிபார்.

நாம் இப்போது முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனிப்போம். முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களுக்கும், அவற்றின் உறுப்புகளின் கெழுக்களுக்கும் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா? என பார்ப்போம்.

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$ எனும் மதிப்புகளுக்கு $p(x) = 0$ ஆகிறது. $p(x)$ க்கு அதிகபட்சமாக மூன்று பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும் என நமக்குத் தெரியும். எனவே, $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் $4, -2$ மற்றும் $\frac{1}{2}$ ஆகும். இப்போது,

பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ ன் கெழு})}{x^3 \text{ ன் கெழு}}$,

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{ மாறிலி உறுப்பு}}{x^3 \text{ ன் கெழு}}$.

இதனுடன் மற்றொரு சிறப்பு தொடர்பும் நாம் இங்கு காணலாம். பூஜ்ஜியங்களை இரண்டு இரண்டாக எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் பெருக்கற்பலனின் மொத்தத்தை காணும்போது நமக்கு புதிய தொடர்பு கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ ன் கெழு}}{x^3 \text{ ன் கெழு}}.$$

பொதுவாக, $ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் α, β, γ எனில்

AP SCERT

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

Let us consider an example.

Example 5* : Verify that 3, –1, $-\frac{1}{3}$ are the zeroes of the cubic polynomial $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$, and then verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

Solution : Comparing the given polynomial with $ax^3 + bx^2 + cx + d$, we get

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$. Further

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

Therefore, 3, –1 and $-\frac{1}{3}$ are the zeroes of $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$.

So, we take $\alpha = 3, \beta = -1$ and $\gamma = -\frac{1}{3}$.

Now,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

* Not from the examination point of view.

AP SCERT

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}.$$

ஒரு உதாரணத்தை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 5* : $3, -1, -\frac{1}{3}$ ஆகியவை $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ என்ற முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களா? என சரிபார். மேலும் பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை சரியார்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ உடன் ஒப்பிடு.

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$ ஆகும். மேலும்

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

ஆகவே, $3, -1$ மற்றும் $-\frac{1}{3}$ ஆகியவை $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

இப்போது, $\alpha = 3, \beta = -1$ மற்றும் $\gamma = -\frac{1}{3}$ எனக் கொண்டால்,

இப்போது,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

* தேர்வுக்கான நோக்கில் அல்ல.

APSCERT

EXERCISE 2.2

1. Find the zeroes of the following quadratic polynomials and verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. Find a quadratic polynomial each with the given numbers as the sum and product of its zeroes respectively.

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. Polynomials of degrees 1, 2 and 3 are called linear, quadratic and cubic polynomials respectively.

2. A quadratic polynomial in x with real coefficients is of the form $ax^2 + bx + c$, where a, b, c are real numbers with $a \neq 0$.

3. The zeroes of a polynomial $p(x)$ are precisely the x-coordinates of the points, where the graph of $y = p(x)$ intersects the x-axis.

4. A quadratic polynomial can have at most 2 zeroes and a cubic polynomial can have at most 3 zeroes.

5. If α and β are the zeroes of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$, then

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. If α, β, γ are the zeroes of the cubic polynomial $ax^3 + bx^2 + cx + d$, then

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

and $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

AP SCERT

பயிற்சி 2.2

1. கீழ்வரும் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களை கண்டறிந்து, பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. சில இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் மேலும் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையிலும் அதற்கான இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்வரும் கருத்துகளை கற்றோம்:

1. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படிகள் முறையே $1, 2$ மற்றும் 3 எனில் அவற்றை நேரிய, இருபடி, முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்கிறோம்.
2. x ஐ மாறியாகவும் மெய்யெண்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ ஆகும். இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.
3. $p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் அதன் வரைபடம் $y = p(x)$, x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் x-அச்சின் அச்சுதூரங்கள் ஆகும்.
4. ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக 2 பூஜ்ஜியங்களும், முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக 3 பூஜ்ஜியங்களும் இருக்கும்.
5. α மேலும் β கள் ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் எனில் $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ எனில்

   $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. α, β, γ முறையே முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் மேலும் $a \neq 0$ எனில்

   $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

   $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

   மேலும் $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

APSCERT

PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES

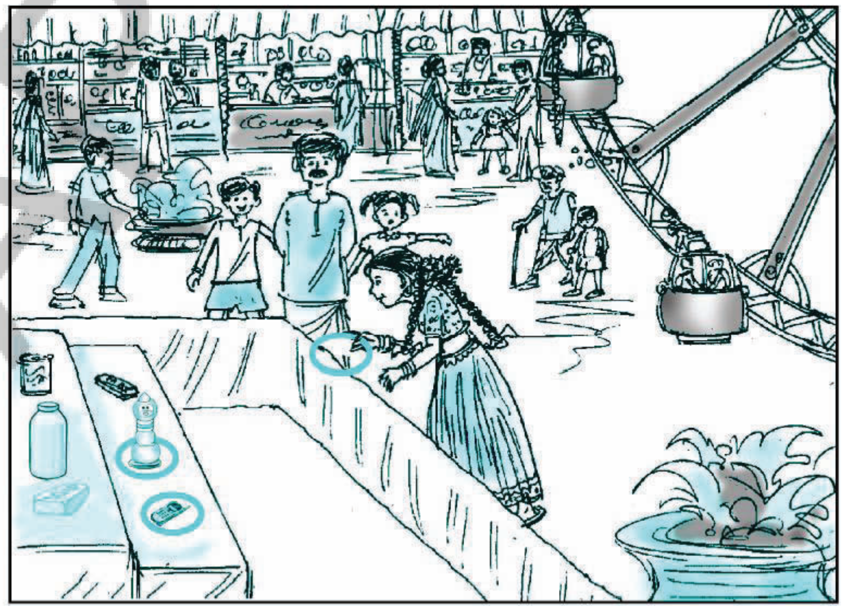
3

3.1 Introduction

You must have come across situations like the one given below :

Akhila went to a fair in her village. She wanted to enjoy rides on the Giant Wheel and play Hoopla (a game in which you throw a ring on the items kept in a stall, and if the ring covers any object completely, you get it). The number of times she played Hoopla is half the number of rides she had on the Giant Wheel. If each ride costs ₹ 3, and a game of Hoopla costs ₹ 4, how would you find out the number of rides she had and how many times she played Hoopla, provided she spent ₹ 20.

May be you will try it by considering different cases. If she has one ride, is it possible? Is it possible to have two rides? And so on. Or you may use the knowledge of Class IX, to represent such situations as linear equations in two variables.



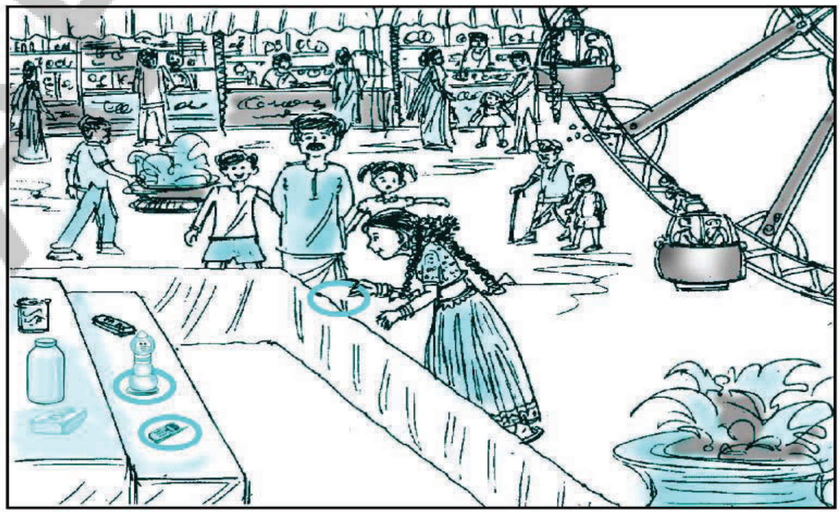
இருமாறிகளில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் 3

3.1 அறிமுகம்

கீழ்க்கண்ட சூழ்நிலைகளில் ஏதேனும் ஒன்றை நீங்கள் கடந்து வந்து இருப்பீர்கள்.

அகிலா அவளுடைய கிராமத்து திருவிழாவிற்கு சென்று இருந்தாள். அவள் அங்கு உள்ள இராட்டினங்கள் மற்றும் (Hoopla) வளையம் விளையாட்டு (ஒரு வளையத்தை அதன் எதிரே உள்ள பொருள் மீது எறிய வேண்டும். எந்த பொருள் மீது அந்த வளையம் முழுமையாக விழுகிறதோ அந்த பொருள் நமக்கு கிடைக்கும்). விளையாடினாள். எத்தனை முறை வளையம் விளையாட்டு விளையாடினாளோ அதில் பாதி அளவு இராட்டினங்களில் ஏறினாள். ஒவ்வொரு இராட்டினத்தில் ஏறுவதற்கு ₹ 3 கொடுக்க வேண்டும். வளையம் விளையாட்டு விளையாட ₹ 4 கொடுக்க வேண்டும். அவள் ₹ 20 செலவு செய்து எத்தனை முறை இராட்டினத்திலும், எத்தனை முறை வளையம் விளையாட்டையும் விளையாட முடியும்?

இதை நாம் பல வழிகளில் தீர்க்க முயற்சிப்போம். அவர் ஒரு முறை இராட்டினத்தில் ஏறினால் இது சாத்தியமா? அல்லது இரண்டுமுறை இராட்டினத்தில் ஏறினால் சாத்தியமா? நாம் IXம் வகுப்பில் படித்த இரு மாறிகளில் நேரிய சமன்பாடுகளை கொண்டு இதை தீர்க்க முயற்சிப்போம்.



Let us try this approach.

Denote the number of rides that Akhila had by x, and the number of times she played Hoopla by y. Now the situation can be represented by the two equations:

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

Can we find the solutions of this pair of equations? There are several ways of finding these, which we will study in this chapter.

3.2 Graphical Method of Solution of a Pair of Linear Equations

A pair of linear equations which has no solution, is called an *inconsistent* pair of linear equations. A pair of linear equations in two variables, which has a solution, is called a *consistent* pair of linear equations. A pair of linear equations which are equivalent has infinitely many distinct common solutions. Such a pair is called a *dependent* pair of linear equations in two variables. Note that a dependent pair of linear equations is always consistent.

We can now summarise the behaviour of lines representing a pair of linear equations in two variables and the existence of solutions as follows:

(i) the lines may intersect in a single point. In this case, the pair of equations has a unique solution (consistent pair of equations).

(ii) the lines may be parallel. In this case, the equations have no solution (inconsistent pair of equations).

(iii) the lines may be coincident. In this case, the equations have infinitely many solutions [dependent (consistent) pair of equations].

Consider the following three pairs of equations.

(i) $x - 2y = 0$ and $3x + 4y - 20 = 0$ (The lines intersect)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ and $4x + 6y - 18 = 0$ (The lines coincide)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ and $2x + 4y - 12 = 0$ (The lines are parallel)

Let us now write down, and compare, the values of $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ and $\frac{c_1}{c_2}$ in all the three examples.

Here, a_1, b_1, c_1 and a_2, b_2, c_2 denote the coefficents of equations given in the general form in Section 3.2.

AP SCERT

இந்த அணுகுமுறையில் முயற்சி செய்வோம்:

அகிலா இராட்டினத்தில் சுற்றிய எண்ணிக்கையை x என்றும், வளையம் விளையாட்டு விளையாடிய எண்ணிக்கையை y எனக் கொள்வோம். இப்போது இந்த சூழலுக்கு இரண்டு சமன்பாடுகள் உருவாகும்.

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

இந்த சமன்பாடுகளுக்கு நாம் தீர்வு காண முடியுமா? இதற்கு பல வழிகள் உள்ளன. அவற்றை இந்த அத்தியாயத்தில் படிப்போம்.

3.2 வரைபட முறை மூலம் ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளில் தீர்வை கண்டறிதல்

ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு இல்லை எனில் அவை ஒவ்வா ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படும். ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு இருக்கும் எனில் அவை இசைவு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படும். ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் சமம் எனில் அவை சார் நிலை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படும். சார்நிலை ஜோடி சமன்பாடுகள் எப்பொழுதும்(இசைவு ஜோடி சமன்பாடுகளாக) இருப்பவை என்பதை நினைவில் கொள்க.

நாம் இப்போது இரு மாறிகளில் ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் நேர் கோடுகள் எவ்வாறு இருக்கும். மேலும் அவற்றின் தீர்வுகள் குறித்து காண்போம்.

(i) இரண்டு நேர் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டி கொண்டால், அந்த சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு இருக்கும் (இசைவு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்).

(ii) இரண்டு நேர் கோடுகளும் இணை கோடுகள் எனில் அவற்றிற்கு தீர்வுகள் இல்லை. (ஒவ்வா ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்)

(iii) இரண்டு நேர் கோடுகளும் ஒன்றின் மீது மற்றொன்று ஒன்றும் எனில் அவற்றிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு (சார் நிலை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்).

பின்வரும் மூன்று ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளை கவனி.

(i) $x - 2y = 0$ மேலும் $3x + 4y - 20 = 0$ (வெட்டி கொள்ளும் கோடுகள்)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ மேலும் $4x + 6y - 18 = 0$ (ஒன்றும் கோடுகள்)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ மேலும் $2x + 4y - 12 = 0$ (இணை கோடுகள்)

a_1, b_1, c_1 மேலும் a_2, b_2, c_2 என்பவைகள் இரு மாறியில் அமைத்த ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் குணகங்கள் என்க. மேல் உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ மற்றும் $\frac{c_1}{c_2}$ மதிப்புகளை என ஒப்பிடுவோம்.

APSCERT

Table 3.1

Sl No.	Pair of lines	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	Compare the ratios	Graphical representation	Algebraic interpretation
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	Intersecting lines	Exactly one solution (unique)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	Coincident lines	Infinitely many solutions
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	Parallel lines	No solution

From the table above, you can observe that if the lines represented by the equation

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

and $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

are (i) intersecting, then $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

(ii) coincident, then $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(iii) parallel, then $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

In fact, the converse is also true for any pair of lines. You can verify them by considering some more examples by yourself.

Let us now consider some more examples to illustrate it.

Example 1 : Check graphically whether the pair of equations

$$x + 3y = 6 \qquad (1)$$

and $$2x - 3y = 12 \qquad (2)$$

is consistent. If so, solve them graphically.

Solution : Let us draw the graphs of the Equations (1) and (2). For this, we find two solutions of each of the equations, which are given in Table 3.2

அட்டவணை 3.1

வ. எண்	ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	விகிதங்களின் ஒப்பிடுதல்	வரைபடம்	இயற்கணித விவரம்
1.	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	வெட்டிக் கொள்ளும் கோடுகள்	ஒரே ஒரு தீர்வு
2.	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	ஒன்றும் கோடுகள்	முடிவிலா தீர்வு
3.	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	இணை கோடுகள்	தீர்வு இல்லை

APSCERT

மேற்கண்ட அட்டவணையில் இருந்து,

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்ற சமன்பாடுகளின் கோடுகள்.

(i) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\cdot$ எனில் வெட்டிக் கொள்ளும்

(ii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\cdot$ எனில் ஒன்றின் மீது ஒன்று ஒன்றும்.

(iii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\cdot$ எனில் இணை கோடுகள் ஆகும்.

நேரிய ஜோடி கோடுகளில் இதன் மறுதலையும் மெய்யாகும். மேலும் எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு இவற்றை சரிபார்க்கலாம். நாம் இப்போது சில எடுத்துக்காட்டுகளை கவனிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x+3y=6 \qquad (1)$$
$$2x-3y=12 \qquad (2)$$

என்ற ஜோடி சமன்பாடுகள் இசைவு சமன்பாடுகளா? என்பதை வரைபடம் வரைந்து சரிபார். மேலும் இவற்றின் தீர்வை வரைபடத்தில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : நாம் இப்போது சமன்பாடு (1) மற்றும் (2)ன் வரைபடத்தை வரைபட தாளில் வரைவோம். ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் இரண்டு தீர்வுகளை கண்டுபிடிப்போம். அவை அட்டவணை 3.2ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

Table 3.2

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	– 4	–2

Plot the points A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) and Q(3, – 2) on graph paper, and join the points to form the lines AB and PQ as shown in Fig. 3.1.

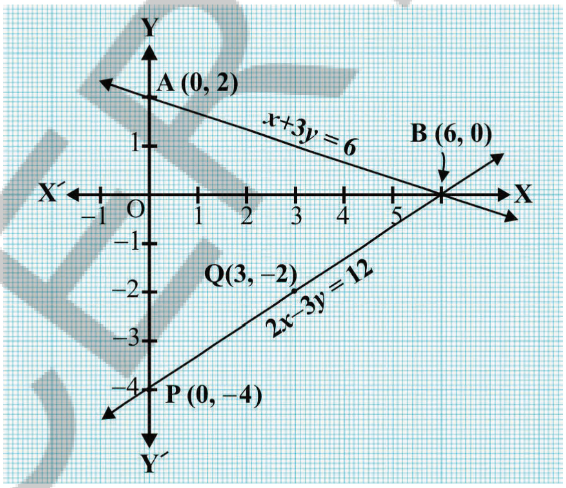


Fig. 3.1

We observe that there is a point B (6, 0) common to both the lines AB and PQ. So, the solution of the pair of linear equations is $x = 6$ and $y = 0$, i.e., the given pair of equations is consistent.

Example 2 : Graphically, find whether the following pair of equations has no solution, unique solution or infinitely many solutions:

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

Solution : Multiplying Equation (2) by $\frac{5}{3}$, we get

$$5x - 8y + 1 = 0$$

But, this is the same as Equation (1). Hence the lines represented by Equations (1) and (2) are coincident. Therefore, Equations (1) and (2) have infinitely many solutions.

Plot few points on the graph and verify it yourself.

Example 3 : Champa went to a 'Sale' to purchase some pants and skirts. When her friends asked her how many of each she had bought, she answered, "The number of skirts is two less than twice the number of pants purchased. Also, the number of skirts is four less than four times the number of pants purchased". Help her friends to find how many pants and skirts Champa bought.

AP SCERT

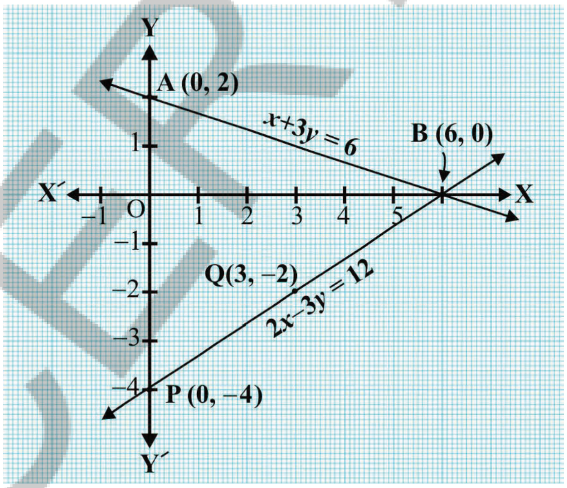
அட்டவணை 3.2

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	-4	-2

A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) மேலும் Q(3, – 2) புள்ளிகளை வரைபடதாளில் குறி. மேலும் AB மற்றும் PQ புள்ளிகளை படம்3.1ல் காட்டியபடி இணை.

B (6, 0) என்ற புள்ளியில் AB மற்றும் PQ நேர் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்கின்றன. எனவே இந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வு $x = 6$ மற்றும் $y = 0$, ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் இசைவு சமன்பாடுகள் ஆகும்.



படம் 3.1

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழே கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லையா? ஒரே ஒரு தீர்வா? அல்லது முடிவில்லா தீர்வா? என வரைபடம் வரைந்து கண்டுபிடி.

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

தீர்வு : சமன்பாடு (2) ஐ $\frac{5}{3}$, ல் பெருக்கினால் $5x - 8y + 1 = 0$ கிடைக்கும். சமன்பாடு (1)ம் இதுவும் சமம். எனவே சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) க்கு முடிவிலா தீர்வுகள் உள்ளன.

வரைபடத்தில் சில புள்ளிகளை குறித்து இதை சரிபார்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : சாம்பா துணிக்கடைக்கு சென்று சில சட்டை மற்றும் பேண்ட்களை வாங்கி வந்தாள். அவளுடைய தோழி எத்தனை சட்டை மற்றும் பேண்ட்களை வாங்கினாய்? எனக் கேட்டாள். அதற்கு அவள் “நான் வாங்கிய சட்டைகளின் எண்ணிக்கை பேண்ட்களின் எண்ணிக்கையின் இருமடங்கை விட 2 குறைவு. அவ்வாறே சட்டைகளின் எண்ணிக்கை பேண்ட்களின் எண்ணிக்கையின் நான்கு மடங்கை விட நான்கு குறைவு” என்றாள். சாம்பா வாங்கிய சட்டை மற்றும் பேண்ட் எண்ணிக்கையை கண்டறிய அவளுடைய தோழிக்கு உதவ முடியுமா?

Solution : Let us denote the number of pants by x and the number of skirts by y. Then the equations formed are :

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

and $$y = 4x - 4 \quad (2)$$

Let us draw the graphs of Equations (1) and (2) by finding two solutions for each of the equations. They are given in Table 3.3.

Table 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	– 2

x	0	1
$y = 4x - 4$	– 4	0

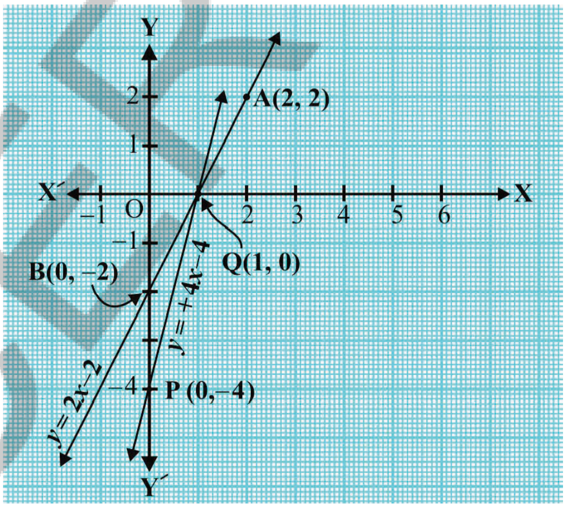


Fig. 3.2

Plot the points and draw the lines passing through them to represent the equations, as shown in Fig. 3.2.

The two lines intersect at the point (1, 0). So, $x = 1$, $y = 0$ is the required solution of the pair of linear equations, i.e., the number of pants she purchased is 1 and she did not buy any skirt.

Verify the answer by checking whether it satisfies the conditions of the given problem.

EXERCISE 3.1

1. Form the pair of linear equations in the following problems, and find their solutions graphically.

   (i) 10 students of Class X took part in a Mathematics quiz. If the number of girls is 4 more than the number of boys, find the number of boys and girls who took part in the quiz.

AP SCERT

தீர்வு : பேண்ட்களின் எண்ணிக்கையை x என்க. சட்டைகளின் எண்ணிக்கையை y என்க.

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

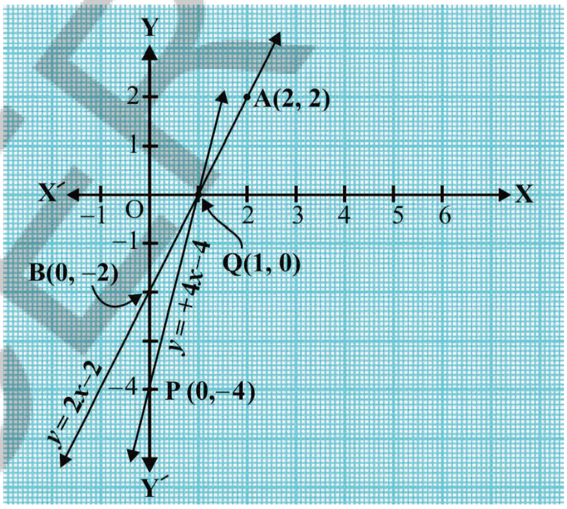
மேலும் $$y = 4x - 4 \qquad (2)$$ என்ற சமன்பாடுகள் உருவாகின்றன.

அட்டவணை 3.3ல் காட்டி உள்ளபடி சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) க்கு இரண்டு தீர்வுகளை கண்டுபிடித்து அதை வரைபடத்தில் குறி.

அட்டவணை 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0



படம் 3.2

புள்ளிகளை குறித்து அவற்றை படம் 3.2ல் காட்டியபடி இரண்டு நேர்கோடுகளாக வரைக.

இந்த இரண்டு நேர்கோடுகளும் $(1, 0)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. எனவே $x = 1, y = 0$ என்பது நமக்கு தேவையான தீர்வு ஆகும். எனவே வாங்கிய பேண்ட்களின் எண்ணிக்கை 1. மேலும் சட்டைகள் ஏதும் வாங்க வில்லை.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கு இந்த தீர்வுகள் பொருந்துகின்றனவா? என்பதை சரிபார்க்க.

பயிற்சி 3.1

1. கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் வடிவில் எழுதி, அவற்றிற்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க.

   (i) X ம் வகுப்பு மாணவர்கள் 10 பேர் கணித வினாடி வினாவில் பங்கு பெற்றார்கள். இதில் கலந்து கொண்ட மாணவிகளின் எண்ணிக்கை மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை விட 4 அதிகம் எனில் வினாடி வினாவில் கலந்துகொண்ட மாணவ, மாணவிகள் எத்தனை பேர்?

AP SCERT

(ii) 5 pencils and 7 pens together cost ₹ 50, whereas 7 pencils and 5 pens together cost ₹ 46. Find the cost of one pencil and that of one pen.

2. On comparing the ratios $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ and $\frac{c_1}{c_2}$, find out whether the lines representing the following pairs of linear equations intersect at a point, are parallel or coincident:

(i) $5x - 4y + 8 = 0$; $7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$; $18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$; $2x - y + 9 = 0$

3. On comparing the ratios $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ and $\frac{c_1}{c_2}$, find out whether the following pair of linear equations are consistent, or inconsistent.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. Which of the following pairs of linear equations are consistent/inconsistent? If consistent, obtain the solution graphically:

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. Half the perimeter of a rectangular garden, whose length is 4 m more than its width, is 36 m. Find the dimensions of the garden.

6. Given the linear equation $2x + 3y - 8 = 0$, write another linear equation in two variables such that the geometrical representation of the pair so formed is:

(i) intersecting lines

(ii) parallel lines

(iii) coincident lines

7. Draw the graphs of the equations $x - y + 1 = 0$ and $3x + 2y - 12 = 0$. Determine the coordinates of the vertices of the triangle formed by these lines and the x-axis, and shade the triangular region.

APSCERT

(ii) 5 பென்சில்கள் 7 பேனாக்களின் விலை ₹ 50. அவ்வாறே 7 பென்சில்கள் மற்றும் 5 பேனாக்கள் விலை ₹ 46 எனில் ஒவ்வொரு பேனா மற்றும் பென்சில்களின் விலை என்ன?

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ மற்றும் $\frac{c_1}{c_2}$ விகிதங்களை ஒப்பிட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஜோடி சமன்பாடுகளின் கோடுகள் வெட்டி கொள்ளும் கோடுகளா? இணை கோடுகளா? அல்லது ஒன்றும் கோடுகளா? எனக் கண்டுபிடி.

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ மற்றும் $\frac{c_1}{c_2}$ விகிதங்களளை ஒப்பிட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஜோடி சமன்பாடுகள் இசைந்த சமன்பாடுகளா? அல்லது ஒவ்வா ஜோடி சமன்பாடுகளா என கண்டுபிடி.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. கீழ்கண்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளில் எவை இசைந்த சமன்பாடுகள்/ஒவ்வா ஜோடி சமன்பாடுகள்? இசைந்த சமன்பாடுகள் எனில் வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க.

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. அகலத்தை விட 4மீ அதிக நீளமுடைய செவ்வகத்தின் சுற்றளவில் பாதி 36மீ எனில் செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி.

6. $2x + 3y - 8 = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேரிய சமன்பாடு. இதற்கு
(i) வெட்டும் கோடுகள் (ii) இணைகோடு
(iii) ஒன்றும் கோடு என மூன்று நேரிய சமன்பாடுகளை வரைபடத்தில் குறி.

7. $x - y + 1 = 0$ மற்றும் $3x + 2y - 12 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் வரைக. இதன் அச்சு புள்ளிகள் x-அச்சில் ஒரு முக்கோண வடிவை உருவாக்கும். அந்த முக்கோண பகுதியை நிழலிடுக.

3.3 Algebraic Methods of Solving a Pair of Linear Equations

In the previous section, we discussed how to solve a pair of linear equations graphically. The graphical method is not convenient in cases when the point representing the solution of the linear equations has non-integral coordinates like $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, (–1.75, 3.3), $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$, etc. There is every possibility of making mistakes while reading such coordinates. Is there any alternative method of finding the solution? There are several algebraic methods, which we shall now discuss.

3.3.1 Substitution Method : We shall explain the method of substitution by taking some examples.

Example 4 : Solve the following pair of equations by substitution method:

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$

$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

Solution :

Step 1 : We pick either of the equations and write one variable in terms of the other. Let us consider the Equation (2) :

$$x + 2y = 3$$

and write it as $\qquad x = 3 - 2y \qquad (3)$

Step 2 : Substitute the value of x in Equation (1). We get

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

i.e., $\qquad 21 - 14y - 15y = 2$

i.e., $\qquad -29y = -19$

Therefore, $\qquad y = \frac{19}{29}$

Step 3 : Substituting this value of y in Equation (3), we get

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

Therefore, the solution is $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$.

AP SCERT

3.3 ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை இயற்கணித முறையில் கண்டறிதல்:

முந்தைய பிரிவில் நேரிய சமன்பாடு ஜோடிகளின் தீர்வை வரைபடம் மூலம் கண்டறியும் முறையை கற்றுக் கொண்டோம். ஆனால் தீர்வை குறிக்கும் புள்ளிகள் அச்சு தூரங்கள் முழு எண்களாக இல்லாத போது இம்முறை சற்று கடினம். உதாரணத்திற்கு தீர்வுகள் $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$, (–1.75, 3.3), $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ எனும் வடிவில் இருக்கும் போது வரைபடத்தில் பிழை ஏற்பட வாய்ப்பு உள்ளது. இம்மாதிரியான தீர்வுகளை கண்டறிய மாற்று முறைகள் உள்ளதா? இயற்கணித முறையில் அநேக முறைகள் உள்ளன. அதில் சிலவற்றை கற்றுக் கொள்வோம்.

3.3.1 பிரதியீட்டு முறை: சில எடுத்துக் காட்டுகள் கொண்டு இந்த முறையை விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : கீழ்கண்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளை பிரதியீட்டு முறையில் தீர்க்க.

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$

$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

தீர்வு :

படி 1 : ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள இரு மாறிகளில் ஒரு மாறியை மற்றொரு மாறியின் பொருளாக மாற்றி எழுது. சமன்பாடு (2)ஐ எடுத்து கொள்வோம்.

$$x + 2y = 3$$

$$x = 3 - 2y \qquad (3)$$

படி 2 : சமன்பாடு (1)ல் x ன் மதிப்பை பிரதியிட,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$21 - 14y - 15y = 2$$

$$-29y = -19$$

எனவே, $y = \frac{19}{29}$ என நமக்கு கிடைக்கும்.

படி 3 : சமன்பாடு (3)ல் y ன் மதிப்பை பிரதியிட,

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

எனவே, $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$ என்பன தீர்வு ஆகும்.

AP SCERT

Verification : Substituting $x = \frac{49}{29}$ and $y = \frac{19}{29}$, you can verify that both the Equations (1) and (2) are satisfied.

To understand the substitution method more clearly, let us consider it stepwise:

Step 1 : Find the value of one variable, say y in terms of the other variable, i.e., x from either equation, whichever is convenient.

Step 2 : Substitute this value of y in the other equation, and reduce it to an equation in one variable, i.e., in terms of x, which can be solved. Sometimes, as in Examples 9 and 10 below, you can get statements with no variable. If this statement is true, you can conclude that the pair of linear equations has infinitely many solutions. If the statement is false, then the pair of linear equations is inconsistent.

Step 3 : Substitute the value of x (or y) obtained in Step 2 in the equation used in Step 1 to obtain the value of the other variable.

Remark : We have **substituted** the value of one variable by expressing it in terms of the other variable to solve the pair of linear equations. That is why the method is known as the *substitution method*.

Example 5 : Solve the following question—Aftab tells his daughter, "Seven years ago, I was seven times as old as you were then. Also, three years from now, I shall be three times as old as you will be." (Isn't this interesting?) Represent this situation algebraically and graphically by the method of substitution.

Solution : Let s and t be the ages (in years) of Aftab and his daughter, respectively. Then, the pair of linear equations that represent the situation is

$$s - 7 = 7(t - 7), \text{ i.e., } \quad s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$$

and

$$s + 3 = 3(t + 3), \text{ i.e., } \quad s - 3t = 6 \quad (2)$$

Using Equation (2), we get $s = 3t + 6$.

Putting this value of s in Equation (1), we get

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

i.e., $4t = 48$, which gives $t = 12$.

Putting this value of t in Equation (2), we get

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

AP SCERT

சரிபார்த்தல்: இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் $x = \frac{49}{29}$ மற்றும் $y = \frac{19}{29}$ ஐ பிரதியிட்டு சரிபார்க்க.

பிரதியீட்டு முறை மிகவும் எளிமையானது. இதனை படிப்படியாக பார்ப்போம்.

படி 1 : ஒரு மாறியை மற்றொரு மாறியின் பொருளாக மாற்று. y ஐ x ன் பொருளாக மாற்றி மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிடு. இதில் எது நமக்கு எளிதாக உள்ளதோ அதை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

படி 2 : படி 1ல் கிடைத்த சமன்பாட்டை மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு அதை y ல் ஒரு மாறி சமன்பாடாக, அதாவது x ன் பொருளாக மாற்று. x ன் மதிப்பை கண்டுபிடி. சில நேரங்களில் எடுத்துக்காட்டு 9 மற்றும் 10ல் உள்ளவாறு மாறிகள் இல்லாமல் கூற்றுகளாக இருக்கும். அந்த கூற்று சரியானது எனில், அந்த நேரிய சமன்பாடுகள் முடிவில்லா தீர்வுகளை கொண்டுஇருக்கும் என முடிவிற்கு வரலாம். அந்த கூற்று தவறு எனில் அந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஒவ்வா சமன்பாடுகள் ஆகும்.

படி 3 : x (அ) y ன் மதிப்பை படி 2ல் உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு படி 1ல் உள்ள மாறிகளின் மதிப்பை கண்டறியலாம்.

குறிப்பு : ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியின் பொருளாக எழுதி, பிரதியிட்டு நேரிய சமன்பாட்டின் தீர்வை நாம் பெறுகிறோம். எனவே இம்முறையை **பிரதியீட்டு முறை** என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : பின்வரும் சமன்பாட்டை தீர்:- அப்டாப் (Aftab) அவன் மகளிடம் "7 வருடங்களுக்கு முன் என் வயது அப்போதைய உன் வயதைப் போல் 7 மடங்கு இருந்தது. அவ்வாறே இப்போதிலிருந்து 3 வருடங்கள் கழித்து என் வயது உன் வயதிற்கு மூன்று மடங்கு ஆகும்." (இது ஆர்வமாக உள்ளதா?) என்றான். இந்த சூழலை இயற்கணித முறையில் எழுதி பிரதியீட்டு முறையில் தீர்க்க :

தீர்வு : அப்டாப் (Aftab) மற்றும் அவளுடைய மகளின் வயதை s மற்றும் t (வருடங்கள்) என்க. இந்த சூழலுக்கு நேரிய சமன்பாடு

$s - 7 = 7(t - 7)$, அல்லது $\quad s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$

மற்றும் $s + 3 = 3(t + 3)$, அல்லது $\quad s - 3t = 6 \quad (2)$

(2)ம் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி $s = 3t + 6$ஐ பெறலாம்.

sன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட்டால்,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

$4t = 48, \; t = 12$ என பெறலாம்.

t ன் மதிப்பை சமன்பாடு (2)ல் பிரதியிட்டால்

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

So, Aftab and his daughter are 42 and 12 years old, respectively.

Verify this answer by checking if it satisfies the conditions of the given problems.

Example 6 : In a shop the cost of 2 pencils and 3 erasers is ₹9 and the cost of 4 pencils and 6 erasers is ₹18. Find the cost of each pencil and each eraser.

Solution : The pair of linear equations formed were:

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

We first express the value of x in terms of y from the equation $2x + 3y = 9$, to get

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \qquad (3)$$

Now we substitute this value of x in Equation (2), to get

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

i.e., $$18 - 6y + 6y = 18$$

i.e., $$18 = 18$$

This statement is true for all values of y. However, we do not get a specific value of y as a solution. Therefore, we cannot obtain a specific value of x. This situation has arisen because both the given equations are the same. Therefore, Equations (1) and (2) have *infinitely many solutions*. We cannot find a unique cost of a pencil and an eraser, because there are many common solutions, to the given situation.

Example 7 : Two rails are represented by the equations $x + 2y - 4 = 0$ and $2x + 4y - 12 = 0$. Will the rails cross each other?

Solution : The pair of linear equations formed were:

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

We express x in terms of y from Equation (1) to get

$$x = 4 - 2y$$

Now, we substitute this value of x in Equation (2) to get

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

எனவே அப்பாப் மற்றும் அவள் மகளின் வயது முறையே 42 மற்றும் 12 வருடங்களாகும்.

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்கு இந்த மதிப்புகள் சரியாக உள்ளதா என சரிபார்க்க.

எடுத்துக்காட்டு 6 : ஒரு கடையில் 2 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் விலை ₹9 மற்றும் 4 பென்சில்கள் மற்றும் 6 அழிப்பான்களின் விலை ₹18 எனில் ஒரு பென்சில் மற்றும் ஒரு அழிப்பான் விலையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

$2x + 3y = 9$ என்ற சமன்பாட்டில் இருந்து x ன் மதிப்பை y ல் பெறலாம்.

$$x = \frac{9-3y}{2} \qquad (3)$$

சமன்பாடு (2)ல் x ன் மதிப்பை பிரதியிட்டால்

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$

அல்லது $$18 - 6y + 6y = 18$$

$18 = 18$ என நாம் பெறலாம்.

இந்த கூற்று yன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய் ஆகும். எனவே y க்கு தீர்வாக எந்த ஒரு மதிப்பையும் கூற முடியாது. எனவே xக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை கூற முடியாது. இந்த சூழல் ஏன் ஏற்பட்டது என்றால் இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒன்றே. எனவே சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) க்கு முடிவில்லா தீர்வுகள் உள்ளன. எனவே பென்சில் மற்றும் அழிப்பான்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட விலையை கூறமுடியாது. ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட சூழலுக்கு பொதுவான பல தீர்வுகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு7 : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் இரண்டு இரயில்கள் செல்கின்றன. இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று மோதி கொள்ளுமா?
$x + 2y - 4 = 0$ மற்றும் $2x + 4y - 12 = 0$.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்.

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)ல் x ன் மதிப்பை y ல் பெறலாம்.

$$x = 4 - 2y$$

நாம் இப்போது சமன்பாடு (2)ல் x ன் மதிப்பை பிரதியிட்டால்

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

i.e., $8 - 12 = 0$

i.e., $-4 = 0$

which is a false statement.

Therefore, the equations do not have a common solution. So, the two rails will not cross each other.

EXERCISE 3.2

1. Solve the following pair of linear equations by the substitution method.

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. Solve $2x + 3y = 11$ and $2x - 4y = -24$ and hence find the value of 'm' for which $y = mx + 3$.

3. Form the pair of linear equations for the following problems and find their solution by substitution method.

(i) The difference between two numbers is 26 and one number is three times the other. Find them.

(ii) The larger of two supplementary angles exceeds the smaller by 18 degrees. Find them.

(iii) The coach of a cricket team buys 7 bats and 6 balls for ₹ 3800. Later, she buys 3 bats and 5 balls for ₹ 1750. Find the cost of each bat and each ball.

(iv) The taxi charges in a city consist of a fixed charge together with the charge for the distance covered. For a distance of 10 km, the charge paid is ₹ 105 and for a journey of 15 km, the charge paid is ₹ 155. What are the fixed charges and the charge per km? How much does a person have to pay for travelling a distance of 25 km?

(v) A fraction becomes $\frac{9}{11}$, if 2 is added to both the numerator and the denominator. If, 3 is added to both the numerator and the denominator it becomes $\frac{5}{6}$. Find the fraction.

AP SCERT

அதாவது $8 - 12 = 0$

$-4 = 0$

இது ஒரு தவறான கூற்று.

எனவே, இந்த கூற்றுக்கு பொதுவான தீர்வு இல்லை. ஆகவே இந்த இரண்டு இரயில்களும் மோதிக் கொள்ளாது.

பயிற்சி 3.2

1. பிரதியீட்டு முறையில் பின்வரும் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ மற்றும் $2x - 4y = -24$ ஐ தீர்க்க மேலும் $y = mx + 3$ல் 'm' ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

3. பின்வரும் கணக்குகளை ஜோடி நேரிய சமன்பாடு வடிவில் எழுதுக. மேலும் அவற்றின் தீர்வுகளை பிரதியீட்டு முறையில் கண்டுபிடிக்க.

(i) இரண்டு எண்களின் வித்தியாசம் 26 மேலும் அதில் ஓர் எண் மற்றொரு எண்ணில் மூன்று மடங்கு எனில் அந்த எண்களை கண்டுபிடி.

(ii) இரண்டு மிகை நிரப்பு கோணங்களில் பெரிய கோணம் சிறிய கோணத்தை விட 18° அதிகம் எனில் அந்த கோணங்களை கண்டுபிடி.

(iii) ஒரு கிரிக்கெட் கற்று கொடுப்பவர் தன்னுடைய குழுவிற்காக 7 மட்டைகள் மற்றும் 6 பந்துகளை ₹ 3800க்கும் பின்னர் 3 மட்டைகள் மற்றும் 5 பந்துகளை ₹ 1750க்கும் வாங்கினார். ஒவ்வொரு மட்டை மற்றும் பந்தின் விலையை கண்டுபிடி.

(iv) ஒரு நகரத்தில் ஆட்டோ கட்டணமானது நிலையான கட்டணத்துடன் பயணம் செய்யும் தூரத்திற்கு ஏற்பவும் சேர்த்து வசூலிக்கப்படுகிறது. 10கி.மீ பயணத்திற்கு ₹ 105 ம், 15கி.மீ பயணத்திற்கு ₹ 155ம் வசூலித்தால் இதில் குறைந்த பட்ச கட்டணம் எவ்வளவு? மேலும் 1கி.மீ பயணத்திற்கு கட்டணம் எவ்வளவு? ஒருவர் 25கி.மீ பயணம் செய்தால் எவ்வளவு பணம் செலுத்த வேண்டும்?

(v) ஒரு பின்னத்தின் பகுதி, தொகுதி உடன் 2ஐ கூட்டினால் $\frac{9}{11}$ ஆகிறது. மேலும் பகுதி மற்றும் தொகுதியுடன் 3ஐ கூட்டினால் $\frac{5}{6}$ ஆகிறது எனில் அந்த பின்னத்தை கண்டுபிடி.

AP SCERT

(vi) Five years hence, the age of Jacob will be three times that of his son. Five years ago, Jacob's age was seven times that of his son. What are their present ages?

3.3.2 Elimination Method

Now let us consider another method of eliminating (i.e., removing) one variable. This is sometimes more convenient than the substitution method. Let us see how this method works.

Example 8 : The ratio of incomes of two persons is 9 : 7 and the ratio of their expenditures is 4 : 3. If each of them manages to save ₹ 2000 per month, find their monthly incomes.

Solution : Let us denote the incomes of the two person by ₹ $9x$ and ₹ $7x$ and their expenditures by ₹ $4y$ and ₹ $3y$ respectively. Then the equations formed in the situation is given by :

$$9x - 4y = 2000 \qquad (1)$$

and

$$7x - 3y = 2000 \qquad (2)$$

Step 1 : Multiply Equation (1) by 3 and Equation (2) by 4 to make the coefficients of y equal. Then we get the equations:

$$27x - 12y = 6000 \qquad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \qquad (4)$$

Step 2 : Subtract Equation (3) from Equation (4) to *eliminate* y, because the coefficients of y are the same. So, we get

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

i.e.,

$$x = 2000$$

Step 3 : Substituting this value of x in (1), we get

$$9(2000) - 4y = 2000$$

i.e.,

$$y = 4000$$

So, the solution of the equations is $x = 2000$, $y = 4000$. Therefore, the monthly incomes of the persons are ₹ 18,000 and ₹ 14,000, respectively.

Verification : 18000 : 14000 = 9 : 7. Also, the ratio of their expenditures = 18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3

Remarks :

1. The method used in solving the example above is called the *elimination* method, because we eliminate one variable first, to get a linear equation in one variable.

(vi) ஐந்து வருடங்களுக்கு பிறகு ஜாகப் வயது அவனுடைய மகனின் வயதில் மூன்று மடங்கு ஆகும். ஐந்து வருடங்களுக்கு முன்பு ஜாகப் வயது அவனுடைய மகனின் வயதில் ஏழு மடங்கு எனில் அவர்களுடை தற்போதைய வயது என்ன?

3.3.2 நீக்கல் முறை

நாம் இப்பொழுது ஒரு மாறியை நீக்கல் முறையில் கண்டறிதலை பார்ப்போம். பிரதியீட்டு முறையை விட இது சுலபமானது. இம்முறையில் எவ்வாறு தீர்த்தல் என்பதை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 : இரண்டு நபர்களின் வருவாய் விகிதங்கள் 9 : 7 மேலும் அவர்களின் செலவு விகிதங்கள் 4 : 3 ஒவ்வொருவரும் மாதத்திற்கு ₹ 2000 சேமிக்கிறார்கள் எனில் அவர்களின் மாத வருமாயைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : இரண்டு நபர்களின் வருவாயை ₹ $9x$ மற்றும் ₹ $7x$ என்றும் செலவுகளை ₹ $4y$ மற்றும் ₹ $3y$ என்றும் குறிப்போம். இந்த சூழலுக்கான சமன்பாடு,

$$9x - 4y = 2000 \qquad (1)$$

$$7x - 3y = 2000 \qquad (2)$$

படி 1 : சமன்பாடு (1)ஐ 3ஆல், சமன்பாடு(2)ஐ 4ஆல் பெருக்கி y ன் கெழுக்களை சமன்படுத்துக. இப்பொழுது நாம் பெறும் சமன்பாடு,

$$27x - 12y = 6000 \qquad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \qquad (4)$$

படி 2 : சமன்பாடு (3)ஐ சமன்பாடு (4)ல் இருந்து கழித்து yஐ நீக்குக. ஏனெனில் y ன் கெழுக்கள் சமம். எனவே,

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

$$x = 2000$$

படி 3 : (1)ல் x ன் மதிப்பை பிரதியிடு.

$$9(2000) - 4y = 2000$$

$$y = 4000$$

எனவே, $x = 2000$, $y = 4000$ என்பது இந்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும். எனவே நபர்களின் மாத வருமானம் ₹ 18,000 மற்றும் ₹ 14,000 ஆகும்.

சரிபார்த்தல் : 18000 : 14000 = 9 : 7,
செலவுகளின் விகிதங்கள் = 18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3

குறிப்பு :

1. மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் நாம் பயன்படுத்திய முறை நீக்கல் முறை ஆகும். எனவே நேரிய சமன்பாட்டில் ஒரு மாறியை முதலில் நீக்கினோம்.

AP SCERT

In the example above, we eliminated y. We could also have eliminated x. Try doing it that way.

2. You could also have used the substitution, or graphical method, to solve this problem. Try doing so, and see which method is more convenient.

Let us now note down these steps in the elimination method :

Step 1 : First multiply both the equations by some suitable non-zero constants to make the coefficients of one variable (either x or y) numerically equal.

Step 2 : Then add or subtract one equation from the other so that one variable gets eliminated. If you get an equation in one variable, go to Step 3.

If in Step 2, we obtain a true statement involving no variable, then the original pair of equations has infinitely many solutions.

If in Step 2, we obtain a false statement involving no variable, then the original pair of equations has no solution, i.e., it is inconsistent.

Step 3 : Solve the equation in one variable (x or y) so obtained to get its value.

Step 4 : Substitute this value of x (or y) in either of the original equations to get the value of the other variable.

Now to illustrate it, we shall solve few more examples.

Example 9 : Use elimination method to find all possible solutions of the following pair of linear equations :

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

Solution :

Step 1 : Multiply Equation (1) by 2 and Equation (2) by 1 to make the coefficients of x equal. Then we get the equations as :

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

Step 2 : Subtracting Equation (4) from Equation (3),

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

i.e., $0 = 9$, which is a false statement.

Therefore, the pair of equations has no solution.

Example 10 : The sum of a two-digit number and the number obtained by reversing the digits is 66. If the digits of the number differ by 2, find the number. How many such numbers are there?

AP SCERT

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் நாம் y ஐ நீக்கினோம். x ஐ நீக்கியும் இதை செய்யலாம். முயன்று பார்.

2. மேலும் பிரதியீட்டு முறை மற்றும் வரைபட முறையிலும் இந்த கணக்கிற்கு தீர்வு காண். முயன்று பார்த்து எந்த முறை எளிமையானது கூறு.

நாம் இப்போது நீக்கல் முறையின் படி நிலைகளை பார்ப்போம்.

படி 1 : ஏதாவது ஒரு மாறியின் (x அல்லது y) கெழுக்கள் சமம் ஆகும் படி பூஜ்ஜியமற்ற முழுவால் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் பெருக்குக.

படி 2 : ஒரு மாறியை நீக்குவதற்காக கூட்டலோ (அ) கழித்தலோ செய்க. இப்போத நாம் ஒரு மாறியை கொண்ட சமன்பாட்டை பெருவோம். படி 3க்கு செல்.

படி 2ல் மாறிகள் அற்ற மெய் கூற்றை பெற்றால் அந்த ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு முடிவில்லா எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

படி 2ல் மாறிகள் அற்ற மெய்யற்ற கூற்று எனில் அந்த ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லை. அவை ஒவ்வா ஜோடி சமன்பாடுகள்.

படி 3 : ஒரு மாறியை (x அல்லது y) கொண்ட சமன்பாட்டை தீர்த்து அதன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

படி 4 : அந்த மதிப்பை x (அல்லது y) முதலில் உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு மாறிகளின் மதிப்பை பெறலாம்.

இப்போது மேலும் சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : நீக்கல் முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் ஜோடி நேரிய சமன்பாட்டிற்கு பொருத்தமான தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

தீர்வு :

படி 1 : சமன்பாடு (1)ஐ 2ஆல் சமன்பாடு (2)ஐ 1ஆல் பெருக்கி x ன் கெழுவை சமன்படுத்துக. இப்போது நாம் பெறும் சமன்பாடு,

$$4x + 6y = 16 \qquad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \qquad (4)$$

படி 2 : சமன்பாடு (3)ல் இருந்து சமன்பாடு (4)ஐ கழி

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

$0 = 9$. இது தவறான கூற்று.

எனவே, இந்த ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 10 : ஓர் ஈரிலக்க எண் மேலும் அவற்றின் இலக்கங்களை மாற்றி அமைப்பதால் ஏற்படும் புதிய எண் ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை 66. இலக்கங்களின் வித்தியாசம் 2 எனில் அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி. இதுபோன்ற எண்கள் எத்தனை இருக்கும்?

AP SCERT

Solution : Let the ten's and the unit's digits in the first number be x and y, respectively. So, the first number may be written as $10x + y$ in the expanded form (for example, $56 = 10(5) + 6$).

When the digits are reversed, x becomes the unit's digit and y becomes the ten's digit. This number, in the expanded notation is $10y + x$ (for example, when 56 is reversed, we get $65 = 10(6) + 5$).

According to the given condition.

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

i.e., $$11(x + y) = 66$$

i.e., $$x + y = 6 \quad (1)$$

We are also given that the digits differ by 2, therefore,

either $$x - y = 2 \quad (2)$$

or $$y - x = 2 \quad (3)$$

If $x - y = 2$, then solving (1) and (2) by elimination, we get $x = 4$ and $y = 2$.
In this case, we get the number 42.

If $y - x = 2$, then solving (1) and (3) by elimination, we get $x = 2$ and $y = 4$.
In this case, we get the number 24.

Thus, there are two such numbers 42 and 24.

Verification : Here $42 + 24 = 66$ and $4 - 2 = 2$. Also $24 + 42 = 66$ and $4 - 2 = 2$.

EXERCISE 3.3

1. Solve the following pair of linear equations by the elimination method and the substitution method :
   (i) $x + y = 5$ and $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ and $2x - 2y = 2$
   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ and $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ and $x - \frac{y}{3} = 3$

2. Form the pair of linear equations in the following problems, and find their solutions (if they exist) by the elimination method :
   (i) If we add 1 to the numerator and subtract 1 from the denominator, a fraction reduces to 1. It becomes $\frac{1}{2}$ if we only add 1 to the denominator. What is the fraction?
   (ii) Five years ago, Nuri was thrice as old as Sonu. Ten years later, Nuri will be twice as old as Sonu. How old are Nuri and Sonu?
   (iii) The sum of the digits of a two-digit number is 9. Also, nine times this number is twice the number obtained by reversing the order of the digits. Find the number.

AP SCERT

தீர்வு: பத்தாம் இலக்கம் மற்றும் ஒன்றாம் இலக்கத்தில் x மற்றும் yஐ பிரதியிட்டு $10x + y$ என்ற விரிவான வடிவில் எழுதுக. (உதாரணமாக $56 = 10(5) + 6$).

இலக்கங்களை மாற்றினால், ஒன்றாம் இலக்கத்தில் xம் பத்தாம் இலக்கத்தில் yம் வரும். அந்த எண்ணின் விரிவான வடிவம் $10y + x$ (உதாரணமாக 56 ன் இலக்கங்களை மாற்றினால் $65 = 10(6) + 5$).

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின் படி,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$11(x + y) = 66$$

$$x + y = 6 \qquad (1)$$

இலக்கங்களின் வித்தியாசம் 2 எனில்,

$$x - y = 2 \qquad (2)$$

அல்லது $$y - x = 2 \qquad (3)$$

$x - y = 2$ எனக்கொண்டு (1)ஐ (2)ல் நீக்கல் முறையில் தீர்த்தால், $x = 4$ மற்றும் $y = 2$ என கிடைக்கும். இந்த முறையில் நாம் பெரும் எண் 42.

$y - x = 2$ எனக்கொண்டு (1)ஐ (3)ல் நீக்கல் முறையில் தீர்த்தால் $x = 2$ மற்றும் $y = 4$ என கிடைக்கும். இம்முறையில் நாம் பெறும் எண் 24.

இங்கு நமக்கு 42 மற்றும் 24 இரண்டு எண்கள் கிடைக்கின்றன.

சரிபார்த்தல் : இங்கு $42 + 24 = 66$ மற்றும் $4 - 2 = 2$. இவ்வாறே, $24 + 42 = 66$ மற்றும் $4 - 2 = 2$.

பயிற்சி 3.3

1. பின்வரும் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளை பிரதியீட்டு முறை மற்றும் நீக்கல் முறையில் தீர்க்க :

   (i) $x + y = 5$ மற்றும் $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ மற்றும் $2x - 2y = 2$

   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ மற்றும் $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ மற்றும் $x - \frac{y}{3} = 3$

2. பின்வரும் கணக்குகளை ஜோடி நேரிய சமன்பாடு வடிவில் எழுதுக. மேலும் அவற்றிற்கு நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க. (தீர்வு இருந்தால்)

   (i) ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியுடன் 1ஐ கூட்டி பகுதியில் இருந்து 1ஐ கழித்தால் அந்த பின்னம் 1 ஆகிறது. பகுதியுடன் 1ஐ மட்டும் கூட்டினால் $\frac{1}{2}$ ஆகிறது எனில் அந்த பின்னம் எது?

   (ii) ஐந்து வருடங்களுக்கு முன்பு நியூரிஸ் சோனுவின் வயதில் 3 மடங்கு இருந்தான். பத்து வருடங்களுக்கு பிறகு நியூரிஸ் சோனுவின் வயதில் 2 மடங்கு ஆகிறான் எனில் தற்போது நியூரிஸ் மற்றும் சோனுவின் வயது என்ன?

   (iii) ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 9. மேலும் அதன் இலக்கங்களை மாற்றி இரண்டு மடங்காக்கினால் அது அந்த எண்ணின் ஒன்பது மடங்கிற்கு சமம் எனில் அந்த எண்ணை கண்டுபிடி.

AP SCERT

(iv) Meena went to a bank to withdraw ₹ 2000. She asked the cashier to give her ₹ 50 and ₹ 100 notes only. Meena got 25 notes in all. Find how many notes of ₹ 50 and ₹ 100 she received.

(v) A lending library has a fixed charge for the first three days and an additional charge for each day thereafter. Saritha paid ₹ 27 for a book kept for seven days, while Susy paid ₹ 21 for the book she kept for five days. Find the fixed charge and the charge for each extra day.

3.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A pair of linear equations in two variables can be represented, and solved, by the:

(i) graphical method

(ii) algebraic method

2. Graphical Method :

The graph of a pair of linear equations in two variables is represented by two lines.

(i) If the lines intersect at a point, then that point gives the unique solution of the two equations. In this case, the pair of equations is **consistent**.

(ii) If the lines coincide, then there are infinitely many solutions — each point on the line being a solution. In this case, the pair of equations is **dependent (consistent)**.

(iii) If the lines are parallel, then the pair of equations has no solution. In this case, the pair of equations is **inconsistent**.

3. Algebraic Methods : We have discussed the following methods for finding the solution(s) of a pair of linear equations :

(i) Substitution Method

(ii) Elimination Method

4. If a pair of linear equations is given by $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, then the following situations can arise :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$: In this case, the pair of linear equations is consistent.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: In this case, the pair of linear equations is inconsistent.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: In this case, the pair of linear equations is dependent and consistent.

5. There are several situations which can be mathematically represented by two equations that are not linear to start with. But we alter them so that they are reduced to a pair of linear equations.

AP SCERT

(iv) மீனா வங்கியில் இருந்து ₹ 2000 பெற விரும்பினாள். அவள் காசாளரிடம் ₹ 50 மற்றும் ₹ 100 நோட்டுகள் மட்டும் கொடுக்குமாறு கேட்டாள். மீனா மொத்தம் 25 நோட்டுகளை பெற்றாள் எனில் அதில் ₹ 50 நோட்டுகள், ₹ 100 நோட்டுகள் எத்தனை?

(v) ஒரு புகழ்பெற்ற நூலகத்தில் புத்தகத்திற்கு முதல் மூன்று நாட்களுக்கு குறைந்த பட்ச கட்டணமும் அதற்கு மேல் ஆகும் நாட்களுக்கு தனியாகவும் கட்டணம் வசூலிக்கப்படுகிறது. சரிதா ₹ 27 செலுத்தி ஒரு புத்தகத்தை ஏழு நாட்கள் வைத்திருந்தாள். சுசி ₹ 21 செலுத்தி ஒரு புத்தகத்தை ஐந்து நாட்கள் வைத்திருந்தால் எனில் குறைந்தபட்ச கட்டணம் எவ்வளவு? நாள் ஒன்றுக்கு கட்டணம் எவ்வளவு?

3.4 நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் பின்வருவனவற்றை கற்றோம்.

1. ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாட்டை எழுதுதல் மேலும்
   (i) வரைபட முறை
   (ii) இயற்கணித முறையில் தீர்வு காணல்.

2. வரைபட முறை:
இரண்டு மாறிகள் கொண்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகள் வரைபடம் இரண்டு நேர் கோடுகளால் குறிக்கப்படுகிறது.
   (i) இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் வெட்டி கொண்டால் அவற்றிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே இருக்கும். இவ்வாறான சமன்பாடுகள் இசைந்த சமன்பாடுகள் ஆகும்.
   (ii) இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றின்மீது ஒன்று ஒன்றினால் அவற்றிற்கு முடிவில்லா தீர்வுகள் இருக்கும். இவ்வாறான சமன்பாடுகளை சார்நிலை சமன்பாடுகள் என்பர்.
   (iii) இரண்டு நேர்கோடுகள் இணை எனில் அவற்றிற்கு தீர்வுகள் இருக்காது. இவ்வாறான சமன்பாடுகள் ஒவ்வா சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

3. இயற்கணித முறை: நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை நாம்
   (i) பிரதியீட்டு முறை
   (ii) நீக்கல் முறையிலும் காணலாம்.

4. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மேலும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகள் எனில் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு

   (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$ எனில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் இசைந்த சமன்பாடுகள் ஆகும்.

   (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ எனில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் ஒவ்வா சமன்பாடுகள் ஆகும்.

   (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் சார்நிலை சமன்பாடுகள் ஆகும்.

5. அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகளை சமன்பாடாக எழுதும்போது அவை நேரிய சமன்பாடுகளாக இருப்பதில்லை. ஆனால் சரியான பிரதியீடுகளின் மூலம் அவைகளை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளாக மாற்ற முடியும்.

R4C6H1

QUADRATIC EQUATIONS 4

4.1 Introduction

In Chapter 2, you have studied different types of polynomials. One type was the quadratic polynomial of the form $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. When we equate this polynomial to zero, we get a quadratic equation. Quadratic equations come up when we deal with many real-life situations. For instance, suppose a charity trust decides to build a prayer hall having a carpet area of 300 square metres with its length one metre more than twice its breadth. What should be the length and breadth of the hall? Suppose the breadth of the hall is x metres. Then, its length should be $(2x + 1)$ metres. We can depict this information pictorially as shown in Fig. 4.1.

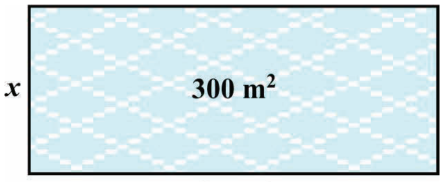


Fig. 4.1

Now, area of the hall = $(2x + 1). x$ m² = $(2x^2 + x)$ m²

So, $2x^2 + x = 300$ (Given)

Therefore, $2x^2 + x - 300 = 0$

So, the breadth of the hall should satisfy the equation $2x^2 + x - 300 = 0$ which is a quadratic equation.

Many people believe that Babylonians were the first to solve quadratic equations. For instance, they knew how to find two positive numbers with a given positive sum and a given positive product, and this problem is equivalent to solving a quadratic equation of the form $x^2 - px + q = 0$. Greek mathematician Euclid developed a geometrical approach for finding out lengths which, in our present day terminology, are solutions of quadratic equations. Solving of quadratic equations, in general form, is often credited to ancient Indian mathematicians. In fact, Brahmagupta (C.E.598–665) gave an explicit formula to solve a quadratic equation of the form $ax^2 + bx = c$. Later,

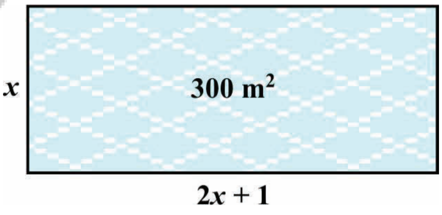
AP SCERT

Z5L4L1

இருபடி சமன்பாடுகள் 4

4.1 அறிமுகம்

அத்தியாயம் 2ல் பல்வேறு வகையான பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பற்றி நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். இதில் $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ என்பது ஒரு வகையான இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இந்த பல்லுறுப்புக்கோவை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமன்படுத்தும்போது நாம் ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். பல அன்றாட வாழ்க்கை சூழ்நிலைகளை நாம் கையாளும்போது இருபடி சமன்பாட்டை சந்திக்க நேரிடுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தொண்டு அறக்கட்டளை 300 சதுர மீட்டர் பரப்பளவைக் கொண்ட ஒரு பிரார்த்தனை கூடத்தை கட்ட முடிவு செய்கிறது. அதன் நீளம், அகலத்தைவிட இருமடங்கு அதிகமாகும். கூடத்தின் நீளம் மற்றும் அகலம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்? ஒரு வேளை கூடத்தின் அகலம் x மீட்டர் எனில் அதன் நீளம் $(2x + 1)$ மீட்டராக இருக்க வேண்டும். படம் 4.1ல் காட்டியவாறு இந்த தகவலை நாம் படமாக சித்தரிக்கலாம்.



படம் 4.1

இப்பொழுது, கூடத்தின் பரப்பளவு $=(2x + 1).\ x$ மீ^{2} $= (2x^2 + x)$ மீ^{2}

ஆகையால், $2x^2 + x = 300$ (கொடுக்கப்பட்டவை)

எனவே, $2x^2 + x - 300 = 0$

எனவே கூடத்தின் அகலம் $2x^2 + x - 300 = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாட்டை திருப்திபடுத்த வேண்டும்.

இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கான தீர்வுகளை முதலில் கண்டறிந்தவர்கள் பாபிலோனியர்கள் என நம்பப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக கொடுக்கப்பட்ட மிகை கூட்டுத்தொகை மற்றும் மிகை பெருக்குத்தொகைக்கும் இரண்டு மிகை எண்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்று அவர்கள் தெரிந்து வைத்திருந்தனர் மற்றும் இந்த பிரச்சனை $x^2 - px + q = 0$ வடிவில் உள்ள இருபடி சமன்பாட்டை தீர்ப்பதற்கு சமம். கிரேக்க கணிதமேதை யூக்ளிட் நீளங்களை கண்டறிய வடிவியல் அணுகுமுறையை மேம்படுத்தினார். நமது இன்றைய சொற்களஞ்சியத்தில் நீளங்களை கண்டறிதல், இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள், இருபடிச் சமன்பாடுகளை தீர்ப்பது, பொதுவடிவில் உள்ள இருபடிச்சமன்பாட்டின் தீர்வை காணும் முறையை கண்டுபிடித்த பெருமை பண்டைய இந்திய கணிதமேதைகளை சாரும். உண்மையில் பிரம்மகுப்தா (கி.மு.598–665) $ax^2 + bx = c$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டை தீர்க்கும் சூத்திரத்தை உருவாக்கி கொடுத்தார். அதன்பிறகு,

Sridharacharya (C.E. 1025) derived a formula, now known as the quadratic formula, (as quoted by Bhaskara II) for solving a quadratic equation by the method of completing the square. An Arab mathematician Al-Khwarizmi (about C.E. 800) also studied quadratic equations of different types. Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, in his book 'Liber embadorum' published in Europe in C.E. 1145 gave complete solutions of different quadratic equations.

In this chapter, you will study quadratic equations, and various ways of finding their roots. You will also see some applications of quadratic equations in daily life situations.

4.2 Quadratic Equations

A quadratic equation in the variable x is an equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, c are real numbers, $a \neq 0$. For example, $2x^2 + x - 300 = 0$ is a quadratic equation. Similarly, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ and $1 - x^2 + 300 = 0$ are also quadratic equations.

In fact, any equation of the form $p(x) = 0$, where $p(x)$ is a polynomial of degree 2, is a quadratic equation. But when we write the terms of $p(x)$ in descending order of their degrees, then we get the standard form of the equation. That is, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ is called the **standard form of a quadratic equation**.

Quadratic equations arise in several situations in the world around us and in different fields of mathematics. Let us consider a few examples.

Example 1 : Represent the following situations mathematically:

(i) John and Jivanti together have 45 marbles. Both of them lost 5 marbles each, and the product of the number of marbles they now have is 124. We would like to find out how many marbles they had to start with.

(ii) A cottage industry produces a certain number of toys in a day. The cost of production of each toy (in rupees) was found to be 55 minus the number of toys produced in a day. On a particular day, the total cost of production was ₹ 750. We would like to find out the number of toys produced on that day.

Solution :

(i) Let the number of marbles John had be x.

Then the number of marbles Jivanti had $= 45 - x$ (Why?).

The number of marbles left with John, when he lost 5 marbles $= x - 5$

The number of marbles left with Jivanti, when she lost 5 marbles $= 45 - x - 5$

$$= 40 - x$$

சிரிதராச்சாரியா (C.E. 1025) என்பவர் ஒரு சூத்திரத்தை வருவித்தார். அதுவே (பாஸ்கரா II ஆல் எடுத்துரைக்கப்பட்ட) வர்க்க முழுமையாக்கல் முறையில் இருபடிச் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கும் சூத்திரமாக இருப்பதை இப்போது நாம் அறிகிறோம். அரேபிய நாட்டு கணித மேதை ஆல்-க்வாரிஜிமி (ஏறத்தாழ கி.மு. 800) பல்வேறு வகையான இருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி அறிந்திருந்தார். ஆப்ரகாம் பார் ஹிய்யா அ-நாசி தான் எழுதிய நூலான 'லைபர் எம்படோரோம் (Liber embadorum)' ஐரோப்பாவில் கி.மு. 1435ல் வெளியிடும் போது வெவ்வேறு இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கான தீர்வுகளை முழுமையாக கொடுத்திருந்தார்.

இந்த அத்தியாத்தில் இருபடிச் சமன்பாடுகளை பற்றியும் அவற்றின் தீர்வுகளை காண்பதற்கான பல்வேறு முறைகளை பற்றியும் படிக்கலாம். மேலும் அன்றாட வாழ்க்கை சூழலில் இருபடிச் சமன்பாட்டின் பயன்பாடுகள் சிலவற்றை பார்க்கலாம்.

4.2 இருபடிச் சமன்பாடுகள்

x ஐ மாறியாகக் கொண்ட ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு என்ற சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$ வடிவில் இருக்கும் இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள், மேலும் $a \neq 0$. எடுத்துக்காட்டாக $2x^2+x-300=0$ என்பது ஒரு இருபடிச்சமன்பாடு ஆகும். இவ்வாறே $2x^2-3x+1=0, 4x-3x^2+2=0$ மற்றும் $1-x^2+300=0$ போன்றவையும் இருபடிச் சமன்பாடுகளே ஆகும்.

$p(x)=0$ என்பது படி 2ஐ கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x)=0$ வடிவத்திலுள்ள அனைத்து சமன்பாடுகளும் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். ஆனால் $p(x)$ கோவையிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் அடுக்குகளைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையில் எழுதினால் அது இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும். அதாவது $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$ என்பது **இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இருபடிச் சமன்பாடுகள் நம்மைச் சுற்றியுள்ள உலகில் பல்வேறு சூழ்நிலைகளிலும் கணிதத்தின் வெவ்வேறு துறைகளிலும் தோன்றுகின்றன. ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளை கருத்தில் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : பின்வரும் சூழ்நிலைகளை கணித வடிவில் குறிப்பிடவும்.

(i) ஜான் மற்றும் ஜிவன்தி இருவரிடமும் சேர்த்து 45 கோலிகள் உள்ளன. இருவரும் 5 கோலிகளை தொலைத்துவிட்டனர். இப்போது இருவரிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கைகளின் பெருக்கற்பலன் 124. இருவரிடமும் தொடக்கத்தில் எத்தனை கோலிகள் இருந்திருக்கும் என்பதை கண்டறிய முயல்வோம்.

(ii) ஒரு குடிசைத் தொழிலில் ஒவ்வொரு நாளும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான ஒவ்வொரு பொம்மைகளை தயார் செய்வார்கள். அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பொம்மையின் விலையானது 55 லிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கையை கழிப்பதற்கு சமம். அந்த குறிப்பிட்ட நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கை கண்டறிய முயல்வோம்.

தீர்வு :

(i) ஜானிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

ஜிவன்தியிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை $=45-x$ (ஏன்?).

5 கோலிகளை தொலைத்த பிறகு ஜானிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை $=x-5$

5 கோலிகளை தொலைத்த பிறகு ஜிவன்தியிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை

$=45-x-5$

$=40-x$

Therefore, their product $= (x-5)(40-x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

So, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (Given that product = 124)

i.e., $-x^2 + 45x - 324 = 0$

i.e., $x^2 - 45x + 324 = 0$

Therefore, the number of marbles John had, satisfies the quadratic equation

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

which is the required representation of the problem mathematically.

(ii) Let the number of toys produced on that day be x.

Therefore, the cost of production (in rupees) of each toy that day = $55 - x$

So, the total cost of production (in rupees) that day = $x(55-x)$

Therefore, $x(55-x) = 750$

i.e., $55x - x^2 = 750$

i.e., $-x^2 + 55x - 750 = 0$

i.e., $x^2 - 55x + 750 = 0$

Therefore, the number of toys produced that day satisfies the quadratic equation

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

which is the required representation of the problem mathematically.

Example 2 : Check whether the following are quadratic equations:

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

Solution :

(i) LHS = $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

Therefore, $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ can be rewritten as

$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

i.e., $x^2 - 6x + 8 = 0$

It is of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

Therefore, the given equation is a quadratic equation.

AP SCERT

ஆகையால், இவற்றின் பெருக்கற்பலன் $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

எனவே, $-x^2 + 45x - 200 = 124$

அதாவது, $-x^2 + 45x - 324 = 0$

அதாவது, $x^2 - 45x + 324 = 0$

ஆகையால் ஜானிடம் உள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கையை இந்த இருபடிச் சமன்பாடு திருப்திபடுத்துகின்றது.

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

இந்த கணக்கை தீர்ப்பதற்கான கணித வடிவம் இதுவே ஆகும்.

(ii) ஒரு நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

ஆகையால், அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பொம்மையின் விலை (ரூபாயில்) $= 55 - x$

எனவே, அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் மொத்த விலை (ரூபாயில்) $= x(55 - x)$

ஆகையால், $x(55 - x) = 750$

$$55x - x^2 = 750$$

$$-x^2 + 55x - 750 = 0$$

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

ஆகையால், அந்த குறிப்பிட்ட நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொம்மைகளின் எண்ணிக்கையை இந்த இருபடிச் சமன்பாடு திருப்திபடுத்துகிறது.

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

இந்த கணக்கை தீர்ப்பதற்கான கணித வடிவம் இதுவே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பின்வரும் சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடுகளா என சோதிக்கவும்.

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

தீர்வு :

(i) LHS $= (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

ஆகையால், $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ என்றும் எழுதலாம்.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

இது $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

APSCERT

(ii) Since $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ and $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

Therefore, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

i.e., $x + 12 = 0$

It is not of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

Therefore, the given equation is not a quadratic equation.

(iii) Here, LHS $= x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

So, $x(2x + 3) = x^2 + 1$ can be rewritten as

$$2x^2 + 3x = x^2 + 1$$

Therefore, we get $x^2 + 3x - 1 = 0$

It is of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

So, the given equation is a quadratic equation.

(iv) Here, LHS $= (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Therefore, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ can be rewritten as

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

i.e., $6x^2 + 12x + 12 = 0$ or, $x^2 + 2x + 2 = 0$

It is of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

So, the given equation is a quadratic equation.

Remark : Be careful! In (ii) above, the given equation appears to be a quadratic equation, but it is not a quadratic equation.

In (iv) above, the given equation appears to be a cubic equation (an equation of degree 3) and not a quadratic equation. But it turns out to be a quadratic equation. As you can see, often we need to simplify the given equation before deciding whether it is quadratic or not.

EXERCISE 4.1

1. Check whether the following are quadratic equations :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. Represent the following situations in the form of quadratic equations :

(i) The area of a rectangular plot is 528 m^2. The length of the plot (in metres) is one more than twice its breadth. We need to find the length and breadth of the plot.

AP SCERT

(ii) $x(x+1)+8 = x^2+x+8$ மற்றும் $(x+2)(x-2) = x^2-4$

ஆகையால் $x^2+x+8 = x^2-4$

$x+12 = 0$

இது $ax^2+bx+c = 0$ எனும் வடிவில் இல்லை.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடு அல்ல.

(iii) இங்கு, LHS $= x(2x+3) = 2x^2+3x$

$x(2x+3) = x^2+1$ என எழுதலாம்.

$2x^2+3x = x^2+1$

ஆகையால் $x^2+3x-1 = 0$

இது $ax^2+bx+c = 0$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

(iv) இங்கு, LHS $= (x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$

ஆகையால், $(x+2)^3 = x^3-4$ என எழுதலாம்.

$x^3+6x^2+12x+8 = x^3-4$

$6x^2+12x+12 = 0$ or, $x^2+2x+2 = 0$

இது $ax^2+bx+c = 0$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்பு : கவனமாக இரு! மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டில் (ii) வது சமன்பாடு பார்ப்பதற்கு இருபடிச் சமன்பாடு போல் தெரியும் ஆனால் அது இருபடிச் சமன்பாடு அல்ல.

(iv) வது சமன்பாடு முப்படி சமன்பாடு போல் தோன்றினாலும் அது இருபடிச் சமன்பாடே ஆகும். ஆகவே ஒரு சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடா? இல்லையா என முடிவு செய்வதற்கு முன் அதை சுருக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடுகளா என சோதிக்கவும்.

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2-2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (vi) $x^2+3x+1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3-4x^2-x+1 = (x-2)^3$

2. பின்வரும் சூழ்நிலைகளை இருபடிச் சமன்பாடு வடிவில் குறிப்பிடுக.

(i) ஒரு செவ்வக வடிவ மனையின் பரப்பளவு 528மீ^{2} அதன் நீளம் (மீட்டரில்) அகலத்தை போல இரண்டு மடங்கு காட்டிலும் ஒன்று அதிகம் எனில் அந்த மனையின் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

APSCERT

(ii) The product of two consecutive positive integers is 306. We need to find the integers.

(iii) Rohan's mother is 26 years older than him. The product of their ages (in years) 3 years from now will be 360. We would like to find Rohan's present age.

(iv) A train travels a distance of 480 km at a uniform speed. If the speed had been 8 km/h less, then it would have taken 3 hours more to cover the same distance. We need to find the speed of the train.

4.3 Solution of a Quadratic Equation by Factorisation

Consider the quadratic equation $2x^2 - 3x + 1 = 0$. If we replace x by 1 on the LHS of this equation, we get $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = RHS of the equation. We say that 1 is a root of the quadratic equation $2x^2 - 3x + 1 = 0$. This also means that 1 is a zero of the quadratic polynomial $2x^2 - 3x + 1$.

In general, a real number α is called a root of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ if $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. We also say that **$x = \alpha$ is a solution of the quadratic equation**, or that **α satisfies the quadratic equation**. Note that **the zeroes of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ and the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are the same**.

You have observed, in Chapter 2, that a quadratic polynomial can have at most two zeroes. So, any quadratic equation can have atmost two roots.

You have learnt in Class IX, how to factorise quadratic polynomials by splitting their middle terms. We shall use this knowledge for finding the roots of a quadratic equation. Let us see how.

Example 3 : Find the roots of the equation $2x^2 - 5x + 3 = 0$, by factorisation.

Solution : Let us first split the middle term $-5x$ as $-2x -3x$ [because $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

So, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

Now, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ can be rewritten as $(2x - 3)(x - 1) = 0$.

So, the values of x for which $2x^2 - 5x + 3 = 0$ are the same for which $(2x - 3)(x - 1) = 0$, i.e., either $2x - 3 = 0$ or $x - 1 = 0$.

Now, $2x - 3 = 0$ gives $x = \frac{3}{2}$ and $x - 1 = 0$ gives $x = 1$.

So, $x = \frac{3}{2}$ and $x = 1$ are the solutions of the equation.

In other words, 1 and $\frac{3}{2}$ are the roots of the equation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

AP SCERT

(ii) தொடர்ச்சியான இரண்டு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 306 எனில் அந்த முழுக்களை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாடு.

(iii) ரோகனின் தாய் அவனைவிட 26 வருடங்கள் பெரியவர். 3 வருடங்கள் கழித்து இருவரின் வயதுகளின் பெருக்கற்பலன் 360 எனில் ரோகனின் வயதை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாடு.

(iv) ஒரு இரயில் சீரான வேகத்தில் 480 கி.மீ தூரத்தை பயணிக்கிறது. அதனுடைய வேகம் 8 கி.மீ/ம குறைத்தால் அதே தொலைவை கடக்க 3 மணி நேரம் அதிகமாக எடுத்துக் கொண்டிருக்கும், இரயிலின் வேகத்தை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாடு.

4.3 காரணிப்படுத்துதல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு காணல்

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த சமன்பாட்டில் RHS பக்கத்தில் x க்கு பதிலாக 1ஐ பிரதியிட்டால் நமக்கு கிடைப்பவை $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = சமன்பாட்டின் RHS. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் 1 எனக் கூறுவோம். அதாவது 1 என்பது $2x^2 - 3x + 1$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜி மதிப்பு ஆகும்.

பொதுவாக $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ க்கு $a\,\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ எனில் α வை இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் என்கிறோம். மேலும் **$a = \alpha$ என்பதை இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு என்றும் கூறலாம்.** அல்லது **α என்பது இருபடிச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது எனலாம். $ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜிய மதிப்புகளுக்கு $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் ஒன்றே என்பதை கவனிக்கவும்.**

அத்தியாயம் 2இல் ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக இரண்டு பூஜ்ஜிய மதிப்புகள் இருக்கும் என நாம் கவனித்தோம். ஆகவே எந்த ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கும் அதிகபட்ச இரண்டு மூலங்களே இருக்கும்.

நாம் 9ஆம் வகுப்பில் நடு உறுப்பை இரண்டாக பிரிப்பதன் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டில் காரணிகளை எவ்வாறு காண்பது என்பதைப் பற்றி தெரிந்து கொண்டோம். இதே வழிமுறையை பயன்படுத்தி ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை காரணிப்படுத்துதல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : முதலில் $-5x$ என்ற நடு உறுப்பை $-2x - 3x$ என பிரித்துக் கொள்ளவும்.

[ஏனெனில் $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

எனவே, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$

இப்பொழுது, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ஐ $(2x-3)(x-1) = 0$ என எழுதலாம்.

ஆகையால், $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ல் xன் மதிப்பும் $(2x-3)(x-1) = 0$ல் உள்ள xன் மதிப்பும் ஒரே மாதியாக இருக்கும். அதாவது $2x - 3 = 0$ அல்லது $x - 1 = 0$.

இப்பொழுது $2x - 3 = 0$ லிருந்து $x = \frac{3}{2}$ மற்றும் $x - 1 = 0$ லிருந்து $x = 1$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகையால், $x = \frac{3}{2}$ மற்றும் $x = 1$ ஆகியவை சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். இதை மற்றொரு விதமாக 1 மற்றும் $\frac{3}{2}$ ஆகியவை $2x^2 - 5x + 3 = 0$ன் மூலங்கள் என கூறலாம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இவை என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Verify that these are the roots of the given equation.

Note that we have found the roots of $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **by factorising** $2x^2 - 5x + 3$ **into two linear factors and equating each factor to zero**.

Example 4 : Find the roots of the quadratic equation $6x^2 - x - 2 = 0$.

Solution : We have

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

The roots of $6x^2 - x - 2 = 0$ are the values of x for which $(3x - 2)(2x + 1) = 0$

Therefore, $3x - 2 = 0$ or $2x + 1 = 0$,

i.e., $x = \frac{2}{3}$ or $x = -\frac{1}{2}$

Therefore, the roots of $6x^2 - x - 2 = 0$ are $\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{2}$.

We verify the roots, by checking that $\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{2}$ satisfy $6x^2 - x - 2 = 0$.

Example 5 : Find the roots of the quadratic equation $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$.

Solution : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$
$$= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

So, the roots of the equation are the values of x for which

$$\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) = 0$$

Now, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ for $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

So, this root is repeated twice, one for each repeated factor $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$.

Therefore, the roots of $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ are $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$2x^2-5x+3=0$ ன் மூலங்களை கண்டறிய, $2x^2-5x+3=0$ ஐ இரண்டு நேரிய (ஒருபடி) காரணிகளின் பெருக்கலாக காரணிப்படுத்தி, பின்னர் இந்த இரண்டு நேரிய காரணிகளையும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $6x^2-x-2=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை காண்க.

தீர்வு :

$$6x^2-x-2 = 6x^2+3x-4x-2$$
$$= 3x\,(2x+1)-2\,(2x+1)$$
$$= (3x-2)(2x+1)$$

$(3x-2)(2x+1)=0$ ஆகும் படியாக உள்ள x மதிப்புகளே $6x^2-x-2=0$ ன் மூலங்களாகும்.

ஆகையால், $3x-2=0$ அல்லது $2x+1=0$,

அதாவது, $x=\frac{2}{3}$ அல்லது $x=-\frac{1}{2}$

∴ $6x^2-x-2=0$ ன் மூலங்கள் $\frac{2}{3}$ மற்றும் $-\frac{1}{2}$.

$6x^2-x-2=0$ல் $x=\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{2}$ ஐ பிரதியிட்டு அவை மூலங்களை இல்லையா என சரிபார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை காண்க.

தீர்வு : $3x^2-2\sqrt{6}x+2 = 3x^2-\sqrt{6}x-\sqrt{6}x+2$

$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)$$
$$= \left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)$$

ஆகையால் $\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)=0$ ஆகும் படியாக உள்ள x மதிப்புகளே சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

இப்பொழுது, $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$ லிருந்து $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

ஆகையால், இந்த மூலம் இரண்டு முறை திரும்பத்திரும்ப வந்துள்ளது. ஒவ்வொரு காரணியும் $\sqrt{3}x-\sqrt{2}$ ஆகும்.

∴ $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ ன் மூலங்கள் $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ஆகும்.

AP SCERT

Example 6 : Find the dimensions of the prayer hall discussed in Section 4.1.

Solution : In Section 4.1, we found that if the breadth of the hall is x m, then x satisfies the equation $2x^2 + x - 300 = 0$. Applying the factorisation method, we write this equation as

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

i.e., $$(x - 12)(2x + 25) = 0$$

So, the roots of the given equation are $x = 12$ or $x = -12.5$. Since x is the breadth of the hall, it cannot be negative.

Thus, the breadth of the hall is 12 m. Its length $= 2x + 1 = 25$ m.

EXERCISE 4.2

1. Find the roots of the following quadratic equations by factorisation:

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. Solve the problems given in Example 1.

3. Find two numbers whose sum is 27 and product is 182.

4. Find two consecutive positive integers, sum of whose squares is 365.

5. The altitude of a right triangle is 7 cm less than its base. If the hypotenuse is 13 cm, find the other two sides.

6. A cottage industry produces a certain number of pottery articles in a day. It was observed on a particular day that the cost of production of each article (in rupees) was 3 more than twice the number of articles produced on that day. If the total cost of production on that day was ₹ 90, find the number of articles produced and the cost of each article.

4.4 Nature of Roots

The equation $ax^2 + bx + c = 0$ are given by

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

If $b^2 - 4ac > 0$, we get two distinct real roots $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ and $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

எடுத்துக்காட்டு 6 : பிரிவு 4.1ல் விவாதித்த பிரார்த்தனை கூடத்தின் அளவுகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : பிரிவு 4.1ல் கூடத்தின் அகலம் x என கண்டறிந்தோம். மேலும் x ஆனது $2x^2 + x - 300 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை திருப்திபடுத்துகிறது. காரணிப்படுத்தல் முறையை இந்த சமன்பாட்டிற்கு பயன்படுத்தினால்

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

அதாவது, $$(x - 12)(2x + 25) = 0$$

ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $x = 12$ அல்லது $x = -12.5$ ஆகும். x என்பது கூடத்தில் அகலம் என்பதால் இது குறை எண்ணாக இருக்காது.

ஆதலால், கூடத்தின் அகலம் 12 மீ. அதனுடைய நீளம் $= 2x + 1 = 25$ மீ.

பயிற்சி 4.2

1. காரணிப்படுத்தல் முறை மூலம் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களை கண்டுபிடி.
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. எடுத்துக்காட்டு 1ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்குகளை தீர்க்கவும்.
3. இரண்டு எண்களின் மொத்தம் 27 மற்றும் அவற்றின் பெருக்கத் தொகை 182 எனில் அவ்வெண்களை கண்டுபிடி.
4. தொடர்ச்சியான இரண்டு மிகை முழுக்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் 365 எனில் அந்த எண்களை கண்டுபிடி.
5. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் குத்துயரம் அதன் அடிப்பக்கத்தைவிட 7 செ.மீ குறைவு. அதன் கர்ணம் 13 செ.மீ எனில் மற்ற இரண்டு பக்கங்களை கண்டுபிடி.
6. குடிசைத்தொழில் மூலம் ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான மண்பாண்டங்களை தயாரித்தனர். அந்த குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பொருட்களின் விலை (ரூபாயில்) அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருட்களின் எண்ணிக்கையின் இரண்டு மடங்கைவிட 3 அதிகம். அந்த நாளில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருட்களின் மொத்த விலை ₹ 90 எனில் தயாரித்த பொருட்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் ஒவ்வொரு பொருளின் விலையை கண்டுபிடி.

4.4 மூலங்களின் தன்மை

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac > 0$ எனில் இரண்டு வெவ்வேறான மூலங்கள் நமக்கு கிடைக்கிறது. அவை $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ மற்றும் $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

AP SCERT

If $b^2 - 4ac = 0$, then $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, i.e., $x = -\frac{b}{2a}$ or $-\frac{b}{2a}$.

So, the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are both $\frac{-b}{2a}$.

Therefore, we say that the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has two equal real roots in this case.

If $b^2 - 4ac < 0$, then there is no real number whose square is $b^2 - 4ac$. Therefore, there are no real roots for the given quadratic equation in this case.

Since $b^2 - 4ac$ determines whether the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has real roots or not, $b^2 - 4ac$ is called the **discriminant** of this quadratic equation.

So, a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has

(i) two distinct real roots, if $b^2 - 4ac > 0$,

(ii) two equal real roots, if $b^2 - 4ac = 0$,

(iii) no real roots, if $b^2 - 4ac < 0$.

Let us consider some examples.

Example 7: Find the discriminant of the quadratic equation $2x^2 - 4x + 3 = 0$, and hence find the nature of its roots.

Solution : The given equation is of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a = 2$, $b = -4$ and $c = 3$. Therefore, the discriminant

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

So, the given equation has no real roots.

Example 8 : A pole has to be erected at a point on the boundary of a circular park of diameter 13 metres in such a way that the differences of its distances from two diametrically opposite fixed gates A and B on the boundary is 7 metres. Is it possible to do so? If yes, at what distances from the two gates should the pole be erected?

Solution : Let us first draw the diagram (see Fig. 4.2).

Let P be the required location of the pole. Let the distance of the pole from the gate B be x m, i.e., BP = x m. Now the difference of the distances of the pole from the two gates = AP – BP (or, BP – AP) = 7 m. Therefore, AP = $(x + 7)$ m.

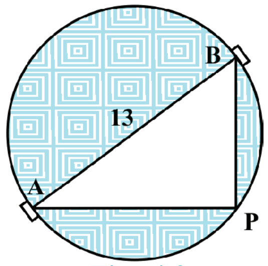


Fig. 4.2

$b^2 - 4ac = 0$ எனில் $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$ அதாவது, i.e., $x = -\frac{b}{2a}$ or $-\frac{b}{2a}$.

ஆகையால் $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் $\frac{-b}{2a}$. ஆக இருக்கும்.

எனவே இந்த வகையில் $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு இரண்டு சமமான மெய் மூலங்களை கொண்டிருக்கும் என கூறலாம்.

$b^2 - 4ac < 0$ எனில் $b^2 - 4ac$ ஐ திருப்திபடுத்தும் மெய் எண் எதுவும் இல்லை. ஆகையால் இந்த வகையில் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை.

$b^2 - 4ac$ என்பது $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் உள்ளனவா? இல்லையா? என்பதை நிர்ணயிக்கும். ஆகவே $b^2 - 4ac$ ஐ **இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைக்காட்டி** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஆகையால், $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு ஆனது,

(i) $b^2 - 4ac > 0$ எனில் இரண்டு வெவ்வேறான மெய் மூலங்கள்.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனில் இரண்டு சமமான மெய் மூலங்கள்.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ எனில் மெய் மூலங்கள் இல்லை.

சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

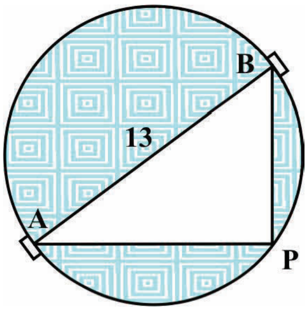
எடுத்துக்காட்டு 7: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைக்காட்டியை கண்டறிந்து அதன் மூலம் மூலங்களின் தன்மையைப் பற்றி கூறு.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் வடிவில் உள்ளது. இங்கு, $a = 2$, $b = -4$ மற்றும் $c = 3$ ஆகையால் தன்மைக்காட்டி

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8 : 13மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டவடிவ பூங்காவின் எல்லையின் மீது ஒரு கம்பம் அமைக்கப்பட வேண்டும். விட்டத்தின் இரண்டு முனைகளிலும் பூங்காவின் எல்லையின் மீது A மற்றும் B என்ற இடங்களில் நுழைவாயில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இரண்டு நுழைவாயிலிருந்து கம்பத்திற்கு இடையே உள்ள தொலைவுகளுக்கு உள்ள வேறுபாடு 7 மீட்டர் ஆக இருக்கும் படி கம்பத்தை அமைக்க முடியுமா? ஆம் எனில் இரண்டு நுழைவாயிலிருந்து அந்த கம்பம் எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும்?



படம் 4.2

தீர்வு : முதலில் படம் ஒன்று வரைவோம். (படம் 4.2ஐ பார்)

கம்பம் அமைக்க வேண்டிய புள்ளி P என்க. B நுழைவாயில் இருந்து கம்பத்தின் தூரம் x என்க. அதாவது BP $= x$ மீ. இப்போது இரண்டு நுழைவாயிலிருந்து கம்பத்தின் தொலைவுக்கு உள்ள வேறுபாடு $=$ AP $-$ BP அல்லது (BP$-$AP)=7 மீ. ஆகையால் AP $= (x + 7)$ மீ.

Now, AB = 13m, and since AB is a diameter,

$$\angle APB = 90^\circ \qquad \text{(Why?)}$$

Therefore, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (By Pythagoras theorem)

i.e., $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

i.e., $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

i.e., $2x^2 + 14x - 120 = 0$

So, the distance 'x' of the pole from gate B satisfies the equation

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

So, it would be possible to place the pole if this equation has real roots. To see if this is so or not, let us consider its discriminant. The discriminant is

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$$

So, the given quadratic equation has two real roots, and it is possible to erect the pole on the boundary of the park.

Solving the quadratic equation $x^2 + 7x - 60 = 0$, by the quadratic formula, we get

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

Therefore, $x = 5$ or -12.

Since x is the distance between the pole and the gate B, it must be positive. Therefore, $x = -12$ will have to be ignored. So, $x = 5$.

Thus, the pole has to be erected on the boundary of the park at a distance of 5m from the gate B and 12m from the gate A.

Example 9 : Find the discriminant of the equation $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ and hence find the nature of its roots. Find them, if they are real.

Solution : Here $a = 3$, $b = -2$ and $c = \frac{1}{3}$.

Therefore, discriminant $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$.

Hence, the given quadratic equation has two equal real roots.

The roots are $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, i.e., $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, i.e., $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

AP SCERT

இப்போது, AB = 13, AB என்பது விட்டம்.

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(ஏன்?)}$$

ஆகையால், $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி)

அதாவது, $(x+7)^2 + x^2 = 13^2$

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

எனவே, இந்த சமன்பாட்டை திருப்திபடுத்தும் 'x' ன் மதிப்பே B நுழைவாயிலிருந்து Pக்கு உள்ள தூரம் ஆகும்.

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

எனவே, இந்த சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இருந்தால் மட்டுமே கம்பத்தை அமைப்பதற்கான வாய்ப்பு இருக்கும். இது அவ்வாறு உள்ளதா இல்லையா என பார்க்க அதன் தன்மைக் காட்டியை பார்ப்போம்.

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$$

ஆகவே, இந்த இருபடி சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு வெவ்வேறு மெய்மூலங்கள் உள்ளன. மேலும் பூங்காவின் எல்லையின் மீது கம்பம் அமைக்கலாம்.

$x^2 + 7x - 60 = 0$ இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டை சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி தீர்த்தல்

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

∴ $x = 5$ அல்லது -12.

x என்பது நுழைவாயில் Bக்கும் கம்பத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் என்றால் அது கண்டிப்பாக மிகையாகவே இருக்க வேண்டும். ஆகையால், $x = -12$ ஐ விட்டுவிடு. ஆகையால் $x = 5$.

அதாவது நுழைவாயில் B லிருந்து 5மீ தூரத்திலும் நுழைவாயில் Aலிருந்து 12மீ தூரத்திலும் பூங்காவின் எல்லையின் மீது கம்பம் அமைக்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டியை கண்டுபிடி மற்றும் மூலங்களின் தன்மையை கூறு மூலங்கள் மெய் எனில் அவற்றை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு, $a = 3$, $b = -2$ மற்றும் $c = \frac{1}{3}$.

தன்மைக்காட்டி $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட இருபடி சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு சமமான மெய் மூலங்கள் உள்ளன.

மூலங்கள் $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, i.e., $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, i.e., $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

EXERCISE 4.3

1. Find the nature of the roots of the following quadratic equations. If the real roots exist, find them:

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. Find the values of k for each of the following quadratic equations, so that they have two equal roots.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx\,(x - 2) + 6 = 0$

3. Is it possible to design a rectangular mango grove whose length is twice its breadth, and the area is 800 m^2? If so, find its length and breadth.

4. Is the following situation possible? If so, determine their present ages.
The sum of the ages of two friends is 20 years. Four years ago, the product of their ages in years was 48.

5. Is it possible to design a rectangular park of perimeter 80 m and area 400 m^2? If so, find its length and breadth.

AP SCERT

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை கண்டுபிடி. மெய் மூலங்கள் இருந்தால் அவற்றை கண்டுபிடி.

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு இரண்டு சமமான மெய் மூலங்கள் இருந்தால் k ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. 800 மீ^{2} பரப்பளவும் மற்றும் நீளம் அகலத்தைவிட இரண்டு மடங்கு இருக்குமாறு ஒரு செவ்வக வடிவ மாந்தோட்டத்தை அமைக்க முடியுமா?

4. பின்வரும் சூழ்நிலை சாத்தியமானதா? ஆம் எனில் அவர்களின் வயதுகளை கண்டுபிடி. இரண்டு நண்பர்களின் வயதுகளின் மொத்தம் 20 வருடங்கள். நான்கு வருடங்களுக்கு முன்பு அவர்களின் வயதுகளின் பெருக்குத் தொகை 48.

5. சுற்றளவு 80 மீ மற்றும் பரப்பளவு 400 மீ^{2} இருக்கும்படி ஒரு செவ்வக வடிவ பூங்காவை அமைக்க முடியுமா? முடியுமெனில் அதன் நீளம் மற்றும் அகலத்தை கண்டுபிடி.

AP SCERT

4.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A quadratic equation in the variable x is of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, c are real numbers and $a \neq 0$.
2. A real number α is said to be a root of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, if $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. The zeroes of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ and the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are the same.
3. If we can factorise $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, into a product of two linear factors, then the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ can be found by equating each factor to zero.
4. Quadratic formula: The roots of a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are given by $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, provided $b^2 - 4ac \geq 0$.
5. A quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has

   (i) two distinct real roots, if $b^2 - 4ac > 0$, (ii) two equal roots (i.e., coincident roots), if $b^2 - 4ac = 0$, and (iii)no real roots, if $b^2 - 4ac < 0$.

AP SCERT

4.5 நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் நீங்கள் பின்வருவனவற்றை கற்றீர்கள்.

1. x எனும் மாறியைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $ax^2 + bx + c = 0$, இங்கு a, b, c என்பன மெய் எண்கள் மேலும் $a \neq 0$.
2. $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ எனில் α என்பது $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மெய் மூலமாக எனப்படும். $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜிய மதிப்புகளும் $ax^2 + bx + c$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் ஒன்றே ஆகும்.
3. $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ஐ இரண்டு காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதி ஒவ்வொன்றையும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக்குவதன் மூலம் $ax^2 + bx + c = 0$ ன் மூலங்களை கண்டறியலாம்.
4. $b^2 - 4ac \geq 0$ எனில் $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை காண்பதற்கான சூத்திரம் $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
5. $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாடு
   (i) $b^2 - 4ac > 0$ எனில் இரண்டு வெவ்வேறான மெய்மூலங்களை பெற்றிருக்கும்.
   (ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனில் இரண்டு சமமான மூலங்களை பெற்றிருக்கும்.
   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ எனில் மெய் மூலங்களை பெற்றிருக்காது.

AP SCERT

ARITHMETIC PROGRESSIONS 5

5.1 Introduction

You must have observed that in nature, many things follow a certain pattern, such as the petals of a sunflower, the holes of a honeycomb, the grains on a maize cob, the spirals on a pineapple and on a pine cone, etc.

We now look for some patterns which occur in our day-to-day life. Some such examples are :

(i) Reena applied for a job and got selected. She has been offered a job with a starting monthly salary of ₹ 8000, with an annual increment of ₹ 500 in her salary. Her salary (in ₹) for the 1st, 2nd, 3rd, . . . years will be, respectively

8000, 8500, 9000, ...

(ii) The lengths of the rungs of a ladder decrease uniformly by 2 cm from bottom to top (see Fig. 5.1). The bottom rung is 45 cm in length. The lengths (in cm) of the 1st, 2nd, 3rd, . . ., 8th rung from the bottom to the top are, respectively

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

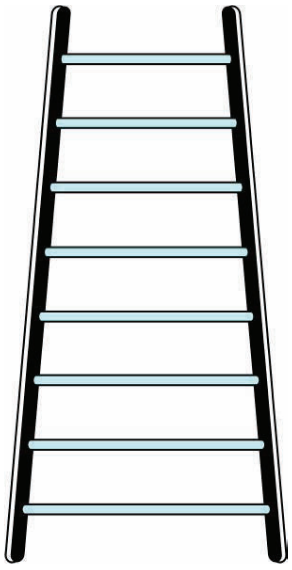


Fig. 5.1

(iii) In a savings scheme, the amount becomes $\frac{5}{4}$ times of itself after every 3 years. The maturity amount (in ₹) of an investment of ₹ 8000 after 3, 6, 9 and 12 years will be, respectively :

10000, 12500, 15625, 19531.25

APSCERT

J9U2Q6

கூட்டுத்தொடர் வரிசைகள் 5

5.1 அறிமுகம்

இயற்கையில் உள்ள பல பொருட்கள் அதாவது சூரியகாந்தி பூவில் உள்ள இதழ்கள், தேனடையில் உள்ள துளைகள், மக்காச்சோளக் கதிரில் உள்ள தானியங்கள், அன்னாசிப் பழத்திலுள்ள சுருள் மற்றும் வாழைப்பூ போன்றவற்றில் சீரான அமைப்பு அமைந்திருப்பதை நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள்.

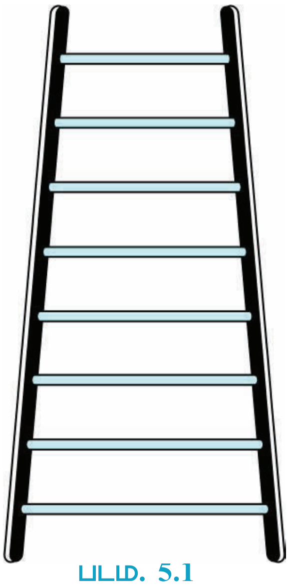
நம்முடைய அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழும் மேலும் சில சீரான அமைப்புகளை இப்போது நாம் பார்க்கலாம். இதுபோன்ற சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) ரீனா ஒரு வேலைக்கு விண்ணப்பித்தாள். முதல் மாத ஊதியம் ₹ 8000 ஆகவும், ஆண்டு ஊதிய உயர்வு ₹ 500 ஆகவும் உள்ள ஒரு வேலைக்கு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டாள். அவளின் முதல், இரண்டு, மூன்றாம் ஆண்டு ஊதியம் (₹-ல்) முறையே

8000, 8500, 9000, ...

(ii) ஓர் ஏணியிலுள்ள படியின் நீளங்கள் கீழிருந்து மேலாக 2 செ.மீ குறைந்து கொண்டே செல்கிறது. (படம்.5.1 ஐ பார்). கீழ்படியின் நீளம் 45 செ.மீ. கீழிருந்து முதல், இரண்டாம், மூன்றாம், . . ., எட்டாம் படியின் நீளங்கள் (செ.மீ.ல்) முறையே

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31



படம். 5.1

(iii) ஒரு சேமிப்பு திட்டத்தில் தொகையானது ஒவ்வொரு 3 வருடங்களுக்கு பிறகு $\frac{5}{4}$ மடங்கு உயர்கிறது. இந்த திட்டத்தில் ₹ 8000 ஐ முதலீடு செய்தால் 3, 6, 9 மற்றும் 12 வருடங்களுக்கு பிறகு கிடைக்கக்கூடிய முதிர்ச்சி அடைந்த தொகை (₹-ல்) முறையே :

10000, 12500, 15625, 19531.25

APSCERT

(iv) The number of unit squares in squares with side 1, 2, 3, . . . units (see Fig. 5.2) are, respectively

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

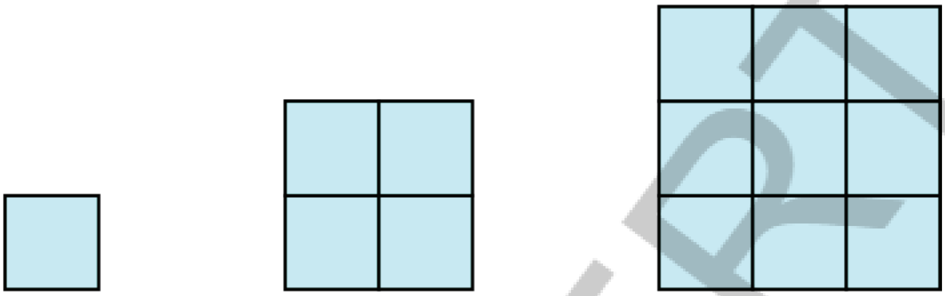


Fig. 5.2

(v) Shakila puts ₹ 100 into her daughter's money box when she was one year old and increased the amount by ₹ 50 every year. The amounts of money (in ₹) in the box on the 1st, 2nd, 3rd, 4th, . . . birthday were

100, 150, 200, 250, . . ., respectively.

(vi) A pair of rabbits are too young to produce in their first month. In the second, and every subsequent month, they produce a new pair. Each new pair of rabbits produce a new pair in their second month and in every subsequent month (see Fig. 5.3). Assuming no rabbit dies, the number of pairs of rabbits at the start of the 1st, 2nd, 3rd, . . ., 6th month, respectively are :

1, 1, 2, 3, 5, 8

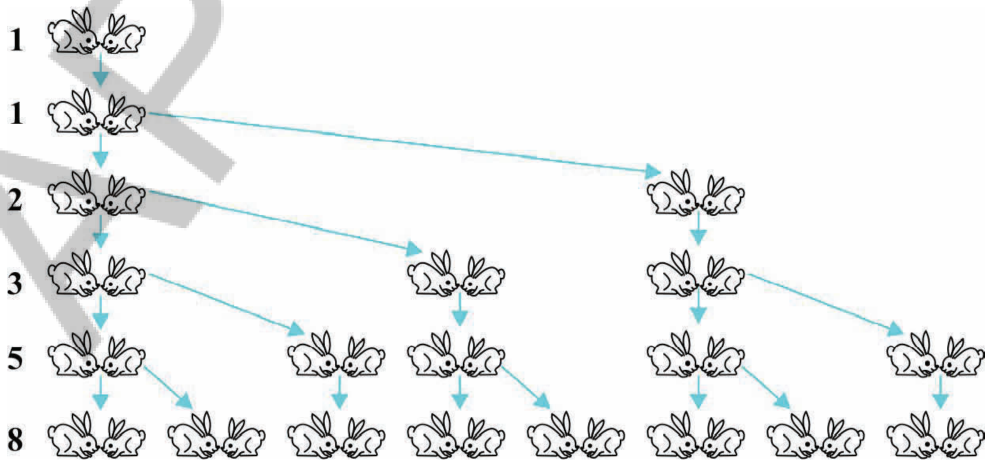
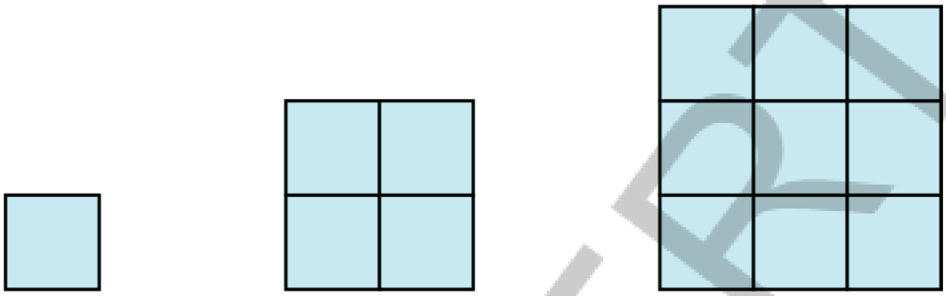


Fig. 5.3

AP SCERT

(iv) 1, 2, 3, . . . அலகுகள் பக்கங்களாக உடைய சதுரங்களில் இருக்கக்கூடிய ஓரலகு சதுரங்களின் எண்ணிக்கை முறையே (படம்.5.2 ஐ பார்)

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots$



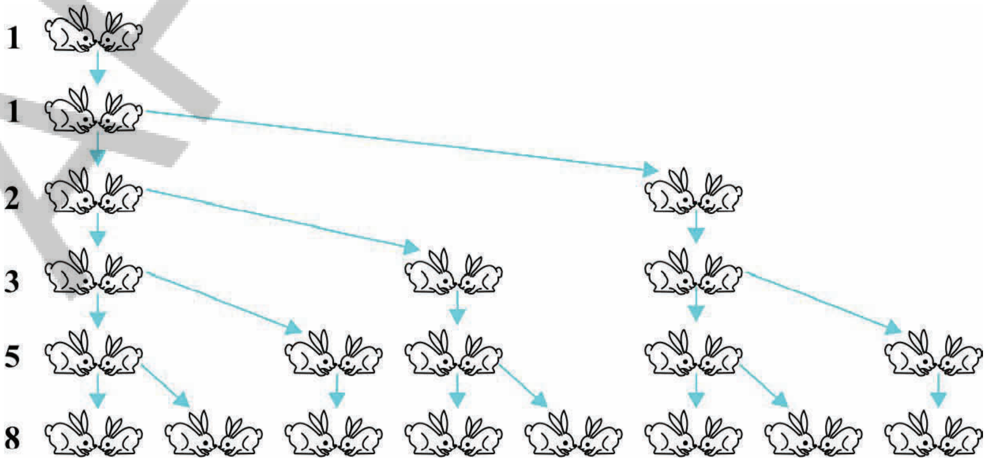
படம். 5.2

(v) ஷகிலா தன்னுடைய மகளின் வயது 1 ஆக இருக்கும்போது ₹ 100 ஐ அவளுடைய பணப்பெட்டியில் போட்டாள். ஒவ்வொரு வருடமும் ₹ 50 ஐ அதிகப்படுத்தினால் முதல், இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் பிறந்த நாளில் அவளுடைய பணப்பெட்டியில் இருக்கும் தொகை (₹-ல்) முறையே

100, 150, 200, 250, . . .,

(vi) ஒரு ஜோடி முயல்கள் அவற்றின் முதல் மாதத்தில் உற்பத்தி செய்ய மிகவும் இளமையாக உள்ளன. இரண்டாவது மற்றும் ஒவ்வொரு அடுத்த மாதங்களிலும் அவை ஒரு புதிய ஜோடியை உற்பத்தி செய்கின்றன. ஒவ்வொரு புதிய ஜோடி முயல்களும் அதன் இரண்டாவது மாதத்திலிருந்து ஒவ்வொரு மாதமும் மற்றொரு புதிய ஜோடியை உருவாக்குகின்றன (படம்.5.3 ஐ பார்). முயல்கள் ஏதும் இறக்கவில்லை என்று வைத்துக்கொண்டால் 1வது, 2வது, 3வது, . . ., 6வது மாதத்தில் இருக்கக்கூடிய முயல் ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை முறையே :

1, 1, 2, 3, 5, 8



படம். 5.3

In the examples above, we observe some patterns. In some, we find that the succeeding terms are obtained by adding a fixed number, in other by multiplying with a fixed number, in another we find that they are squares of consecutive numbers, and so on.

In this chapter, we shall discuss one of these patterns in which succeeding terms are obtained by adding a fixed number to the preceding terms. We shall also see how to find their *n*th terms and the sum of *n* consecutive terms, and use this knowledge in solving some daily life problems.

5.2 Arithmetic Progressions

Consider the following lists of numbers :

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

Each of the numbers in the list is called a **term**.

Given a term, can you write the next term in each of the lists above? If so, how will you write it? Perhaps by following a pattern or rule. Let us observe and write the rule.

In (i), each term is 1 more than the term preceding it.

In (ii), each term is 30 less than the term preceding it.

In (iii), each term is obtained by adding 1 to the term preceding it.

In (iv), all the terms in the list are 3 , i.e., each term is obtained by adding (or subtracting) 0 to the term preceding it.

In (v), each term is obtained by adding – 0.5 to (i.e., subtracting 0.5 from) the term preceding it.

In all the lists above, we see that successive terms are obtained by adding a fixed number to the preceding terms. Such list of numbers is said to form an **Arithmetic Progression (AP)**.

So, **an arithmetic progression is a list of numbers in which each term is obtained by adding a fixed number to the preceding term except the first term.**

This fixed number is called the **common difference** of the AP. Remember that it **can be positive, negative or zero**.

AP SCERT

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து சில அமைப்புகளை நாம் காணலாம். சிலவற்றில் தொடர் உறுப்புகள் முன்னுறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணைக் கூட்டுவதாலும் மேலும் சில ஒரு நிலையான எண்ணை பெருக்குவதாலும் கிடைக்கின்றன. மற்றொன்றில் அடுத்தடுத்த எண்களின் வர்க்கம் என்றும் காணலாம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் கிடைக்கும் அமைப்பை பற்றி விவாதிப்போம். n வது உறுப்பு மற்றும் தொடர்ச்சியாக உள்ள n உறுப்புகளின் கூடுதலை எவ்வாறு காண்பது என்பதையும் மேலும் அன்றாட வாழ்க்கை பிரச்சனைகளை தீர்ப்பதில் இந்த அறிவை பயன்படுத்துவதை பற்றியும் பார்ப்போம்.

5.2 கூட்டுத்தொடர் வரிசைகள்

பின்வரும் எண்கள் பட்டியலை கவனியுங்கள் :

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

இந்த பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணும் ஓர் **உறுப்பு** ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பட்டியலில் ஓர் உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டால் அடுத்த உறுப்பை உன்னால் எழுதமுடியுமா? அப்படியானால் இதை எவ்வாறு எழுதுவாய்? அநேகமாய் எண் அமைப்பு அல்லது விதியை பொறுத்து எழுதுவீர்கள். அந்த விதிகளை பார்ப்போம்.

(i) ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பை விட 1 அதிகம்.

(ii) ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பை விட 30 குறைவு.

(iii) ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பை விட 1 ஐ கூட்டுவதால் கிடைக்கிறது.

(iv) ல் பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் 3 ஆக உள்ளது. அதாவது ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்புடன் 0 ஐ கூட்டுவதால் (அல்லது கழிப்பதால்) கிடைக்கிறது.

(v) ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்புடன் – 0.5 ஐ கூட்டுவதால் (அதாவது 0.5 ஐ கழிப்பதால்) கிடைக்கிறது.

மேலே கூறிய பட்டியலில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் அல்லது கழிப்பதால் கிடைக்கிறது என்று அறிகிறோம். இவ்வாறான எண்களின் பட்டியலை **கூட்டுத்தொடர் வரிசை (AP)** என்கிறோம்.

எனவே, ஓர் எண்பட்டியலில் முதல் உறுப்பை தவிர மற்ற உறுப்புகள் அவற்றின் முந்தைய உறுப்புடன் ஏதேனும் ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் கிடைக்கும் பட்டியலை கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்கிறோம்.

இந்த நிலையான எண் கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் **பொது வித்தியாசம்** என்று அழைக்கப்படும். அது **மிகை, குறை அல்லது பூஜ்ஜியமாக இருக்கலாம்** என்பதை நினைவில் கொள்.

Let us denote the first term of an AP by a_1, second term by a_2, . . ., nth term by a_n and the common difference by d. Then the AP becomes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

So, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

Some more examples of AP are:

(a) The heights (in cm) of some students of a school standing in a queue in the morning assembly are 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) The minimum temperatures (in degree celsius) recorded for a week in the month of January in a city, arranged in ascending order are

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) The balance money (in ₹) after paying 5 % of the total loan of ₹ 1000 every month is 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) The cash prizes (in ₹) given by a school to the toppers of Classes I to XII are, respectively, 200, 250, 300, 350, . . ., 750.

(e) The total savings (in ₹) after every month for 10 months when ₹ 50 are saved each month are 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

It is left as an exercise for you to explain why each of the lists above is an AP.

You can see that

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

represents an arithmetic progression where a is the first term and d the common difference. This is called the **general form of an AP.**

Note that in examples (a) to (e) above, there are only a finite number of terms. Such an AP is called a **finite AP.** Also note that each of these Arithmetic Progressions (APs) has a last term. The APs in examples (i) to (v) in this section, are not finite APs and so they are called **infinite Arithmetic Progressions**. Such APs do not have a last term.

Now, to know about an AP, what is the minimum information that you need? Is it enough to know the first term? Or, is it enough to know only the common difference? You will find that you will need to know both – the first term a and the common difference d.

For instance if the first term a is 6 and the common difference d is 3, then the AP is

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

and if a is 6 and d is – 3, then the AP is

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

AP SCERT

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a_1, இரண்டாவது உறுப்பு $a_2, \ldots, n$ வது உறுப்பு a_n மற்றும் பொது வித்தியாசத்தை d என்றும் குறிக்கிறோம். எனவே கூட்டுத்தொடர் வரிசை $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

ஆகவே, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d.$

கூட்டுத்தொடர் வரிசைக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்:

(a) ஒரு பள்ளியில் இறைவணக்கத்திற்காக வரிசையாக நின்ற மாணவர்களின் உயரங்கள் (செ.மீ.ல்) 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) ஒரு நகரத்தில் ஜனவரி மாதத்தின் ஒரு வாரத்தில் பதிவான மிகக் குறைந்த வெப்பநிலை ஏறுவரிசையில் (செல்சியஸ் டிகிரி)

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) ₹ 1000 கடனை 5 % வீதம் ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்திய பிறகு ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்த வேண்டிய தொகை 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) ஒரு பள்ளியில் 1 முதல் 12 ம் வகுப்புவரை ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் அதிக மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்களுக்கு வழங்கப்பட்ட பரிசுத்தொகை (₹-ல்) முறையே 200, 250, 300, 350, . . ., 750.

(e) ஒவ்வொரு மாதமும் ₹50 வீதம் 10 மாதங்களுக்கு சேமிப்பு செய்தால் ஒவ்வொரு மாத இறுதியிலும் உள்ள தொகை முறையே 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

மேலே உள்ள பட்டியல்கள் ஒவ்வொன்றும் ஏன் கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும் என்பதை விளக்குவதற்கு இது ஒரு பயிற்சியாக உள்ளது.

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை குறிக்கிறது. இதில் a என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் d என்பது பொது வித்தியாசம் ஆகும். இது **கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொதுவடிவம்** என்றழைக்கப்படுகிறது.

(a) லிருந்து (e) வரையுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் முடிவுறு உறுப்புகள் உள்ளதை கவனி. இவ்வாறான கூட்டுத்தொடர் **முடிவுறு கூட்டுத்தொடர் வரிசை** எனப்படும். இத்தகைய ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையிலும் கடைசி உறுப்பு இருப்பதை கவனி. இந்த பிரிவில் (i) முதல் (v) வரையுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள கூட்டுத்தொடர் வரிசைகள் முடிவற்ற கூட்டுத்தொடர்கள் ஆகும். இவை **முடிவுறா கூட்டுத்தொடர் வரிசை** என்று அழைக்கப்படும். இவ்வாறான கூட்டுத்தொடர் வரிசைகள் முடிவு பெறாது. மேலும் கடைசி உறுப்பு இருக்காது.

இப்போது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையைப் பற்றி அறிய, உனக்குத் தேவையான குறைந்தபட்ச விவரம் என்ன? முதல் உறுப்பு தெரிந்தால் போதுமா? அல்லது பொது வித்தியாசம் மட்டும் தெரிந்தால் போதுமா? ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை கண்டறிய முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d இந்த இரண்டும் தேவைப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக முதல் உறுப்பு $a = 6$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 3$, எனில் அந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசை 6, 9,12, 15, . . .

மற்றும் $a = 6$ மற்றும் $d = -3$, எனில் அந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

Similarly, when

$a = -7, \quad d = -2, \quad$ the AP is $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0, \quad d = 0.1, \quad$ the AP is $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0, \quad d = 1\frac{1}{2}, \quad$ the AP is $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2, \quad d = 0, \quad$ the AP is $2, 2, 2, 2, \ldots$

So, if you know what a and d are, you can list the AP. What about the other way round? That is, if you are given a list of numbers can you say that it is an AP and then find a and d? Since a is the first term, it can easily be written. We know that in an AP, every succeeding term is obtained by adding d to the preceding term. So, d found by subtracting any term from its succeeding term, i.e., the term which immediately follows it should be same for an AP.

For example, for the list of numbers :

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

We have

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

Here the difference of any two consecutive terms in each case is 3. So, the given list is an AP whose first term a is 6 and common difference d is 3.

For the list of numbers : $6, 3, 0, -3, \ldots,$

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

Similarly this is also an AP whose first term is 6 and the common difference is –3.

In general, for an AP $a_1, a_2, \ldots, a_n$, we have

$$d = a_{k+1} - a_k$$

where a_{k+1} and a_k are the $(k + 1)$th and the kth terms respectively.

To obtain d in a given AP, we need not find all of $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$. It is enough to find only one of them.

Consider the list of numbers 1, 1, 2, 3, 5, ... By looking at it, you can tell that the difference between any two consecutive terms is not the same. So, this is not an AP.

AP SCERT

இவ்வாறே,

$a = -7,\quad d = -2,$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0,\quad d = 0.1,$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0,\quad d = 1\frac{1}{2},$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2,\quad d = 0,$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை $2, 2, 2, 2, \ldots$

எனவே a மற்றும் d இவற்றின் மதிப்பு தெரிந்தால் நாம் கூட்டுத்தொடர் வரிசையை எழுதலாம். வேறுவழி என்ன? அதாவது எண்களின் பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டால் அது கூட்டுத்தொடர் வரிசையா என்று கூற முடியுமா மற்றும் a மற்றும் d-ஐ காண்க? இதில் a முதல் உறுப்பு என்பதால் இதை எளிதாக எழுதலாம். ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்புடன் d-ஐ கூட்டுவதால் கிடைப்பது கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும் என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே d ஆனது எந்த ஒரு உறுப்பையும் அதன் அடுத்த உறுப்பிலிருந்து கழிப்பதன் மூலம் கண்டறியப்படுகிறது. அதாவது இந்த d என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் ஒரே மாதிரியாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக : $6, 9, 12, 15, \ldots,$ என்ற எண் பட்டியலை கருதுவோம்.

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

இங்கு ஒவ்வொரு வரிசையிலும் எந்த இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசம் 3. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். இதன் முதல் உறுப்பு $a = 6$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 3$ ஆகும்.

$6, 3, 0, -3, \ldots,$ என்ற எண்கள் பட்டியலுக்கு

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

இவ்வாறே இதுவும் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். இதில் முதல் உறுப்பு 6 மற்றும் பொது வித்தியாசம் -3 ஆகும்.

பொதுவாக $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசைக்கு

$$d = a_{k+1} - a_k$$

இங்கு a_{k+1} மற்றும் a_k என்பன முறையே $(k+1)$வது மற்றும் kவது உறுப்பு ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசைக்கு d-ஐ காண $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ ஐ காண தேவையில்லை. இவற்றுள் ஒன்று கண்டறிந்தால் போதுமானது.

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ என்ற எண் பட்டியலை கருதுவோம். ஏதேனும் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புகளின் வித்தியாசம் ஒன்றுபோல் இல்லை என்பதை கூறலாம். ஆகவே இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகாது.

APSCERT

Note that to find d in the AP : 6, 3, 0, – 3, . . ., we have subtracted 6 from 3 and not 3 from 6, i.e., we should subtract the kth term from the $(k + 1)$ th term even if the $(k + 1)$ th term is smaller.

Let us make the concept more clear through some examples.

Example 1 : For the AP : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, . . ., write the first term a and the common difference d.

Solution : Here, $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

Remember that we can find d using any two consecutive terms, once we know that the numbers are in AP.

Example 2 : Which of the following list of numbers form an AP? If they form an AP, write the next two terms :

(i) 4, 10, 16, 22, . . .

(ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

Solution : (i) We have $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

i.e., $a_{k+1} - a_k$ is the same every time.

So, the given list of numbers forms an AP with the common difference $d = 6$.

The next two terms are: 22 + 6 = 28 and 28 + 6 = 34.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

i.e., $a_{k+1} - a_k$ is the same every time.

So, the given list of numbers forms an AP with the common difference $d = -2$.

The next two terms are:

$-5 + (-2) = -7$ and $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

As $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, the given list of numbers does not form an AP.

$6, 3, 0, -3, \ldots$, என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் d- ஐ காண 3 லிருந்து 6 ஐ கழிக்கிறோமே தவிர 6 லிருந்து 3 ஐ அல்ல என்பதை கவனி. அதாவது $(k+1)$ வது உறுப்பு சிறியது என்றாலும் நாம் $(k+1)$ வது உறுப்பிலிருந்து k வது உறுப்பைதான் கழிக்க வேண்டும்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் இந்த கருத்தை தெளிவாக புரிந்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$, என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d ஐ காண்க.

தீர்வு : இங்கு, $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

எண்கள் கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது என்று தெரிந்தால், ஏதேனும் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புகளை பயன்படுத்தி d ஐ காணலாம் என்பதை நினைவில் கொள்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பின்வரும் எண்கள் பட்டியலில் எவை கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது? கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது எனில் அடுத்த இரண்டு உறுப்புகளை எழுதுக :

(i) $4, 10, 16, 22, \ldots$ (ii) $1, -1, -3, -5, \ldots$

(iii) $-2, 2, -2, 2, -2, \ldots$ (iv) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$

தீர்வு : (i) நாம் பெறுவது

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

அதாவது, $a_{k+1} - a_k$ என்பது ஒவ்வொரு முறையும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். இதில் பொது வித்தியாசம் $d = 6$.

அடுத்த இரண்டு உறுப்புகள்: $22 + 6 = 28$ மற்றும் $28 + 6 = 34$.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

அதாவது, $a_{k+1} - a_k$ என்பது ஒவ்வொரு முறையும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். இதன் பொது வித்தியாசம் $d = -2$.

அடுத்த இரண்டு உறுப்புகள்: $-5 + (-2) = -7$ மற்றும் $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

இங்கு $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகாது.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$
$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$
$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

Here, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

So, the given list of numbers does not form an AP.

EXERCISE 5.1

1. In which of the following situations, does the list of numbers involved make an arithmetic progression, and why?

(i) The taxi fare after each km when the fare is ₹ 15 for the first km and ₹ 8 for each additional km.

(ii) The amount of air present in a cylinder when a vacuum pump removes $\frac{1}{4}$ of the air remaining in the cylinder at a time.

(iii) The cost of digging a well after every metre of digging, when it costs ₹ 150 for the first metre and rises by ₹ 50 for each subsequent metre.

(iv) The amount of money in the account every year, when ₹ 10000 is deposited at compound interest at 8 % per annum.

2. Write first four terms of the AP, when the first term a and the common difference d are given as follows:

(i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$

(iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

3. For the following APs, write the first term and the common difference:

(i) 3, 1, – 1, – 3, . . . (ii) – 5, – 1, 3, 7, . . .

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, . . .

4. Which of the following are APs ? If they form an AP, find the common difference d and write three more terms.

(i) 2, 4, 8, 16, . . . (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) – 1.2, – 3.2, – 5.2, – 7.2, . . . (iv) – 10, – 6, – 2, 2, . . .

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, . . .

(vii) 0, – 4, – 8, –12, . . . (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

AP SCERT

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$
$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$
$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

இங்கு, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகாது.

AP SCERT

பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் சூழ்நிலைகளில் எந்த சூழ்நிலையில் கிடைக்கும் எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும்?
   (i) ஒரு டாக்சி முதல் ஒரு கி.மீ பயணத்திற்கு ₹ 15 வீதமும், அதன் பிறகு ஒவ்வொரு கி.மீ.க்கும் ₹ 8 வீதமும் தந்தால் ஒவ்வொரு கி.மீ.யின் கட்டணம்.
   (ii) ஒரு வெற்றிடக் குழாய் சிலிண்டரில் உள்ள காற்றில் $\frac{1}{4}$ பாகத்தை வெளியேற்றும் எனில் ஒவ்வொரு முறையும் சிலிண்டரில் மீதமுள்ள காற்றின் அளவு.
   (iii) ஒரு கிணறு வெட்ட முதல் ஒரு மீட்டருக்கு ₹ 150 ம், அதன் பின் ஒவ்வொரு மீட்டருக்கும் ₹ 50 ம் செலவாகும். எனில் ஒவ்வொரு மீட்டருக்கும் ஆகும் செலவு.
   (iv) ஒரு வங்கியில் ₹ 10000 ஐ வருடத்திற்கு 8 % கூட்டுவட்டி வீதம் சேமிக்கப்படுகிறது எனில் ஒவ்வொரு வருடக் கடைசியில் வங்கிக் கணக்கில் உள்ள பணம்.

2. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d ஆகியவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் நான்கு உறுப்புகளை எழுதுக:
   (i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$
   (iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$
   (v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

3. பின்வரும் கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசத்தை எழுது:
   (i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$
   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. பின்வருவனவற்றில் எவை கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது? கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது எனில் பொது வித்தியாசம் d மற்றும் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.
   (i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$
   (iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$
   (v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(ix) 1, 3, 9, 27, . . . (x) a, $2a$, $3a$, $4a$, . . .

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 *n*th Term of an AP

Let us consider the situation again, given in Section 5.1 in which Reena applied for a job and got selected. She has been offered the job with a starting monthly salary of ₹ 8000, with an annual increment of ₹ 500. What would be her monthly salary for the fifth year?

To answer this, let us first see what her monthly salary for the second year would be.

It would be ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500. In the same way, we can find the monthly salary for the 3rd, 4th and 5th year by adding ₹ 500 to the salary of the previous year. So, the salary for the 3rd year = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (for the **3rd year**)

= ₹ 9000

Salary for the 4th year = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + **(4 – 1)** × 500] (for the **4th year**)

= ₹ 9500

Salary for the 5th year = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + **(5 – 1)** × 500] (for the **5th year**)

= ₹ 10000

Observe that we are getting a list of numbers

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

These numbers are in AP. (Why?)

AP SCERT

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பு

பகுதி 5.1 ல் உள்ள சூழ்நிலையை மீண்டும் எடுத்துக்கொள்வோம். ரீனா ஒரு வேலைக்காக விண்ணப்பித்தாள். ஒரு மாத சம்பளம் ₹ 8000 ஆகவும், ஆண்டு ஊதிய உயர்வு ₹ 500 ஆகவும் உள்ள ஒரு வேலைக்கு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டாள். அவளின் ஐந்தாம் ஆண்டு மாத சம்பளம் என்னவாக இருக்கும்?

இதற்கு விடை காண வேண்டுமானால், முதலில் அவருடைய இரண்டாவது ஆண்டு மாத சம்பளம் எவ்வளவு என்று நாம் பார்ப்போம்.

அது ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500. இவ்வாறே 3வது, 4வது மற்றும் 5வது ஆண்டின் மாத சம்பளம் காண முந்தைய ஆண்டுடன் ₹ 500 ஐ கூட்டுவதன் மூலம் கண்டுக்கொள்ளலாம்.

ஆகவே, 3வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500](for the **3வது ஆண்டிற்கு**)

= ₹ 9000

4வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + **(4 – 1)** × 500](for the **4வது ஆண்டிற்கு**)

= ₹ 9500

5வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + **(5 – 1)** × 500](for the **5வது ஆண்டிற்கு**)

= ₹ 10000

மேலுள்ளவற்றிலிருந்து 8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . . என்ற எண்கள் பட்டியல் கிடைக்கிறது என்பதை கவனி.

இந்த எண்கள் கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளதா? (ஏன்?)

AP SCERT

Now, looking at the pattern formed above, can you find her monthly salary for the 6th year? The 15th year? And, assuming that she will still be working in the job, what about the monthly salary for the 25th year? You would calculate this by adding ₹ 500 each time to the salary of the previous year to give the answer. Can we make this process shorter? Let us see. You may have already got some idea from the way we have obtained the salaries above.

Salary for the 15th year

$$= \text{Salary for the 14th year} + ₹\ 500$$

$$= ₹\left[8000 \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13\ times}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹\ [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500] = ₹\ 15000$$

i.e., First salary + (15 – 1) × Annual increment.

In the same way, her monthly salary for the 25th year would be

$$₹\ [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500] = ₹\ 20000$$

$$= \text{First salary} + \mathbf{(25 - 1)} \times \text{Annual increment}$$

This example would have given you some idea about how to write the 15th term, or the 25th term, and more generally, the nth term of the AP.

Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an AP whose first term a_1 is a and the common difference is d.

Then,

the **second term** $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

the **third** term $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

the **fourth** term $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

Looking at the pattern, we can say that the ***n*th** term $a_n = a + (n - 1)\, d$.

So, **the *n*th term a_n of the AP with first term *a* and common difference *d* is given by $a_n = a + (n - 1)\, d$.**

a_n is also called the **general term of the AP**. If there are m terms in the AP, then a_m

இப்போது, மேற்கண்ட அமைப்பிலிருந்து அவருடைய 6வது ஆண்டிற்கான சம்பளத்தை காண முடியுமா? 15வது ஆண்டிற்கான சம்பளம்? அவர் இதே வேலையில் தொடர்ந்து இருப்பதாக கொள்வோம். அவருடைய 25வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் என்னவாக இருக்கும்? இங்கு தற்போதைய ஆண்டு சம்பளம் முந்தைய ஆண்டு சம்பளத்துடன் ₹ 500 ஐ கூட்டி கணக்கிடுகிறோம். இதை சுருக்கமாக செய்ய முடியுமா? நாம் பார்க்கலாம். மேலே சம்பளம் கணக்கிட்ட முறையில் இருந்து உங்களுக்கு ஓரளவு புரிந்திருக்கும்.

15வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் = 14வது ஆண்டிற்கான சம்பளம் + ₹ 500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ முறைகள்}}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹\ [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500] = ₹\ 15000$$

அதாவது, முதல் சம்பளம் + (15 – 1) × ஆண்டு ஊதிய உயர்வு.

இவ்வாறே, அவருடைய 25வது ஆண்டிற்கான மாத சம்பளம்

$$₹\ [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500] = ₹\ 20000$$

= முதல் சம்பளம் + **(25 – 1)** × ஆண்டு ஊதிய உயர்வு

இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து 15வது உறுப்பு அல்லது 25வது உறுப்பை எவ்வாறு எழுதுவது என்பது நமக்கு புரிகிறது. மேலும் இந்த முறையை பயன்படுத்தி ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பை காணலாம்.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்க. இதன் முதல் உறுப்பு a_1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் d.

எனவே, **இரண்டாவது** உறுப்பு $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2-1)}\,d$

மூன்றாவது உறுப்பு $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3-1)}\,d$

நான்காவது உறுப்பு $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4-1)}\,d$

. . . .

. . . .

மேற்கண்ட அமைப்பை பார்க்கும்போது ***n* வது** உறுப்பு $a_n = a + (n-1)\,d$.

எனவே, முதல் உறுப்பு *a* மற்றும் பொது வித்தியாசம் *d* உள்ள கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் *n* வது உறுப்பு $a_n = a + (n-1)\,d$.

represents the **last term which is sometimes also denoted by *l*.**

Let us consider some examples.

Example 3 : Find the 10th term of the AP : 2, 7, 12, . . .

Solution : Here, $a = 2$, $d = 7 – 2 = 5$ and $n = 10$.

We have $a_n = a + (n – 1)\, d$

So, $a_{10} = 2 + (10 – 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

Therefore, the 10th term of the given AP is 47.

Example 4 : Which term of the AP : 21, 18, 15, . . . is – 81? Also, is any term 0? Give reason for your answer.

Solution : Here, $a = 21$, $d = 18 – 21 = – 3$ and $a_n = – 81$, and we have to find n.

As $a_n = a + (n – 1)\, d$,

we have $– 81 = 21 + (n – 1)(– 3)$

$– 81 = 24 – 3n$

$– 105 = – 3n$

So, $n = 35$

Therefore, the 35th term of the given AP is – 81.

Next, we want to know if there is any n for which $a_n = 0$. If such an n is there, then

$$21 + (n – 1) (–3) = 0,$$

i.e., $3(n – 1) = 21$

i.e., $n = 8$

So, the eighth term is 0.

Example 5 : Determine the AP whose 3rd term is 5 and the 7th term is 9.

Solution : We have

$$a_3 = a + (3 – 1)\, d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

and $a_7 = a + (7 – 1)\, d = a + 6d = 9 \quad (2)$

Solving the pair of linear equations (1) and (2), we get

$$a = 3,\ d = 1$$

Hence, the required AP is 3, 4, 5, 6, 7, . . .

AP SCERT

a_n என்பது **கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது உறுப்பு** என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் m உறுப்புகள் இருந்தால் a_m என்பது **கடைசி உறுப்பை குறிக்கும். இதை l என்று குறிப்பர்**.

சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : 2, 7, 12, . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 10 வது உறுப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ மற்றும் $n = 10$.

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

ஆகவே, $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 10 வது உறுப்பு 47 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : 21, 18, 15, . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் -81 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு? ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு 0 ஆகுமா? உன் விடைக்கு காரணம் கூறு.

தீர்வு : இங்கு, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ மற்றும் $a_n = -81$, மேலும் நாம் n ஐ காண வேண்டும்.

$$a_n = a + (n - 1)\, d,$$

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

ஆகவே, $n = 35$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 35 வது உறுப்பு -81 ஆகும்.

அடுத்து $a_n = 0$ ஆகுமாறு ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு உள்ளதா என நாம் கண்டறிய வேண்டும். அவ்வாறு உள்ளது எனில்,

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

$$3(n - 1) = 21$$

$$n = 8$$

ஆகவே 8 வது உறுப்பு 0 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 3வது உறுப்பு 5 மற்றும் 7 வது உறுப்பு 9 எனில் அந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையை காண்க.

தீர்வு : $a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$

மற்றும் $a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$

(1) மற்றும் (2) ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதால், நாம் பெறுவது

$$a = 3, \; d = 1$$

எனவே, 3, 4, 5, 6, 7, . . . என்பது தேவையான கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும்.

AP SCERT

Example 6 : Check whether 301 is a term of the list of numbers 5, 11, 17, 23, . . .

Solution : We have :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

As $a_{k+1} - a_k$ is the same for $k = 1, 2, 3$, etc., the given list of numbers is an AP.

Now, $a = 5$ and $d = 6$.

Let 301 be a term, say, the nth term of this AP.

We know that

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

So, $$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

i.e., $$301 = 6n - 1$$

So, $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

But n should be a positive integer (Why?). So, 301 is not a term of the given list of numbers.

Example 7 : How many two-digit numbers are divisible by 3?

Solution : The list of two-digit numbers divisible by 3 is :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

Is this an AP? Yes it is. Here, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

As $$a_n = a + (n - 1)\, d,$$

we have $$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

i.e., $$87 = (n - 1) \times 3$$

i.e., $$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

i.e., $$n = 29 + 1 = 30$$

So, there are 30 two-digit numbers divisible by 3.

Example 8 : Find the 11th term from the last term (towards the first term) of the AP : 10, 7, 4, . . ., – 62.

Solution : Here, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

where $$l = a + (n - 1)\, d$$

AP SCERT

எடுத்துக்காட்டு 6 : $5, 11, 17, 23, \ldots$ என்ற எண்களின் பட்டியலில் 301 என்பது ஒரு உறுப்பு ஆகுமா?

தீர்வு : $a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

$k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ மதிப்புகளுக்கு $(a_{k+1} - a_k)$ என்பது ஒரே மாதிரியாக இருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

இப்போது, $a = 5$ மற்றும் $d = 6$.

301 எனும் உறுப்பு இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பு என்க.

$$a_n = a + (n-1)\, d$$

எனவே, $$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

அதாவது, $$301 = 6n - 1$$

ஆகவே, $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

ஆனால் n என்பது ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும் (ஏன்?).
எனவே, 301 என்பது கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் பட்டியலில் இருக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 7 : 3 ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க எண்கள் எத்தனை?

தீர்வு : 3 ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க எண்களின் பட்டியல் :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

இது ஒரு கூட்டுத்தொடரா? ஆம். இங்கு, $a = 12,\ d = 3,\ a_n = 99$.

$$a_n = a + (n-1)\, d,$$
$$99 = 12 + (n-1) \times 3$$
$$87 = (n-1) \times 3$$

அதாவது, $$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

அதாவது, $$n = 29 + 1 = 30$$

எனவே 3 ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க எண்கள் 30 உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8 : $10, 7, 4, \ldots, -62$ என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் கடைசியிலிருந்து (முதல் உறுப்பை நோக்கி)11 வது உறுப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு, $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3,\ l = -62,$

$$l = a + (n-1)\, d$$

AP SCERT

To find the 11th term from the last term, we will find the total number of terms in the AP.

So, $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

i.e., $-72 = (n-1)(-3)$

i.e., $n - 1 = 24$

or $n = 25$

So, there are 25 terms in the given AP.

The 11th term from the last term will be the 15th term. (Note that it will not be the 14th term. Why?)

So, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

i.e., the 11th term from the last term is – 32.

Alternative Solution :

If we write the given AP in the reverse order, then $a = -62$ and $d = 3$ (Why?)

So, the question now becomes finding the 11th term with these a and d.

So, $a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

So, the 11th term, which is now the required term, is – 32.

Example 9 : A sum of ₹ 1000 is invested at 8% simple interest per year. Calculate the interest at the end of each year. Do these interests form an AP? If so, find the interest at the end of 30 years making use of this fact.

Solution : We know that the formula to calculate simple interest is given by

$$\text{Simple Interest} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

So, the interest at the end of the1st year = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ = ₹ 80

The interest at the end of the2nd year = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ = ₹ 160

The interest at the end of the3rd year = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ = ₹ 240

Similarly, we can obtain the interest at the end of the 4th year, 5th year, and so on.

So, the interest (in ₹) at the end of the 1st, 2nd, 3rd, . . . years, respectively are

80, 160, 240, . . .

AP SCERT

கடைசியில் இருந்து 11 வது உறுப்பைக்காண கூட்டுத்தொடர் வரிசையிலுள்ள மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை காண வேண்டும்.

எனவே,
$$-62 = 10 + (n-1)(-3)$$
$$-72 = (n-1)(-3)$$
$$n-1 = 24$$
$$n = 25$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் 25 உறுப்புகள் உள்ளன.

கடைசியிலிருந்து 11 வது உறுப்பு என்பது 15 வது உறுப்பாகும். (அது 14 வது உறுப்பல்ல என்பதை கவனி. ஏன்?)

எனவே, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

அதாவது கடைசியிலிருந்து 11 வது உறுப்பு -32 ஆகும்.

மாற்றுமுறையில் தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசையை பின்னோக்கி எழுதினால் $a = -62$ மற்றும் $d = 3$ (ஏன்?)

எனவே இப்போது கேள்வி இந்த a மற்றும் d உடன் 11 வது உறுப்பை கண்டுபிடிப்பதாகும்.

எனவே, $a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

எனவே, இப்போது தேவைப்படும் 11 வது உறுப்பு -32 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : ஆண்டிற்கு 8% தனிவட்டி வீதம் ₹ 1000 தொகை முதலீடு செய்யப்படுகிறது. ஒவ்வொரு ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் வட்டியை கணக்கிடு. இந்த வட்டிகள் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகுமா? ஆம் எனில் 30 வது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் வட்டியை கணக்கிடு.

தீர்வு : தனிவட்டியை கணக்கிடுவதற்கான சூத்திரம் நமக்கு தெரியும்.

$$\text{தனிவட்டி} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

எனவே, முதல் வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி $= ₹\,\frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹\,80$

2 ம் வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி $= ₹\,\frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\,160$

3 ம் வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி $= ₹\,\frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹\,240$

இவ்வாறே 4 ஆம், 5 ஆம் வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டியை பெறலாம்.

எனவே 1 ம், 2 ஆம், 3 ஆம், . . . வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி (₹-ல்) முறையே

$$80, 160, 240, \ldots$$

APSCERT

It is an AP as the difference between the consecutive terms in the list is 80, i.e., $d = 80$. Also, $a = 80$.

So, to find the interest at the end of 30 years, we shall find a_{30}.

Now, $a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

So, the interest at the end of 30 years will be ₹ 2400.

Example 10 : In a flower bed, there are 23 rose plants in the first row, 21 in the second, 19 in the third, and so on. There are 5 rose plants in the last row. How many rows are there in the flower bed?

Solution : The number of rose plants in the 1st, 2nd, 3rd, . . ., rows are :

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

It forms an AP (Why?). Let the number of rows in the flower bed be n.

Then $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

As, $a_n = a + (n - 1)\, d$

We have, $5 = 23 + (n - 1)(-2)$

i.e., $-18 = (n - 1)(-2)$

i.e., $n = 10$

So, there are 10 rows in the flower bed.

AP SCERT

EXERCISE 5.2

1. Fill in the blanks in the following table, given that a is the first term, d the common difference and a_n the nth term of the AP:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

இந்த பட்டியலில் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் 80, எனவே இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். அதாவது $d = 80$. மேலும் $a = 80$.

எனவே 30 வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டியை காண நாம் a_{30} ஐ காண வேண்டும்.

இப்போது, $a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

எனவே, 30 வது வருட முடிவில் கிடைக்கும் வட்டி ₹ 2400.

எடுத்துக்காட்டு 10 : ஒரு மலர்ப்படுகையில் முதல் வரிசையில் 23 ரோஜா செடிகளும், 2 வது வரிசையில் 21 ரோஜா செடிகளும், 3 வது வரிசையில் 19 .... உள்ளன. கடைசி வரிசையில் 5 ரோஜா செடிகள் உள்ளன. எனில் மலர்ப்படுகையில் உள்ள வரிசைகள் எத்தனை?

தீர்வு : 1 வது, 2 வது, 3 வது, . . ., வரிசையில் உள்ள ரோஜா செடிகளின் எண்ணிக்கை :

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும் (ஏன்?). மலர்ப்படுகையில் உள்ள வரிசைகளின் எண்ணிக்கை n என்க.

இங்கு $a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

$$a_n = a + (n-1)\,d$$
$$5 = 23 + (n-1)(-2)$$
$$-18 = (n-1)(-2)$$
$$n = 10$$

எனவே, மலர்ப்படுகையில் 10 வரிசைகள் உள்ளன.

பயிற்சி 5.2

1. கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d மற்றும் n வது உறுப்பு a_n எனில் பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

AP SCERT

2. Choose the correct choice in the following and justify :

(i) 30th term of the AP: 10, 7, 4, . . . , is

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) 11th term of the AP: – 3, $-\frac{1}{2}$, 2, . . ., is

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) – $48\frac{1}{2}$

3. In the following APs, find the missing terms in the boxes :

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5, $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) – 4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, – 22

4. Which term of the AP : 3, 8, 13, 18, . . . ,is 78?

5. Find the number of terms in each of the following APs :

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, . . . , – 47

6. Check whether – 150 is a term of the AP : 11, 8, 5, 2 . . .

7. Find the 31st term of an AP whose 11th term is 38 and the 16th term is 73.

8. An AP consists of 50 terms of which 3rd term is 12 and the last term is 106. Find the 29th term.

9. If the 3rd and the 9th terms of an AP are 4 and – 8 respectively, which term of this AP is zero?

10. The 17th term of an AP exceeds its 10th term by 7. Find the common difference.

11. Which term of the AP : 3, 15, 27, 39, . . . will be 132 more than its 54th term?

12. Two APs have the same common difference. The difference between their 100th terms is 100, what is the difference between their 1000th terms?

13. How many three-digit numbers are divisible by 7?

14. How many multiples of 4 lie between 10 and 250?

15. For what value of n, are the nth terms of two APs: 63, 65, 67, . . . and 3, 10, 17, . . . equal?

16. Determine the AP whose third term is 16 and the 7th term exceeds the 5th term by 12.

APSCERT

2. பின்வருவனவற்றில் சரியான விடையை தேர்ந்தெடு மற்றும் நியாயப்படுத்து :

(i) 10, 7, 4, . . . , என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 30 வது உறுப்பு :

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$, என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 11 வது உறுப்பு

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. பின்வரும் கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளிலுள்ள பெட்டிகளில் விடுபட்ட உறுப்புகளை கண்டுபிடி:

(i) 2, ☐, 26

(ii) ☐, 13, ☐, 3

(iii) 5, ☐, ☐, $9\frac{1}{2}$

(iv) – 4, ☐, ☐, ☐, ☐, 6

(v) ☐, 38, ☐, ☐, ☐, – 22

4. 3, 8, 13, 18, . . . , என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் 78 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?

5. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை காண்க:

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

6. 11, 8, 5, 2 . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் –150 ஓர் உறுப்பாகுமா என சோதித்து பார்.

7. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் 11 வது உறுப்பு 38, 16 வது உறுப்பு 73. எனில் 31 வது உறுப்பை கண்டுபிடி.

8. 50 உறுப்புகளை கொண்டுள்ள ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 3 வது உறுப்பு 12 மற்றும் கடைசி உறுப்பு 106. எனில் அந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 29 வது உறுப்பை கண்டுபிடி.

9. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 3 வது மற்றும் 9 வது உறுப்புகள் முறையே 4 மற்றும் – 8 எனில் எத்தனையாவது உறுப்பு 0 ஆக இருக்கும்?

10. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 17 வது உறுப்பானது 10 வது உறுப்பை விட 7 அதிகம் எனில் பொது வித்தியாசத்தை காண்க.

11. 3, 15, 27, 39, . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் எந்த உறுப்பு 54 வது உறுப்பை விட 132 அதிகமாக இருக்கும்?

12. இரண்டு கூட்டுத்தொடர் வரிசைகள் ஒரே பொது வித்தியாசத்தை பெற்றுள்ளன. அவற்றின் 100 வது உறுப்புகளின் வித்தியாசம் 100 எனில் அவற்றின் 1000 வது உறுப்புகளின் வித்தியாசம் என்ன?

13. 7 ஆல் வகுபடக்கூடிய மூன்றிலக்க எண்கள் எத்தனை?

14. 10 மற்றும் 250 க்கு இடையிலுள்ள 4 ன் மடங்குகள் எத்தனை?

15. 63, 65, 67, . . . மற்றும் 3, 10, 17, . . . என்ற இரண்டு கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளின் n ன் எந்த மதிப்பிற்கு n வது உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும்?

16. மூன்றாவது உறுப்பு 16 மற்றும் 7 வது உறுப்பு 5 வது உறுப்பை விட 12 அதிகமாக உடைய கூட்டுத்தொடரை காண்க.

17. Find the 20th term from the last term of the AP : 3, 8, 13, . . ., 253.

18. The sum of the 4th and 8th terms of an AP is 24 and the sum of the 6th and 10th terms is 44. Find the first three terms of the AP.

19. Subba Rao started work in 1995 at an annual salary of ₹ 5000 and received an increment of ₹ 200 each year. In which year did his income reach ₹ 7000?

20. Ramkali saved ₹ 5 in the first week of a year and then increased her weekly savings by ₹ 1.75. If in the nth week, her weekly savings become ₹ 20.75, find n.

5.4 Sum of First *n* Terms of an AP

Let us consider the situation again given in Section 5.1 in which Shakila put ₹ 100 into her daughter's money box when she was one year old, ₹ 150 on her second birthday, ₹ 200 on her third birthday and will continue in the same way. How much money will be collected in the money box by the time her daughter is 21 years old?

Here, the amount of money (in ₹) put in the money box on her first, second, third, fourth . . . birthday were respectively 100, 150, 200, 250, . . . till her 21st birthday. To find the total amount in the money box on her 21st birthday, we will have to write each of the 21 numbers in the list above and then add them up. Don't you think it would be a tedious and time consuming process? Can we make the process shorter? This would be possible if we can find a method for getting this sum. Let us see.

We consider the problem given to Gauss (about whom you read in Chapter 1), to solve when he was just 10 years old. He was asked to find the sum of the positive integers from 1 to 100. He immediately replied that the sum is 5050. Can you guess how did he do? He wrote :

$$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$$

And then, reversed the numbers to write

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

Adding these two, he got

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$
$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \quad \text{(100 times)}$$

So, $$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050, \text{ i.e., the sum} = 5050.$$

17. 3, 8, 13, . . ., 253 என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் கடைசியிலிருந்து 20 வது உறுப்பை காண்க.

18. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் 4வது மற்றும் 8வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 24 மேலும் 6வது மற்றும் 10வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 44. எனில் முதல் மூன்று உறுப்புகளை காண்க.

19. சுப்பாராவ் 1995 ஆண்டில் ₹ 5000 சம்பளத்தில் வேலையை தொடங்கினார். மேலும் ஒவ்வொரு வருடமும் ₹ 200 சம்பள உயர்வாக பெற்றார். எந்த ஆண்டு அவரது சம்பளம் ₹ 7000 ஐ அடையும்?

20. ராம்காலி ஒரு வருடத்தின் முதல் வாரத்தில் ₹ 5 ஐ சேமித்து பின்னர் தனது வார சேமிப்பை ₹ 1.75 ஆக உயர்த்தினார். n வது வாரத்தில் அவருடைய சேமிப்பு ₹ 20.75 ஆக இருந்தால் n ஐ கண்டுபிடி.

5.4 ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n உறுப்புகளின் மொத்தம்

பிரிவு 5.1 ல் கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையை மீண்டும் கருத்தில் கொள்வோம். ஷகிலா தனது மகளுக்கு ஒரு வயதாக இருந்தபோது ₹ 100 ஐ மகளின் பணப்பெட்டியில் இட்டார். இரண்டாவது பிறந்தநாளின் போது ₹ 150 , மூன்றாவது பிறந்தநாளின் போது ₹ 200 மற்றும் இவ்வாறே ஒவ்வொரு பிறந்தநாள் போதும் தொடர்கிறது. அவருடைய மகளின் 21 வது பிறந்தநாளன்று பணப்பெட்டியில் எவ்வளவு பணம் சேகரிக்கப்படும்?

இங்கு முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் .... பிறந்தநாளில் பெட்டியில் உள்ள பணம் முறையே 100, 150, 200, 250, . . . இவ்வாறு 21 வது பிறந்தநாள் வரை தொடர்கிறது. 21 வது பிறந்தநாள் வரை பணப்பெட்டியில் உள்ள மொத்த பணத்தை கண்டறிய மேலே கூறிய 21 எண்களை வரிசையாக எழுதி கூட்ட வேண்டும். இவ்வாறு செய்வது நேரத்தை வீணாக்குவது மட்டுமல்லாமல் கடினமானதும் கூட என்று உங்களால் ஊகிக்க முடிகிறதா? இதை எளிதாக்க முடியுமா? மொத்தம் காணும் முறையை கண்டறிந்தால் அது சாத்தியமாகும். நாம் பார்க்கலாம்.

காஸ் தனது 10 வது வயதில் செய்த ஒரு கணக்கை இப்போது நாம் கருதுவோம் (அத்தியாயம் 1 ல் நீங்கள் படித்தவரைப்பற்றி) 1 லிருந்து 100 வரை உள்ள மிகை எண்களின் மொத்தம் காணுமாறு இவரிடம் கேட்கப்பட்டது. அவர் உடனே மொத்தம் 5050 என்று விடையளித்தார். அவர் எவ்வாறு செய்திருப்பார் என்று உங்களால் ஊகிக்க முடிகிறதா? அவர் பின்வருமாறு எழுதினார் :

$$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$$

மீண்டும் அவற்றை திருப்பி எழுதினார்

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

இரண்டையும் கூட்டி, கீழ்கண்டவாறு பெற்றார்

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \quad \text{(100 முறை)}$$

எனவே, $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$, அதாவது மொத்தம் $= 5050$.

We will now use the same technique to find the sum of the first n terms of an AP :

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

The nth term of this AP is $a + (n - 1)\, d$. Let S denote the sum of the first n terms of the AP. We have

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)\, d] \qquad (1)$$

Rewriting the terms in reverse order, we have

$$S = [a + (n - 1)\, d] + [a + (n - 2)\, d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

On adding (1) and (2), term-wise. we get

$$2S = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ times}}$$

or, $2S = n\,[2a + (n - 1)\, d]$ (Since, there are n terms)

or, $S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d]$

So, **the sum of the first *n* terms of an AP is given by**

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d]}$$

We can also write this as $S = \frac{n}{2}\,[a + a + (n - 1)\, d]$

i.e., $\mathbf{S = \frac{n}{2}\,(a + a_n)}$ (3)

Now, if there are only n terms in an AP, then $a_n = l$, the last term.
From (3), we see that

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,(a + l)} \qquad (4)$$

This form of the result is useful when the first and the last terms of an AP are given and the common difference is not given.

Now we return to the question that was posed to us in the beginning. The amount of money (in Rs) in the money box of Shakila's daughter on 1st, 2nd, 3rd, 4th birthday, . . ., were 100, 150, 200, 250, . . ., respectively.

This is an AP. We have to find the total money collected on her 21st birthday, i.e., the sum of the first 21 terms of this AP.

AP SCERT

நாமும் இதே முறையை பின்பற்றி $a, a+d, a+2d, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தத்தை காண்போம் :

இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பு $a + (n - 1)\ d$. இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் S என்க.

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)\ d] \qquad (1)$$

உறுப்புகளை பின்னோக்கி மாற்றியமைத்தால் நமக்கு கிடைப்பது

$$S = [a + (n - 1)\ d] + [a + (n - 2)\ d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஐ உறுப்புவாரியாக கூட்டினால் நாம் பெறுவது

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\ldots+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{n \text{ முறைகள்}}$$

அல்லது $2S = n\ [2a + (n - 1)\ d]$ (இங்கு n உறுப்புகள் உள்ளன)

அல்லது $S = \frac{n}{2}\ [2a + (n - 1)\ d]$

எனவே, ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\ [2a + (n - 1)\ d]}$$

இதை நாம் இவ்வாறு கூட எழுதலாம் $S = \frac{n}{2}\ [a + a + (n - 1)\ d]$

அதாவது, $$\mathbf{S = \frac{n}{2}\ (a + a_n)} \qquad (3)$$

இப்போது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் n உறுப்புகள் மட்டும் இருந்தால் $a_n = l$, (3) லிருந்து

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\ (a + l)} \qquad (4)$$

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு மற்றும் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டு பொது வித்தியாசம் கொடுக்கப்படாதபோது இந்த வடிவம் பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

இப்போது நாம் ஆரம்பத்தில் பார்த்த வினாவிற்கு திரும்பவும் செல்வோம். ஷகிலாவுடைய மகளின் 1 வது, 2 வது, 3 வது, 4 வது, . . ., பிறந்தநாள்கள் அன்று பணப்பெட்டியில் உள்ள பணம் முறையே 100, 150, 200, 250, . . ., இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

21 வது பிறந்தநாளன்று அவருடைய பணப்பெட்டியில் உள்ள மொத்த பணத்தை நாம் கணக்கிட வேண்டும். அதாவது கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் 21 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண வேண்டும்.

AP SCERT

Here, $a = 100$, $d = 50$ and $n = 21$. Using the formula :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d],$$

we have $$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

So, the amount of money collected on her 21st birthday is ₹ 12600.

Hasn't the use of the formula made it much easier to solve the problem?

We also use S_n in place of S to denote the sum of first n terms of the AP. We write S_{20} to denote the sum of the first 20 terms of an AP. The formula for the sum of the first n terms involves four quantities S, a, d and n. If we know any three of them, we can find the fourth.

Remark : The nth term of an AP is the difference of the sum to first n terms and the sum to first $(n - 1)$ terms of it, i.e., $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Let us consider some examples.

Example 11 : Find the sum of the first 22 terms of the AP : 8, 3, –2, . . .

Solution : Here, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

We know that

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

Therefore, $$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

So, the sum of the first 22 terms of the AP is – 979.

Example 12 : If the sum of the first 14 terms of an AP is 1050 and its first term is 10, find the 20th term.

Solution : Here, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

As $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

so, $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

இங்கு, $a = 100,\ d = 50$ மற்றும் $n = 21$. சூத்திரத்தை பயன்படுத்தினால் :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d],$$

$$S = \frac{21}{2}[2\times 100 + (21-1)\times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2}\times 1200 = 12600$$

ஆகவே, 21 வது பிறந்தநாளன்று அவருடைய பணப்பெட்டியில் உள்ள மொத்த பணம் ₹ 12600 ஆகும்.

இந்த சூத்திரத்தை பயன்படுத்தாமல் மிக எளிதாக இந்த கணக்கை தீர்க்க முடியுமா?

கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காண S க்கு பதிலாக S_n ஐ பயன்படுத்துகிறோம். இதனால் நாம் எத்தனை உறுப்புகளை கூட்ட வேண்டுமென்று நமக்குத் தெரிகிறது. முதல் 20 உறுப்புகளின் மொத்தத்தை S_{20} என்று எழுதுகிறோம். முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காணும் சூத்திரத்தில் S, a, d மற்றும் n என்ற நான்கு அளவைகள் உள்ளன. இதில் ஏதேனும் மூன்று தெரிந்தால் நாம் நான்காவதை கண்டுபிடிக்கலாம்.

குறிப்பு : ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தத்திற்கும் மற்றும் முதல் $(n-1)$ உறுப்புகளின் மொத்தத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசம் n வது உறுப்பு ஆகும். அதாவது, $a_n = S_n - S_{n-1}$.

சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 11 : 8, 3, –2, . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் 22 உறுப்புகளின் கூடுதலை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு, $a = 8,\ d = 3 - 8 = -5,\ n = 22$.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

ஆகையால், $$S = \frac{22}{2}[16 + 21\,(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

எனவே, இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் 22 உறுப்புகளின் கூடுதல் – 979 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 : ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் 14 உறுப்புகளின் கூடுதல் 1050. முதல் உறுப்பு 10 எனில் 20 வது உறுப்பை காண்க.

தீர்வு : இங்கு, $S_{14} = 1050,\ n = 14,\ a = 10$.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

$$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

i.e., $910 = 91d$

or, $d = 10$

Therefore, $a_{20} = 10 + (20 – 1) \times 10 = 200$, i.e. 20th term is 200.

Example 13 : How many terms of the AP : 24, 21, 18, . . . must be taken so that their sum is 78?

Solution : Here, $a = 24$, $d = 21 – 24 = –3$, $S_n = 78$. We need to find n.

We know that $$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

So, $$78 = \frac{n}{2}\left[48 + (n-1)(-3)\right] = \frac{n}{2}\left[51 - 3n\right]$$

or $3n^2 – 51n + 156 = 0$

or $n^2 – 17n + 52 = 0$

or $(n – 4)(n – 13) = 0$

or $n = 4$ or 13

Both values of n are admissible. So, the number of terms is either 4 or 13.

Remarks :

1. In this case, the sum of the first 4 terms = the sum of the first 13 terms = 78.
2. Two answers are possible because the sum of the terms from 5th to 13th will be zero. This is because a is positive and d is negative, so that some terms will be positive and some others negative, and will cancel out each other.

Example 14 : Find the sum of :

(i) the first 1000 positive integers (ii) the first n positive integers

Solution :

(i) Let $S = 1 + 2 + 3 + . . . + 1000$

Using the formula $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ for the sum of the first n terms of an AP, we have

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

So, the sum of the first 1000 positive integers is 500500.

(ii) Let $S_n = 1 + 2 + 3 + . . . + n$

Here $a = 1$ and the last term l is n.

அதாவது, $910 = 91d$

அல்லது, $d = 10$

ஆகையால், $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$, அதாவது 20 வது உறுப்பு 200.

எடுத்துக்காட்டு 13 : 24, 21, 18, . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் எத்தனை உறுப்புகளின் மொத்தம் 78 ஆகும்?

தீர்வு : இங்கு, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. நாம் n ஐ காண வேண்டும்.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

எனவே, $$78 = \frac{n}{2}[48+(n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

அல்லது $3n^2 - 51n + 156 = 0$

அல்லது $n^2 - 17n + 52 = 0$

அல்லது $(n-4)(n-13) = 0$

அல்லது $n = 4$ or 13

n ன் இரண்டு மதிப்புகளையும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆகவே உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4 அல்லது 13.

குறிப்புகள்:

1. இந்த வகையில் முதல் 4 உறுப்புகளின் மொத்தம் = முதல் 13 உறுப்புகளின் மொத்தம் = 78.
2. இரண்டு விடைகளுமே சாத்தியம் ஏனெனில் 5 வது உறுப்பிலிருந்து 13 வது உறுப்புகள் வரையிலான மொத்தம் 0 ஆகிவிடுகிறது. அதாவது a மிகை, d குறையாக இருப்பதால் சில உறுப்புகள் மிகையாகவும், சில உறுப்புகள் குறையாகவும் இருக்கின்றன. மற்றும் அவை ஒன்றுக்கொன்று மதிப்பற்று போய்விடும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 : மொத்தம் காண்க :

(i) முதல் 1000 மிகை முழுக்கள் (ii) முதல் n மிகை முழுக்கள்

தீர்வு : (i) $S = 1 + 2 + 3 + . . . + 1000$ என்க.

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலை காணும் சூத்திரம் $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ஐ பயன்படுத்தினால், நாம் பெறுவது

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

எனவே, முதல் 1000 மிகை முழுக்களின் மொத்தம் 500500 ஆகும்.

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + . . . + n$ என்க.

இங்கு $a = 1$ மற்றும் கடைசி உறுப்பு $l = n$.

APSCERT

Therefore, $\quad S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ or $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

So, **the sum of first *n* positive integers is given by**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Example 15 : Find the sum of first 24 terms of the list of numbers whose nth term is given by

$$a_n = 3 + 2n$$

Solution :

As $\quad a_n = 3 + 2n,$

so, $\quad a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

List of numbers becomes 5, 7, 9, 11, . . .

Here, $\quad 7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ and so on.

So, it forms an AP with common difference $d = 2$.

To find S_{24}, we have $n = 24$, $\quad a = 5$, $\quad d = 2$.

Therefore, $\quad S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$

So, sum of first 24 terms of the list of numbers is 672.

Example 16 : A manufacturer of TV sets produced 600 sets in the third year and 700 sets in the seventh year. Assuming that the production increases uniformly by a fixed number every year, find :

(i) the production in the 1st year $\quad$ (ii) the production in the 10th year

(iii) the total production in first 7 years

Solution : (i) Since the production increases uniformly by a fixed number every year, the number of TV sets manufactured in 1st, 2nd, 3rd, . . ., years will form an AP.

Let us denote the number of TV sets manufactured in the nth year by a_n.

Then, $\quad a_3 = 600$ and $a_7 = 700$

ஆகையால், $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ அல்லது $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

எனவே, **முதல் n மிகை முழுக்களின் மொத்தம்**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 : $a_n = 3 + 2n$ ஐ n வது உறுப்பாக கொண்ட எண்கள் தொடரின் முதல் 24 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

தீர்வு :

$$a_n = 3 + 2n,$$
$$a_1 = 3 + 2 = 5$$
$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$
$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$
$$\vdots$$

எண்கள் பட்டியல் $5, 7, 9, 11, \ldots$

இங்கு, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

எனவே, இது கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். இதன் பொது வித்தியாசம் $d = 2$.

$n = 24,\quad a = 5,\quad d = 2$ ஆகியவற்றை கொண்டு நாம் S_{24} ஐ காண வேண்டும்.

ஆகையால், $S_{24} = \frac{24}{2}\left[2 \times 5 + (24-1) \times 2\right] = 12\left[10 + 46\right] = 672$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் பட்டியலில் முதல் 24 உறுப்புகளின் மொத்தம் 672.

எடுத்துக்காட்டு 16 : ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி தயாரிக்கும் நிறுவனம் 3 ஆம் ஆண்டு 600 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும், 7 ஆம் ஆண்டு 700 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும் தயாரிக்கிறது. இந்த தயாரிப்பு ஒவ்வொரு வருடமும் ஒரு நிலையான எண்ணிக்கையில் உயருகிறது எனக்கொள்வோம். பின்வருவனவற்றை காண்க :

(i) முதல் ஆண்டு தயாரித்தவை (ii) 10 ஆம் ஆண்டு தயாரித்தவை

(iii) முதல் 7 ஆண்டுகளில் தயாரித்த மொத்தம்

தீர்வு : (i) தயாரிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான எண்ணிக்கையில் உயருவதால் 1ஆம், 2ஆம், 3ஆம், . . ., ஆண்டுகளில் தயாரிக்கப்படும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

n ஆம் ஆண்டில் தயாரிக்கப்படும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை a_n என்க.

எனவே, $a_3 = 600$ மற்றும் $a_7 = 700$

AP SCERT

or, $a + 2d = 600$

and $a + 6d = 700$

Solving these equations, we get $d = 25$ and $a = 550$.

Therefore, production of TV sets in the first year is 550.

(ii) Now $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

So, production of TV sets in the 10th year is 775.

(iii) Also, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

Thus, the total production of TV sets in first 7 years is 4375.

AP SCERT

EXERCISE 5.3

1. Find the sum of the following APs:

(i) 2, 7, 12, . . ., to 10 terms. (ii) –37, –33, –29, . . ., to 12 terms.

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., to 100 terms. (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . ., to 11 terms.

2. Find the sums given below :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. In an AP:

(i) given $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$, find n and S_n.

(ii) given $a = 7$, $a_{13} = 35$, find d and S_{13}.

(iii) given $a_{12} = 37$, $d = 3$, find a and S_{12}.

(iv) given $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$, find d and a_{10}.

(v) given $d = 5$, $S_9 = 75$, find a and a_9.

(vi) given $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$, find n and a_n.

(vii) given $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$, find n and d.

(viii) given $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$, find n and a.

(ix) given $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$, find d.

(x) given $l = 28$, $S = 144$, and there are total 9 terms. Find a.

அல்லது, $a + 2d = 600$

$a + 6d = 700$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை தீர்த்தால், நாம் பெறுவது $d = 25$ மற்றும் $a = 550$.

முதலாம் ஆண்டில் தயாரிக்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் 550.

(ii) இப்போது $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

எனவே 10 ஆம் ஆணடில் தயாரிக்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் 775.

(iii) மேலும், $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

எனவே முதல் 7 ஆண்டுகளில் தயாரிக்கப்பட்ட மொத்த தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் 4375.

பயிற்சி 5.3

1. பின்வரும் கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளின் மொத்தம் காண்க:

(i) 2, 7, 12, . . ., 10 உறுப்புகள் வரை. (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 உறுப்புகள் வரை

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . .,100 உறுப்புகள் வரை. (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . ., 11 உறுப்புகள் வரை.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றின் மொத்தங்களை காண்க :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில்:

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$, எனில் n மற்றும் S_n ஐ காண்க.

(ii) $a = 7, a_{13} = 35$, எனில் d மற்றும் S_{13} ஐ காண்க.

(iii) $a_{12} = 37, d = 3$, எனில் a மற்றும் S_{12} ஐ காண்க.

(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$, எனில் d மற்றும் a_{10} ஐ காண்க.

(v) $d = 5, S_9 = 75$, எனில் a மற்றும் a_9 ஐ காண்க.

(vi) $a = 2, d = 8, S_n = 90$, எனில் n மற்றும் a_n ஐ காண்க.

(vii) $a = 8, a_n = 62, S_n = 210$, எனில் n மற்றும் d ஐ காண்க.

(viii) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$, எனில் n மற்றும் a ஐ காண்க.

(ix) $a = 3, n = 8, S = 192$, எனில் d ஐ காண்க.

(x) $l = 28, S = 144$, மற்றும் மொத்த உறுப்புகள் 9 எனில் a ஐ காண்க.

APSCERT

4. How many terms of the AP : 9, 17, 25, . . . must be taken to give a sum of 636?
5. The first term of an AP is 5, the last term is 45 and the sum is 400. Find the number of terms and the common difference.
6. The first and the last terms of an AP are 17 and 350 respectively. If the common difference is 9, how many terms are there and what is their sum?
7. Find the sum of first 22 terms of an AP in which $d = 7$ and 22nd term is 149.
8. Find the sum of first 51 terms of an AP whose second and third terms are 14 and 18 respectively.
9. If the sum of first 7 terms of an AP is 49 and that of 17 terms is 289, find the sum of first n terms.
10. Show that $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ form an AP where a_n is defined as below :
    (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$
    Also find the sum of the first 15 terms in each case.
11. If the sum of the first n terms of an AP is $4n - n^2$, what is the first term (that is S_1)? What is the sum of first two terms? What is the second term? Similarly, find the 3rd, the 10th and the nth terms.
12. Find the sum of the first 40 positive integers divisible by 6.
13. Find the sum of the first 15 multiples of 8.
14. Find the sum of the odd numbers between 0 and 50.
15. A contract on construction job specifies a penalty for delay of completion beyond a certain date as follows: ₹ 200 for the first day, ₹ 250 for the second day, ₹ 300 for the third day, etc., the penalty for each succeeding day being ₹ 50 more than for the preceding day. How much money the contractor has to pay as penalty, if he has delayed the work by 30 days?
16. A sum of ₹ 700 is to be used to give seven cash prizes to students of a school for their overall academic performance. If each prize is ₹ 20 less than its preceding prize, find the value of each of the prizes.
17. In a school, students thought of planting trees in and around the school to reduce air pollution. It was decided that the number of trees, that each section of each class will plant, will be the same as the class, in which they are studying, e.g., a section of Class I will plant 1 tree, a section of Class II will plant 2 trees and so on till Class XII. There are three sections of each class. How many trees will be planted by the students?
18. A spiral is made up of successive semicircles, with centres alternately at A and B, starting with centre at A, of radii 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, . . . as shown in Fig. 5.4. What is the total length of such a spiral made up of thirteen consecutive semicircles? (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

AP SCERT

4. 9, 17, 25, . . . என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் 636 எனும் தொகையை பெறுவதற்கு எத்தனை உறுப்புகளை கூட்ட வேண்டும்?

5. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 5, கடைசி உறுப்பு 45 மற்றும் கூடுதல் 400. எனில் அதன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் பொதுவித்தியாசம் ஆகியவற்றை காண்க.

6. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகள் முறையே 17 மற்றும் 350, பொது வித்தியாசம் 9, எனில் அவற்றில் உள்ள உறுப்புகள் எத்தனை மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் என்ன?

7. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் $d = 7$ மற்றும் 22 வது உறுப்பு 149. எனில் முதல் 22 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

8. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது உறுப்புகள் முறையே 14 மற்றும் 18. எனில் முதல் 51 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

9. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 7 உறுப்புகளின் மொத்தம் 49 மற்றும் 17 உறுப்புகளின் மொத்தம் 289, எனில் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

10. a_n பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை எனக்காட்டு:
(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$
மேலும் ஒவ்வொரு வகையிலும் முதல் 15 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

11. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகள் வரை மொத்தம் $4n - n^2$, எனில் முதல் உறுப்பு (S_1) என்ன? முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் மொத்தம் என்ன? இரண்டாம் உறுப்பு என்ன? இவ்வாறே 3வது, 10வது மற்றும் n வது உறுப்புகளை காண்க.

12. 6 ஆல் வகுபடக்கூடிய முதல் 40 மிகை முழுக்களின் மொத்தம் காண்க.

13. 8 ன் மடங்குகளில் முதல் 15 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

14. 0 மற்றும் 50 க்கு இடைப்பட்ட ஒற்றை எண்களின் மொத்தம் காண்க.

15. ஒரு கட்டுமானப் பணிக்கான ஒப்பந்தம் ஒரு குறிப்பிட்ட தேதிக்கு அப்பால் காலதாமதம் ஆனதற்கான அபராதம் பின்வருமாறு குறிக்கப்படுகிறது: முதல் நாளுக்கு ₹ 200, இரண்டாவது நாளுக்கு ₹ 250, மூன்றாவது நாளுக்கு ₹ 300, ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த நாட்களுக்கான அபராதம் அதன் முந்தைய நாளைவிட ₹ 50 அதிகம். 30 நாட்கள் பணியை தாமதப்படுத்தினால் ஒப்பந்தக்காரர் அபராதமாக செலுத்த வேண்டிய தொகை எவ்வளவு?

16. ஒரு பள்ளியிலுள்ள மாணவர்களுக்கு அவர்களின் ஒட்டுமொத்த கல்வித் திறனுக்காக ₹ 700 ஐ செலவு செய்தது. ஒவ்வொரு பரிசுத் தொகையும் அதன் முந்தைய பரிசுத்தொகையைவிட ₹ 20 குறைவு. எனில் ஒவ்வொரு பரிசுத்தொகையின் மதிப்பை காண்க.

17. ஒரு பள்ளியில் மாசுக் கட்டுப்பாட்டை குறைக்க மாணவர்கள் பள்ளியை சுற்றிலும் மரக்கன்றுகளை நட முடிவு செய்தனர். ஒவ்வொரு பிரிவு மாணவர்களும் அவர்கள் படிக்கும் வகுப்பிற்கு சமமான செடிகளை அதாவது I ஆம் வகுப்பு படிக்கும் ஒரு பிரிவு மாணவர்கள் 1 செடியும், II ஆம் வகுப்பு படிக்கும் ஒரு பிரிவு மாணவர்கள் 2 செடிகளும் நட வேண்டும். இவ்வாறு XII ஆம் வகுப்பு வரை செய்ய வேண்டும் என்று முடிவு செய்தார்கள். ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் மூன்று பிரிவுகள் இருந்தால் மாணவர்களால் நடப்பட்ட மொத்த செடிகள் எத்தனை?

18. படம் 5.4 ல் காட்டியுள்ளதைப் போல தொடர்ச்சியான அரைவட்டங்களால் ஒரு சுருள் செய்யப்படுகிறது. அரைவட்டத்தின் மையங்கள் A ல் ஆரம்பித்து A மற்றும் B களுக்கு இடையே மாறிக்கொண்டே இருக்கிறது. மேலும் அரைவட்டத்தின் ஆரங்கள் முறையே 0.5 செ.மீ, 1.0 செ.மீ, 1.5 செ.மீ, 2.0 செ.மீ, . . . இவ்வாறு 13 அரைவட்டங்கள் உள்ளது எனில் சுருளின் மொத்த நீளம் எவ்வளவு? ($\pi = \frac{22}{7}$ என எடுத்துக்கொள்)

AP SCERT

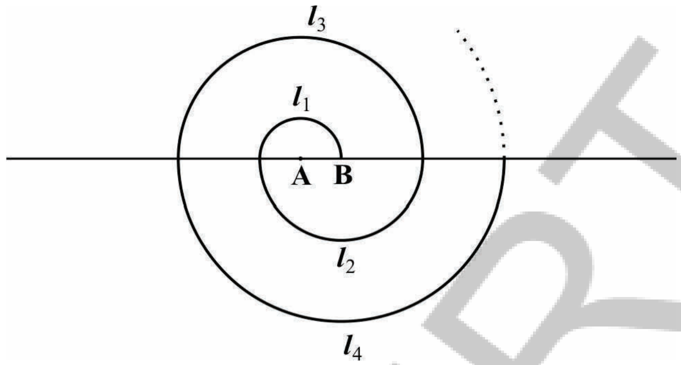


Fig. 5.4

[**Hint :** Length of successive semicircles is $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ with centres at A, B, A, B, . . ., respectively.]

19. 200 logs are stacked in the following manner: 20 logs in the bottom row, 19 in the next row, 18 in the row next to it and so on (see Fig. 5.5). In how many rows are the 200 logs placed and how many logs are in the top row?

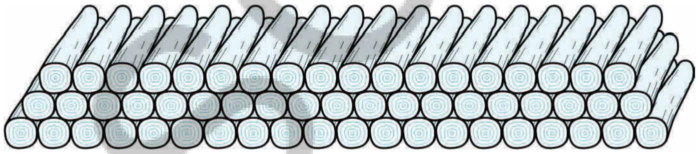


Fig. 5.5

20. In a potato race, a bucket is placed at the starting point, which is 5 m from the first potato, and the other potatoes are placed 3 m apart in a straight line. There are ten potatoes in the line (see Fig. 5.6).

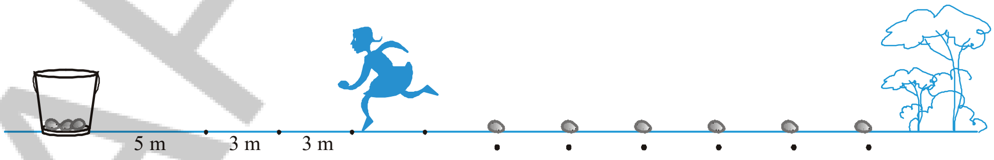
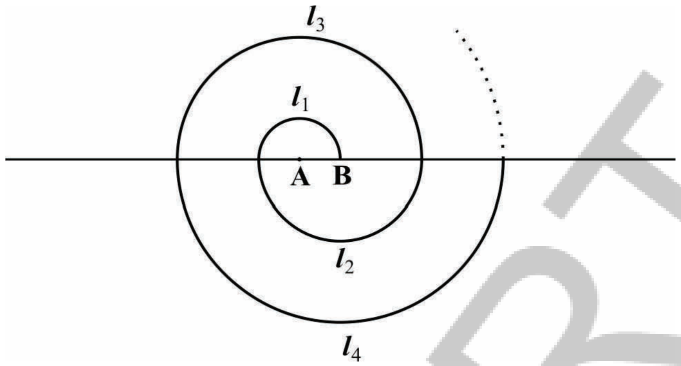


Fig. 5.6

A competitor starts from the bucket, picks up the nearest potato, runs back with it, drops it in the bucket, runs back to pick up the next potato, runs to the bucket to drop it in, and she continues in the same way until all the potatoes are in the bucket. What is the total distance the competitor has to run?

[**Hint :** To pick up the first potato and the second potato, the total distance (in metres) run by a competitor is $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

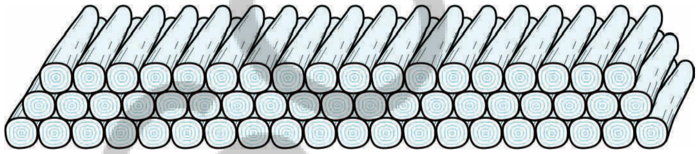
APSCERT



படம். 5.4

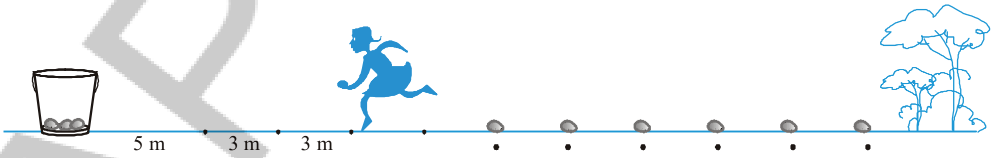
[**குறிப்பு :** தொடர்ச்சியான அரைவட்டத்தின் நீளங்கள் முறையே $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ மற்றும் அவற்றின் மையங்கள் முறையே A, B, A, B, . . .,]

19. 200 மரத்துண்டுகள் கீழுள்ளவாறு அடுக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளது: கீழ் வரிசையில் 20 மரத்துண்டுகளும், அதன் மேல் வரிசையில் 19 மரத்துண்டுகளும், அதன்மேல் 18 மரத்துண்டுகளும் அடுக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளது (படம். 5.5 ஐ பார்). 200 மரத்துண்டுகளை அடுக்கி வைப்பதற்கு எத்தனை வரிசைகள் தேவை? மற்றும் மேல் வரிசையில் எத்தனை மரத்துண்டுகள் இருக்கும்?



படம். 5.5

20. உருளைக்கிழங்கு பந்தயம் ஒன்றில் ஆரம்பப்புள்ளியில் வாளி ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து 5 மீ தூரத்தில் முதல் உருளைக்கிழங்கும் மற்றும் மற்ற உருளைக்கிழங்குகள் ஒரு நேர்க்கோட்டின் மேல் 3 மீ இடைவெளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறு 10 உருளைக்கிழங்குகள் அந்த கோட்டின் மீது உள்ளன (படம்.5.6 ஐ பார்).



படம். 5.6

ஒரு போட்டியாளர் வாளி இருக்கும் இடத்திலிருந்து தொடங்கி அருகிலுள்ள உருளைக்கிழங்கை எடுத்துக்கொண்டு ஓடிவந்து வாளியில் போட வேண்டும். அடுத்த உருளைக்கிழங்கை எடுப்பதற்கு மீண்டும் ஓடி கிழங்கை எடுத்துக்கொண்டு வந்து வாளியில் போட வேண்டும். இவ்வாறு மொத்த உருளைக்கிழங்குகளையும் வாளியில் போடும் வரை இதே முறையில் தொடர்ந்து செய்ய வேண்டும். அந்த போட்டியாளர் ஓட வேண்டிய மொத்த தூரம் எவ்வளவு?

[**குறிப்பு :** ஒன்றாவது, இரண்டாவது உருளைக்கிழங்கை எடுத்துவர அந்த போட்டியாளர் ஓட வேண்டிய தூரம் (மீட்டர்களில்) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

AP SCERT

EXERCISE 5.4 (Optional)*

1. Which term of the AP : 121, 117, 113, . . ., is its first negative term?
[**Hint :** Find n for $a_n < 0$]

2. The sum of the third and the seventh terms of an AP is 6 and their product is 8. Find the sum of first sixteen terms of the AP.

3. A ladder has rungs 25 cm apart. (see Fig. 5.7). The rungs decrease uniformly in length from 45 cm at the bottom to 25 cm at the top. If the top and the bottom rungs are $2\frac{1}{2}$ m apart, what is the length of the wood required for the rungs?

[**Hint :** Number of rungs = $\frac{250}{25} + 1$]

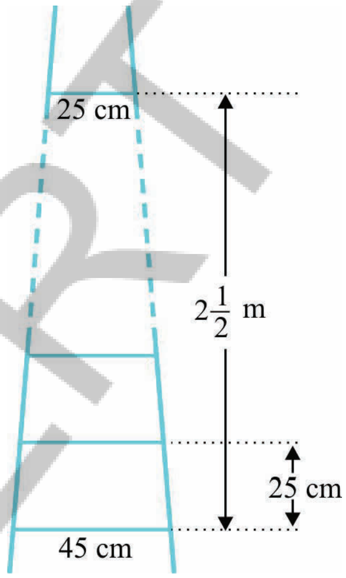


Fig. 5.7

4. The houses of a row are numbered consecutively from 1 to 49. Show that there is a value of x such that the sum of the numbers of the houses preceding the house numbered x is equal to the sum of the numbers of the houses following it. Find this value of x.
[**Hint :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. A small terrace at a football ground comprises of 15 steps each of which is 50 m long and built of solid concrete.

Each step has a rise of $\frac{1}{4}$ m and a tread of $\frac{1}{2}$ m. (see Fig. 5.8). Calculate the total volume of concrete required to build the terrace.

[**Hint :** Volume of concrete required to build the first step = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 \text{ m}^3$]

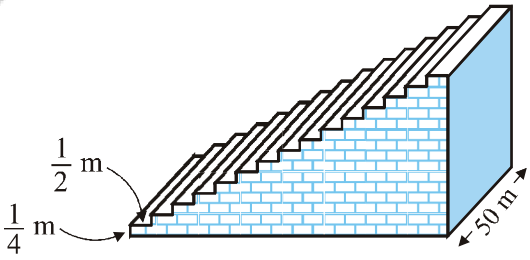


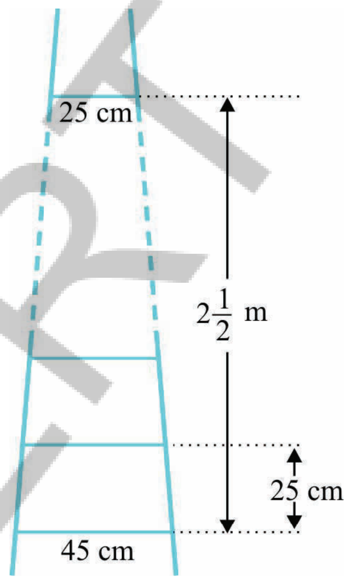
Fig. 5.8

* These exercises are not from the examination point of view.

பயிற்சி 5.4 (விருப்பப் பயிற்சி)*

1. 121, 117, 113, . . ., என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் முதல் குறை உறுப்பு எது? [**குறிப்பு** : $a_n < 0$ இருக்குமாறு n ன் மதிப்பை காண்க]
2. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 3 வது மற்றும் 7 வது உறுப்புகளின் மொத்தம் 6. மேலும் பெருக்கற்பலன் 8. எனில் முதல் 16 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.
3. ஒரு ஏணியின் படிகள் 25 செ.மீ. இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன.(படம்.5.7 ஐ பார்). படிகளின் நீளம் கீழிருந்து மேலாக அடிபாகம் 45 செ.மீ.யிலிருந்து மேலே 25 செ.மீ. வரை ஒரே சீராக குறைகிறது. அடி மற்றும் உச்சி படிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $2\frac{1}{2}$ மீ எனில் ஏணிப்படி அமைக்க தேவையான கட்டையின் நீளம் என்ன?

   [**குறிப்பு** : படிகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{250}{25} + 1$]

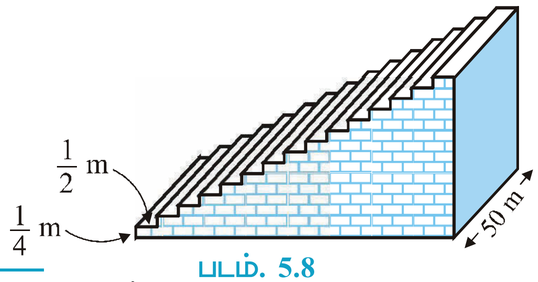


படம். 5.7

4. 1 முதல் 49 வரை தொடர்ச்சியான எண்ணிக்கை உடைய ஒரு வரிசையில் வீடுகள் உள்ளன. ஏதேனும் ஒரு வீட்டிற்கு கொடுக்கப்பட்ட எண் x எனக் கொண்டால் இந்த வீட்டிற்கு முன் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையின் மொத்தம், அதற்கு அடுத்துள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையின் மொத்தத்திற்கு சமமாக உள்ளவாறு அந்த வீட்டு எண் x உள்ளது எனக்காட்டு. மேலும் x ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

   [**குறிப்பு** : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]
5. ஒரு கால்பந்து மைதானத்தில் 15 படிகளை உடைய ஒரு மேடை கான்கிரீட்டால் கட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் ஒவ்வொரு படியின் நீளம் 50 மீ, அகலம் $\frac{1}{2}$ மீ. ஒவ்வொரு படியும் அதற்கு முன் உள்ள படிக்கு $\frac{1}{4}$ மீ. உயரத்தில் உள்ளது (படம்.5.8 ஐ பார்). மேடையை கட்டுவதற்கு தேவைப்படும் கான்கிரீட்டின் மொத்த கனஅளவு காண்க.

   [**குறிப்பு** : முதல்படி அமைக்கத் தேவையான கான்கிரீட்டின் கனஅளவு $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\ m^3$]



படம். 5.8

* இந்தப் பயிற்சி தேர்வுக்குரியது அல்ல.

5.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. An **arithmetic progression** (AP) is a list of numbers in which each term is obtained by adding a fixed number d to the preceding term, except the first term. The fixed number d is called the **common difference**.

The general form of an AP is $a, \; a + d, \; a + 2d, \; a + 3d, \ldots$

2. A given list of numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is an AP, if the differences $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, give the same value, i.e., if $a_{k+1} - a_k$ is the same for different values of k.

3. In an AP with first term a and common difference d, the nth term (or the general term) is given by $a_n = a + (n - 1)\, d$.

4. The sum of the first n terms of an AP is given by :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. If l is the last term of the finite AP, say the nth term, then the sum of all terms of the AP is given by :

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

A NOTE TO THE READER

If $a, \; b, \; c$ are in AP, then $b = \frac{a+c}{2}$ and b is called the arithmetic mean of a and c.

AP SCERT

5.5 தொகுப்பு

இந்த அத்தியாயத்தில் நீங்கள் பின்வருவனவற்றை கற்றீர்கள் :

1. ஒரு எண்களின் பட்டியலில் முதல் உறுப்பை தவிர மீதமுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் அவற்றிற்கு முன் உள்ள உறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணை d கூட்டுவதால் ஏற்படுகின்ற எண்களின் பட்டியலை **கூட்டுத்தொடர் வரிசை** (AP) என்கிறோம். இந்த நிலையான எண் d **பொது வித்தியாசம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

   கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொதுவடிவம் $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$

2. $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ மதிப்புகள் சமம் எனில் $a_1, a_2, a_3, \ldots$ என்ற எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும். அதாவது $a_{k+1} - a_k$ என்பது k ன் வெவ்வேறான மதிப்புகளுக்கு ஒரே மாதிரியாக உள்ளது.

3. முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d உள்ள ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n வது உறுப்பு (அல்லது பொது உறுப்பு) $a_n = a + (n-1)\, d.$

4. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. ஒரு முடிவுறு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் கடைசி உறுப்பு அதாவது n வது உறுப்பு l எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் எல்லா உறுப்புகளின் மொத்தம்:

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

மாணவர்களுக்கான குறிப்பு :

$a,\ b,\ c$ ஆகியவை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை எனில் $b = \dfrac{a+c}{2}$

இங்கு b என்பது a மற்றும் c ன் கூட்டு சராசரி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

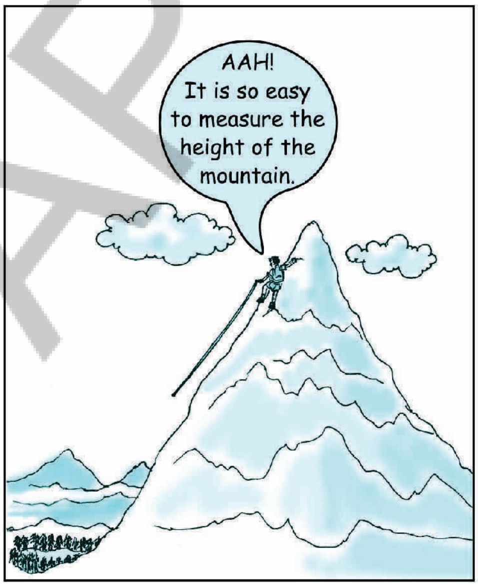
AP SCERT

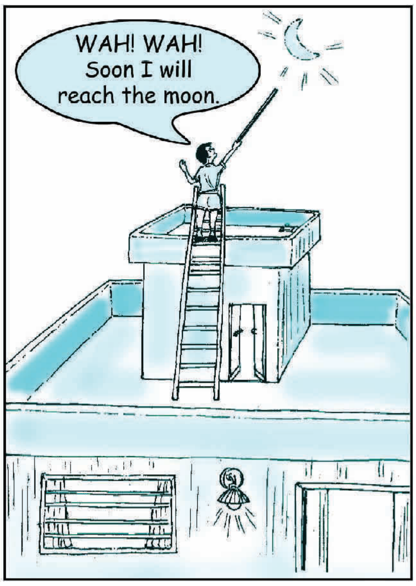
TRIANGLES 6

6.1 Introduction

You are familiar with triangles and many of their properties from your earlier classes. In Class IX, you have studied congruence of triangles in detail. Recall that two figures are said to be *congruent*, if they have the same shape and the same size. In this chapter, we shall study about those figures which have the same shape but not necessarily the same size. Two figures having the same shape (and not necessarily the same size) are called *similar figures.* In particular, we shall discuss the similarity of triangles and apply this knowledge in giving a simple proof of Pythagoras Theorem learnt earlier.

Can you guess how heights of mountains (say Mount Everest) or distances of some long distant objects (say moon) have been found out? Do you think these have





AP SCERT

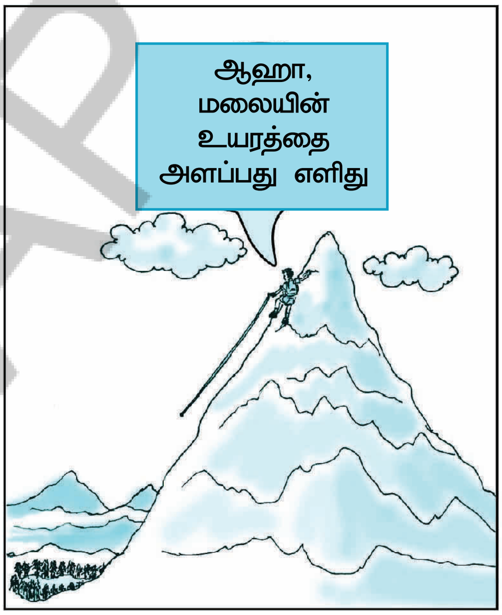
I5H6K5

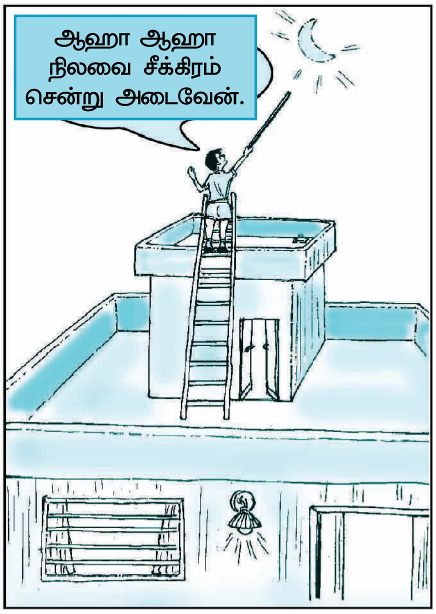
முக்கோணங்கள் 6

6.1 அறிமுகம்

முந்தைய வகுப்புகளில் முக்கோணங்களை பற்றியும் அவற்றின் பண்புகளை குறித்தும் படித்திருப்பீர்கள். முக்கோணங்களின் சர்வசம பண்பை பற்றி ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்திருப்பீர்கள். ஒரே மாதிரியான வடிவத்தையும் ஒரே மாதிரியான அளவையும் பெற்றுள்ள வடிவங்களை சர்வசம வடிவங்கள் என்பர். ஒரே மாதிரியான வடிவத்தையும் வெவ்வேறான அளவுகளையும் பெற்றுள்ள வடிவங்களை பற்றி இந்த அத்தியாயத்தில் படிப்போம். ஒரே மாதிரியான வடிவத்தையும் வெவ்வேறான அளவுகளையும் பெற்றுள்ள வடிவங்களை வடிவொத்த வடிவங்கள் (Similar Shapes) என்கிறோம். குறிப்பாக முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைகளை விவாத்தித்து பின்னர் இந்த அறிவை பயன்படுத்தி பிதாகாரஸ் தேற்றத்தை எளிய முறையில் நிரூபணம் செய்யப்போகிறோம்.

மலைகளின் உயரங்களையும் (உதாரணமாக இமயமலை) அல்லது மிக தொலைதூரத்தில் காணப்படும் பொருட்களின் தூரங்களையும் (உதாரணமாக நிலவு) எப்படி கண்டறியலாம் என்பதை ஊகிக்க முடிகிறதா? அளவு நாடாவை பயன்படுத்தி இவற்றை அளக்க முடியும் என நினைக்கிறாயா?





APSCERT

been measured directly with the help of a measuring tape? In fact, all these heights and distances have been found out using the idea of indirect measurements, which is based on the principle of similarity of figures (see Example 7, Q.15 of Exercise 6.3 and also Chapters 8 and 9 of this book)

6.2 Similar Figures

In Class IX, you have seen that all circles with the same radii are congruent, all squares with the same side lengths are congruent and all equilateral triangles with the same side lengths are congruent.

Now consider any two (or more) circles [see Fig. 6.1 (i)]. Are they congruent? Since all of them do not have the same radius, they are not congruent to each other. Note that some are congruent and some are not, but all of them have the same shape. So they all are, what we call, *similar*. Two similar figures have the same shape but not necessarily the same size. Therefore, all circles are similar. What about two (or more) squares or two (or more) equilateral triangles [see Fig. 6.1 (ii) and (iii)]? As observed in the case of circles, here also all squares are similar and all equilateral triangles are similar.

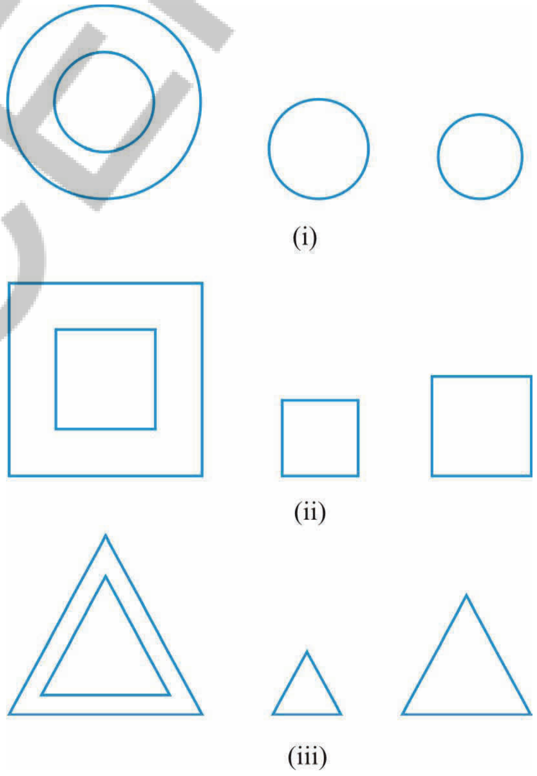


Fig. 6.1

From the above, we can say *that all congruent figures are similar but the similar figures need not be congruent.*

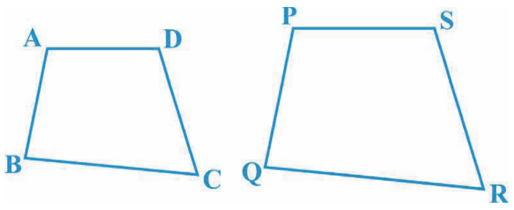


Fig. 6.2

Can a circle and a square be similar? Can a triangle and a square be similar? These questions can be answered by just looking at the figures (see Fig. 6.1). Evidently these figures are not similar. (Why?)

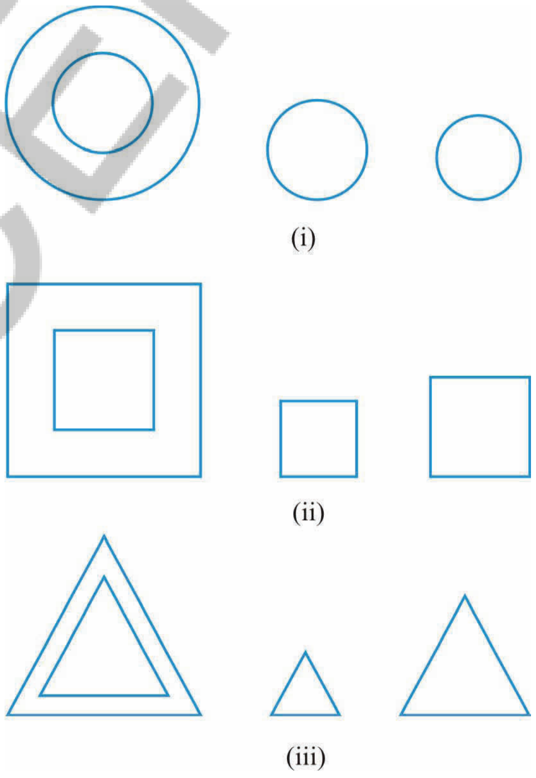
APSCERT

இவ்வாறான உயரங்கள் மற்றும் தூரங்கள் மறைமுக அளவீட்டு முறையை பயன்படுத்தி கண்டறியப்படுகின்றன. இம்முறை முக்கோணங்களின் வடிவொத்த பண்புகளை அடிப்படையாக கொண்டவை (எ.கா-7 பயிற்சி 6.3ல் வினா எண் 15 மேலும் இப்புத்தகத்தின் அத்தியாயம் 8 மற்றும் 9).

6.2 வடிவொத்த வடிவங்கள்

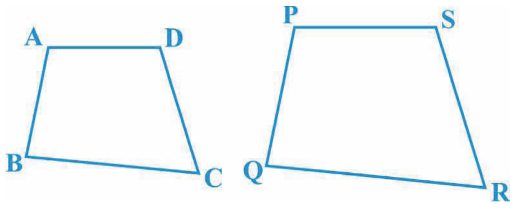
சமமான ஆரங்களை உடைய வட்டங்கள் சர்வ சமம், ஒரே மாதிரியான பக்க அளவுகளை உடைய சதுரங்கள் சர்வசமம். ஒரே மாதிரியான பக்க அளவுகளை உடைய எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களும் சர்வசமம் என்பதை பற்றி ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்திருப்பீர்கள்.

இப்பொழுது ஏதேனும் இரண்டு (அல்லது அதிகமான) வட்டங்களை எடுத்துக்கொள்ளலாம். [படம் 6.1 (i) ஐ பார்] இவைகள் சர்வசமமா? இவைகள் அனைத்தும் ஒரே ஆரத்தை பெற்றிருக்கவில்லை. ஆகையால் அவை ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமமல்ல. சில சர்வசமமாகவும் சில சர்வசமம் இல்லாமலும் இருப்பதை கவனி. ஆனால் இவைகள் எல்லாம் ஒரே மாதிரியான வடிவத்தை கொண்டுள்ளன. இவற்றை என்னவென்று அழைக்கலாம். வடிவொத்தவை இரண்டு வடிவொத்த வடிவங்கள் ஒரே மாதிரியான வடிவத்தையும் வெவ்வேறான அளவுகளையும் கொண்டுள்ளன. எனவே வெவ்வேறான ஆரங்களை பெற்றிருப்பினும் எல்லா வட்டங்களும் வடிவொத்தவை. படம் 6.1 (ii) மற்றும் (iii)]ல் உள்ள இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சதுரங்கள் மற்றும் சமபக்க முக்கோணங்களை பற்றி என்ன கூறலாம் வட்டங்களின் வடிவொப்புமை கோட்பாட்டுடன் ஒப்பிடும்போது எல்லா சதுரங்களையும் எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களையும் வடிவொத்தவை என கூற முடியுமா?



படம் 6.1

மேற்காணும் விவாதம் மூலம் நாம் பின்வருமாறு கூறலாம். அனைத்து சர்வசம வடிவங்களும் வடிவொத்தவை. ஆனால் அனைத்து வடிவொத்த வடிவங்களும் சர்வசமமல்ல.



படம் 6.2

வட்டமும் சதுரம் வடிவொத்தவையா? முக்கோணமும் சதுரமும் வடிவொத்தவையா? படம் 6.1ஐ ஆதாரமாக கொண்டு விடையளிக்கலாம். வடிவொத்தவை அல்ல என்பதை சான்றுடன் கூறலாம். (ஏன்?)

What can you say about the two quadrilaterals ABCD and PQRS (see Fig 6.2)?Are they similar? These figures appear to be similar but we cannot be certain about it.Therefore, we must have some definition of similarity of figures and based on this definition some rules to decide whether the two given figures are similar or not. For this, let us look at the photographs given in Fig. 6.3:

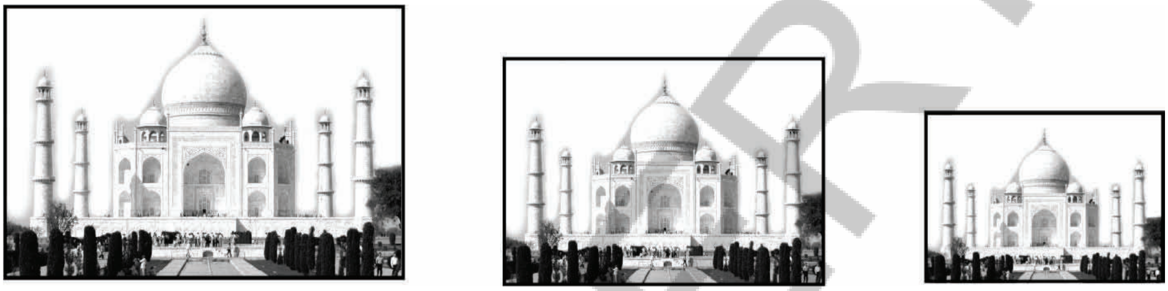


Fig. 6.3

You will at once say that they are the photographs of the same monument (Taj Mahal) but are in different sizes. Would you say that the three photographs are similar? Yes,they are.

What can you say about the two photographs of the same size of the same person one at the age of 10 years and the other at the age of 40 years? Are these photographs similar? These photographs are of the same size but certainly they are not of the same shape. So, they are not similar.

What does the photographer do when she prints photographs of different sizes from the same negative? You must have heard about the stamp size, passport size and postcard size photographs. She generally takes a photograph on a small size film, say of 35mm size and then enlarges it into a bigger size, say 45mm (or 55mm). Thus, if we consider any line segment in the smaller photograph (figure), its corresponding line segment in the bigger photograph (figure) will be $\frac{45}{35}\left(\text{or } \frac{55}{35}\right)$ of that of the line segment. This really means that every line segment of the smaller photograph is enlarged (increased) *in the ratio* 35:45 (or 35:55). It can also be said that every line segment of the bigger photograph is reduced (decreased) in the ratio 45:35 (or 55:35). Further, if you consider inclinations (or angles) between any pair of corresponding line segments in the two photographs of different sizes, you shall see that these inclinations(or angles) *are always equal.* This is the essence of the similarity of two figures and in particular of two polygons. We say that:

Two polygons of the same number of sides are similar, if (*i*) *their corresponding angles are equal and* (*ii*) *their corresponding sides are in the same ratio* (*or proportion*).

படம் 6.2ல் உள்ள ABCD மற்றும் PQRS எனும் இரண்டு நாற்கரங்களை பற்றி என்ன கூறலாம் அவை வடிவொத்தவையா? பார்ப்பதற்கு வடிவொத்தவையாக இருக்கலாம். ஆனால் உறுதியாக கூற முடியாது. எனவே வடிவங்களின் வடிவொப்புமைகளை உறுதி செய்ய வடிவொப்புமைக்கான வரையறையை சில விதிகளுக்கு உட்பட்டு உருவாக்க வேண்டியுள்ளது. இதற்கு படம் 6.3ஐ கவனிப்போம்.

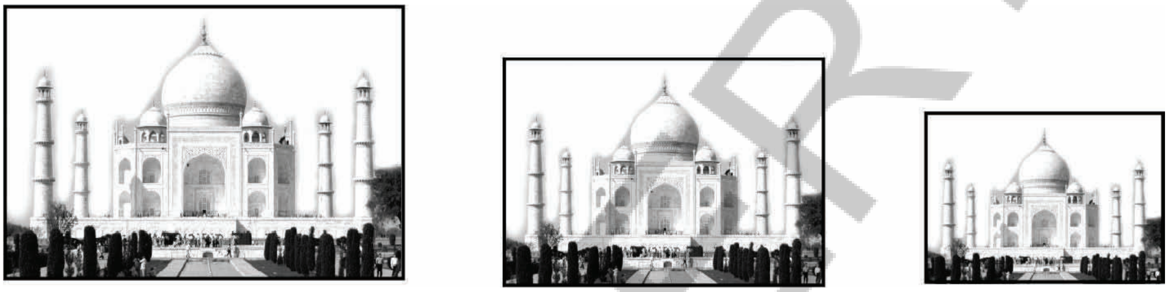


Fig. 6.3

படங்களை பார்க்கும் போது ஒரே நினைவு சின்னத்தை கொண்ட வெவ்வேறு அளவிலான புகைப்படங்கள் எனலாம். இந்த மூன்று புகைப்படங்களும் வடிவொத்தவையா? ஆம் அவை வடிவொத்தவை. ஒரே அளவிலான இரண்டு புகைப்படங்களை கருது அது ஒரே நபரின் புகைப்படம். ஒன்று அவருடைய 10 வயது புகைப்படம் மற்றொன்று அவருடைய 40 வயது புகைப்படம். இப்புகைப்படங்கள் வடிவொத்தவையா? இப்புகைப்படங்கள் ஒரே அளவில் இருந்தாலும் அவைகள் ஒரே வடிவத்தை பெற்றிருக்கவில்லை. எனவே இவைகள் வடிவொத்தவை அல்ல. ஒரு புகைப்படகாரர் ஒரே நிழற்படத்தை கொண்டு எப்படி வெவ்வேறு அளவிலான புகைப்படங்களை அச்சிட முடிகிறது. தபால் தலை அளவு (stamp size) கடவுசீட்டு அளவு (Passport size) தபால் அட்டை அளவு (Post card size) போன்ற அளவுகளை கொண்ட புகைப்படங்கள் பற்றி கேள்விப்பட்டிருப்பாய். 35மி.மீ அளவுடைய சிறிய புகைப்படமானது 45மி.மீ (அல்லது 55மி.மீ) அளவுடைய புகைப்படமாக பெரிதாக்கப்படுகிறது. 35மி.மீ புகைப்படத்தில் ஒரு சிறிய கோட்டுத்துண்டை கருதுவோமானால் இந்த கோட்டுதுண்டுக்கு ஒத்த கோட்டுத்துண்டின் அளவு 45மி.மீ புகைப்படத்தில் $\frac{45}{35}\left(\text{or } \frac{55}{35}\right)$ ஆக இருக்கும். இதன் பொருள் என்னவெனில் சிறிய புகைப்படத்திலுள்ள கோட்டுதுண்டு 35:45 (35:55) எனும் விகிதத்தில் பெரிதாக்கப்படுகிறது. மேலும் பெரிய புகைப்படத்திலிருந்து 45:35 (55:35) எனும் விகிதத்தில் சிறிதாக்கப்படலாம். வெவ்வேறு அளவுகளை கொண்ட இரண்டு புகைப்படங்களிலும் இடம்பெற்றுள்ள இந்த ஒத்த கோடுகளின் சாய்வுக் (கோணம்) சமமாக இருக்கும். இந்த சாரத்தின் அடிப்படையில் இரண்டு வடிவங்களின் வடிவொப்புமைக்கான வரையறையை பின்வருமாறு பெறலாம். இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்திருக்க சம எண்ணிக்கையிலான பக்கங்களை கொண்ட இரண்டு பல கோணங்கள் வடிவொத்திருக்க (i) அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் (ii) ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருக்க வேண்டும்.

Note that the same ratio of the corresponding sides is referred to as *the scale factor* (or the *Representative Fraction*) for the polygons. You must have heard that world maps (i.e., global maps) and blue prints for the construction of a building are prepared using a suitable scale factor and observing certain conventions.

In order to understand similarity of figures more clearly, let us perform the following activity:

Activity 1 : Place a lighted bulb at a point O on the ceiling and directly below it a table in your classroom. Let us cut a polygon, say a quadrilateral ABCD, from a plane cardboard and place this cardboard parallel to the ground between the lighted bulb and the table. Then a shadow of ABCD is cast on the table. Mark the outline of this shadow as A′B′C′D′ (see Fig.6.4).

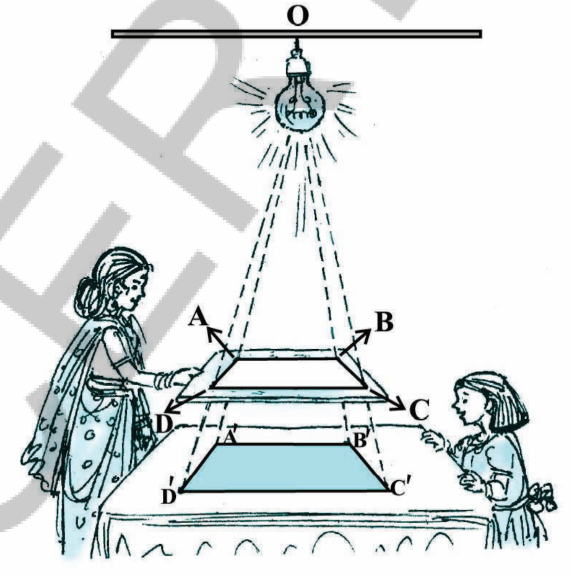


Fig. 6.4

Note that the quadrilateral A′B′C′D′ is an enlargement (or magnification) of the quadrilateral ABCD. This is because of the property of light that light propogates in a straight line. You may also note that A′ lies on ray OA, B′ lies on ray OB, C′ lies on OC and D′ lies on OD. Thus, quadrilaterals A′B′C′D′ and ABCD are of the same shape but of different sizes.

So, quadrilateral A′B′C′D′ is similiar to quadrilateral ABCD. We can also say that quadrilateral ABCD is similar to the quadrilateral A′B′C′D′.

Here, you can also note that vertex A′ corresponds to vertex A, vertex B′ corresponds to vertex B, vertex C′ corresponds to vertex C and vertex D′ corresponds to vertex D. Symbolically, these correspondences are represented as $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ and $D' \leftrightarrow D$. By actually measuring the angles and the sides of the two quadrilaterals, you may verify that

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ and

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

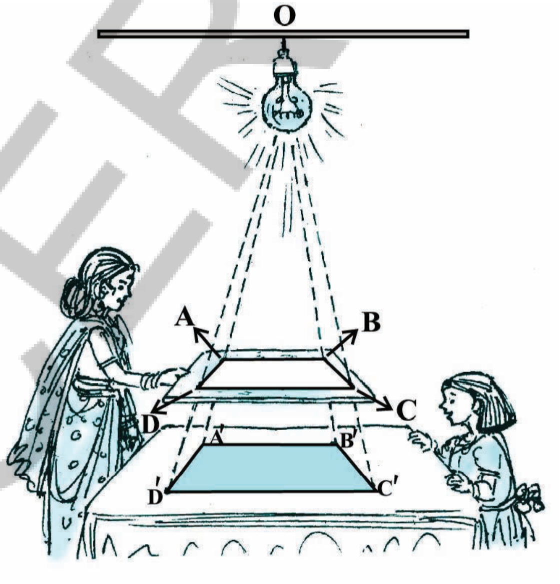
This again emphasises that *two polygons of the same number of sides are similar, if* (*i*) *all the corresponding angles are equal and* (*ii*) *all the corresponding sides are in the same ratio* (*or proportion*).

AP SCERT

குறிப்பு: ஒத்த பக்கங்களின் சமவிகிதமானது பலகோணங்களின் அளவுதிட்ட காரணி (அல்லது சார்பு பின்னம்) என அழைக்கப்படுகிறது. இந்த அளவுதிட்ட காரணிகளை பற்றி உலக புறவரிப்படங்கள், கட்டிடங்களின் திட்டபடங்கள் போன்ற கோட்பாடுகளில் அதிகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. பொருத்தமான அளவுதிட்ட காரணிகளை கொண்டு கட்டிடங்களின் திட்டபடங்கள் தேவைக்கேற்ப வரையப்படுகின்றன.

வடிவங்களின் வடிவொப்புமைகளை புரிந்துகொள்ள கீழ்காணும் செயலை செய்வோம்.

செயல் 1 : உங்கள் வகுப்பறையில் மேற்கூரையில் பொருத்தப்பட்ட மின் விளக்கு எரியும்படி செய்து அதற்கு நேர்கீழாக மேசையைவை. ஒரு அட்டையிலிருந்து ஒரு பலகோணம் ABCDஐ வெட்டி எடு அதை தரைக்கு இணையாகவும் மின்விளக்கு மற்றும் மேசைக்கு மத்தியிலும் படத்தில் காட்டியவாறு வை. மேசையின் மேல் அட்டையின் நிழலின் புறவரியை வரைந்து நாற்கரம் $A'B'C'D'$ என பெயரிடு.



படம் 6.4

இந்த நாற்கரம் $A'B'C'D'$ என்பது ABCDன் பெரிதுபடுத்தப்பட்ட அல்லது உருபெருக்கம் செய்யப்பட்டதாகும். அதாவது மின்விளக்கின் இடம் O எனக் கொண்டால் A' என்பது OAன் மேல் அமையும். B' என்பது OBன் மேலும், C' என்பது OC ன் மேலும். D' என்பது ODன் மேலும் அமையும். நாற்கரங்கள் ABCD மேலும் $A'B'C'D'$ என்பவை ஒரே வடிவத்தையும் வெவ்வேறு அளவுகளையும் கொண்டுள்ளன.

A' என்பது உச்சி Aக்கு ஒத்ததாக உள்ளது. இதை $A' \leftrightarrow A$ என குறியீட்டால் குறிக்கிறோம். இவ்வாறே $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ மேலும் $D' \leftrightarrow D$.

கோணங்களையும் பக்கங்களையும் அளந்து பார்த்து கீழ்க்கண்டவற்றை சரிபார்க்வும்.

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ மேலும்

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

இதிலிருந்து சமமான எண்ணிக்கையுள்ள பக்கங்களை உடைய இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்க வேண்டுமெனில்,

(*i*) அவற்றின் ஒத்தகோணங்கள் எல்லாம் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(*ii*) அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் (விகித சமத்தில்) இருக்க வேண்டும் என்பதை உறுதிப்படுத்துகிறது.

AP SCERT

From the above, you can easily say that quadrilaterals ABCD and PQRS of Fig. 6.5 are similar.

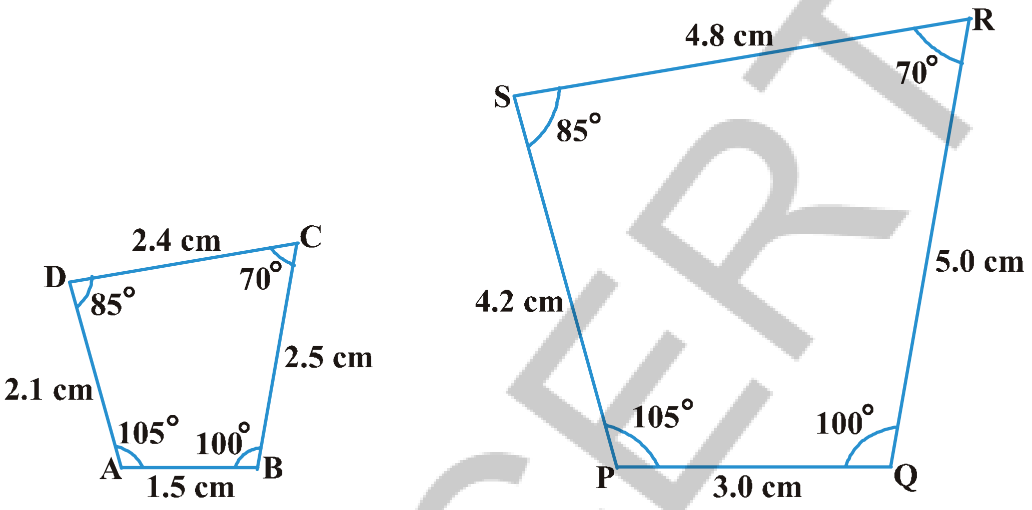


Fig. 6.5

Remark : You can verify that if one polygon is similar to another polygon and this second polygon is similar to a third polygon, then the first polygon is similar to the third polygon.

You may note that in the two quadrilaterals (a square and a rectangle) of Fig. 6.6, corresponding angles are equal, but their corresponding sides are not in the same ratio.

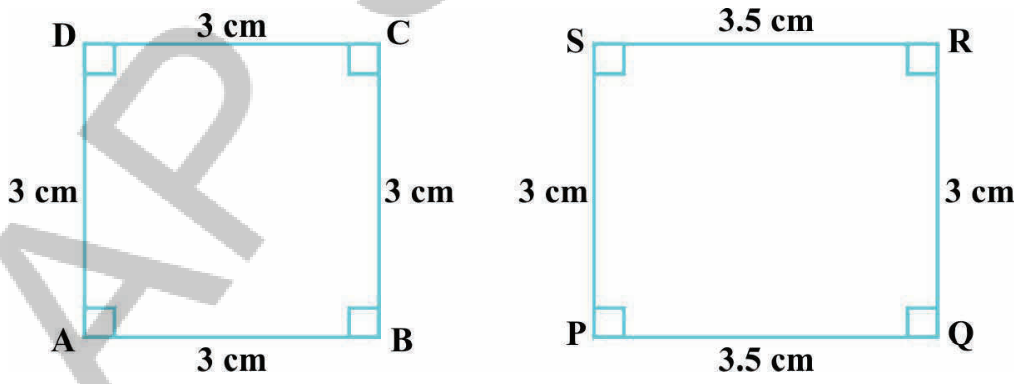
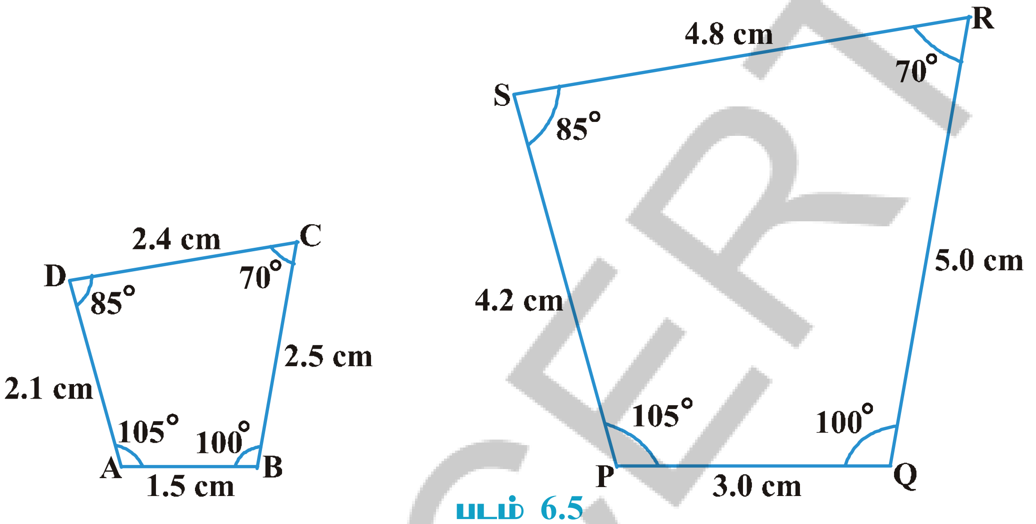


Fig. 6.6

So, the two quadrilaterals are not similar. Similarly, you may note that in the two quadrilaterals (a square and a rhombus) of Fig. 6.7, corresponding sides are in the same ratio, but their corresponding angles are not equal. Again, the two polygons (quadrilaterals) are not similar.

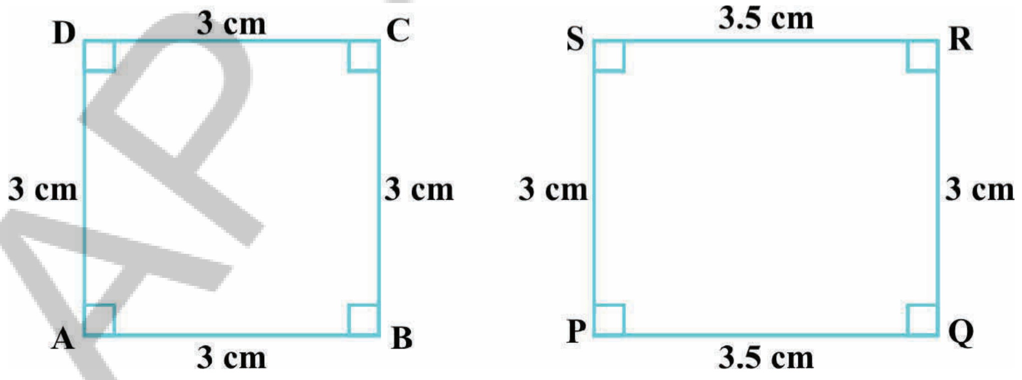
மேற்காணும் வரையறைப்படி நாற்கரங்கள் ABCD மற்றும் PQRS ஆகியவை சர்வசமம்.



படம் 6.5

குறிப்பு : ஒரு பலகோணம் இரண்டாம் பலகோணத்திற்கு வடிவொத்தது மேலும் இரண்டாம் பலகோணம் மூன்றாம் பலகோணத்திற்கு வடிவொத்தது எனில் முதல் பலகோணம் மற்றும் மூன்றாம் பலகோணம் வடிவொத்தது.

படம் 6.6ல் இரண்டு நாற்கரங்களின் (சதுரம் மற்றும் செவ்வகம்) ஒத்த கோணங்கள் சமம் ஆனால் அவைகளின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லை. எனவே இந்த இரண்டு நாற்கரங்களும் வடிவொத்தவை அல்ல.



படம் 6.6

இது போலவே, படம் 6.7ல் உள்ள இரண்டு நாற்கரங்களில் (சதுரம் மற்றும் சாய்சதுரம்) அவைகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் உள்ளன. ஆனால் அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இல்லை எனவே இந்த நாற்கரங்கள் வடிவொத்தவை அல்ல.

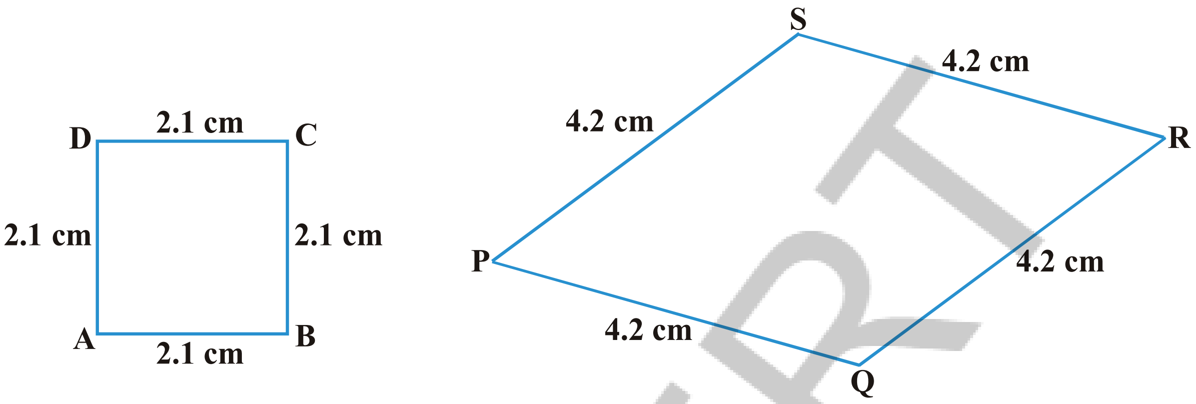


Fig. 6.7

Thus, *either of the above two conditions* (*i*) *and* (*ii*) *of similarity of two polygons is not sufficient for them to be similar.*

EXERCISE 6.1

1. Fill in the blanks using the correct word given in brackets :

(i) All circles are ______. (congruent, similar)

(ii) All squares are ______. (similar, congruent)

(iii) All ______ triangles are similar. (isosceles, equilateral)

(iv) Two polygons of the same number of sides are similar, if (a) their corresponding angles are ______ and (b) their corresponding sides are ______. (equal, proportional)

2. Give two different examples of pair of

(i) similar figures. (ii) non-similar figures.

3. State whether the following quadrilaterals are similar or not:

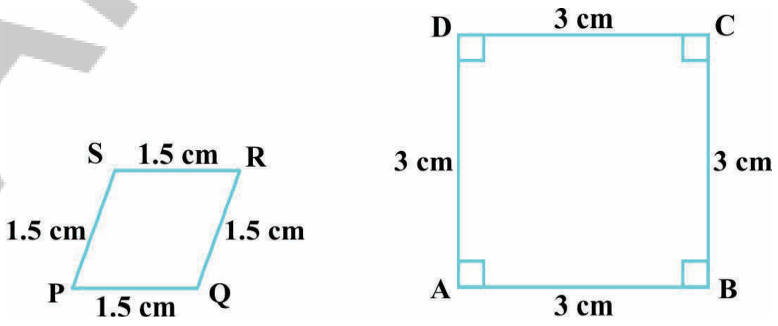
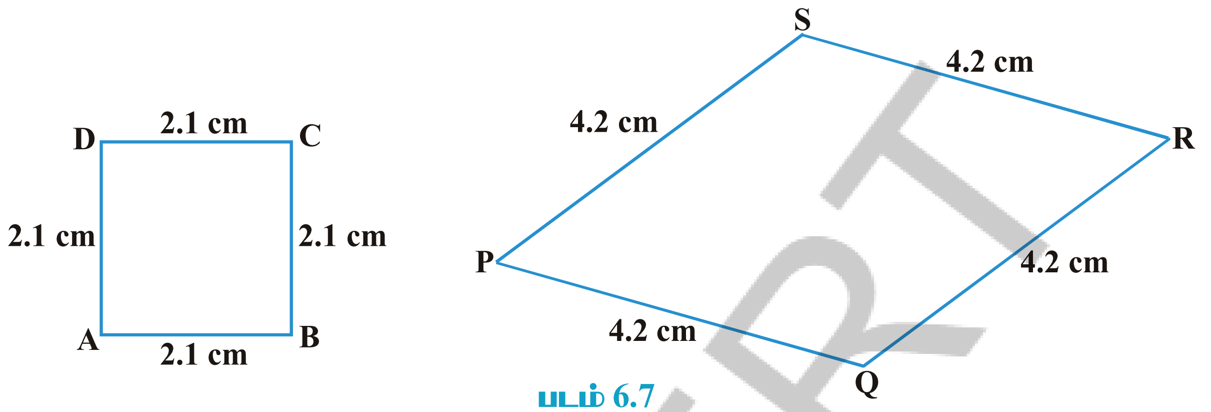


Fig. 6.8

AP SCERT

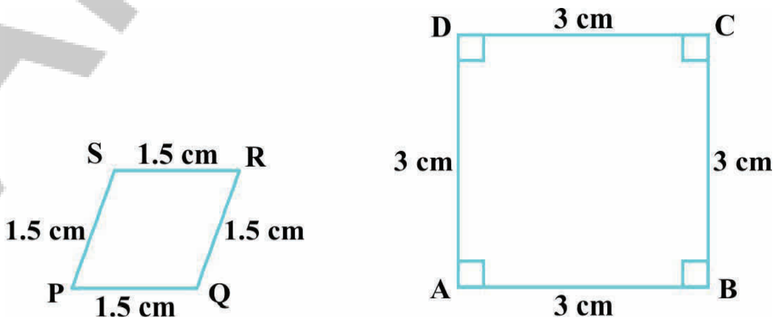


படம் 6.7

எனவே, பலகோணங்களின் வடிவொப்புமையின் இரண்டு நிபந்தனைகளில் (*i*) மற்றும் (*ii*) ஏதேனும் ஒன்றுமட்டும் வடிவொத்தவையை நிர்ணயிக்க போதுமானதாக இருக்காது.

பயிற்சி 6.1

1. அடைப்பில் குறிக்கப்பட்டுள்ள சரியான வார்த்தைகளை கொண்டு கோடிட்ட இடங்களை நிரப்பு.
   (i) எல்லா வட்டங்களும் ________. (சர்வசமம், வடிவொத்தவை)
   (ii) எல்லா சதுரங்களும் ________. (வடிவொத்தவை, சர்வசமம்)
   (iii) எல்லா ________ முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை. (இருசமபக்கம், சமபக்கம்)
   (iv) சம எண்ணிக்கையில் பக்கங்களை கொண்ட இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், (a) அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் ________. (b) அவைகளின் ஒத்த பக்கங்கள் ________. (சமம், விகித சமம்)
2. கீழ்காணும்வற்றிற்கு வெவ்வேறான இரண்டு ஜோடி உதாரணங்களை எழுது.
   (i) வடிவொத்த வடிவங்கள் (ii) வடிவொத்திராத வடிவங்கள்
3. கீழ்காணும் நாற்கரங்களை கவனி. அவைகள் வடிவொத்தவையா?



படம் 6.8

6.3 Similarity of Triangles

What can you say about the similarity of two triangles?

You may recall that triangle is also a polygon. So, we can state the same conditions for the similarity of two triangles. That is:

Two triangles are similiar, if

(*i*) *their corresponding angles are equal and*

(*ii*) *their corresponding sides are in the same ratio* (*or proportion*).

Note that if corresponding angles of two triangles are equal, then they are known as *equiangular triangles.* A famous Greek mathematician Thales gave an important truth relating to two equiangular triangles which is as follows:

Thales
(640 – 546 B.C.)

The ratio of any two corresponding sides in two equiangular triangles is always the same.

It is believed that he had used a result called the *Basic Proportionality Theorem* (now known as the *Thales Theorem*) for the same.

To understand the Basic Proportionality Theorem, let us perform the following activity:

Activity 2 : Draw any angle XAY and on its one arm AX, mark points (say five points) P, Q, D, R and B such that AP = PQ = QD = DR = RB.

Now, through B, draw any line intersecting arm AY at C (see Fig. 6.9).

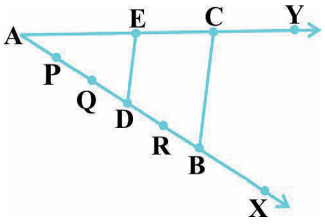


Fig. 6.9

Also, through the point D, draw a line parallel to BC to intersect AC at E. Do you observe from your constructions that $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? Measure AE and EC. What about $\frac{AE}{EC}$? Observe that $\frac{AE}{EC}$ is also equal to $\frac{3}{2}$. Thus, you can see that in Δ ABC, DE $\parallel$ BC and $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Is it a coincidence? No, it is due to the following theorem (known as the Basic Proportionality Theorem):

APSCERT

6.3 முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை

இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை பற்றிஎன்ன கூறுவாய்.

முக்கோணங்களும் ஒரு பலகோணம் என்பதை நினைவு கூறு. எனவே பலகோணங்களுக்கு பொருந்தும் வடிவொப்புமை முக்கோணங்களுக்கும் பொருந்தும். அதாவது இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்திருக்க:

(i) அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) ஒத்த பக்கங்கள் சமமான விகிதத்தில் இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு: இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்தகோணங்கள் சமம் எனில் அவை சமகோண முக்கோணங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. புகழ்பெற்ற கிரேக்க கணித மேதை தேல்ஸ் அவர்கள் சமகோணமுக்கோணங்களை பற்றிய ஒரு முக்கிய உண்மையை தெரிவித்தார்.

தேல்ஸ்
(640 – 546 B.C.)

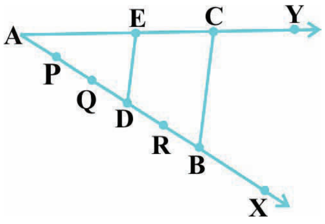
இரு சமகோண முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் சமமாக இருக்கும்.

இந்த உண்மை *அடிப்படை விகித சமதேற்றம் (தேல்ஸ் தேற்றம் எனவும்)* என அழைக்கப்படுகிறது.

அடிப்படை விகித சமதேற்றத்தை புரிந்துகொள்ள பின்வரும் செயலை செய்வோம்.

செயல் 2 : XAY எனும் ஏதேனும் ஒரு கோணத்தை வரைக. இதன் ஒரு புயம் AX மீது P, Q, D, R மற்றும் B ஏதேனும் ஐந்து புள்ளிகளை AP = PQ = QD = DR = RB எனும்படி வரைக.

இப்போது B ன் வழியே புயம் AY ஐ Cல் வெட்டும்படி ஒரு கோடு வரைக.



படம் 6.9

மேலும் D ன் வழியே BC க்கு இணையாக AC ஐ E ல் வெட்டும் படி ஒரு கோடுவரைக. உன்னுடைய வரைமுறையின் படி $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ என்பதை கவனித்தாயா? AE மற்றும் ECஐ அளந்து பார். $\frac{AE}{EC}$ ஐ பற்றி என்ன கவனித்தாய்? $\frac{AE}{EC}$ ன் மதிப்பு $\frac{3}{2}$ சமமாக உள்ளது. எனவே Δ ABCல் DE || BC எனில் $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.இது ஏதேச்சையாக ஏற்பட்ட விகித சமமா? இல்லை இது பின்வரும் தேற்றத்தை அடிப்படையாக கொண்ட உண்மை (அடிப்படை விகித சமதேற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது)

Theorem 6.1 : *If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides in distinct points, the other two sides are divided in the same ratio.*

Proof : We are given a triangle ABC in which a line parallel to side BC intersects other two sides AB and AC at D and E respectively (see Fig. 6.10).

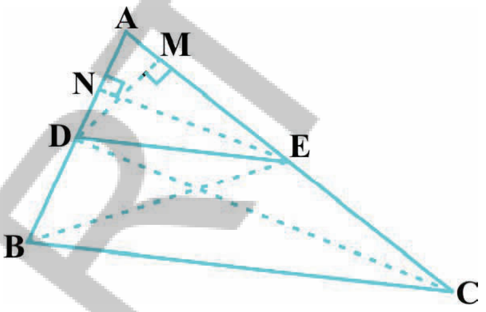


Fig. 6.10

We need to prove that $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Let us join BE and CD and then draw DM ⊥ AC and EN ⊥ AB.

Now, area of Δ ADE $\left(= \frac{1}{2}\text{ base} \times \text{height}\right) = \frac{1}{2}\,AD \times EN$.

Recall from Class IX, that area of Δ ADE is denoted as ar(ADE).

So, $$\text{ar(ADE)} = \frac{1}{2}\,AD \times EN$$

Similarly, $$\text{ar(BDE)} = \frac{1}{2}\,DB \times EN,$$

$$\text{ar(ADE)} = \frac{1}{2}\,AE \times DM \quad \text{and} \quad \text{ar(DEC)} = \frac{1}{2}\,EC \times DM.$$

Therefore, $$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(BDE)}} = \frac{\frac{1}{2}\,AD \times EN}{\frac{1}{2}\,DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

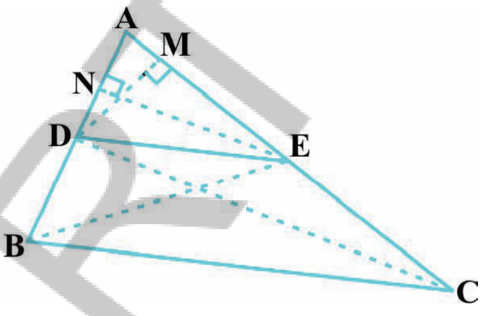
and $$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(DEC)}} = \frac{\frac{1}{2}\,AE \times DM}{\frac{1}{2}\,EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

Note that Δ BDE and DEC are on the same base DE and between the same parallels BC and DE.

So, $$\text{ar(BDE)} = \text{ar(DEC)} \qquad (3)$$

தேற்றம் 6.1 : *ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடு மற்ற இரண்டு பக்கங்களை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் சந்தித்தால், அந்த இரண்டு பக்கங்களும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும்.*

தீர்வு : முக்கோணம் ABC ல் DE // BC என்பது AB , AC பக்கங்களை முறையே D மேலும் E ல் வெட்டுகிறது.



படம் 6.10

நிரூபிக்க : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

BE ஐயும் CD ஐயும் இணை.
$DM \perp AC$, $EN \perp AB$ வரைக.

ΔADEன் பரப்பளவு $(= \frac{1}{2}$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம்$) = \frac{1}{2} AD \times EN$.

ΔADE ன் பரப்பளவை $ar(ADE)$ என குறிக்கிறோம்.

எனவே, $ar(ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$

இதுபோலவே, $ar(BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN$,

$ar(ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM$ மேலும் $ar(DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$.

எனவே, $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

மற்றும் $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

ΔBDE மற்றும் ΔDEC என்பவை DE என்னும் ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் இரண்டு இணை கோடுகள், BC , DEக்கு இடையிலும் இருப்பதை கவனி.

எனவே, $ar(BDE) = ar(DEC) \qquad (3)$

AP SCERT

Therefore, from (1), (2) and (3), we have :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Is the converse of this theorem also true (For the meaning of converse, see Appendix 1)? To examine this, let us perform the following activity:

Activity 3 : Draw an angle XAY on your notebook and on ray AX, mark points B_1, B_2, B_3, B_4 and B such that $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

Similarly, on ray AY, mark points C_1, C_2, C_3, C_4 and C such that $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Then join B_1C_1 and BC (see Fig. 6.11).

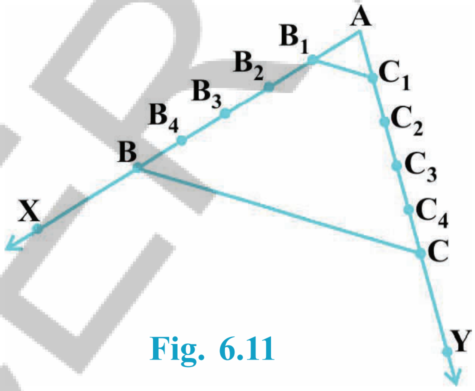


Fig. 6.11

Note that $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (Each equal to $\frac{1}{4}$)

You can also see that lines B_1C_1 and BC are parallel to each other, i.e.,

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

Similarly, by joining B_2C_2, B_3C_3 and B_4C_4, you can see that:

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(= \frac{2}{3}\right) \text{ and } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(= \frac{3}{2}\right) \text{ and } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(= \frac{4}{1}\right) \text{ and } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

From (1), (2), (3) and (4), it can be observed that if a line divides two sides of a triangle in the same ratio, then the line is parallel to the third side.

You can repeat this activity by drawing any angle XAY of different measure and taking any number of equal parts on arms AX and AY . Each time, you will arrive at the same result. Thus, we obtain the following theorem, which is the converse of Theorem 6.1:

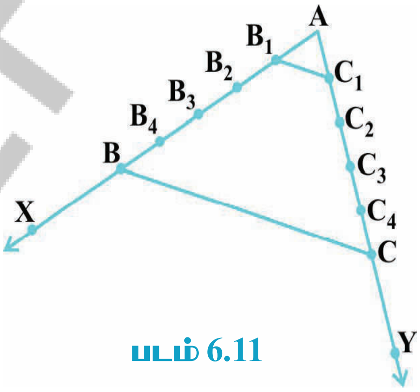
(1), (2), (3)லிருந்து,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

எனவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

இந்த தேற்றத்தின் மறுதலையும் மெய்யாகுமா? மறுதலை எனும் கோட்பாட்டை புரிந்து கொள்ள பின் இணைப்பு-1ஐ பார். இதை தெரிந்துக் கொள்ள கீழ்க்கண்ட செயல்பாட்டை செய்யலாம்.

செயல் 3 : உங்கள் நோட்டுபுத்தகத்தில் XAY என்னும் கோணத்தை வரைக. AX கதிரின் மேல் B_1, B_2, B_3, B_4 மற்றும் B என்னும் புள்ளிகளை $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ செ.மீ இருக்குமாறு குறிக்க.



படம் 6.11

இவ்வாறே, AY கதிரின் மேல் C_1, C_2, C_3, C_4 மற்றும் C புள்ளிகளை $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$செ.மீ இருக்குமாறு குறிக்க. B_1C_1 மற்றும் BCஐ இணை (படம் 6.11)

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} \quad \text{(ஒவ்வொன்றும் } \frac{1}{4} \text{ க்கு சமம்)}$$

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

இவ்வாறே B_2C_2, B_3C_3 மற்றும் B_4C_4 ஆகியவற்றை இணைத்து,

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ மேலும் } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ மேலும் } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ மேலும் } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1), (2), (3) , (4) மூலம் ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் கோடு மூன்றாம் பக்கத்திற்கு இணை என அறிய முடிகிறது.

வெவ்வேறு அளவுகளில் XAY எனும் கோணத்தை வரைந்து AX மற்றும் AY ஆகிய புயங்களின் மீது சமபாகங்களை எடுத்துக்கொண்டு இந்த செயல்பாட்டை நீங்கள் திரும்பவும் செய்யவும். ஒவ்வொரு முறையும் நீங்கள் ஒரே முடிவை பெறுவீர்கள். இதிலிருந்து நாம் பின்வரும் தேற்றத்தை பெறுவோம். இது தேற்றம் 6.1ன் மறுதலையாகும்.

Theorem 6.2 : *If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, then the line is parallel to the third side.*

This theorem can be proved by taking a line DE such that $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ and assuming that DE is not parallel to BC (see Fig. 6.12).

If DE is not parallel to BC, draw a line DE′ parallel to BC.

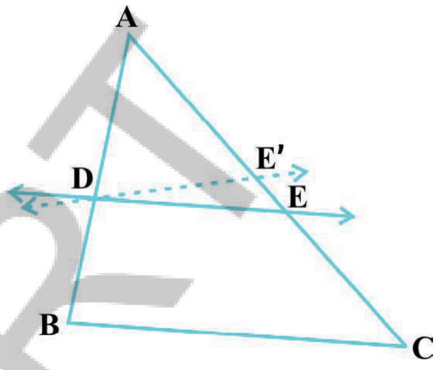


Fig. 6.12

So, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (Why ?)

Therefore, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (Why ?)

Adding 1 to both sides of above, you can see that E and E′ must coincide. (Why ?)

Let us take some examples to illustrate the use of the above theorems.

Example 1 : If a line intersects sides AB and AC of a Δ ABC at D and E respectively and is parallel to BC, prove that $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (see Fig. 6.13).

Solution : DE || BC (Given)

So, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (Theorem 6.1)

or, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

or, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

or, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

So, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

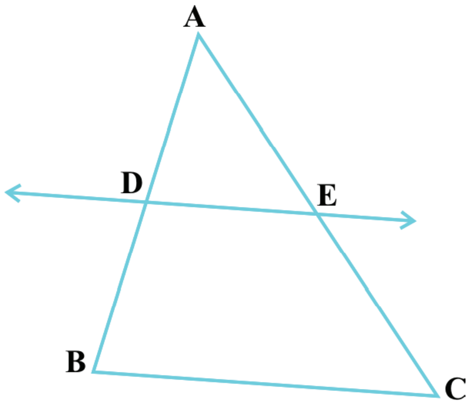
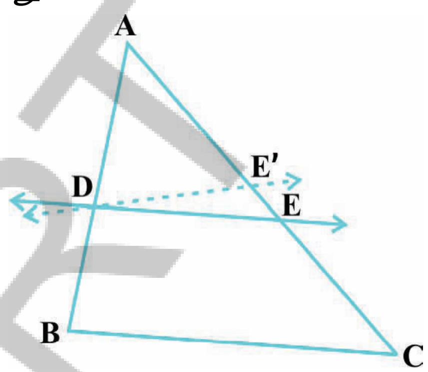


Fig. 6.13

AP SCERT

தேற்றம் 6.2 : *ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும்கோடு, மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை.*



படம் 6.12

தீர்வு: Δ ABCல், $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ என இருக்குமாறு DE என்னும் கோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

நிரூபிக்க : DE // BC

நிரூபணம்: DE , BCக்கு இணை அல்ல என்று எடுத்துக் கொள்வோம். அப்போது BCக்கு இணையாக DE′ஐ வரைக.

எனவே, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ஏன் ?)

$\therefore$ $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ஏன் ?)

மேலேயுள்ள சமன்பாட்டின் இருபுறமும் 1ஐ கூட்ட E மற்றும் E′ என்பவை ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும் எனத் தெரிகிறது. (ஏன்)

சில உதாரணங்களை பயன்படுத்தி மேற்காணும் தேற்றத்தை விவரிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு கோடு Δ ABCல் AB மற்றும் AC பக்கங்களை D மற்றும் E ல் வெட்டுகிறது மேலும் அக்கோடு BCக்கு இணை எனில் $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (படம் 6.13) என நிரூபி.

தீர்வு : DE || BC (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

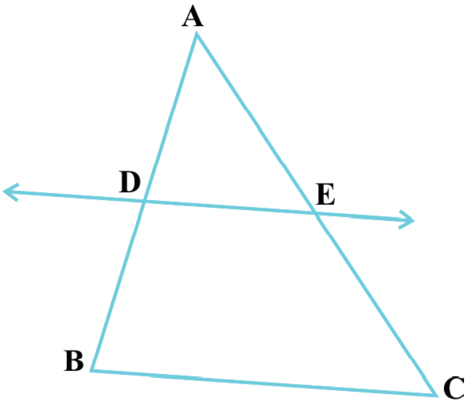
எனவே, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (தேற்றம் 6.1)

அல்லது $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

அல்லது $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

அல்லது $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

எனவே, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



படம் 6.13

AP SCERT

Example 2 : ABCD is a trapezium with AB || DC. E and F are points on non-parallel sides AD and BC respectively such that EF is parallel to AB (see Fig. 6.14). Show that $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

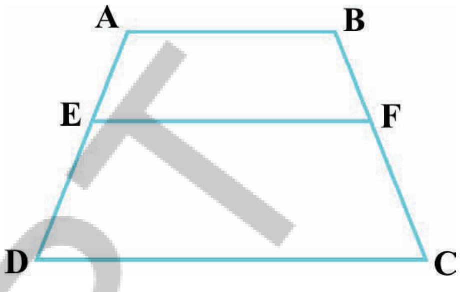


Fig. 6.14

Solution : Let us join AC to intersect EF at G (see Fig. 6.15).

AB || DC and EF || AB (Given)

So, EF || DC (Lines parallel to the same line are parallel to each other)

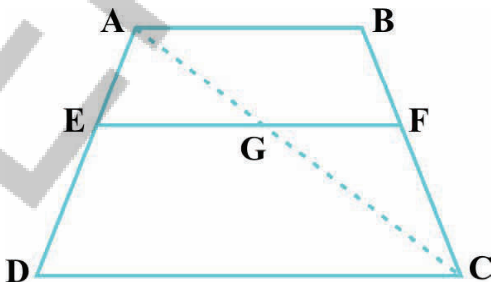


Fig. 6.15

Now, in Δ ADC,

EG || DC (As EF || DC)

So, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (Theorem 6.1) (1)

Similarly, from Δ CAB,

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

i.e., $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ (2)

Therefore, from (1) and (2),

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

Example 3 : In Fig. 6.16, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ and ∠ PST = ∠ PRQ. Prove that PQR is an isosceles triangle.

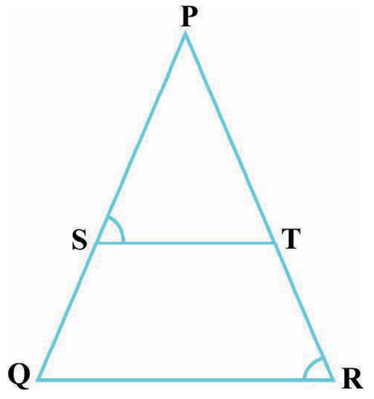


Fig. 6.16

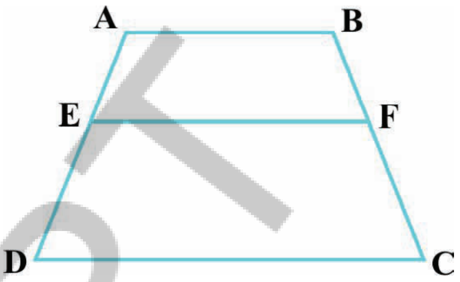
Solution : It is given that $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$.

So, ST || QR (Theorem 6.2)

Therefore, ∠ PST = ∠ PQR (Corresponding angles) (1)

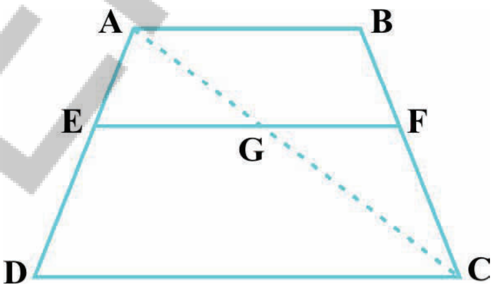
AP SCERT

எடுத்துக்காட்டு 2 : சரிவகம் ABCD ல் AB || DC. இணையில்லாத பக்கங்கள்AD மற்றும் BC மேல் உள்ள புள்ளிகள் முறையே E , F என்பவை EF // AB என்றிருக்குமாறு உள்ளன (படம் 6.14 ஐ பார்) எனில், $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ எனக்காட்டு.



படம் 6.14

தீர்வு : AC ஐ இணைக்கும் கோடு EF ஐ Gல் வெட்டும்படி வரையவும் (படம் 6.15 ஐ பார்).



படம் 6.15

AB || DC மேலும் EF || AB (தரவு)

EF || DC (ஒரே கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை)

Δ ADCல், EG ||DC (EF || DC என்பதால்)

எனவே, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (தேற்றம் 6.1ன் படி) (1)

இவ்வாறே, Δ CABல்,GF || AB

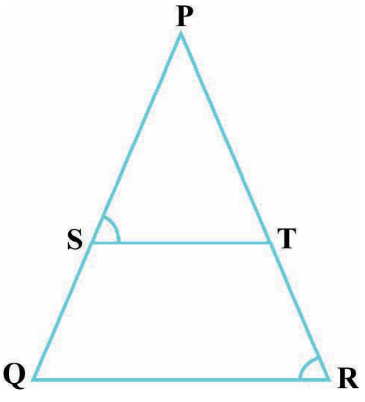
$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

அல்லது $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

(1) ,(2)லிருந்து,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : படம் 6.16 ல், $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ என இருக்குமாறு ST என்பது ஒரு கோடு. மேலும் $\angle PST = \angle PRQ$ எனில் Δ PQR ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் என நிரூபி.



படம் 6.16

தீர்வு : $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$. (தரவு)

எனவே, ST || QR (தேற்றம் 6.2)

எனவே, $\angle PST = \angle PQR$ (ஒத்த கோணங்கள்) (1)

AP SCERT

Also, it is given that

$$\angle PST = \angle PRQ \qquad (2)$$

So, $\angle PRQ = \angle PQR$ [From (1) and (2)]

Therefore, $PQ = PR$ (Sides opposite the equal angles)

i.e., PQR is an isosceles triangle.

EXERCISE 6.2

1. In Fig. 6.17, (i) and (ii), DE || BC. Find EC in (i) and AD in (ii).

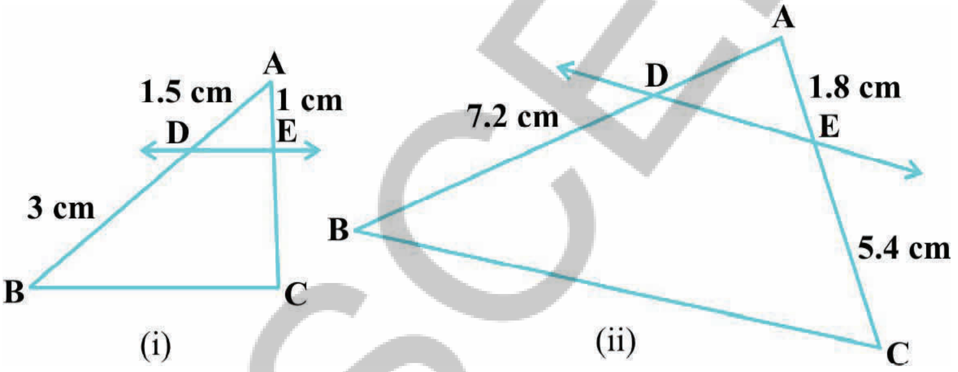


Fig. 6.17

2. E and F are points on the sides PQ and PR respectively of a Δ PQR. For each of the following cases, state whether EF || QR :

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm and FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm and RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm and PF = 0.36 cm

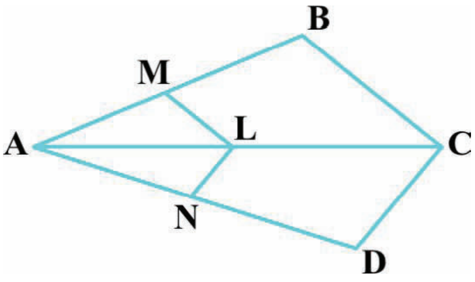


Fig. 6.18

3. In Fig. 6.18, if LM || CB and LN || CD, prove that $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.

4. In Fig. 6.19, DE || AC and DF || AE. Prove that $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.

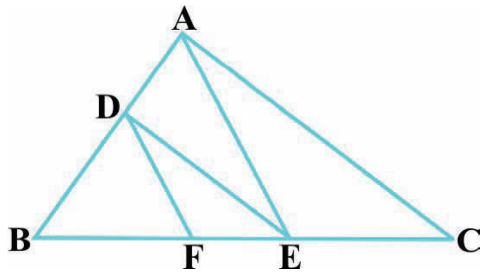


Fig. 6.19

AP SCERT

மேலும்,

$\angle PST = \angle PRQ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (2)

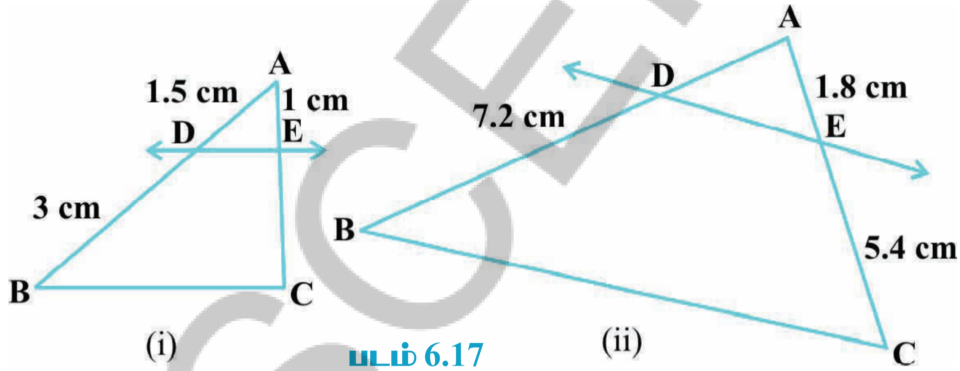
$\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) மற்றும் (2) லிருந்து]

எனவே, PQ = PR (சமமான கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள்)

எனவே, PQR ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம்.

பயிற்சி 6.2

1. படம் 6.17, (i) மற்றும் (ii)ல், DE || BC எனில் (i)லிருந்து EC யையும் (ii) AD யையும் கண்டுபிடி.



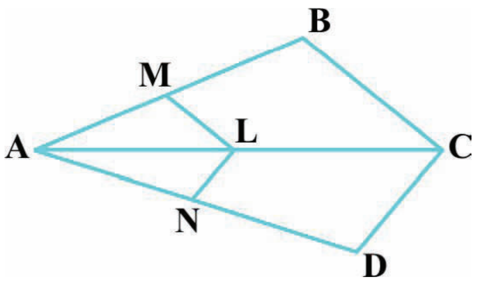
படம் 6.17

2. Δ PQR ன் PQ மற்றும் PRன் பக்கங்களின் மீது E மற்றும் F எனும் இருபுள்ளிகள் அமைந்துள்ளது எனில் பின்வருவனவற்றுள் எதற்கு EF || QR சரியாக அமையுமென சோதித்துப்பார்.

(i) PE = 3.9 செ.மீ, EQ = 3 செ.மீ, PF = 3.6 செ.மீ மற்றும் FR = 2.4 செ.மீ

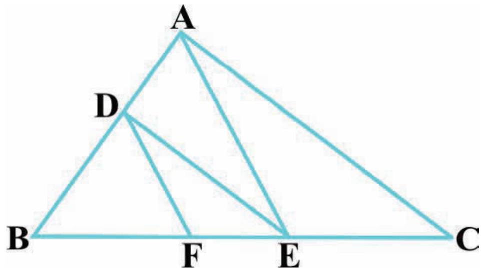
(ii) PE = 4 செ.மீ, QE = 4.5 செ.மீ, PF = 8 செ.மீ மற்றும் RF = 9 செ.மீ

(iii) PQ = 1.28 செ.மீ, PR = 2.56 செ.மீ, PE = 0.18 செ.மீ மற்றும் PF = 0.36 செ.மீ



படம் 6.18

3. படம் 6.18ல் LM || CB மற்றும் LN || CD எனில் $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ என நிரூபி.



படம் 6.19

4. படம் 6.19ல் DE || AC மற்றும் DF || AE எனில் $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ என நிரூபி.

5. In Fig. 6.20, DE || OQ and DF || OR. Show that EF || QR.

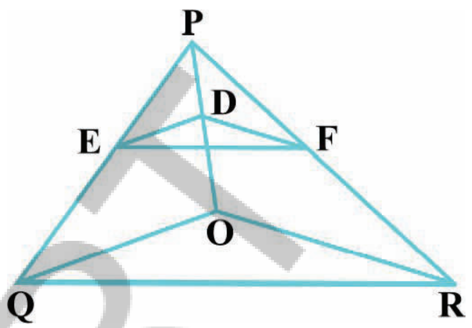


Fig. 6.20

6. In Fig. 6.21, A, B and C are points on OP, OQ and OR respectively such that AB || PQ and AC || PR. Show that BC || QR.

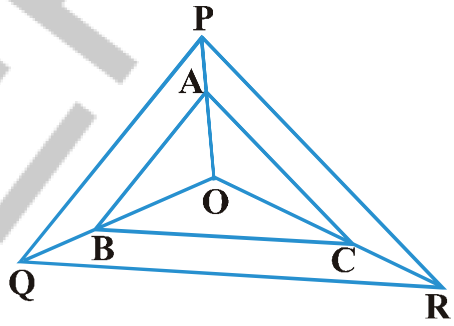


Fig. 6.21

7. Using Theorem 6.1, prove that a line drawn through the mid-point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side. (Recall that you have proved it in Class IX).

8. Using Theorem 6.2, prove that the line joining the mid-points of any two sides of a triangle is parallel to the third side. (Recall that you have done it in Class IX).

9. ABCD is a trapezium in which AB || DC and its diagonals intersect each other at the point O. Show that $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

10. The diagonals of a quadrilateral ABCD intersect each other at the point O such that $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. Show that ABCD is a trapezium.

6.4 Criteria for Similarity of Triangles

In the previous section, we stated that two triangles are similar, if (i) their corresponding angles are equal and (ii) their corresponding sides are in the same ratio (or proportion).

That is, in Δ ABC and Δ DEF, if

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ and

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, then the two triangles are similar (see Fig. 6.22).

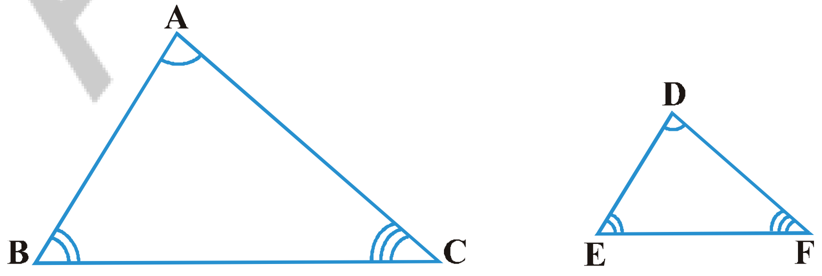
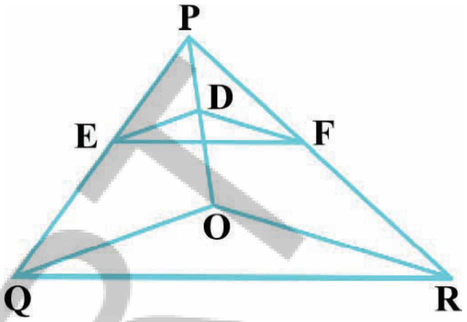


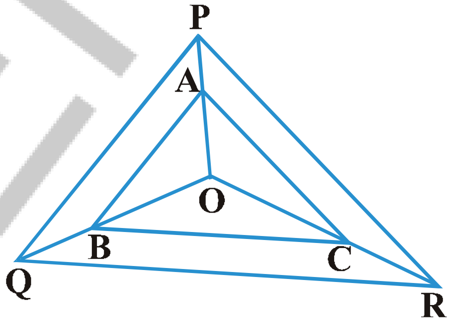
Fig. 6.22

APSCERT

5. படம் 6.20ல் DE || OQ மற்றும் DF || OR எனில் EF || QR எனக்காட்டு.
6. அடுத்துள்ள படம் 6.21ல் A, B, C என்பவை முறையே OP, OQ மற்றும் ORன் மேல் உள்ள புள்ளிகள், AB || PQ மேலும் AC || PR எனில் BC || QR எனக்காட்டு
7. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருபக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியே செல்லும் கோடு மற்றொரு பக்கத்திற்கு இணையாக இருந்தால் அது மூன்றாவது பக்கத்தை இருசமம் கூறிடும் என நிரூபி.
8. ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் இணைக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை என நிரூபி.
9. சரிவகம் ABCD ல் AB || DC மேலும் அவற்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று Oவில் வெட்டிக் கொள்கின்றன எனில் $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. எனக்காட்டு.



படம் 6.20



படம் 6.21

10. ஒரு நாற்கரம் ABCD ல் மூலைவிட்டங்கள் O ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன மேலும் $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. எனில் ABCD சரிவகம் எனக்காட்டு.

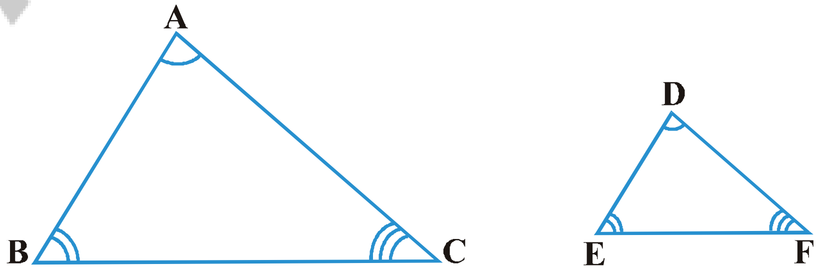
6.4 முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கான நிபந்தனைகள்

இதன் முந்தைய பிரிவில் முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கான வரையறையை பார்த்தோம் அதாவது (i) அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும் (ii) ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருக்க வேண்டும்.

அதாவது ΔABC மற்றும் ΔDEFல்

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ மேலும்

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, எனில் ΔABC மற்றும் ΔDEF இரண்டும் வடிவொத்தவை. (படம் 6.22ஐ பார்).



படம் 6.22

Here, you can see that A corresponds to D, B corresponds to E and C corresponds to F. Symbolically, we write the similarity of these two triangles as 'Δ ABC ~ Δ DEF' and read it as 'triangle ABC is similar to triangle DEF'. The symbol '~' stands for 'is similar to'. Recall that you have used the symbol '$\cong$' for 'is congruent to' in Class IX.

It must be noted that as done in the case of congruency of two triangles, the similarity of two triangles should also be expressed symbolically, using correct correspondence of their vertices. For example, for the triangles ABC and DEF of Fig. 6.22, we cannot write Δ ABC ~ Δ EDF or Δ ABC ~ Δ FED. However, we can write Δ BAC ~ Δ EDF.

Now a natural question arises : For checking the similarity of two triangles, say ABC and DEF, should we always look for all the equality relations of their corresponding angles ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) and all the equality relations of the ratios of their corresponding sides $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$? Let us examine. You may recall that in Class IX, you have obtained some criteria for congruency of two triangles involving only three pairs of corresponding parts (or elements) of the two triangles. Here also, let us make an attempt to arrive at certain criteria for similarity of two triangles involving relationship between less number of pairs of corresponding parts of the two triangles, instead of all the six pairs of corresponding parts. For this, let us perform the following activity:

Activity 4 : Draw two line segments BC and EF of two different lengths, say 3 cm and 5 cm respectively. Then, at the points B and C respectively, construct angles PBC and QCB of some measures, say, 60° and 40°. Also, at the points E and F, construct angles REF and SFE of 60° and 40° respectively (see Fig. 6.23).

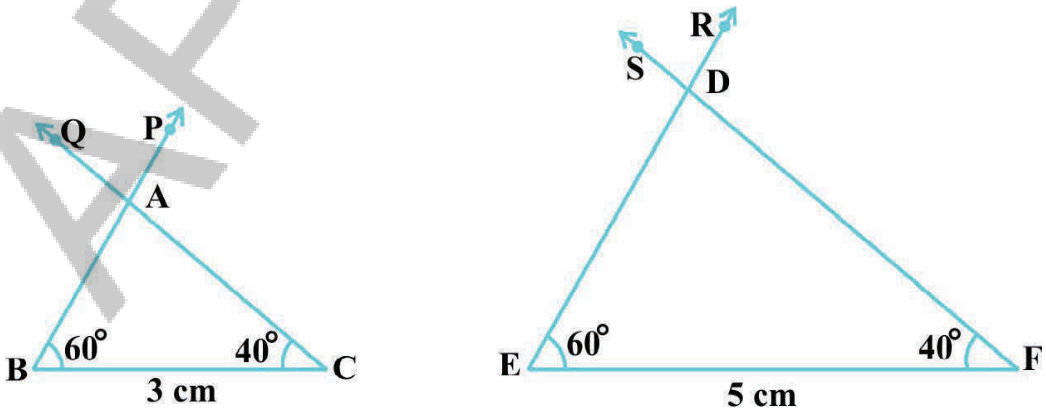


Fig. 6.23

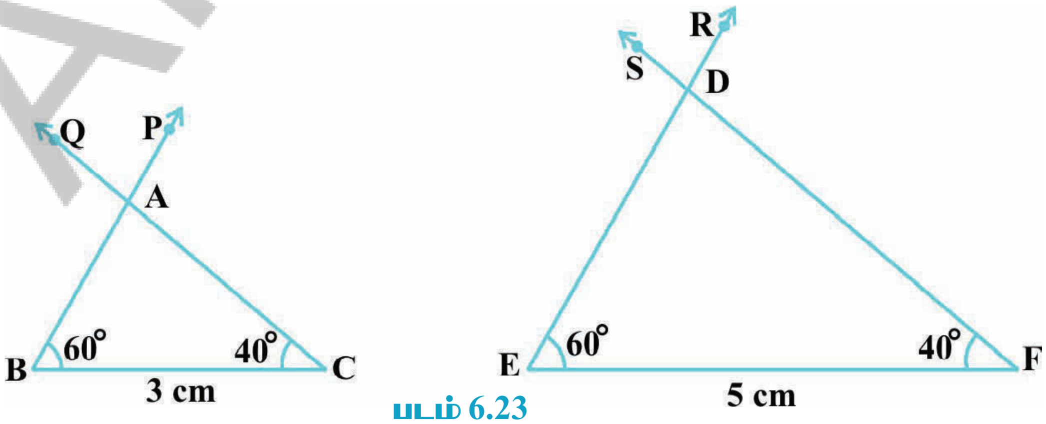
AP SCERT

இங்கு A க்கு ஒத்த கோணம் D, B க்கு ஒத்த கோணம் E , C க்கு ஒத்த கோணம் F. முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை குறியீட்டு வடிவில் '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' என எழுதலாம். இதை 'முக்கோணம் ABC வடிவொத்தது முக்கோணம் DEF'எனப் படிப்போம். '$\sim$' எனும் குறியீடு வடிவொப்புமையை குறிக்கிறது. '$\cong$' எனும் குறியீடு 'சர்வசம பண்பை' குறிப்பதை ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்திருப்பீர்கள்.

> சர்வசம முக்கோணங்களை எப்படி ஒத்த முனைகளை பயன்படுத்தி குறிப்பிட்டு காட்டுவோமோ அதே முறையை பயன்படுத்தி வடிவொத்த முக்கோணங்களையும் அவைகளின் ஒத்த முனைகளின் வரிசை கிரமப்படி குறித்து காட்டவேண்டும். உதாரணமாக ΔABC மற்றும் ΔDEF வடிவொத்தவை எனில் அதை $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ எனவோ அல்லது $\Delta ABC \sim \Delta FED$ குறித்து காட்ட கூடாது. $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ என குறித்து காட்டலாம்.

இப்போது இயல்பாகவே ஒரு வினா எழும். இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை சரிபார்க்க வேண்டுமானால் உதாரணமாக ABC மற்றும் DEFஐ கருது அவைகளின் எல்லா சமமான உறவுகளான ஒத்த கோணங்களையும் ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) ஐ ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்களையும் $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ சரிபார்க்க வேண்டும். இப்போது சோதித்து பார்ப்போம். ஒன்பதாம் வகுப்பில் இரண்டு முக்கோணங்களின் சர்வசம பண்பின் நிபந்தனைகளை வருவிக்க அந்த இரண்டு முக்கோணங்களின் மூன்றுசோடி பாகங்களை மட்டுமே கருத்தில் கொள்வோம். இப்போது வடிவொப்புமைகளுக்கும் இதே முறையை பயன்படுத்தி வடிவொப்புமைக்கான நிபந்தனைகளை வருவிப்போம். அதாவது முக்கோணங்களின் ஆறு சோடி ஒத்த பாகங்களை அல்லாமல் மூன்று சோடி ஒத்த பாகங்களை மட்டுமே கொண்டு வடிவொப்புமைக்கான நிபந்தனையை வருவிப்போம் இதற்காக பின்வரும் செயலை செய்வோம்.

செயல் 4 : BC = 3 செ.மீ மற்றும் EF= 5 செ.மீ எனும் அளவுகளில் இரண்டு கோட்டு துண்டுகளை வரைவோம். முனை B மற்றும் C ல் $\angle PBC = 60°$ மற்றும் $\angle QCB = 40°$ எனும் அளவுகளில் இரண்டு கோணங்களை வரைவோம். அது போலவே முனை E மற்றும் Fல் $\angle REF = 60°$ மற்றும் $\angle SFE = 40°$ எனும் இரண்டு கோணங்களை வரைக. (படம் 6.23)



படம் 6.23

Let rays BP and CQ intersect each other at A and rays ER and FS intersect each other at D. In the two triangles ABC and DEF, you can see that $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ and $\angle A = \angle D$. That is, corresponding angles of these two triangles are equal. What can you say about their corresponding sides ? Note that $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6.$ What about $\frac{AB}{DE}$ and $\frac{CA}{FD}$? On measuring AB, DE, CA and FD, you will find that $\frac{AB}{DE}$ and $\frac{CA}{FD}$ are also equal to 0.6 (or nearly equal to 0.6, if there is some error in the measurement). Thus, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.
You can repeat this activity by constructing several pairs of triangles having their corresponding angles equal. Every time, you will find that their corresponding sides are in the same ratio (or proportion). This activity leads us to the following criterion for similarity of two triangles.

Theorem 6.3 : *If in two triangles, corresponding angles are equal, then their corresponding sides are in the same ratio (or proportion) and hence the two triangles are similar.*

This criterion is referred to as the AAA (Angle–Angle–Angle) criterion of similarity of two triangles.

This theorem can be proved by taking two triangles ABC and DEF such that $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$ (see Fig. 6.24)

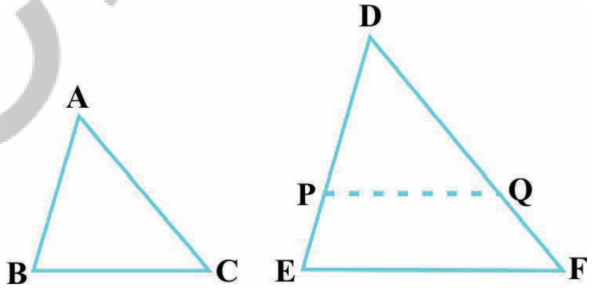


Fig. 6.24

Cut DP = AB and DQ = AC and join PQ.

So, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (Why ?)

This gives $\angle B = \angle P = \angle E$ and $PQ \parallel EF$ (How?)

Therefore, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (Why?)

i.e., $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (Why?)

Similarly, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ and so $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

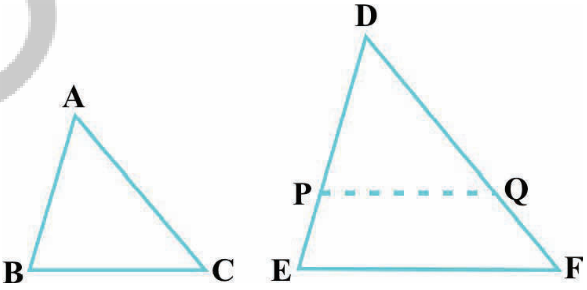
Remark : If two angles of a triangle are respectively equal to two angles of another triangle, then by the angle sum property of a triangle their third angles will also be equal. Therefore, AAA similarity criterion can also be stated as follows:

BP மற்றும் CQ கதிர்கள் ஒன்றையொன்று A எனும் புள்ளியிலும் ER மற்றும் FS ஆகியவை D எனும் புள்ளியிலும் வெட்டி கொள்ளுகின்றன. இரண்டு முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DEFல் $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ மற்றும் $\angle A = \angle D$ என நாம் காணலாம். அதாவது இரண்டு ஒத்த பக்கங்களை பற்றி என்ன கூற முடியும். $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$. என்பதை நினைவில் வை. $\frac{AB}{DE}$ மற்றும் $\frac{CA}{FD}$ ன் விகிதங்கள் என்ன? AB, DE, CA மற்றும் FDகளை அளந்து $\frac{AB}{DE}$ மற்றும் $\frac{CA}{FD}$ களின் விகிதங்களும் 0.6க்கு சமமாக உள்ளது. (0.6 ஏறக்குறைய சமமாகவும் இருக்கலாம். இது சில அளவீட்டு தவறுதலாக இருக்கலாம்) எனவே $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$. ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கும் படியான முக்கோணங்களை வரைந்து இந்த செயலை மீண்டும் செய்யலாம். ஒவ்வொரு முறையும் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாக இருப்பதை கண்டுபிடிப்பீர்கள். இந்த செயல் முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கான பின்வரும் நிபந்தனையை நமக்கு தருவிக்கிறது.

தேற்றம் 6.3 : *இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில் அவைகளின் ஒத்த பக்கங்களும் விகிதசமத்தில் இருக்கும் மேலும் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.*

இந்த நிபந்தனை கோ.கோ.கோ. (கோணம் – கோணம்– கோணம்) என குறிப்பிடப்படுகிறது.

ΔABC மற்றும் ΔDEF ன் ஆகியவை கோணங்கள் $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ என எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் இந்த தேற்றத்தை நிரூபணம் செய்யலாம்.



படம் 6.24

DP = AB எனும்படி வெட்டவும் மற்றும் DQ = AC மேலும் PQஐ இணை.

எனவே, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ஏன்?)

நாம் பெறுவது, $\angle B = \angle P = \angle E$ and $PQ \parallel EF$ (எப்படி?)

எனவே $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (ஏன்?)

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ஏன்?)

இதுபோலவே, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ மற்றும் $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

குறிப்பு : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமம் எனில் கோண கூடுதல் பண்பின்படி அம்முக்கோணங்களின் மூன்றாம் கோணங்களும் சமம். எனவே கோ. கோ. கோ. வடிவொப்புமை நிபந்தனையை பின்வருமாறும் கூறலாம்.

If two angles of one triangle are respectively equal to two angles of another triangle, then the two triangles are similar.

This may be referred to as the AA *similarity criterion* for two triangles.

You have seen above that if the three angles of one triangle are respectively equal to the three angles of another triangle, then their corresponding sides are proportional (i.e., in the same ratio). What about the converse of this statement? Is the converse true? In other words, if the sides of a triangle are respectively proportional to the sides of another triangle, is it true that their corresponding angles are equal? Let us examine it through an activity :

Activity 5 : Draw two triangles ABC and DEF such that AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm and FD = 12 cm (see Fig. 6.25).

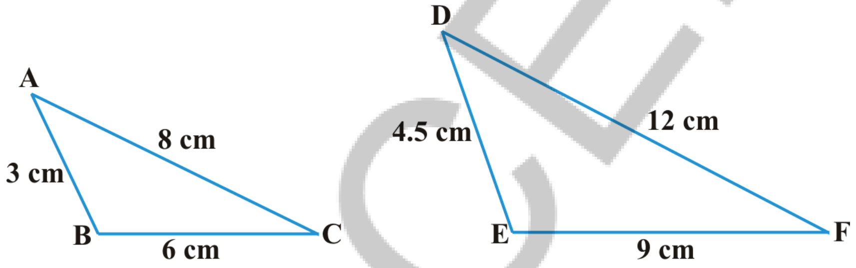


Fig. 6.25

So, you have : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (each equal to $\frac{2}{3}$)

Now measure $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C, $\angle$ D, $\angle$ E and $\angle$ F. You will observe that $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$, i.e., the corresponding angles of the two triangles are equal.

You can repeat this activity by drawing several such triangles (having their sides in the same ratio). Everytime you shall see that their corresponding angles are equal. It is due to the following criterion of similarity of two triangles:

Theorem 6.4 : *If in two triangles, sides of one triangle are proportional to (i.e., in the same ratio of) the sides of the other triangle, then their corresponding angles are equal and hence the two triangles are similiar.*

This criterion is referred to as the SSS (Side–Side–Side) *similarity criterion for two triangles*.

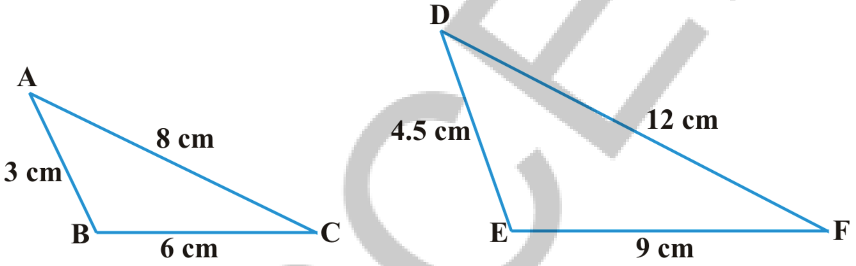
This theorem can be proved by taking two triangles ABC and DEF such that $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (see Fig. 6.26):

AP SCERT

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.
இதை இரண்டு முக்கோணங்களின் கோ. கோ. வடிவொப்புமை நிபந்தனை எனவும் கூறலாம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களுக்கு சமம் எனில் அவைகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமத்தில் இருக்கும். இதன் மறுதலை பற்றி என்ன நினைக்கிறீர்கள். மறுதலையும் உண்மையா? ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு விகிதசமமெனில் அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமமா? இதை பின்வரும் செயல் மூலம் சரிபார்க்கலாம்.

செயல் 5 : ΔABC மற்றும் ΔDEF ஐ பின்வரும் அளவுகளுடன் வரைக. $AB = 3$ செ.மீ, $BC = 6$செ.மீ , $CA = 8$ செ.மீ, $DE = 4.5$ செ.மீ, $EF = 9$ செ.மீ மற்றும் $FD = 12$ செ.மீ (படம் 6.25)



படம் 6.25

நமக்கு கிடைப்பது, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ஒவ்வொன்றும் $\frac{2}{3}$ க்கு சமம்)

இப்போது $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ மற்றும் $\angle F$களைஅளவிடு. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ அதாவது, ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

வெவ்வேறு அளவுகள் கொண்ட முக்கோண சோடிகளை ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமத்தில் உள்ளபடி வரைந்து இந்த செயலை செய்யுங்கள். ஒவ்வொரு முறையும் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக உள்ளதை கவனி. இதன் மூலம் முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கான பின்வரும் நிபந்தனையை பெறலாம்.

தேற்றம் 6.4 : *இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமம் எனில் அவைகளின் ஒத்த கோண சோடிகளும் சமம் மேலும் அம்முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.*

இந்த நிபந்தனை ப.ப.ப. (பக்கம் – பக்கம் – பக்கம்) வடிமொப்புமை நிபந்தனை என்கிறோம்.

இந்த தேற்றத்தை ΔABC மற்றும் ΔDEF ஆகியவைகளை $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (படம் 6.26) என எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் நிரூபணம் செய்யலாம்.

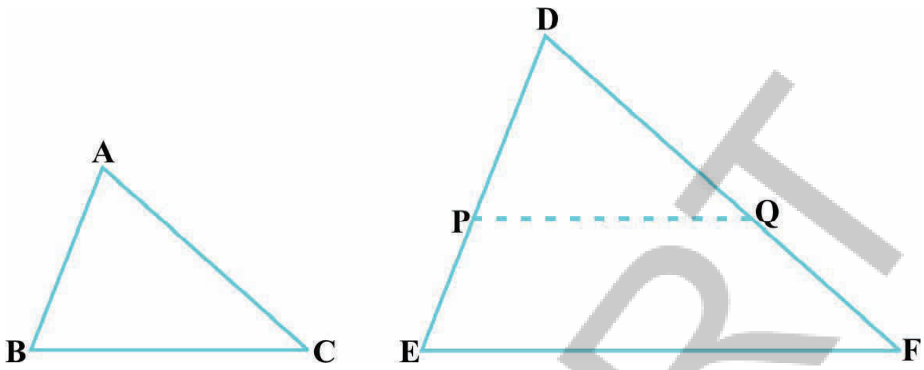


Fig. 6.26

Cut DP = AB and DQ = AC and join PQ.

It can be seen that $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ and $PQ \parallel EF$ (How?)

So, $\angle P = \angle E$ and $\angle Q = \angle F$.

Therefore, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

So, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (Why?)

So, $BC = PQ$ (Why?)

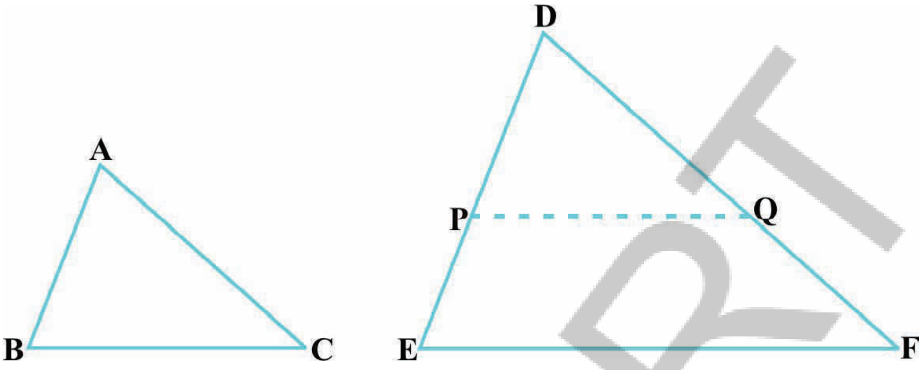
Thus, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (Why ?)

So, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$ (How ?)

Remark : You may recall that either of the two conditions namely, (i) corresponding angles are equal and (ii) corresponding sides are in the same ratio is not sufficient for two polygons to be similar. However, on the basis of Theorems 6.3 and 6.4, you can now say that in case of similarity of the two triangles, it is not necessary to check both the conditions as one condition implies the other.

Let us now recall the various criteria for congruency of two triangles learnt in Class IX. You may observe that SSS similarity criterion can be compared with the SSS congruency criterion.This suggests us to look for a similarity criterion comparable to SAS congruency criterion of triangles. For this, let us perform an activity.

Activity 6 : Draw two triangles ABC and DEF such that AB = 2 cm, $\angle A = 50°$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50°$ and DF = 6 cm (see Fig.6.27).



படம் 6.26

$DP = AB$ ஐ வெட்டு மற்றும் $DQ = AC$, PQஐ இணை

$$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \text{ மற்றும் } PQ \parallel EF \quad \text{(எப்படி?)}$$

எனவே, $\angle P = \angle E$ மற்றும் $\angle Q = \angle F$.

எனவே, $$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$$

$$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad \text{(ஏன்?)}$$

$$BC = PQ \quad \text{(ஏன்?)}$$

எனவே, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$ (எப்படி?)

குறிப்பு : பலகோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கான இரண்டு நிபந்தனைகளில் அதாவது (i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் (ii) ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருக்க வேண்டும், எனும் நிபந்தனைகளில் ஏதாவது ஒன்று மட்டும் கூட போதுமானதாக இருக்காது என்பதை நீங்கள் நினைவில் வைத்திருக்கலாம். இருப்பினும் தேற்றம் 6.3 மற்றும் 6.4 தேற்றங்களை அடிப்படையாக வைத்து பார்க்கும் போது, இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கு ஒரு நிபந்தனை மற்றொன்றை குறிப்பதால் இந்த இரண்டு நிபந்தனைகளையும் சரிபார்க்க வேண்டுமென்பது புலனாகிறது.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் முக்கோணங்களின் சர்வசம பண்பிற்கான வெவ்வேறு நிபந்தனைகளை படித்திருப்பதை நினைவு கூறுங்கள். ப.ப.ப வடிவொப்புமை நிபந்தனையை ப.ப.ப சர்வசம பண்புடன் ஒப்பிடலாம். இதன் மூலம் ப.கோ.ப. சர்வசம பண்பினை முக்கோணங்களின் ப.கோ.ப வடிவொப்புமை பண்புடன் ஒப்பிட பின்வரும் செயலை செய்வோம்.

செயல் 6 : பின்வரும் அளவுகளுடன் ΔABC மற்றும் ΔDEF ஆகியவற்றை வரைவோம். $AB = 2$ செ.மீ, $\angle A = 50°$, $AC = 4$ செ.மீ, $DE = 3$ செ.மீ, $\angle D = 50°$ மற்றும் $DF = 6$ செ.மீ (படம் 6.27).

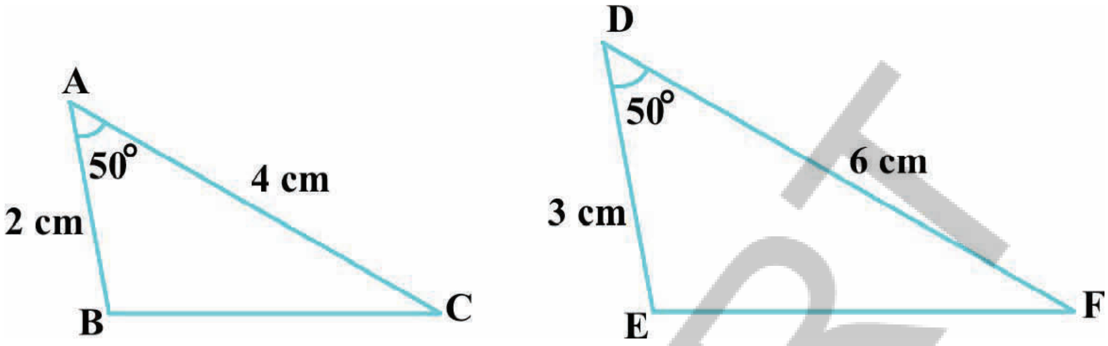


Fig. 6.27

Here, you may observe that $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (each equal to $\frac{2}{3}$) and $\angle$ A (included between the sides AB and AC) = $\angle$ D (included between the sides DE and DF). That is, one angle of a triangle is equal to one angle of another triangle and sides including these angles are in the same ratio (i.e., proportion). Now let us measure $\angle$ B, $\angle$ C, $\angle$ E and $\angle$ F.

You will find that $\angle$ B = $\angle$ E and $\angle$ C = $\angle$ F. That is, $\angle$ A = $\angle$ D, $\angle$ B = $\angle$ E and $\angle$ C = $\angle$ F. So, by AAA similarity criterion, Δ ABC ~ Δ DEF. You may repeat this activity by drawing several pairs of such triangles with one angle of a triangle equal to one angle of another triangle and the sides including these angles are proportional. Everytime, you will find that the triangles are similar. It is due to the following criterion of similarity of triangles:

Theorem 6.5 : *If one angle of a triangle is equal to one angle of the other triangle and the sides including these angles are proportional, then the two triangles are similar.*

This criterion is referred to as the SAS (Side–Angle–Side) similarity criterion for two triangles.

As before, this theorem can be proved by taking two triangles ABC and DEF such that $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) and $\angle$ A = $\angle$ D (see Fig. 6.28). Cut DP = AB, DQ = AC and join PQ.

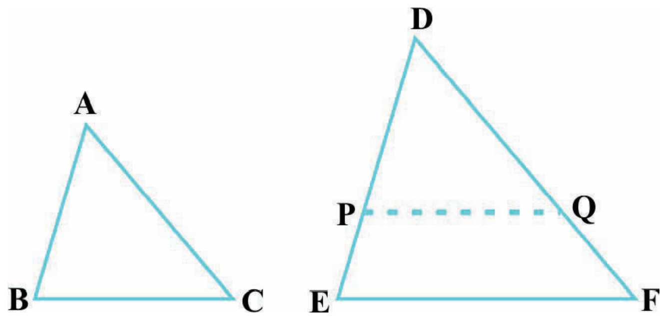
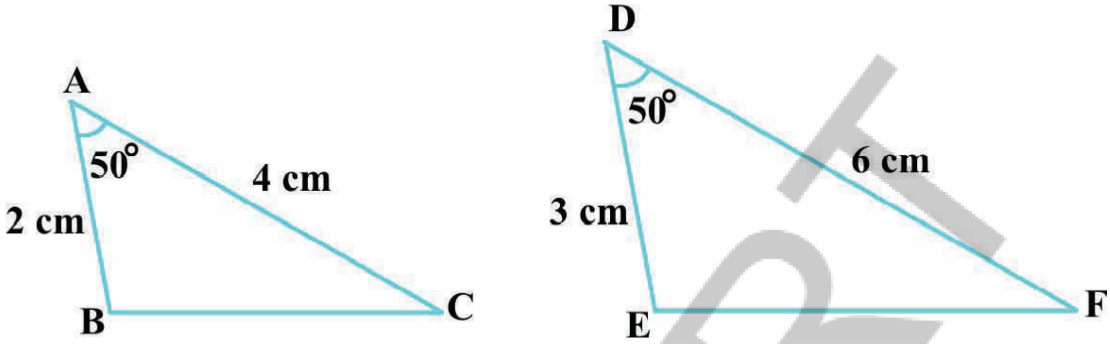


Fig. 6.28

AP SCERT



படம் 6.27

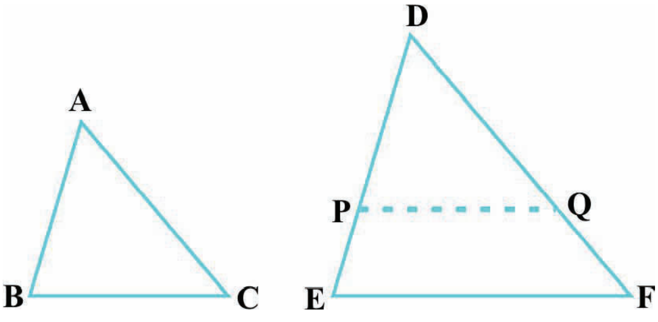
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ($\frac{2}{3}$ க்கு சமம்) மற்றும் $\angle A$ (AB மற்றும் AC பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்) = $\angle D$ (DE மற்றும் DF பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்) அதாவது, இரண்டு முக்கோணங்களின் இரண்டு சமவிகித பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் சமம். இப்போது $\angle B, \angle C, \angle E$ மற்றும் $\angle F$களை அளவிட வேண்டும்.

$\angle B = \angle E$ மேலும் $\angle C = \angle F$அதாவது $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$. எனவே கோ.கோ.கோ. வடிவொப்புமை நிபந்தனைப்படி $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. இதே போன்ற செயலை அதாவது முக்கோணங்களின் இரண்டு சமவிகித பக்கங்கள் மற்றும் இப்பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் சமமாக உள்ள படி வெவ்வேறு முக்கோணங்களை கொண்டு செய்துபார். ஒவ்வொரு முறையும் முக்கோணங்கள் வடிவொத்திருப்பதை கவனி. இவை பின்வரும் தேற்றத்திற்கு வழிவகுக்கிறது.

தேற்றம் 6.5 : *ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் கோணத்திற்கு சமம். மேலும் இந்த கோணங்களை உள்ளடக்கிய பக்கங்கள் விகிதசமம் எனில் இந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.*

இந்த நிபந்தனை ப.கோ.ப. (பக்கம் – கோணம் – பக்கம்) வடிவொப்புமை நிபந்தனை என குறிப்பிடப்படுகிறது.

இந்த தேற்றததை நிரூபணம் செய்ய பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்ட முக்கோணங்கள் ΔABC மற்றும் ΔDEF கருதுவோம். $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) மேலும் $\angle A = \angle D$ (படம் 6.28). $DP = AB$ஐ வெட்டு, $DQ = AC$ மேலும் PQஐ இணை.



படம் 6.28

Now, $PQ \parallel EF$ and $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (How ?)

So, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ and $\angle C = \angle Q$

Therefore, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (Why?)

We now take some examples to illustrate the use of these criteria.

Example 4 : In Fig. 6.29, if $PQ \parallel RS$, prove that $\Delta POQ \sim \Delta SOR$.

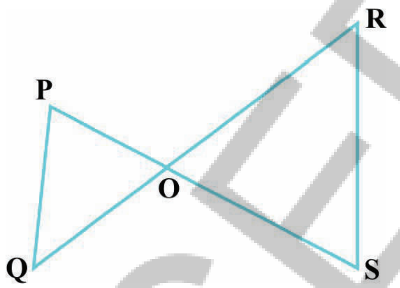


Fig. 6.29

Solution : $PQ \parallel RS$ (Given)

So, $\angle P = \angle S$ (Alternate angles)

and $\angle Q = \angle R$

Also, $\angle POQ = \angle SOR$ (Vertically opposite angles)

Therefore, $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA similarity criterion)

Example 5 : Observe Fig. 6.30 and then find $\angle P$.

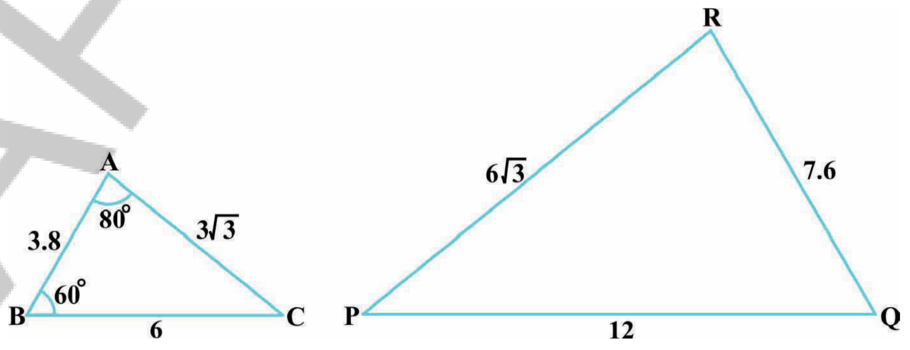


Fig. 6.30

Solution : In ΔABC and ΔPQR,

AP SCERT

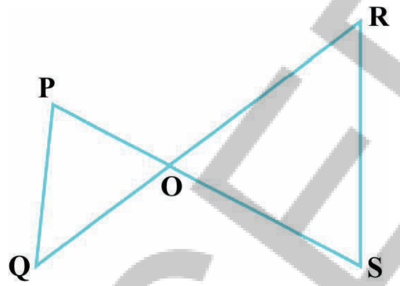
இப்போது, $PQ \parallel EF$ and $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (எப்படி?)

எனவே, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ மற்றும் $\angle C = \angle Q$

எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ஏன்?)

இந்த வடிவொப்புமை நிபந்தனையை புரிந்து கொள்ள சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : படம் 6.29ல் $PQ \parallel RS$ எனில் $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ எனக்காட்டு.



படம் 6.29

தீர்வு : $PQ \parallel RS$ (தரவு)

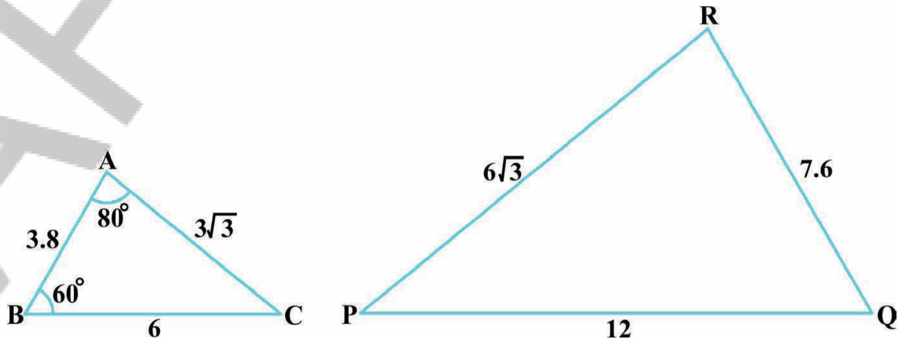
எனவே, $\angle P = \angle S$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

மற்றும் $\angle Q = \angle R$

மேலும் $\angle POQ = \angle SOR$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

எனவே, $\Delta POQ \sim \Delta SOR$(கோ.கோ.கோ. வடிவெப்புமை நிபந்தனை)

எடுத்துக்காட்டு 5 : படம் 6.30 ஐ கவனி மேலும் $\angle P$ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.



படம் 6.30

தீர்வு : ΔABC மற்றும் ΔPQRல்,

AP SCERT

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

That is, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

So, $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS similarity)

Therefore, $\angle C = \angle P$ (Corresponding angles of similar triangles)

But $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (Angle sum property)

$= 180° - 80° - 60° = 40°$

So, $\angle P = 40°$

Example 6 : In Fig. 6.31,

$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$

Show that $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$.

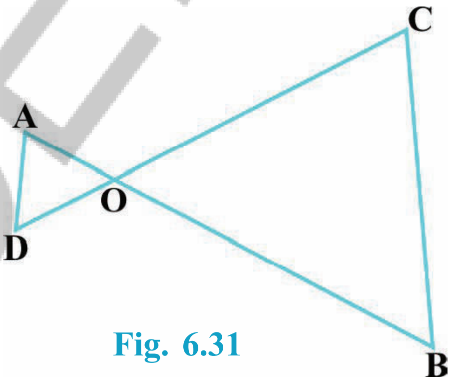


Fig. 6.31

Solution : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (Given)

So, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

Also, we have $\angle AOD = \angle COB$ (Vertically opposite angles) (2)

Therefore, from (1) and (2), $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS similarity criterion)

So, $\angle A = \angle C$ and $\angle D = \angle B$

(Corresponding angles of similar triangles)

Example 7 : A girl of height 90 cm is walking away from the base of a lamp-post at a speed of 1.2 m/s. If the lamp is 3.6 m above the ground, find the length of her shadow after 4 seconds.

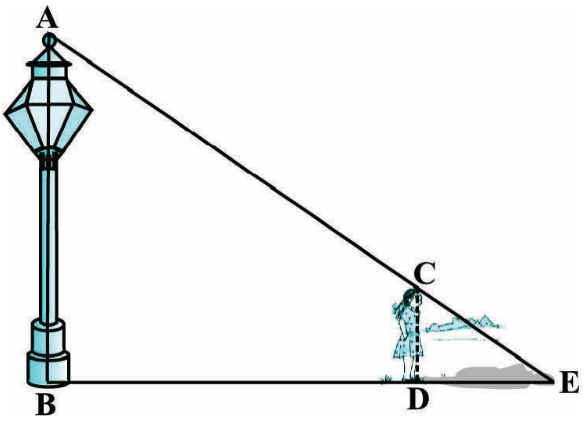


Fig. 6.32

Solution : Let AB denote the lamp-post and CD the girl after walking for 4 seconds away from the lamp-post (see Fig. 6.32).

From the figure, you can see that DE is the shadow of the girl. Let DE be x metres.

AP SCERT

$$\frac{AB}{RQ}=\frac{3.8}{7.6}=\frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\text{ மற்றும் }\frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

அதாவது, $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (பபப வடிவொப்புமை)

எனவே, $\angle C = \angle P$ (வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள்)

ஆனால், $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (கோண கூடுதல் பண்பு)

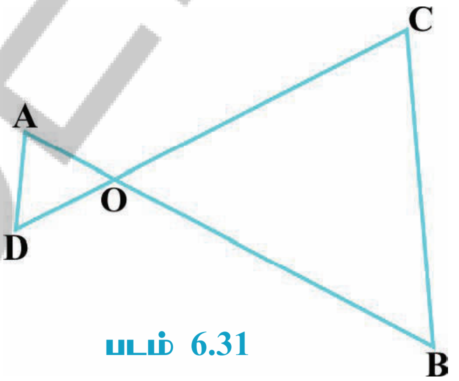
$= 180° - 80° - 60° = 40°$

எனவே, $\angle P = 40°$

எடுத்துக்காட்டு 6 : படம் 6.31ல்,

$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$

எனில் $\angle A = \angle C$ மற்றும் $\angle B = \angle D$ எனக்காட்டு.



படம் 6.31

தீர்வு : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (கொடுக்கப்பட்டது)

எனவே, $\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB}$ (1)

நமக்கு ஏற்கனவே இருப்பது $\angle AOD = \angle COB$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்) (2)

எனவே, (1) மற்றும் (2) மூலம் $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (ப.கோ.ப. வடிவொப்புமை நிபந்தனை)

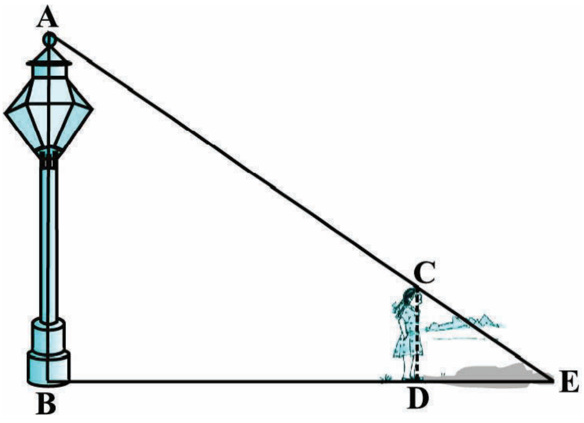
எனவே, $\angle A = \angle C$ and $\angle D = \angle B$

(வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள்)

எடுத்துக்காட்டு 7 : 90 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு சிறுமி விளக்கு கம்பத்திலிருந்து 1.2 மீ/வி வேகத்தில் நடந்து கொண்டு இருக்கிறாள். விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 3.6மீ எனில் 4 விநாடிகள் நடந்த பிறகு சிறுமியின் நிழலின் நீளத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : AB என்பது விளக்கு கம்பம் என்க.

CD என்பது 4 விநாடிகள் நடந்தபிறகு சிறுமியின் நிலை படம் 6.32 மூலம் DE என்பது சிறுமியின் நிழல் $DE = x$ மீட்டர்கள் என்க.



படம் 6.32

Now, BD = 1.2 m × 4 = 4.8 m.

Note that in Δ ABE and Δ CDE,

$\angle B = \angle D$ (Each is of 90° because lamp-post as well as the girl are standing vertical to the ground)

and $\angle E = \angle E$ (Same angle)

So, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA similarity criterion)

Therefore, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

i.e., $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}\right)$

i.e., $4.8 + x = 4x$

i.e., $3x = 4.8$

i.e., $x = 1.6$

So, the shadow of the girl after walking for 4 seconds is 1.6 m long.

Example 8 : In Fig. 6.33, CM and RN are respectively the medians of Δ ABC and Δ PQR. If Δ ABC ~ Δ PQR, prove that :

(i) Δ AMC ~ Δ PNR

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) Δ CMB ~ Δ RNQ

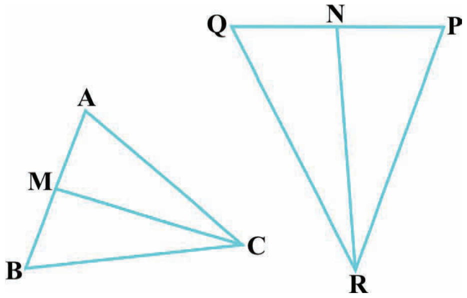


Fig. 6.33

Solution : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (Given)

So, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

and $\angle A = \angle P,\ \angle B = \angle Q$ and $\angle C = \angle R$ (2)

But AB = 2 AM and PQ = 2 PN

(As CM and RN are medians)

So, from (1), $\frac{2\,AM}{2\,PN} = \frac{CA}{RP}$

AP SCERT

BD = 1.2 மீ × 4 = 4.8 மீ

ΔABE மற்றும் ΔCDEல்,

$\angle B = \angle D$ (விளக்கு கம்பம் மற்றும் சிறுமி நிலத்திற்கு செங்குத்தாக நிற்பதால் ஒவ்வொன்றும் 90°)

மற்றும் $\angle E = \angle E$ (ஒரே கோணம்)

எனவே, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$(கோ.கோ. வடிவொப்புமை நிபந்தனை)

எனவே, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

அதாவது, $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ (90 செ.மீ = $\frac{90}{100}$ மீ = 0.9 மீ)

$4.8 + x = 4x$

$3x = 4.8$

அதாவது, $x = 1.6$

எனவே, 4 விநாடிகள் நடந்த பிறகு சிறுமியின் நிழலின் நீளம் 1.6 மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8 : படம் 6.33ல், CM மற்றும் RN முறையே ΔABC மற்றும் ΔPQRன் மையக்கோடுகள் $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ எனில்

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ என நிரூபி.

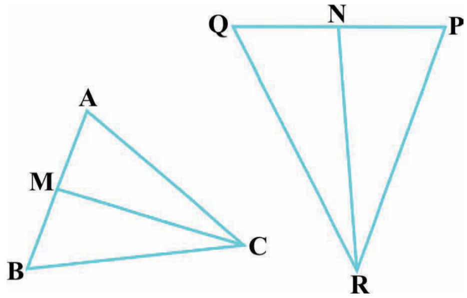


Fig. 6.33

தீர்வு : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (கொடுக்கப்பட்டது)

எனவே, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

மற்றும் $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ மற்றும் $\angle C = \angle R$ (2)

ஆனால் AB = 2 AM மற்றும் PQ = 2 PN

(CM மற்றும் RN மையக்கோடுகள்)

(1) மூலம் $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

i.e., $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

Also, $\angle MAC = \angle NPR$ [From (2)] (4)

So, from (3) and (4),

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS similarity) (5)

(ii) From (5), $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

But $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [From (1)] (7)

Therefore, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [From (6) and (7)] (8)

(iii) Again, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [From (1)]

Therefore, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [From (8)] (9)

Also, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\ BM}{2\ QN}$

i.e., $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

i.e., $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [From (9) and (10)]

Therefore, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (SSS similarity)

[**Note :** You can also prove part (iii) by following the same method as used for proving part (i).]

EXERCISE 6.3

1. State which pairs of triangles in Fig. 6.34 are similar. Write the similarity criterion used by you for answering the question and also write the pairs of similar triangles in the symbolic form :

AP SCERT

அதாவது, $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

மேலும், $\angle MAC = \angle NPR$ [(2), (4) மூலம்]

(3) மற்றும் (4) மூலம்

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (ப.கோ.ப. வடிவொப்புமை) (5)

(ii) (5)ன் மூலம் $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

ஆனால் $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1), (7) மூலம்]

எனவே, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) , (7) மற்றும் (8) மூலம்]

(iii) மீண்டும் $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) மூலம்]

எனவே, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) (9) மூலம்]

மேலும், $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\,BM}{2\,QN}$

அதாவது, $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

அதாவது, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) மற்றும் (10) மூலம்]

எனவே, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (ப.ப.ப. வடிவொப்புமை)

[**குறிப்பு :** பகுதி (i) ஐ நிரூபிக்க பயன்படுத்திய அதே முறையை பயன்படுத்தி பகுதி (iii)யும் நிரூபிக்கலாம்.]

பயிற்சி 6.3

1. படம் 6.34ல் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோண சோடிகளில் எவை வடிவொத்தவை? மேலும் எந்த வடிவொப்புமை நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் அவைகள் வடிவொத்தவை என்றும் வடிவொத்த முக்கோணங்களை குறியீட்டு வடிவிலும் எழுதுங்கள்.

AP SCERT

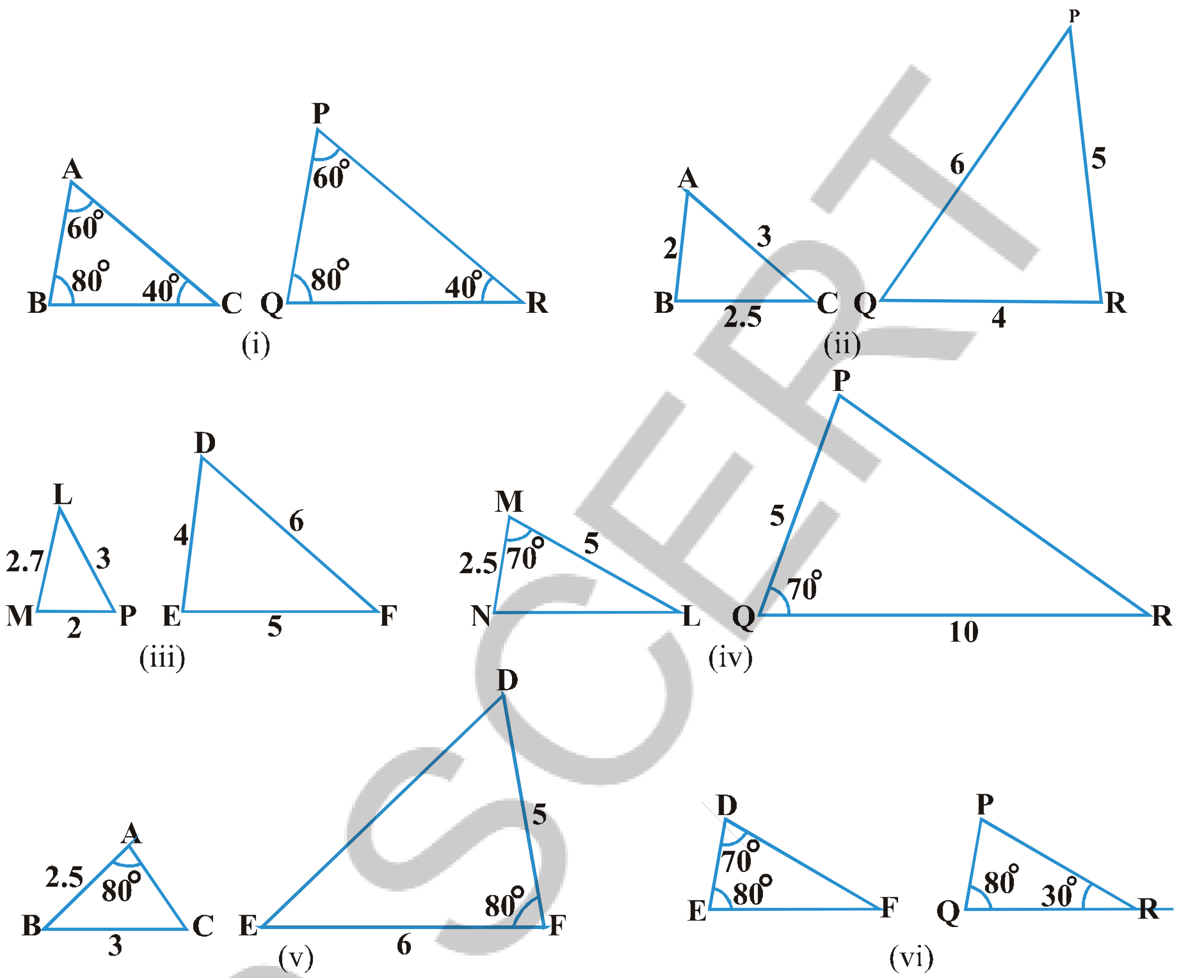


Fig. 6.34

2. In Fig. 6.35, Δ ODC ~ Δ OBA, $\angle$ BOC = 125° and $\angle$ CDO = 70°. Find $\angle$ DOC, $\angle$ DCO and $\angle$ OAB.

3. Diagonals AC and BD of a trapezium ABCD with AB || DC intersect each other at the point O. Using a similarity criterion for two triangles, show that $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.

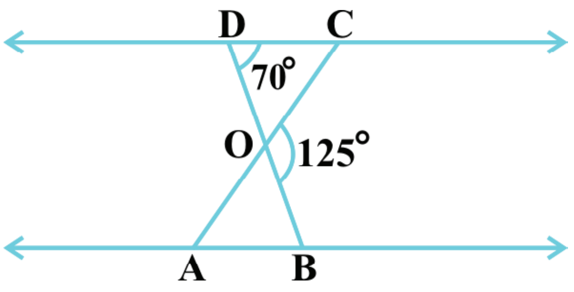
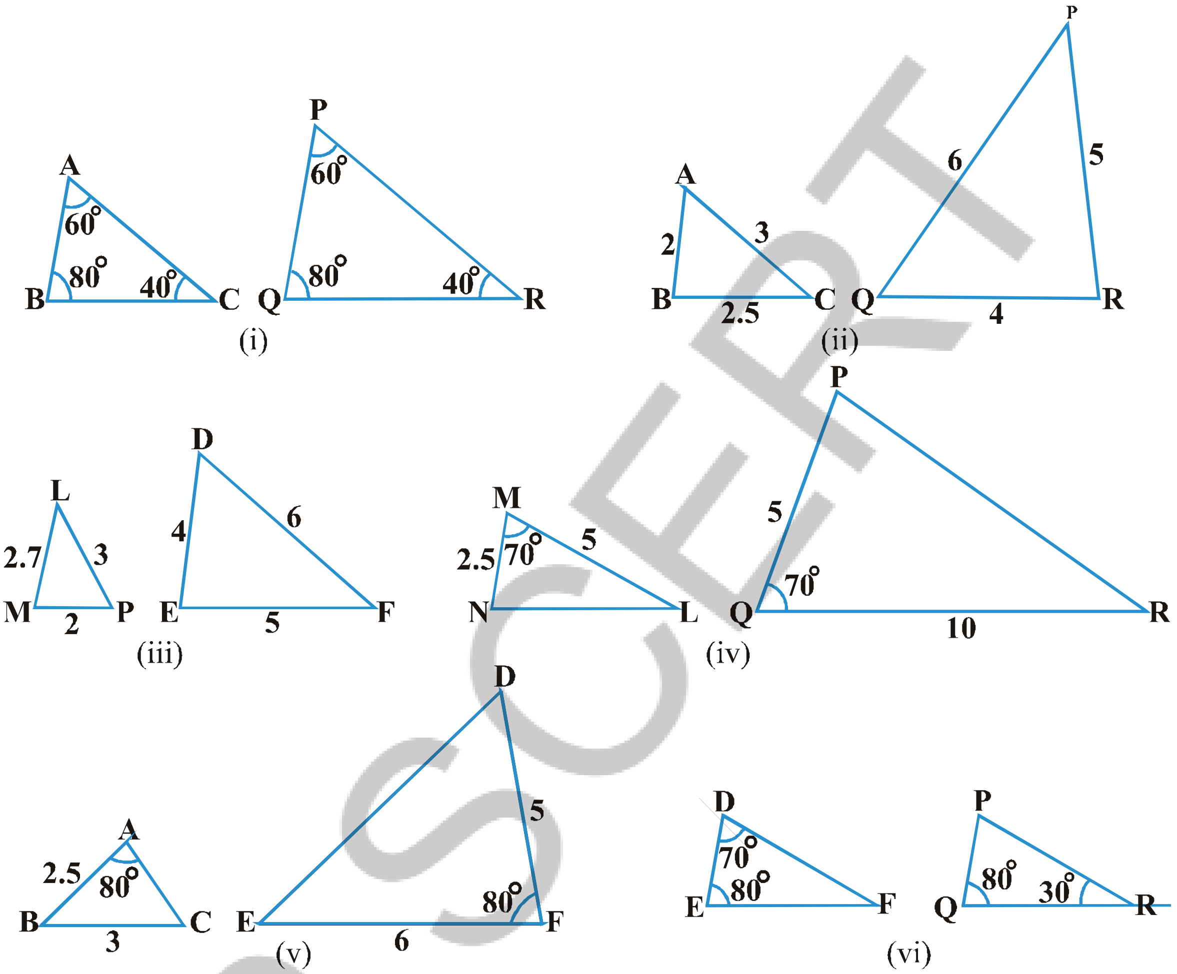


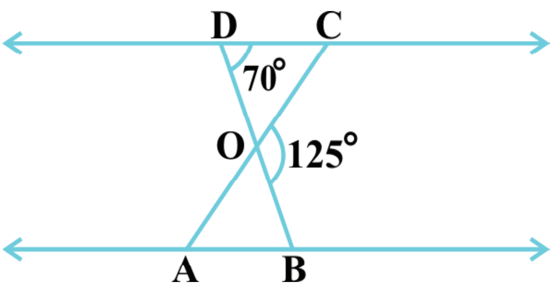
Fig. 6.35

AP SCERT



படம் 6.34

2. படம் 6.35ல் $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ மற்றும் $\angle CDO = 70°$ எனில் $\angle DOC$, $\angle DCO$ மற்றும் $\angle OAB$ களை கண்டுபிடி.



படம் 6.35

3. $AB \parallel DC$ களை இணைப்பக்கங்களாக கொண்ட சரிவகம் ABCD ன் மூலைவிட்டங்கள் புள்ளி O வில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை நிபந்தனையை பயன்படுத்தி $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ என நிரூபி.

4. In Fig. 6.36, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ and $\angle 1 = \angle 2$. Show that $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.

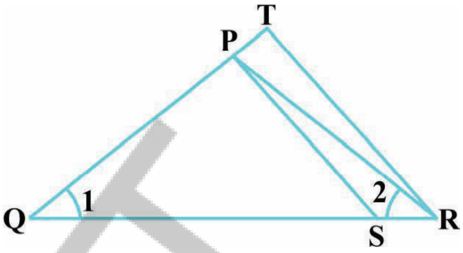


Fig. 6.36

5. S and T are points on sides PR and QR of ΔPQR such that $\angle P = \angle RTS$. Show that $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$.

6. In Fig. 6.37, if $\Delta ABE \cong \Delta ACD$, show that $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

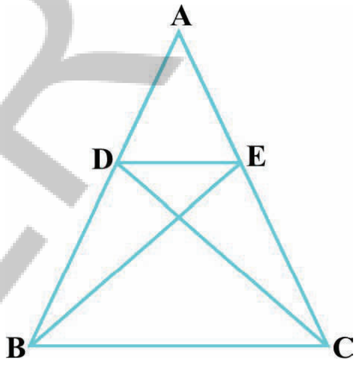


Fig. 6.37

7. In Fig. 6.38, altitudes AD and CE of ΔABC intersect each other at the point P. Show that:

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

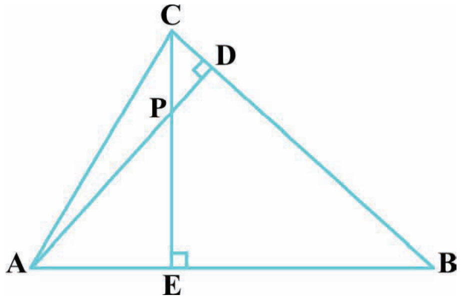


Fig. 6.38

8. E is a point on the side AD produced of a parallelogram ABCD and BE intersects CD at F. Show that $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

9. In Fig. 6.39, ABC and AMP are two right triangles, right angled at B and M respectively. Prove that:

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

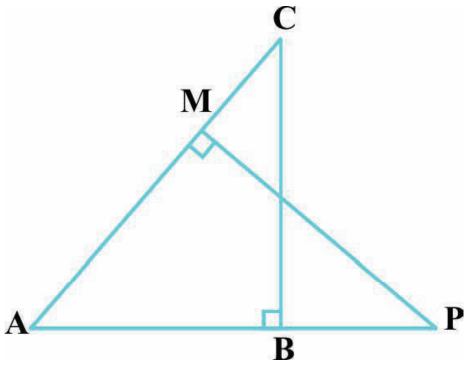


Fig. 6.39

10. CD and GH are respectively the bisectors of $\angle ACB$ and $\angle EGF$ such that D and H lie on sides AB and FE of ΔABC and ΔEFG respectively. If $\Delta ABC \sim \Delta FEG$, show that:

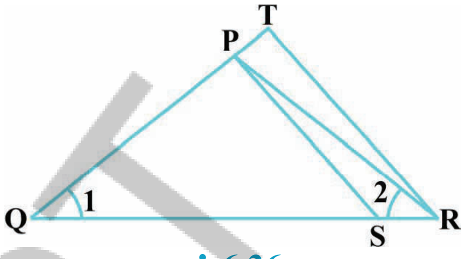
(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

AP SCERT

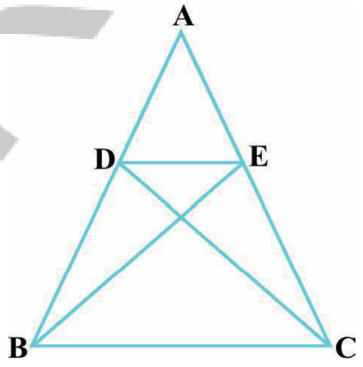
4. படம் 6.36ல் $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 2$ எனில் $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ எனக்காட்டு.



படம் 6.36

5. S மற்றும் T என்பன PR மற்றும் QR எனும் பக்கங்களின் மீது $\angle P = \angle RTS$ எனும்படி அமைந்த புள்ளிகள் எனில் $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ எனக்காட்டு.

6. படம் 6.37ல் $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ எனில் $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ எனக்காட்டு.



படம் 6.37

7. படம் 6.38ல் ΔABCன் குத்துயரங்கள் AD மற்றும் CE புள்ளி Pயில் வெட்டி கொள்கின்றன எனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபி.

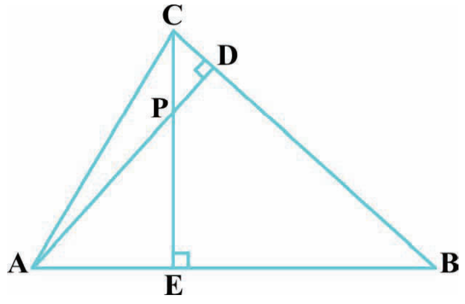
   (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

   (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

   (iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

   (iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

8. இணைகரம் ABCDல் E என்பது AD பக்கத்தை நீட்டித்து வரைவதால் ஏற்படும் பக்கத்தின் மீது அமைந்த புள்ளி மேலும் BE ஆனது CD ஐ Fல் வெட்டுகிறது எனில் $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ எனக்காட்டு.

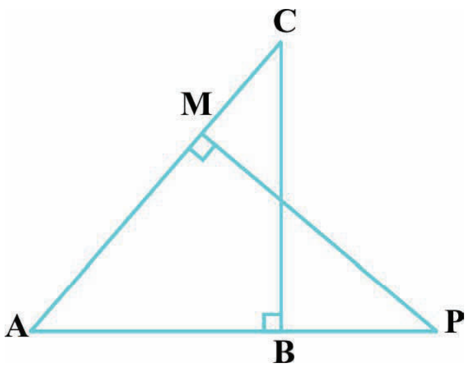


படம் 6.38

9. படம் 6.39ல் Δ ABC மற்றும் ΔAMP இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் மேலும் B மற்றும் M முனைகளில் செங்கோணம் அமைந்துள்ளது எனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபி.

   (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

   (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



படம் 6.39

10. Δ ABC மற்றும் Δ EFGன் பக்கங்களின் மீது AB மற்றும் FEன் மீது அமைந்த புள்ளிகள் D மற்றும் H என்க. மேலும் இப்புள்ளிகள் CD மற்றும் GH ஆகியவை கோணம் $\angle ACB$ மற்றும் கோணம் $\angle EGF$ ஐ இருசம கூறிடும் படி அமைந்துள்ளது $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபி.

   (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

   (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

   (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

AP SCERT

11. In Fig. 6.40, E is a point on side CB produced of an isosceles triangle ABC with AB = AC. If AD ⊥ BC and EF ⊥ AC, prove that Δ ABD ~ Δ ECF.

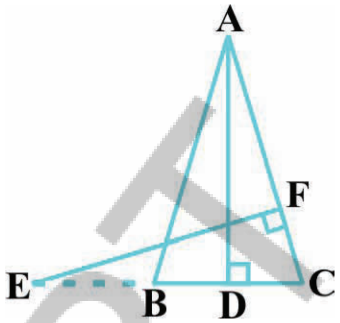


Fig. 6.40

12. Sides AB and BC and median AD of a triangle ABC are respectively proportional to sides PQ and QR and median PM of Δ PQR (see Fig. 6.41). Show that Δ ABC ~ Δ PQR.

13. D is a point on the side BC of a triangle ABC such that ∠ ADC = ∠ BAC. Show that CA^2 = CB.CD.

14. Sides AB and AC and median AD of a triangle ABC are respectively proportional to sides PQ and PR and median PM of another triangle PQR. Show that Δ ABC ~ Δ PQR.

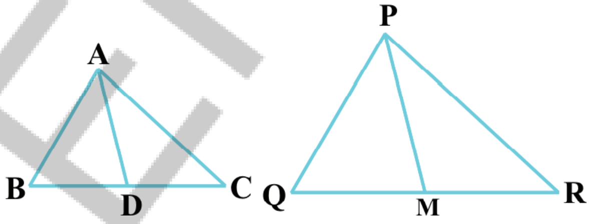


Fig. 6.41

15. A vertical pole of length 6 m casts a shadow 4 m long on the ground and at the same time a tower casts a shadow 28 m long. Find the height of the tower.

16. If AD and PM are medians of triangles ABC and PQR, respectively where Δ ABC ~ Δ PQR, prove that $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$.

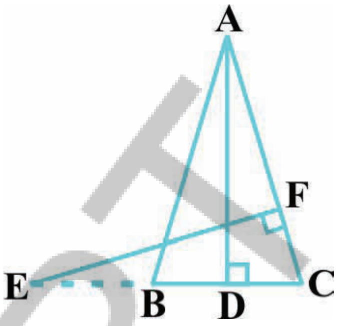
6.5 Summary

In this chapter you have studied the following points :

1. Two figures having the same shape but not necessarily the same size are called similar figures.
2. All the congruent figures are similar but the converse is not true.
3. Two polygons of the same number of sides are similar, if (i) their corresponding angles are equal and (ii) their corresponding sides are in the same ratio (i.e., proportion).
4. If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides in distinct points, then the other two sides are divided in the same ratio.
5. If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, then the line is parallel to the third side.

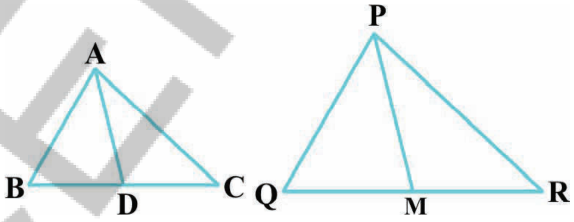
AP SCERT

11. படம் 6.40ல் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் ABCன் ஒரு பக்கத்தை நீட்டித்து வரைந்தால் ஏற்படும் பக்கத்தின் மீது அமைந்த புள்ளி E மேலும் $AB = AC$, $AD \perp BC$ மற்றும் $EF \perp AC$ எனில் $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ என நிரூபி.



படம் 6.40

12. முக்கோணம் ABCன் பக்கங்கள் AB மற்றும் BC மேலும் மையக்கோடு AD முறையே மற்றொரு முக்கோணம் ΔPQR ன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் QR மேலும் மையக்கோடு PM க்கு விகித சமம் எனில் (படம் 6.41) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ என நிரூபி.



படம் 6.41

13. $\angle ADC = \angle BAC$ எனும்படி D எனும் புள்ளி ன் BC எனும் பக்கம் மீது அமைந்துள்ளது எனில் $CA^2 = CB.CD$ எனக்காட்டு.
14. ABC ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC மேலும் மையக்கோடு AD முறையே மற்றொரு முக்கோணம் PQRன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் PR மேலும் மையக்கோடு PM க்கு விகிதசமம் எனில் $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ எனக்காட்டு.
15. 6மீ நீளமுள்ள ஒரு செங்குத்தான கம்பம் 4மீ நீளமுள்ள நிழலை தரையில் ஏற்படுத்துகிறது. அதே நேரத்தில் 28மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்தும் கோபுரத்தின் உயரம் என்னவாக இருக்கும்?
16. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ மேலும் AD மற்றும் PM முறையே ABC மற்றும் PQRன் மையக்கோடுகள் எனில் $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ எனக்காட்டு.

6.5 நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் பின்வருவனவற்றை பற்றி படித்தோம்.

1. இரண்டு வடிவங்கள் ஒரே மாதிரியான வடிவத்தைப் பெற்று வெவ்வேறான அளவுகளை பெற்றிருப்பினும் அவைகளை வடிவொத்த வடிவங்கள் என்கிறோம்.
2. சர்வசம வடிவங்கள் அனைத்தும் வடிவொத்தவை இதன் மறுதலை உண்மையல்ல.
3. சமமான பக்கங்களை கொண்ட வடிவங்கள் பின்வரும் நிபந்தனைகள் படி வடிவொத்தவை. (i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் (ii) ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமத்தில் இருக்க வேண்டும்.
4. முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு மற்ற இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
5. முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் கோடு மூன்றாம் பக்கத்திற்கு இணை.

6. If in two triangles, corresponding angles are equal, then their corresponding sides are in the same ratio and hence the two triangles are similar (AAA similarity criterion).

7. If in two triangles, two angles of one triangle are respectively equal to the two angles of the other triangle, then the two triangles are similar (AA similarity criterion).

8. If in two triangles, corresponding sides are in the same ratio, then their corresponding angles are equal and hence the triangles are similar (SSS similarity criterion).

9. If one angle of a triangle is equal to one angle of another triangle and the sides including these angles are in the same ratio (proportional), then the triangles are similar (SAS similarity criterion).

A NOTE TO THE READER

If in two right triangles, hypotenuse and one side of one triangle are proportional to the hypotenuse and one side of the other triangle, then the two triangles are similar. This may be referred to as the RHS Similarity Criterion.

If you use this criterion in Example 2, Chapter 8, the proof will become simpler.

AP SCERT

6. இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் மேலும் அவைகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை. (கோ.கோ.கோ வடிவொப்புமை)
7. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமம் எனில் அவை இரண்டும் வடிவொத்தவை.
8. இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருப்பின் அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமம். இந்த வடிவொப்புமையை ப.ப.ப. வடிவொப்புமை என்போம்.
9. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு கோணததிற்கு சமமாகவும் இக்கோணத்தை உள்ளடக்கிய ஒத்த பக்கங்களும் விகிதசமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை. மேலும் இந்த வடிவொப்புமையை ப.கோ.ப. வடிவொப்புமை என்பர்.

கற்பவரின் கவனத்திற்கு

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் மேலும் ஏதாவது ஒரு பக்கம் முறையே மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் மேலும் அதன் ஒரு பக்கம் முதல் முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கத்திற்கு விகிதசமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை இந்த வடிவொப்புமையை செ.க.ப. (செங்கோணம் – கர்ணம் – பக்கம்) வடிவொப்புமை என்போம்.

அத்தியாயம் 8ல் எடுத்துக்காட்டு 2க்கு இந்த வடிவொப்புமையை பயன்படுத்தினால் நிரூபணம் எளிதாகும்.

APSCERT

L1L8B1

COORDINATE GEOMETRY 7

7.1 Introduction

In Class IX, you have studied that to locate the position of a point on a plane, we require a pair of coordinate axes. The distance of a point from the *y*-axis is called its ***x*-coordinate**, or **abscissa**. The distance of a point from the *x*-axis is called its ***y*-coordinate**, or **ordinate**. The coordinates of a point on the *x*-axis are of the form $(x, 0)$, and of a point on the *y*-axis are of the form $(0, y)$.

Here is a play for you. Draw a set of a pair of perpendicular axes on a graph paper. Now plot the following points and join them as directed: Join the point A(4, 8) to B(3, 9) to C(3, 8) to D(1, 6) to E(1, 5) to F(3, 3) to G(6, 3) to H(8, 5) to I(8, 6) to J(6, 8) to K(6, 9) to L(5, 8) to A. Then join the points P(3.5, 7), Q (3, 6) and R(4, 6) to form a triangle. Also join the points X(5.5, 7), Y(5, 6) and Z(6, 6) to form a triangle. Now join S(4, 5), T(4.5, 4) and U(5, 5) to form a triangle. Lastly join S to the points (0, 5) and (0, 6) and join U to the points (9, 5) and (9, 6). What picture have you got?

Also, you have seen that a linear equation in two variables of the form $ax + by + c = 0$, (a, b are not simultaneously zero), when represented graphically, gives a straight line. Further, in Chapter 2, you have seen the graph of $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), is a parabola. In fact, coordinate geometry has been developed as an algebraic tool for studying geometry of figures. It helps us to study geometry using algebra, and understand algebra with the help of geometry. Because of this, coordinate geometry is widely applied in various fields such as physics, engineering, navigation, seismology and art!

In this chapter, you will learn how to find the distance between the two points whose coordinates are given, and to find the area of the triangle formed by three given points. You will also study how to find the coordinates of the point which divides a line segment joining two given points in a given ratio.

APSCERT

H4P1F9

ஆயத்தொலை வடிவியல் 7

7.1 அறிமுகம்

ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் இடத்தை குறிப்பிட நமக்கு ஒரு ஜோடி ஆயத்தொலை அச்சுகள் தேவை என்பதை நீங்கள் IXஆம் வகுப்பில் படித்திருப்பீர்கள். y-அச்சிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரம் அதன் ***x*-ஆய தொலைவு** அல்லது **கிடை அச்சு தொலைவு(abscissa)** எனப்படும். x அச்சிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரம் அதன் ***y*-ஆய தொலைவு** அல்லது **செங்குத்து அச்சு தொலைவு (ordinate)** எனப்படும். x-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியின் ஆயதொலைவுகள் $(x, 0)$ வடிவிலும், அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியின் ஆயதொலைவுகள் $(0, y)$ வடிவிலும் இருக்கும்.

உங்களுக்கான ஒரு விளையாட்டு ஒரு வரைபடத்தாளில் ஒரு ஜோடி செங்குத்து அச்சுகளை வரைக. இப்பொழுது கீழ்கண்ட புள்ளிகளை குறிப்பிடுக. மேலும் அவற்றை இணைக்கவும். A(4, 8) லிருந்து B(3, 9) லிருந்து C(3, 8) லிருந்து D(1, 6) லிருந்து E(1, 5) லிருந்து F(3, 3) லிருந்து G(6, 3) லிருந்து H(8, 5) லிருந்து I(8, 6) லிருந்து J(6, 8) லிருந்து K(6, 9) லிருந்து L(5, 8) லிருந்து A. புள்ளியை இணைக்கவும். பிறகு P(3.5, 7), Q (3, 6) மற்றும் R(4, 6) ஆகிய புள்ளிகளை இணைத்து முக்கோணத்தை உருவாக்கு. மேலும் X(5.5, 7), Y(5, 6) மற்றும் Z(6, 6) ஆகிய புள்ளிகளை இணைத்து முக்கோணத்தை உருவாக்கு. இப்போது S(4, 5), T(4.5, 4) மற்றும் U(5, 5) ஆகியவற்றை இணைத்து முக்கோணத்தை உருவாக்கு. இறுதியாக (0, 5) மற்றும் (0, 6) புள்ளிகளுக்கு Sஜ இணை. மேலும் (9, 5) மற்றும் (9, 6) புள்ளிகளுக்கு Uஜ இணை. உங்களுக்கு கிடைத்த படம் என்ன?

$ax + by + c = 0$, (a, b என்பவை ஒரே சமயத்தில் பூஜ்ஜியமாகாது) என்ற இரு மாறிகள் கொண்ட ஒரு நேரிய சமன்பாட்டினை வரைபடத்தில் குறிப்பிடும்போது, அது ஒரு நேர்கோடாக அமைவதை நீங்கள் பார்த்திருப்பீர்கள். மேலும் $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ என்பதன் வரைபடமானது ஒரு பரவளையம் என்பதை நீங்கள் அத்தியாயம் 2ல் பார்த்திருப்பீர்கள். உண்மையில் ஆயதொலை வடிவியல் என்பது உருவங்களின் வடிவியலைப் படிப்பதற்கான இயற்கணித கருவியாக உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கணிதத்தை பயன்படுத்தி வடிவியலைப் படிக்கவும். வடிவியலின் உதவியுடன் இயற்கணிதத்தைப் புரிந்து கொள்ளவும் இது உதவுகிறது. இதன் காரணமாக ஆயதொலை வடிவியலானது பொறியியல், வழிகாட்டி நுட்பம் (navigation), நிலநடுக்கம் பற்றிய ஆய்வு மற்றும் கலை போன்ற துறைகளில் பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இந்த அத்தியாத்தில் இரண்டு புள்ளிகளின் ஆயதொலைவுகள் தரப்பட்டால் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரத்தை எவ்வாறு கண்டறிவது மேலும் மூன்று புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு கண்டறிவது என்பதை பற்றி படிப்பீர்கள். மேலும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயதொலைவுகளை எவ்வாறு கண்டறிவது என்பதை பற்றியும் படிப்பீர்கள்.

7.2 Distance Formula

Let us consider the following situation:

A town B is located 36 km east and 15 km north of the town A. How would you find the distance from town A to town B without actually measuring it. Let us see. This situation can be represented graphically as shown in Fig. 7.1. You may use the Pythagoras Theorem to calculate this distance.

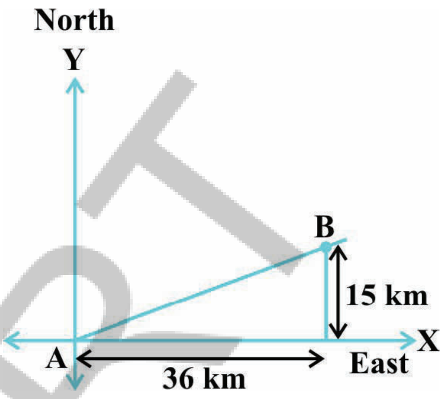


Fig. 7.1

Now, suppose two points lie on the x-axis. Can we find the distance between them? For instance, consider two points A(4, 0) and B(6, 0) in Fig. 7.2. The points A and B lie on the x-axis.

From the figure you can see that OA = 4 units and OB = 6 units.

Therefore, the distance of B from A, i.e., AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 units.

So, if two points lie on the x-axis, we can easily find the distance between them.

Now, suppose we take two points lying on the y-axis. Can you find the distance between them. If the points C(0, 3) and D(0, 8) lie on the y-axis, similarly we find that CD = 8 – 3 = 5 units (see Fig. 7.2).

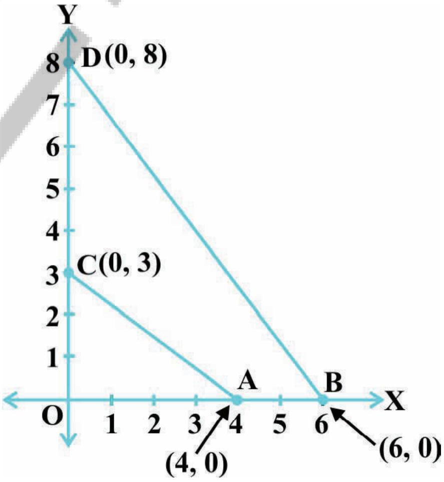


Fig. 7.2

Next, can you find the distance of A from C (in Fig. 7.2)? Since OA = 4 units and OC = 3 units, the distance of A from C, i.e., AC = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 units. Similarly, you can find the distance of B from D = BD = 10 units.

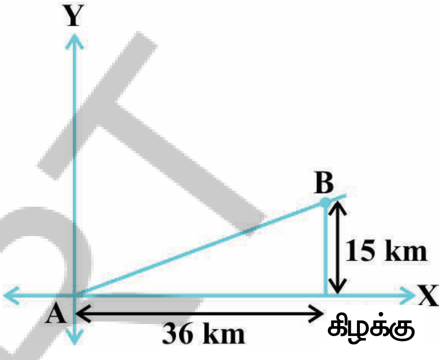
Now, if we consider two points not lying on coordinate axis, can we find the distance between them? Yes! We shall use Pythagoras theorem to do so. Let us see an example.

In Fig. 7.3, the points P(4, 6) and Q(6, 8) lie in the first quadrant. How do we use Pythagoras theorem to find the distance between them? Let us draw PR and QS perpendicular to the x-axis from P and Q respectively. Also, draw a perpendicular from P on QS to meet QS at T. Then the coordinates of R and S are (4, 0) and (6, 0), respectively. So, RS = 2 units. Also, QS = 8 units and TS = PR = 6 units.

7.2 தூரத்தை காணும் சூத்திரம்

பின்வரும் சூழ்நிலையை கவனி.

A நகரத்திலிருந்து 36 கி.மீ கிழக்கிலும் மேலும் 15கி.மீ வடக்கிலும் B நகரம் அமைந்துள்ளது. A நகரத்திலிருந்து B நகரத்திற்கு இடையேயுள்ள தூரத்தை நேரடியாக அளவிடாமல் எப்படி கண்டுபிடிப்பீர்கள். அதை பார்ப்போம். இந்த சூழலை படம் 7.1ல் காட்டியபடி வரைபட வடிவில் காட்டலாம். இந்த தூரத்தை கணக்கிட நீங்கள் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தலாம்.



படம் 7.1

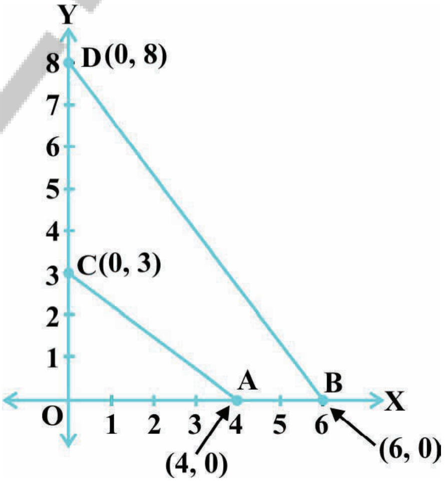
இப்பொழுது x-அச்சின் மீது இரண்டு புள்ளிகள் உள்ளன எனக் கொள்வோம். நம்மால் அவற்றிற்கிடைப்பட்ட தூரத்தை காண முடியுமா? எடுத்துக்காட்டாக படம் 7.2ல் A(4, 0) மற்றும் B(6, 0) ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். A மற்றும் B புள்ளிகள் x-அச்சின் மீது அமைந்துள்ளன.

படத்திருந்து OA = 4 அலகுகள் மற்றும் OB = 6 அலகுகள் என்பதை நாம் பார்க்கலாம்.

எனவே A லிருந்து Bக்கிடையே உள்ள தூரம் AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 அலகுகள்.

எனவே இரண்டு புள்ளிகள் x-அச்சின் மீது அமைந்திருந்தால் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்தை எளிதாக காணலாம்.

இப்பொழுது நாம் இரண்டு புள்ளிகள் y-அச்சின் மீது அமைந்துள்ளது எனக் கொள்வோம். உங்களால் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரத்தை காண முடியுமா? C(0, 3) மற்றும் D(0, 8) ஆகிய புள்ளிகள் y-அச்சின் மீது அமைந்திருந்தால், மேற்கண்டவாறு நாம் CD = 8 – 3 = 5 அலகுகள் என கண்டறியலாம். (படம் 7.2ஐ பார்).



படம் 7.2

பிறகு, A லிருந்து Cக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை உங்களால் காணமுடியும் (படம்7.2)? OA = 4 அலகுகள் மற்றும் OC = 3 அலகுகள் ஆகையினால் A லிருந்து Cக்கு இடையே உள்ள தூரம், AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ = 5 அலகுகள். இவ்வாறே நீங்கள் B லிருந்து Dக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை = BD = 10 அலகுகள் என்பதை கண்டறியலாம்.

இப்பொழுது இரண்டு புள்ளிகளும் ஆயதொலை அச்சுகளின் மீது அமையவில்லையெனில் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரத்தை நம்மால் காண முடியுமா? ஆம்! நாம் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி காணலாம். ஒரு எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம்.

படம் 7.3ல் P(4, 6) மற்றும் Q(6, 8) ஆகிய புள்ளிகள் முதல் காற்பகுதியில் அமைந்துள்ளன. அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரத்தை காண நாம் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை எவ்வாறு பயன்படுத்துவோம்? P மற்றும் Q லிருந்து x-அச்சிற்கு முறையே PR மற்றும் QS க்கு செங்குத்துகோடுகளை வரைக. P புள்ளியிலிருந்து QS க்கு செங்குத்தாகTல் வெட்டுமாறு செங்குத்துகோடு வரைக. எனவே R மற்றும் S புள்ளிகள் அச்சு தூரங்கள் முறையே (4, 0) மற்றும் (6, 0) ஆகும். எனவே RS = 2 அலகுகள். மேலும் QS = 8 அலகுகள் மற்றும் TS = PR = 6 அலகுகள்.

Therefore, QT = 2 units and PT = RS = 2 units.

Now, using the Pythagoras theorem, we have

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

So, $PQ = 2\sqrt{2}$ units

How will we find the distance between two points in two different quadrants?

Consider the points P(6, 4) and Q(–5, –3) (see Fig. 7.4). Draw QS perpendicular to the *x*-axis. Also draw a perpendicular PT from the point P on QS (extended) to meet *y*-axis at the point R.

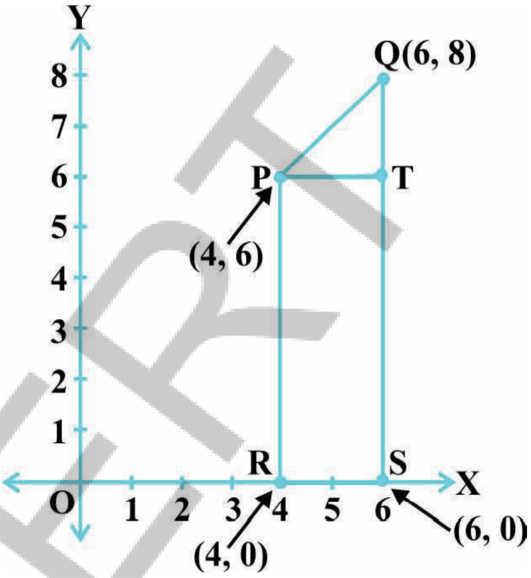


Fig. 7.3

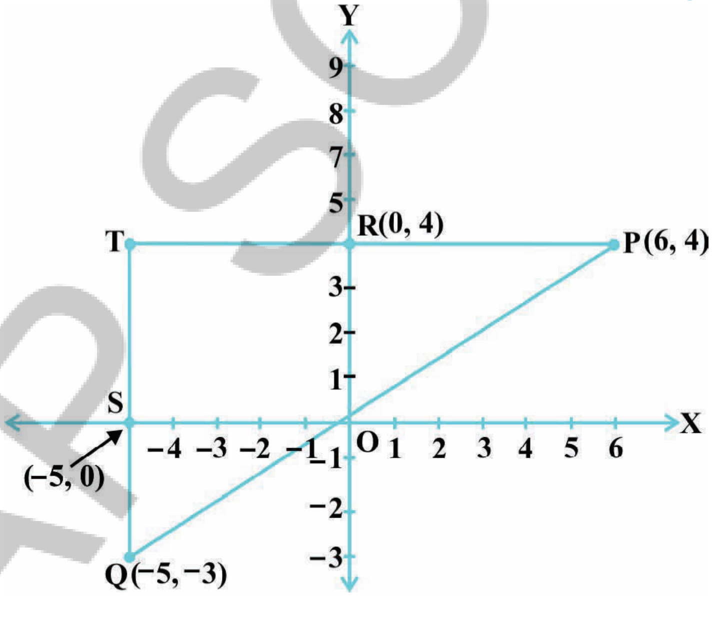


Fig. 7.4

Then PT = 11 units and QT = 7 units. (Why?)

Using the Pythagoras Theorem to the right triangle PTQ, we get

$PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ units.

ஆகையால் QT = 2 அலகுகள் PT = RS = 2 அலகுகள்.

இப்பொழுது, பிதாகரஸ் தேற்றத்தினை பயன்படுத்துவதன் மூலம்,

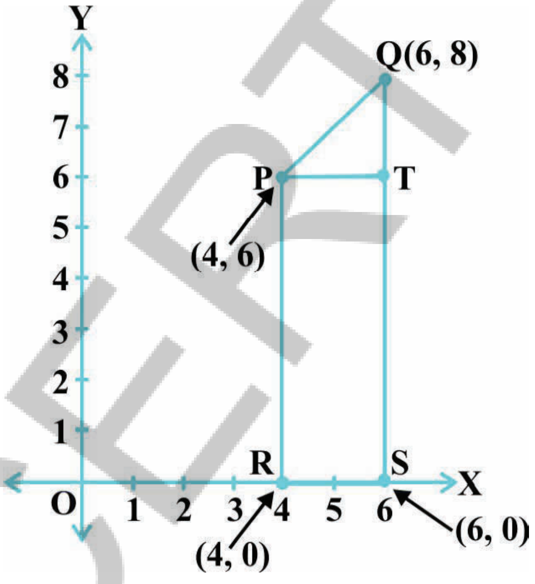
$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

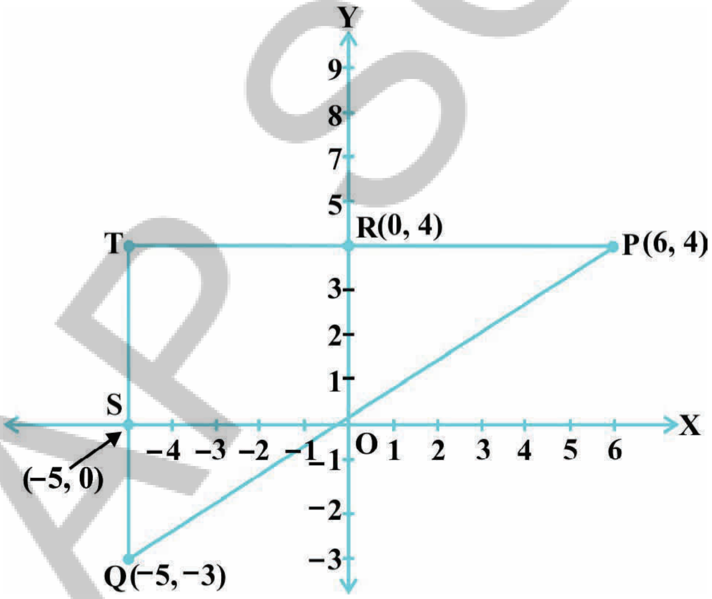
எனவே, $PQ = 2\sqrt{2}$ அலகுகள்

இரண்டு வெவ்வேறு காற்பகுதியில் அமைந்துள்ள இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை நாம் எவ்வாறு கண்டறியலாம்?

P(6, 4) மற்றும் Q(–5, –3) ஆகிய புள்ளிகளை கவனியுங்கள் (படம் 7.4ஐ பார்க்கவும்). x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக QS செங்குத்துகோட்டினை வரைக. மேலும்R புள்ளியில் y-அச்சை சந்திக்க QS (நீட்டிக்கப்பட்ட)ல் P புள்ளியிலிருந்து செங்குத்தாக PT ஐ வரைக.



படம் 7.3



படம் 7.4

PT = 11 அலகுகள் மேலும் QT = 7 அலகுகள் (ஏன்?)

செங்கோண முக்கோணம் PTQல் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்துவதன் மூலம் $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ அலகுகள் நமக்கு கிடைக்கும்.

Let us now find the distance between any two points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$. Draw PR and QS perpendicular to the x-axis. A perpendicular from the point P on QS is drawn to meet it at the point T (see Fig. 7.5).

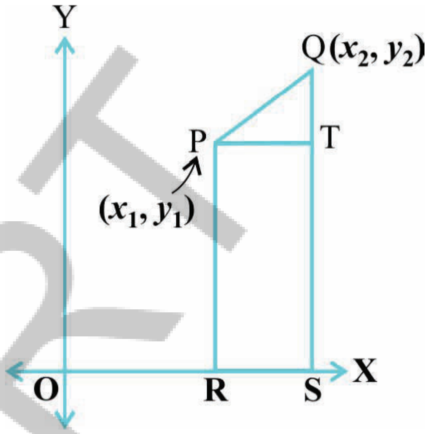


Fig. 7.5

Then, $OR = x_1$, $OS = x_2$. So, $RS = x_2 - x_1 = PT$.

Also, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$. So, $QT = y_2 - y_1$.

Now, applying the Pythagoras theorem in Δ PTQ, we get

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Therefore, $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note that since distance is always non-negative, we take only the positive square root. So, the distance between the points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ is

$$\mathbf{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

which is called the **distance formula**.

Remarks :

1. In particular, the distance of a point $P(x, y)$ from the origin $O(0, 0)$ is given by

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. We can also write, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. (Why?)

Example 1 : Do the points (3, 2), (–2, –3) and (2, 3) form a triangle? If so, name the type of triangle formed.

Solution : Let us apply the distance formula to find the distances PQ, QR and PR, where P(3, 2), Q(–2, –3) and R(2, 3) are the given points. We have

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (approx.)}$$

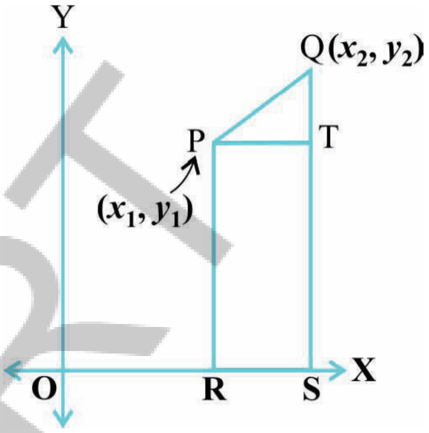
$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (approx.)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (approx.)}$$

Since the sum of any two of these distances is greater than the third distance, therefore, the points P, Q and R form a triangle.

APSCERT

இப்பொழுது $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரத்தை காண்போம். x-அச்சிற்கு செங்குத்தாக PR மற்றும் QS ஐ வரைக. P புள்ளியிலிருந்து QS க்கு ஒரு செங்குத்து கோட்டை T புள்ளியில் சந்திக்குமாறு வரைக. (படம் 7.5ஐ பார்).



படம் 7.5

பிறகு, $OR = x_1, OS = x_2$. எனவே, $RS = x_2 - x_1 = PT$.

மேலும் $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$. எனவே, $QT = y_2 - y_1$.

Δ PTQல் பிதாகரஸ் தேற்றத்தினை பயன்படுத்துவதன் மூலம்,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

எனவே, $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

தூரம் என்பது எப்பொழுதும் குறை எண்ணாக இருக்காது, ஆகையால் நாம் மிகை வர்க்க மூலத்தை மட்டுமே எடுத்துக்கொள்கிறோம் என்பதை கவனி. எனவே $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்,

$$\mathbf{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

என்பது தூரத்திற்கான சூத்திரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு:

1. குறிப்பாக ஆதிப்புள்ளி $O(0, 0)$ லிருந்து ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ க்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$ ஆகும்.

2. $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. எனவும் எழுதலாம்.(ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டு 1 : (3, 2), (–2, –3) மேலும் (2, 3) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தை ஏற்படுத்துமா? அவ்வாறெனில் உருவான முக்கோணத்தின் வகையை கூறு.

தீர்வு : PQ, QR மற்றும் PR ன் தூரங்களை காண நாம் தூரத்தின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் P(3, 2), Q(–2, –3) மேலும் R(2, 3)

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (தோராயமாக)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (தோராயமாக)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (தோராயமாக)}$$

இங்கு ஏதேனும் இரண்டு தூரங்களின் கூடுதல் மூன்றாவது தூரத்தை விட அதிகம். எனவே, P, Q மேலும் R புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தை ஏற்படுத்தும்.

AP SCERT

Also, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, by the converse of Pythagoras theorem, we have $\angle P = 90°$.

Therefore, PQR is a right triangle.

Example 2 : Show that the points (1, 7), (4, 2), (–1, –1) and (– 4, 4) are the vertices of a square.

Solution : Let A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) and D(– 4, 4) be the given points. One way of showing that ABCD is a square is to use the property that all its sides should be equal and both its digonals should also be equal. Now,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

Since, AB = BC = CD = DA and AC = BD, all the four sides of the quadrilateral ABCD are equal and its diagonals AC and BD are also equal. Thereore, ABCD is a square.

Alternative Solution : We find the four sides and one diagonal, say, AC as above. Here $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. Therefore, by the converse of Pythagoras theorem, $\angle D = 90°$. A quadrilateral with all four sides equal and one angle 90° is a square. So, ABCD is a square.

Example 3 : Fig. 7.6 shows the arrangement of desks in a classroom. Ashima, Bharti and Camella are seated at A(3, 1), B(6, 4) and C(8, 6) respectively. Do you think they are seated in a line? Give reasons for your answer.

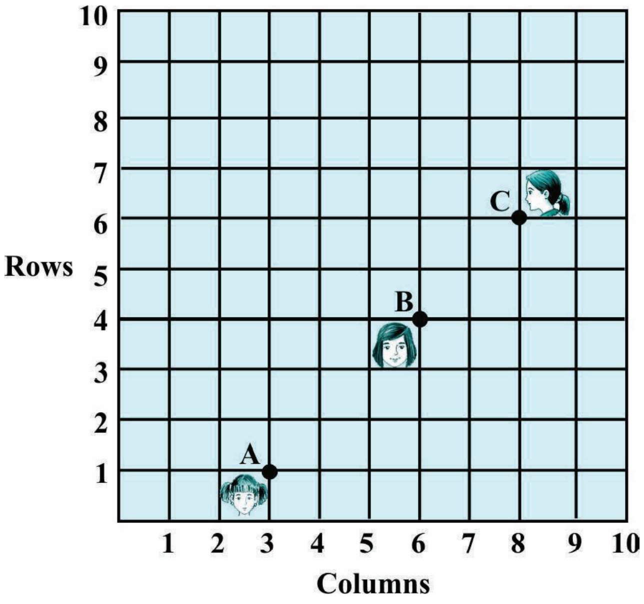


Fig. 7.6

மேலும் $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி $\angle P = 90°$ ஆகும். எனவே, PQR என்பது ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : (1, 7), (4, 2), (–1, –1) மற்றும் (– 4, 4) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் முனைகள் எனக்காட்டு.

தீர்வு: A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) மற்றும் D(– 4, 4) ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க. ABCD என்பது ஒரு சதுரம் என காண்பிப்பதற்கான ஒரு வழி, அதன் அனைத்து பக்கங்களும் சமமாக இருக்க வேண்டும். மேலும் அதன் இரு மூலைவிட்டங்களும் சமமாக இருக்க வேண்டும். இப்பொழுது,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

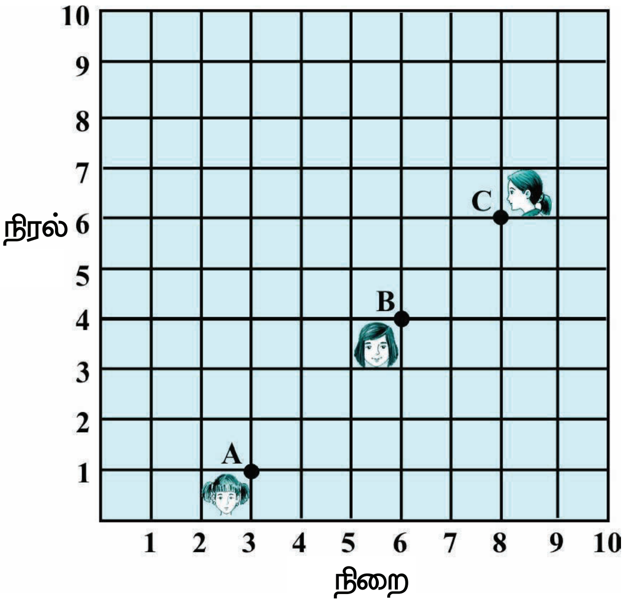
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

இங்கு, AB = BC = CD = DA மேலும் AC = BD. எனவே, நாற்கரம் ABCD ல் நான்கு பக்கங்கள் சமம் மேலும் மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD சமம். ஆகையினால் ABCD ஒரு சதுரம் ஆகும்.

மற்றொரு தீர்வு : மேற்கண்டவாறு நாம் நான்கு பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம் AC ஐ காண்போம். இங்கு $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. எனவே பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி $\angle D = 90°$ நான்கு பக்கங்கள் சமமாகவும் ஒரு கோணம் 90° உடைய ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் ஆகும். எனவே ABCD ஒரு சதுரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : படம் 7.6 என்பது ஒரு வகுப்பறையில் நாற்காலிகள் அமைக்கப்பட்டிருக்கும் விதத்தை காட்டுகிறது. ஆஷிமா, பாரதி மற்றும் கேமல்லா ஆகியோர் முறையே A(3, 1), B(6, 4) மற்றும் C(8, 6) இடங்களில் அமர்ந்துள்ளனர். இவர்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமர்ந்துள்ளனர் என நினைக்கிறீர்களா? உன் விடைக்கான காரணத்தை கூறு.



படம் 7.6

Solution : Using the distance formula, we have

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Since, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, we can say that the points A, B and C are collinear. Therefore, they are seated in a line.

Example 4 : Find a relation between x and y such that the point (x, y) is equidistant from the points (7, 1) and (3, 5).

Solution : Let $P(x, y)$ be equidistant from the points A(7, 1) and B(3, 5).

We are given that AP = BP. So, $AP^2 = BP^2$

i.e., $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

i.e., $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

i.e., $x - y = 2$

which is the required relation.

Remark : Note that the graph of the equation $x - y = 2$ is a line. From your earlier studies, you know that a point which is equidistant from A and B lies on the perpendicular bisector of AB. Therefore, the graph of $x - y = 2$ is the perpendicular bisector of AB (see Fig. 7.7).

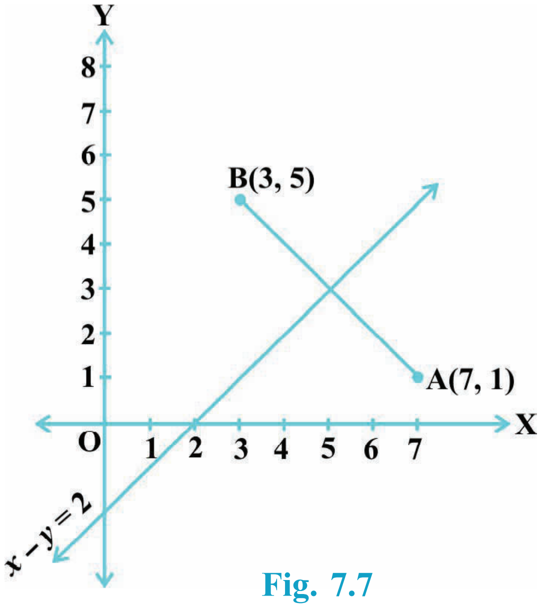


Fig. 7.7

Example 5 : Find a point on the y-axis which is equidistant from the points A(6, 5) and B(– 4, 3).

Solution : We know that a point on the y-axis is of the form $(0, y)$. So, let the point $P(0, y)$ be equidistant from A and B. Then

$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

i.e., $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

i.e., $4y = 36$

i.e., $y = 9$

தீர்வு : தூரத்திற்கான சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவதன் மூலம்,

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, எனவே நாம் A, B மற்றும் C புள்ளிகளை ஒரு கோடமைவன எனலாம். எனவே, அவை ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4 : (x, y) எனும் புள்ளி A(7, 1) மேலும் B(3, 5) எனும் புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது எனில் x மற்றும் y க்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினை காண்க.

தீர்வு: $P(x, y)$ எனும் புள்ளி A(7, 1) மேலும் B(3, 5)க்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது என்க.

எனவே, AP = BP. ஆகையால் $AP^2 = BP^2$

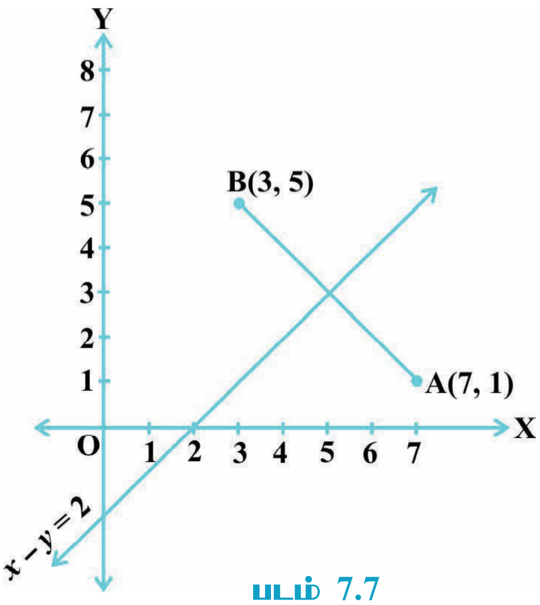
$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$x - y = 2$$

இதுவே தேவையான தொடர்பு ஆகும்.

குறிப்பு : $x - y = 2$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடமானது ஒரு நேர்கோடு என்பதை கவனி. முந்தைய வகுப்புகளில் A மற்றும் B புள்ளிக்கு சமமான தூரத்திலுள்ள புள்ளியானது ABன் செங்குத்து இருசமவெட்டி புள்ளி மீது அமையும் என்பதை நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். எனவே $x - y = 2$ ன் வரைபடமானது ABன் செங்குத்து இருசமவெட்டி ஆகும். (படம் 7.7ஐ பார்).



படம் 7.7

எடுத்துக்காட்டு 5 : A(6, 5) மேலும் B(– 4, 3) புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்திலும் y-அச்சின் மீதும் அமைந்துள்ள புள்ளியை கண்டுபிடி.

தீர்வு : y-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியின் வடிவம் $(0, y)$ என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே, A மற்றும் B புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்திலுள்ள புள்ளி $P(0, y)$ என்க.

எனவே,
$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

$$4y = 36$$

$$y = 9$$

So, the required point is (0, 9).

Let us check our solution : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

Note : Using the remark above, we see that (0, 9) is the intersection of the y-axis and the perpendicular bisector of AB.

EXERCISE 7.1

1. Find the distance between the following pairs of points :

   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) (a, b), (– a, – b)

2. Find the distance between the points (0, 0) and (36, 15). Can you now find the distance between the two towns A and B discussed in Section 7.2.

3. Determine if the points (1, 5), (2, 3) and (– 2, – 11) are collinear.

4. Check whether (5, – 2), (6, 4) and (7, – 2) are the vertices of an isosceles triangle.

5. In a classroom, 4 friends are seated at the points A, B, C and D as shown in Fig. 7.8. Champa and Chameli walk into the class and after observing for a few minutes Champa asks Chameli, "Don't you think ABCD is a square?" Chameli disagrees. Using distance formula, find which of them is correct.

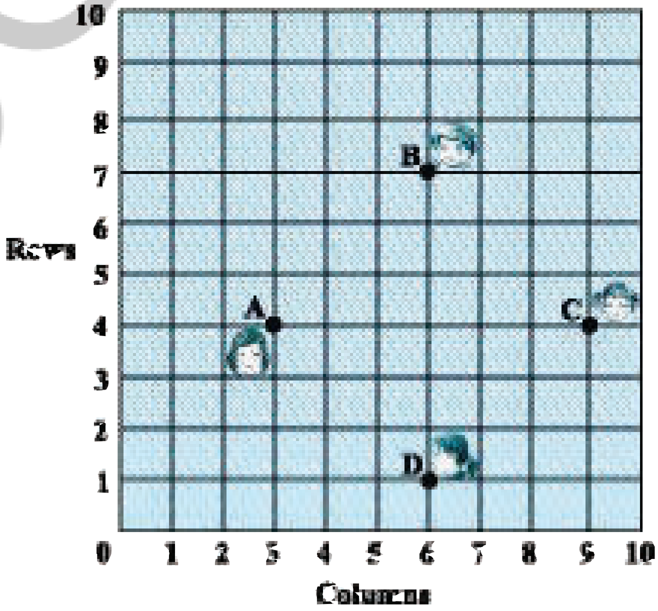


Fig. 7.8

6. Name the type of quadrilateral formed, if any, by the following points, and give reasons for your answer:

   (i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

   (ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

   (iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. Find the point on the x-axis which is equidistant from (2, –5) and (–2, 9).

8. Find the values of y for which the distance between the points P(2, – 3) and Q(10, y) is 10 units.

எனவே, தேவையான புள்ளி $(0, 9)$ ஆகும்.

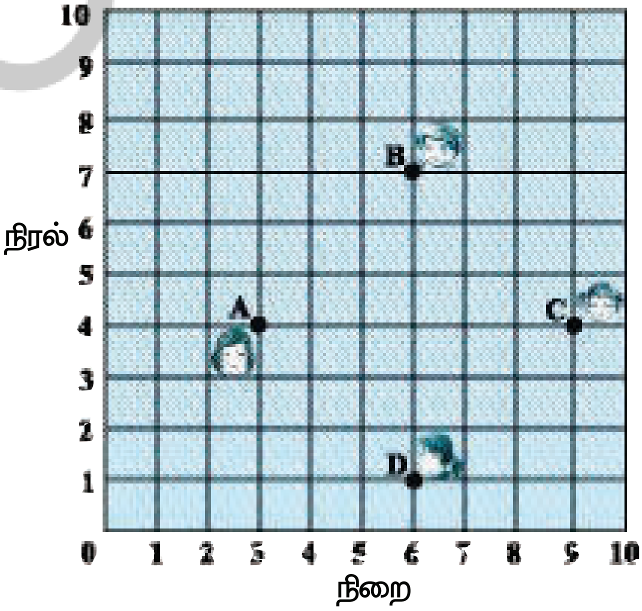
நமக்கு கிடைத்த தீர்வினை சரிபார்ப்போம் : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட குறிப்பிலிருந்து $(0, 9)$ என்பது y-அச்சு மற்றும் AB-ன் செங்குத்து சமவெட்டி வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி ஆகும்.

பயிற்சி 7.1

1. பின்வரும் ஜோடி புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை காண்க :
   (i) $(2, 3), (4, 1)$ (ii) $(-5, 7), (-1, 3)$ (iii) $(a, b), (-a, -b)$
2. $(0, 0)$ மேலும் $(36, 15)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை காண்க. பகுதி 7.2ல் விவாதித்தது போன்று A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு நகரங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை உங்களால் காண முடியுமா?
3. $(1, 5), (2, 3)$ மேலும் $(-2, -11)$ ஆகியவை ஒரு கோட்டுப்புள்ளிகளா? இல்லையா? என சரிபார்.
4. $(5, -2), (6, 4)$ மற்றும் $(7, -2)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் முனைகள் ஆகுமா? சரிபார்.
5. படம் 7.8ல் காட்டியபடி ஒரு வகுப்பில் 4 நண்பர்கள் A, B, C மற்றும் D புள்ளிகளில் அமர்ந்துள்ளனர். சம்பா மற்றும் சாமிலி இருவரும் வகுப்பறைக்குள் சென்று சில நிமிடங்கள் உற்றுநோக்கிய பிறகு சம்பா சாமிலியை பார்த்து “ABCD ஒரு சதுரம் என நினைக்கிறாயா?” எனக் கேட்டாள். இதற்கு சாமிலி மறுப்பு தெரிவித்தார். தூரத்தை காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி யாருடையது சரியான விடை என்று பார். ஏன்?



படம் 7.8

6. பின்வரும் புள்ளிகளால் ஏற்படும் நாற்கரத்தின் வகையைக் காண். மேலும் உன் விடைக்கான காரணத்தை கூறு:
   (i) $(-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$
   (ii) $(-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$
   (iii) $(4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)$
7. $(2, -5)$ மற்றும் $(-2, 9)$ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமமான தூரத்திலும், x-அச்சின் மீதும் அமைந்துள்ள புள்ளியை காண்க.
8. $P(2, -3)$ மற்றும் $Q(10, y)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 10 அலகுகள் எனில் y ன் மதிப்புகளை காண்.

9. If Q(0, 1) is equidistant from P(5, –3) and R(x, 6), find the values of x. Also find the distances QR and PR.

10. Find a relation between x and y such that the point (x, y) is equidistant from the point (3, 6) and (– 3, 4).

7.3 Section Formula

Let us recall the situation in Section 7.2. Suppose a telephone company wants to position a relay tower at P between A and B is such a way that the distance of the tower from B is twice its distance from A. If P lies on AB, it will divide AB in the ratio 1 : 2 (see Fig. 7.9). If we take A as the origin O, and 1 km as one unit on both the axis, the coordinates of B will be (36, 15). In order to know the position of the tower, we must know the coordinates of P. How do we find these coordinates?

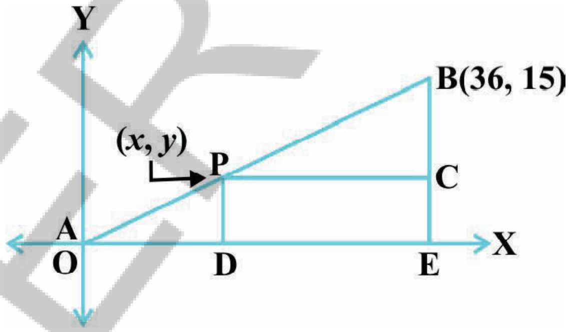


Fig. 7.9

Let the coordinates of P be (x, y). Draw perpendiculars from P and B to the x-axis, meeting it in D and E, respectively. Draw PC perpendicular to BE. Then, by the AA similarity criterion, studied in Chapter 6, Δ POD and Δ BPC are similar.

Therefore , $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$, and $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

So, $\dfrac{x}{36 - x} = \dfrac{1}{2}$ and $\dfrac{y}{15 - y} = \dfrac{1}{2}$.

These equations give $x = 12$ and $y = 5$.

You can check that P(12, 5) meets the condition that OP : PB = 1 : 2.

Now let us use the understanding that you may have developed through this example to obtain the general formula.

Consider any two points A(x_1, y_1) and B(x_2, y_2) and assume that P (x, y) divides AB internally in the ratio m_1 : m_2, i.e., $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ (see Fig. 7.10).

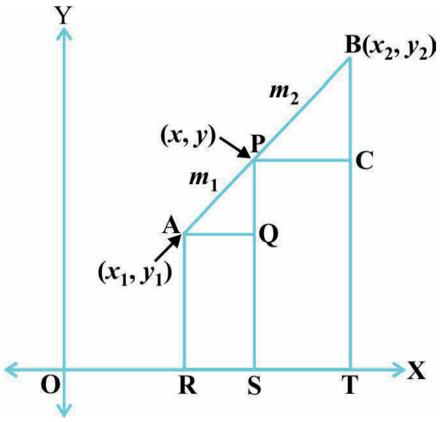


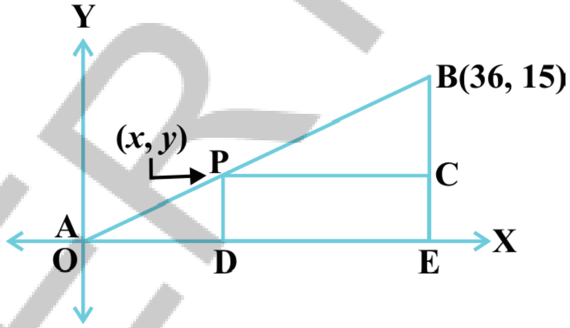
Fig. 7.10

9. Q(0, 1) எனும் புள்ளி P(5, –3) மற்றும் R(x, 6)க்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது எனில் xன் மதிப்புகளை காண். மேலும் QR மற்றும் PRன் தூரங்களை கண்டுபிடி.

10. (x, y) எனும் புள்ளி (3, 6) மேலும் (– 3, 4) எனும் புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது எனில் x மற்றும் y க்கு இடையேயுள்ள உறவை கண்டுபிடி.

7.3 பிரிவுச்சூத்திரம்

பகுதி 7.2ல் உள்ள சூழ்நிலை நினைவு கூர்வோம். அதாவது ஒரு தொலைபேசி குழுமத்தினர் A மற்றும் B க்கு இடையில் Pஎனும் இடத்தில் ஒரு அலைபரப்பு கோபுரத்தை அமைக்க நினைத்தார்கள். B லிருந்து அலைபரப்பு கோபுரத்தின் தூரமானது Aலிருந்து அதன் தூரத்தைப்போல இரண்டு மடங்கு தூரம் உள்ளவாறு அமைக்க நினைத்தார்கள். P என்ற இடம் ABன் மீது இருந்தால், அது ABஐ 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் (படத்தில் காட்டியவாறு). A ஐ ஆதிப்புள்ளி Oல் உள்ளது எனக்கொள். மேலும் ஆயஅச்சுகளின் மீது 1கி.மீ தூரத்தை 1 அலகாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். B ன் ஆயத்தொலைவுகள் (36, 15)ஆகும். இப்பொழுது நாம் அலைபரப்பு கோபுரத்தின் நிலையை கண்டறிய வேண்டும்.அதாவது நாம் Pன் ஆயத்தொலைவுகளை கண்டறிய வேண்டும். Pன் ஆயத்தொலைவுகளை எவ்வாறு கண்டறிவது?



படம் 7.9

P ன் ஆயத்தொலைவுகள் (x, y) எனக் கொள்வோம். P மேலும் B லிருந்து x-அச்சுக்கு செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால் அது x-அச்சை D மேலும் E புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.BEக்கு செங்குத்துகோடு PC வரைக. அப்போது கோ.கோ. வடிவொத்த கிளை தேற்றத்தின் படி Δ POD மேலும் Δ BPC வடிவொத்தவை ஆகும்.

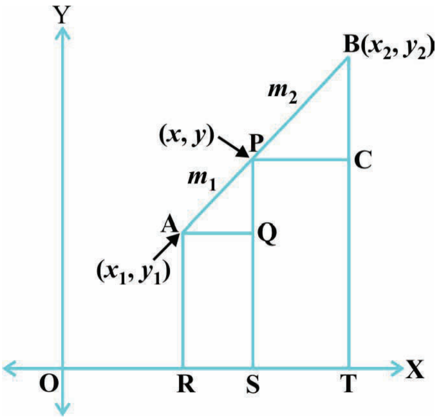
எனவே, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$, மேலும் $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

ஆகையால் $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ மேலும் $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$.

இவை $x = 12$ மற்றும் $y = 5$ என்ற சமன்பாடுகளை தருகின்றன.

P(12, 5) ஆனது OP : PB = 1 : 2 எனும் நிபந்தனையை நிறைவு செய்வதை நீங்கள் சரிபார்க்கலாம்.

இப்போது பொதுவான சூத்திரத்தைப் பெற இந்த எடுத்துக்காட்டின் மூலம் நீங்கள் உருவாக்கியுள்ள புரிதலை பயன்படுத்துவோம்.



படம் 7.10

A(x_1, y_1) மேலும் B(x_2, y_2) ஆகியவை இரண்டு புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். P (x, y) எனும் புள்ளி AB உட்புறமாக $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது, $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (படம்7.10ஐ பார்).

Draw AR, PS and BT perpendicular to the x-axis. Draw AQ and PC parallel to the x-axis. Then, by the AA similarity criterion,

$$\Delta \text{PAQ} \sim \Delta \text{BPC}$$

Therefore, $$\frac{\text{PA}}{\text{BP}} = \frac{\text{AQ}}{\text{PC}} = \frac{\text{PQ}}{\text{BC}} \qquad (1)$$

Now, $\text{AQ} = \text{RS} = \text{OS} - \text{OR} = x - x_1$

$\text{PC} = \text{ST} = \text{OT} - \text{OS} = x_2 - x$

$\text{PQ} = \text{PS} - \text{QS} = \text{PS} - \text{AR} = y - y_1$

$\text{BC} = \text{BT} - \text{CT} = \text{BT} - \text{PS} = y_2 - y$

Substituting these values in (1), we get

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Taking $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, we get $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

Similarly, taking $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, we get $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

So, the coordinates of the point P(x, y) which divides the line segment joining the points A(x_1, y_1) and B(x_2, y_2), internally, in the ratio $m_1 : m_2$ are

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

This is known as the **section formula**.

This can also be derived by drawing perpendiculars from A, P and B on the y-axis and proceeding as above.

If the ratio in which P divides AB is $k : 1$, then the coordinates of the point P will be

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

Special Case : The mid-point of a line segment divides the line segment in the ratio 1 : 1. Therefore, the coordinates of the mid-point P of the join of the points A(x_1, y_1) and B(x_2, y_2) is

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Let us solve a few examples based on the section formula.

AP SCERT

AR, PS மற்றும் BT ஆகியவற்றை x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக வரைக. AQ மற்றும் PC ஆகியவற்றை x-அச்சுக்கு இணையாக வரைக. இப்பொழுது கோ.கோ. கிளை தேற்றத்தின்படி,

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ஆகையால், $$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad (1)$$

இப்போது,
$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட்டால், நாம் பெறுவது

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ என எடுத்துக்கொண்டால் $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ வை நாம் பெறுவோம்.

அவ்வாறே, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ என எடுத்துக்கொண்டால் $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$ வை நாம் பெறுவோம்.

எனவே, $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகியவற்றால் ஏற்படும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $m_1 : m_2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x, y)$ ன் அச்சு தூரங்கள்

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \quad (2)$$

இது **பிரிவுச்சூத்திரம்** எனப்படுகிறது.

இச்சூத்திரத்தை A, P மற்றும் B லிருந்து y-அச்சுக்கு செங்குத்துகோடுகள் வரைந்து மேற்கண்ட செயல்முறைகளை பயன்படுத்தியும் பெறலாம். AB எனும் கோட்டை P எனும் புள்ளி $k : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால் P ன் ஆயத்தொலைவுகள் முறையே,

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

சிறப்பான வகை: ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி என்பது அந்த கோட்டுத்துண்டை $1 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகியவற்றை இணைப்பதால் ஏற்படும் மையப்புள்ளி P ன் ஆயத்தொலைவுகள்

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

இப்பொழுது பிரிவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி சில எடுத்துக்காட்டுகளை தீர்ப்போம்.

APSCERT

Example 6 : Find the coordinates of the point which divides the line segment joining the points (4, – 3) and (8, 5) in the ratio 3 : 1 internally.

Solution : Let P(x, y) be the required point. Using the section formula, we get

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3 + 1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3 + 1} = 3$$

Therefore, (7, 3) is the required point.

Example 7 : In what ratio does the point (– 4, 6) divide the line segment joining the points A(– 6, 10) and B(3, – 8)?

Solution : Let (– 4, 6) divide AB internally in the ratio $m_1 : m_2$. Using the section formula, we get

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

Recall that if $(x, y) = (a, b)$ then $x = a$ and $y = b$.

So, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ and } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

Now, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$ gives us

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

i.e., $$7m_1 = 2m_2$$

i.e., $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

You should verify that the ratio satisfies the y-coordinate also.

Now, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad \text{(Dividing throughout by } m_2\text{)}$$

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

APSCERT

எடுத்துக்காட்டு 6 : (4, – 3) மேலும் (8, 5) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு: தேவையான புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் $P(x, y)$ என்க. பிரிவுச் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவதன் மூலம் நாம் பெறுவது,

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = 3$$

எனவே தேவையான புள்ளி (7, 3) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : A(– 6, 10) மற்றும் B(3, – 8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினை (– 4, 6) எனும் புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

தீர்வு : (– 4, 6) எனும் புள்ளி AB ஐ $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது என்க. பிரிவுச் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவதன் மூலம், நாம் பெறுவது,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

$(x, y) = (a, b)$ எனில் $x = a$ மற்றும் $y = b$ என்பதை நினைவு கூர்க.

எனவே, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ மேலும் } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

இப்போது, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

அதாவது, $$7m_1 = 2m_2$$

$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

இந்த விகிதம் y-ன் அச்சுதூரங்களை திருப்திபடுத்துகிறது என்பதை நீங்கள் சரிபார்க்க வேண்டும்.

இப்போது, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$ (முழுவதையும் m_2ஆல் வகுத்தால்)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

Therefore, the point (– 4, 6) divides the line segment joining the points A(– 6, 10) and B(3, – 8) in the ratio 2 : 7.

Alternatively : The ratio $m_1 : m_2$ can also be written as $\frac{m_1}{m_2} : 1$, or k : 1. Let (– 4, 6) divide AB internally in the ratio k : 1. Using the section formula, we get

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \quad (2)$$

So, $$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

i.e., $$-4k - 4 = 3k - 6$$

i.e., $$7k = 2$$

i.e., $$k : 1 = 2 : 7$$

You can check for the y-coordinate also.

So, the point (– 4, 6) divides the line segment joining the points A(– 6, 10) and B(3, – 8) in the ratio 2 : 7.

Note : You can also find this ratio by calculating the distances PA and PB and taking their ratios provided you know that A, P and B are collinear.

Example 8 : Find the coordinates of the points of trisection (i.e., points dividing in three equal parts) of the line segment joining the points A(2, – 2) and B(– 7, 4).

Solution : Let P and Q be the points of trisection of AB i.e., AP = PQ = QB (see Fig. 7.11).

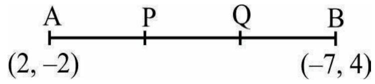


Fig. 7.11

Therefore, P divides AB internally in the ratio 1 : 2. Therefore, the coordinates of P, by applying the section formula, are

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ i.e., } (-1, 0)$$

Now, Q also divides AB internally in the ratio 2 : 1. So, the coordinates of Q are

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ i.e., } (-4, 2)$$

A(– 6, 10) மற்றும் B(3, – 8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் (– 4, 6) எனும் புள்ளி 2 : 7 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

மற்றொரு முறை: $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தை $\frac{m_1}{m_2} : 1$, அல்லது $k : 1$ என எழுதலாம். (– 4, 6) எனும் புள்ளி AB ஐ உட்புறமாக $k : 1$ என்ற விகித்த்தில் பிரிக்கிறது எனக் கொள்வோம். பிரிவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவதன் மூலம், நாம் பெறுவது

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \qquad (2)$$

எனவே,
$$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$
$$-4k-4 = 3k-6$$
$$7k = 2$$

அதாவது, $k : 1 = 2 : 7$

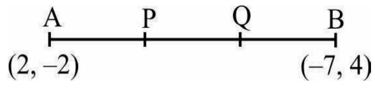
இதை நீங்கள் y-ன் அச்சுதூரத்திற்கும் சரிபார்க்கலாம்.

எனவே A(– 6, 10) மேலும் B(3, – 8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினை (– 4, 6) எனும் புள்ளி 2 : 7 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

குறிப்பு : PA மற்றும் PB ன் தூரங்களை கணக்கிட்டு அவற்றின் விகிதங்களை எடுத்துக்கொண்டு மேலும் A, P மற்றும் B ஆகியவை ஒரு கோட்டுபுள்ளிகள் என அறிவதன் மூலமும் நாம் இந்த விகிதங்களை கண்டறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 : A(2, – 2) மேலும் B(– 7, 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை முச்சமகூறிடும் புள்ளியை (மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளி) காண்க.

தீர்வு : AB ஐ மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகள் P மற்றும் Q என்க. அதாவது, AP = PQ = QB (படம் 7.11ஐ பார்).



படம் 7.11

எனவே P புள்ளி AB ஐ 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது. பிரிவு சூத்திரத்தின் படி Pன் அச்சுதூரங்கள்,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{அதாவது } (-1, 0)$$

இப்பொழுது, Q என்ற புள்ளியும் AB ஐ 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது. எனவே Q ன் அச்சுதூரங்கள்

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) \text{அதாவது, } (-4, 2)$$

APSCERT

Therefore, the coordinates of the points of trisection of the line segment joining A and B are (–1, 0) and (– 4, 2).

Note : We could also have obtained Q by noting that it is the mid-point of PB. So, we could have obtained its coordinates using the mid-point formula.

Example 9 : Find the ratio in which the y-axis divides the line segment joining the points (5, – 6) and (–1, – 4). Also find the point of intersection.

Solution : Let the ratio be k : 1. Then by the section formula, the coordinates of the point which divides AB in the ratio k : 1 are $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

This point lies on the y-axis, and we know that on the y-axis the abscissa is 0.

Therefore, $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

So, $$k = 5$$

That is, the ratio is 5 : 1. Putting the value of k = 5, we get the point of intersection as $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$.

Example 10 : If the points A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) and D(p, 3) are the vertices of a parallelogram, taken in order, find the value of p.

Solution : We know that diagonals of a parallelogram bisect each other.

So, the coordinates of the mid-point of AC = coordinates of the mid-point of BD

i.e., $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

i.e., $$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

so, $$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

i.e., $$p = 7$$

AP SCERT

எனவே AB கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்கள் P(–1, 0) மற்றும் Q(– 4, 2) ஆகும்.

குறிப்பு: Q வை நாம் PBன் மையப்புள்ளி என குறித்து கொண்டும் பெறலாம். எனவே நாம் Q ன் அச்சுதூரங்களை மையப்புள்ளி சூத்திரத்தை கொண்டும் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : (5, – 6) மற்றும் (–1, – 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை y-அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது மேலும் வெட்டும் புள்ளியையும் கண்டுபிடி.

தீர்வு : பிரிக்கும் விகிதம் $k : 1$ என்க. பிரிவு சூத்திரத்தின்படி $k : 1$ எனும் விகிதத்தில் AB ஐ பிரிக்கும் அச்சுதூரங்கள் $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

இப்புள்ளியானது y-அச்சின் மீதுள்ளது. y-அச்சின் மீது கிடையாயம் என்பதை நாம் 0 அறிவோம்.

ஆகையால், $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

எனவே, $$k = 5$$

எனவே பிரிக்கும் விகிதம் 5 : 1, $k = 5$ எனும் மதிப்பை பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரத்தில் பிரதியிட வெட்டும் புள்ளி $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ ஐ பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) மற்றும் D(p, 3) ஆகியவை ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமையும் உச்சிகள் எனில் pன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு: ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும் என அறிவோம்.

எனவே, AC ன் மையப்புள்ளி அச்சுதூரங்கள் = BDன் மையப்புள்ளி அச்சுதூரங்கள்

அதாவது, $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

எனவே $$p = 7$$

EXERCISE 7.2

1. Find the coordinates of the point which divides the join of (–1, 7) and (4, –3) in the ratio 2 : 3.

2. Find the coordinates of the points of trisection of the line segment joining (4, –1) and (–2, –3).

3. To conduct Sports Day activities, in your rectangular shaped school ground ABCD, lines have been drawn with chalk powder at a distance of 1m each. 100 flower pots have been placed at a distance of 1m from each other along AD, as shown in Fig. 7.12. Niharika runs $\frac{1}{4}$ th the distance AD on the 2nd line and posts a green flag. Preet runs $\frac{1}{5}$ th the distance AD on the eighth line and posts a red flag. What is the distance between both the flags? If Rashmi has to post a blue flag exactly halfway between the line segment joining the two flags, where should she post her flag?

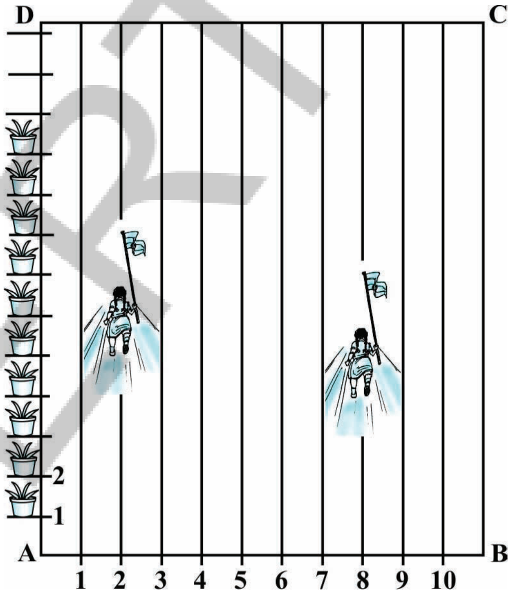


Fig. 7.12

4. Find the ratio in which the line segment joining the points (– 3, 10) and (6, – 8) is divided by (– 1, 6).

5. Find the ratio in which the line segment joining A(1, – 5) and B(– 4, 5) is divided by the x-axis. Also find the coordinates of the point of division.

6. If (1, 2), (4, y), (x, 6) and (3, 5) are the vertices of a parallelogram taken in order, find x and y.

7. Find the coordinates of a point A, where AB is the diameter of a circle whose centre is (2, – 3) and B is (1, 4).

8. If A and B are (– 2, – 2) and (2, – 4), respectively, find the coordinates of P such that AP = $\frac{3}{7}$ AB and P lies on the line segment AB.

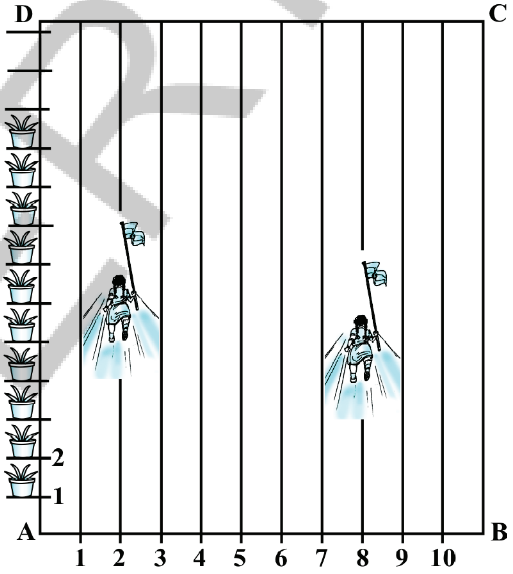
9. Find the coordinates of the points which divide the line segment joining A(– 2, 2) and B(2, 8) into four equal parts.

10. Find the area of a rhombus if its vertices are (3, 0), (4, 5), (– 1, 4) and (– 2, – 1) taken in order. [**Hint :** Area of a rhombus = $\frac{1}{2}$ (product of its diagonals)]

AP SCERT

பயிற்சி 7.2

1. $(-1, 7)$ மேலும் $(4, -3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை காண்க.
2. $(4, -1)$ மேலும் $(-2, -3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களைக் காண்க.
3. விளையாட்டு தின நிகழ்ச்சிகளை நடத்த உங்கள் செவ்வக வடிவ ABCD பள்ளி மைதானத்தில் சுண்ணாம்பு துகள்களால் 1மீ இடைவெளி உள்ளவாறு கோடுகள் வரையப்பட்டன. படம் 7.12ல் காட்டியபடி AD வழியே 100 பூத்தொட்டிகள் அமைக்கப்பட்டன. நிஹாரிகா இரண்டாவது கோட்டில் AD ல் $\frac{1}{4}$ தூரத்தை ஓடி பச்சை நிறக்கொடியை நட்டாள். பிரீத் எட்டாவது கோட்டில் AD ல் $\frac{1}{5}$ தூரத்தை ஓடி சிவப்பு நிறக்கொடியை நட்டாள். இரண்டு கொடிகளையும் இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டில் சரிபாதி தூரத்தில் ஒரு நீல நிறக்கொடியை ரஷ்மி நடவேண்டும். நீலநிற கொடியை எங்கு நட வேண்டும்?



படம் 7.12

4. $(-3, 10)$ மற்றும் $(6, -8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $(-1, 6)$ எனும் புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும் என்பதை காண்க.
5. $A(1, -5)$ மற்றும் $B(-4, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை x-அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும் என்பதை காண்க. மேலும் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
6. $(1, 2), (4, y), (x, 6)$ மற்றும் $(3, 5)$ ஆகியவை ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமைத்த உச்சிகள் எனில் x மற்றும் yன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.
7. AB ஐ விட்டமாக கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(2, -3)$ மேலும் ஒரு முனை $B(1, 4)$ எனில் A புள்ளி அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
8. A , B புள்ளிகள் முறையே $(-2, -2)$ மற்றும் $(2, -4)$. AB கோட்டுத்துண்டின் மீது $AP = \frac{3}{7} AB$ என உள்ளவாறு P புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
9. $A(-2, 2)$, $B(2, 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை நான்கு சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
10. $(3, 0), (4, 5), (-1, 4)$, $(-2, -1)$ ஆகியவற்றை வரிசையாக எடுத்துக்கொண்ட ஒரு சாய்சதுரத்தின் முனைகள் எனில் அதன் பரப்பளவை கண்டுபிடி.
   [**குறிப்பு:** சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ (மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற்பலன்)]

7.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. The distance between $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ is $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. The distance of a point $P(x, y)$ from the origin is $\sqrt{x^2 + y^2}$.
3. The coordinates of the point $P(x, y)$ which divides the line segment joining the points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ internally in the ratio $m_1 : m_2$ are $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.
4. The mid-point of the line segment joining the points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ is $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

A NOTE TO THE READER

Section 7.3 discusses the Section Formula for the coordinates (x, y) of a point P which divides internally the line segment joining the points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ in the ratio $m_1 : m_2$ as follows :

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

Note that, here, $PA : PB = m_1 : m_2$.

However, if P does not lie between A and B but lies on the line AB, outside the line segment AB, and $PA : PB = m_1 : m_2$, we say that P divides externally the line segment joining the points A and B. You will study Section Formula for such case in higher classes.

AP SCERT

7.4 முக்கிய கருத்துகள்

இந்த அத்தியாயத்தில், நீங்கள் பின்வரும் கருத்துகளை படித்தீர்கள்.

1. $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $P(x, y)$ எனும் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் $\sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $P(x, y)$ எனும் புள்ளி $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரித்தால் அப்புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.
4. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

வாசகருக்கு ஒரு குறிப்பு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை (x, y) எனும் புள்ளி $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது. பகுதி 7.3ல் விவாதித்தவாறு பிரிவு சூத்திரத்தின் படி P ன் அச்சுதூரங்கள் பின்வருமாறு :

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

இங்கு $PA : PB = m_1 : m_2$ என்பதை கவனி.

ஒருவேளை P ஆனது A மற்றும் B க்கு இடையில் அமையாமல் ஆனால் AB கோட்டில் அமைந்திருந்தால், AB என்ற கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே மேலும் $PA : PB = m_1 : m_2$ எனில் நாம் A மற்றும் B புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினை P ஆனது வெளிப்புறமாக பிரிக்கிறது எனக் கூறுவோம். பிரிவு சூத்திரத்தை நீங்கள் மேல் வகுப்பில் கற்பீர்கள்.

AP SCERT

PROOFS IN MATHEMATICS A1

AP SCERT

A1.1 Introduction

The ability to reason and think clearly is extremely useful in our daily life. For example, suppose a politician tells you, 'If you are interested in a clean government, then you should vote for me.' What he actually wants you to believe is that if you do not vote for him, then you may not get a clean government. Similarly, if an advertisement tells you, 'The intelligent wear *XYZ* shoes', what the company wants you to conclude is that if you do not wear *XYZ* shoes, then you are not intelligent enough. You can yourself observe that both the above statements may mislead the general public. So, if we understand the process of reasoning correctly, we do not fall into such traps unknowingly.

The correct use of reasoning is at the core of mathematics, especially in constructing proofs. In Class IX, you were introduced to the idea of proofs, and you actually proved many statements, especially in geometry. Recall that a proof is made up of several mathematical statements, each of which is logically deduced from a previous statement in the proof, or from a theorem proved earlier, or an axiom, or the hypotheses. The main tool, we use in constructing a proof, is the process of deductive reasoning.

We start the study of this chapter with a review of what a mathematical statement is. Then, we proceed to sharpen our skills in deductive reasoning using several examples. We shall also deal with the concept of negation and finding the negation of a given statement. Then, we discuss what it means to find the converse of a given statement. Finally, we review the ingredients of a proof learnt in Class IX by analysing the proofs of several theorems. Here, we also discuss the idea of proof by contradiction, which you have come across in Class IX and many other chapters of this book.

A1.2 Mathematical Statements Revisited

Recall, that a 'statement' is a meaningful sentence which is not an order, or an exclamation or a question. For example, 'Which two teams are playing in the

கணித நிரூபணங்கள் A1

A1. அறிமுகம்

பகுத்தறியும் திறன் மற்றும் தெளிவான சிந்தனை ஆகியன நம் அன்றாட வாழ்வில் மிகவும் பயன்படுபவை. எடுத்துக்காட்டாக, அரசியல்வாதி ஒருவர் உங்களிடம், 'உங்களுக்கு மாசில்லாத அரசாங்கத்தில் நாட்டம் இருப்பின், நீங்கள் எனக்கு ஓட்டு போட வேண்டும்' என்று கூறுகிறார் என வைத்துக்கொள்வோம். அவர் உண்மையில், நீங்கள் அவருக்கு ஓட்டுப் போடாவிடில், உங்களுக்கு மாசில்லாத அரசாங்கம் கிடைக்காது என உங்களை நம்பவைக்கிறார். அரசாங்கம் கிடைக்காது என உங்களுக்கு மாசில்லாத அரசாங்கம் என உங்களை நம்பவைக்கிறார். அதேபோல, 'புத்திசாலிகள் XYZ காலணிகளை அணிவர்', என்ற விளம்பரத்தின் மூலமாக, அந்த கம்பெனியானது, நீங்கள் XYZ காலணிகளை அணியாதவர் என்றால் நீங்கள் போதுமான அளவு புத்திசாலி அல்ல என உங்களை முடிவு செய்ய தூண்டுகிறது. மேலே கூறப்பட்ட இரு வாக்கியங்களுமே பொது மக்களை திசைதிருப்புகிறது என்பதை நீங்களே கவனிக்கலாம். ஆகவே, நாம் பகுத்தறியும் செயல் முறையை சரியாகப் புரிந்து கொண்டால், இத்தகைய பொறிகளில் நாம் தெரியாமல் விழவேண்டியது இல்லை.

பகுத்தறிதலின் சரியான பயனானது கணிதத்தின் மையத்தில் உள்ளது.அதிலும் குறிப்பாக நிரூபணங்களின் அமைப்பில் 9ஆம் வகுப்பில் நீங்கள் நிரூபணம் என்ற கருத்திற்கு அறிமுகப்படுத்தப்பட்டீர்கள். மேலும் நீங்கள் பல கூற்றுகளை குறிப்பாக வடிவியலில் நிரூபணம் செய்தீர்கள். நிரூபணம் என்பது பல கணிதக் கூறுகளால் ஆனது என்பதை நினைவுகூர்க. அவற்றில் ஒவ்வொன்றும் அதற்கு முந்தய கூற்றிலிருந்தோ அல்லது முன்பே நிரூபிக்கப்பட்ட தேற்றம் அல்லது எடுகோள் அல்லது கற்பிதக்கொள்கையில் இருந்தோ தர்க்க ரீதியாக நிரூபிக்கப்படுகிறது. ஒரு நிரூபணத்தில் முக்கியமான கருவியானது உய்த்துணர்வு பகுத்தறிதல் முறை ஆகும்.

கணிதக் கூற்று என்பது என்ன என்பதை ஒரு மறுபார்வை இட்டு இப்பாடப்பகுதியைத் தொடங்கலாம். பிறகு பல எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு நமது உயர்த்துணர்வு பகுத்தறிதல் திறனை கூர்மையாக்கிக்கொள்ள முற்படலாம். மேலும் நாம் மறுத்தல் என்ற கருத்தையும் பார்க்கலாம். மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றின் மறுப்பையும் கண்டுபிடிக்கலாம் பிறகு நாம் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுக்கான மறுதலையை கண்டுபிடித்தல் என்பதன் பொருளையும் கற்கலாம். முடிவில் நாம் 9 ஆம் வகுப்பில் படித்த பல தேற்றங்களின் நிரூபணங்களை அலசி ஆராய்வதின் மூலம் நிரூபணணங்களின் ஆக்கக் கூறுகளை மறுபார்வை செய்வோம். இங்கு நாம் நீங்கள் 9ஆம் வகுப்பிலே படித்த முரண்பாடு மூலம் நிரூபணம் என்ற கருத்தையும் ஆராயலாம். இதை நீங்கள் இப்புத்தகத்தின் பல பாடங்களிலும் பார்த்திருப்பீர்கள்.

A1.2 கணிதக் கூற்றுகளின் மறுபரிசீலனை

'கூற்று' என்பது ஆணையாகவோ ஆச்சரியமாகவோ அல்லது கேள்வியாகவோ இல்லாத பொருள் கொண்ட வாக்கியம் என்பதை நினைவு கூர்க. எடுத்துக்காட்டாக, 'கிரிக்கெட் உலககோப்பை இறுதியாட்டத்தில் எந்த இரண்டு அணிகள் விளையாடுகின்றன? என்பது ஒரு

Cricket World Cup Final?' is a question, not a statement. 'Go and finish your homework' is an order, not a statement. 'What a fantastic goal!' is an exclamation, not a statement.

Remember, in general, statements can be one of the following:

- *always true*
- *always false*
- *ambiguous*

In Class IX, you have also studied that in mathematics, **a statement is acceptable only if it is either always true or always false**. So, ambiguous sentences are not considered as mathematical statements.

Let us review our understanding with a few examples.

Example 1 : State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

(i) The Sun orbits the Earth.

(ii) Vehicles have four wheels.

(iii) The speed of light is approximately 3×10^5 km/s.

(iv) A road to Kolkata will be closed from November to March.

(v) All humans are mortal.

Solution :

(i) This statement is always false, since astronomers have established that the Earth orbits the Sun.

(ii) This statement is ambiguous, because we cannot decide if it is always true or always false. This depends on what the vehicle is — vehicles can have 2, 3, 4, 6, 10, etc., wheels.

(iii) This statement is always true, as verified by physicists.

(iv) This statement is ambiguous, because it is not clear which road is being referred to.

(v) This statement is always true, since every human being has to die some time.

Example 2 : State whether the following statements are true or false, and justify your answers.

(i) All equilateral triangles are isosceles.

(ii) Some isosceles triangles are equilateral.

(iii) All isosceles triangles are equilateral.

(iv) Some rational numbers are integers.

AP SCERT

கேள்வி?' அது கூற்று அல்ல. 'சென்று உனது வீட்டுப்பாடத்தை முடி' என்பது ஒரு ஆணை, கூற்று அல்ல. 'என்ன ஒரு அற்புதமான இலக்கு' என்பது ஒரு ஆச்சரிய வாக்கியம், கூற்று அல்ல.

பொதுவாக கூற்றுகள் பின்வரும் இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

- எப்பொழுதுமே உண்மை
- எப்பொழுதுமே பொய்
- தெளிவற்றது

மேலும், கணக்கில் ஒரு கூற்றானது உண்மையாகவோ அல்லது பொய்யாகவோ இருந்தால் மட்டுமே ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் என்பதை நீங்கள் 9ஆம் வகுப்பிலேயே கற்றுள்ளீர்கள். ஆகவே தெளிவற்றவை கணக்கியல் கூற்றுகளாக ஏற்றுக்கொள்ளப் படாது.

நாம் புரிந்துக்கொண்டவற்றை சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் மறுபார்வையிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் உண்மையா,பொய்யா அல்லது தெளிவற்றவையா என கூறுக. உனது பதிலை நியாயப்படுத்துக.

(i) சூரியன் பூமியைச் சுற்றுகிறது.
(ii) வாகனங்கள் நான்கு சக்கரங்கள் உடையவை.
(iii) ஒளியின் வேகம் தோராயமாக 3×10^5 km/s ஆகும்.
(iv) நவம்பர் முதல் மார்ச் வரையில் கல்கத்தாவிற்கு செல்லும் சாலை ஒன்று மூடப்பட்டிருக்கும்.
(v) எல்லா மனிதரும் இறப்புடையவரே.

தீர்வு:

(i) இவ்வாக்கியம் எப்பொழுதுமே பொய். ஏனெனில் வானவியல் வல்லுனர்கள் பூமி சூரியனைச் சுற்றுகிறது என்பதை நிலைநாட்டியுள்ளனர்.

(ii) இவ்வாக்கியம் தெளிவற்றது. ஏனெனில் இது எப்பபாழுதுமே மெய்யா அல்லது பொய்யா என்று முடிவு எசய்ய முடியாது. இது வாகனம் எவ்வகையானது என்பதைப் பொருத்து வாகனங்கள் 2, 3, 4, 6, 10.......ஆகிய இன்னும் பல எண்ணிக்கையில் சக்கரங்களை கொண்டிருக்கலாம்.

(iii) இவ்வாக்கியம் எப்பொழுதுமே உண்மை. இயற்பியல் நிபுணர்களால் சரிபார்க்கப்பட்டது.

(iv) இவ்வாக்கியம் தெளிவற்றது ஏனெனில் எந்த சாலை இங்கு கருதப்படுகிறது என்பது தெளிவாக இல்லை.

(v) இவ்வாக்கியம் எப்பொழுதும் உண்மை ஏனெனில் ஒவ்வொரு மனிதனும் என்றாவது ஒரு நாள் இறந்தே ஆகவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் மெய்யா பொய்யா எனக் கூறுக மற்றும் உங்கள் விடையை நியாயப்படுத்துக.

(i) எல்லா சமபக்க முக்கோணமும் இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.
(ii) சில இருசமபக்க முக்கோணங்கள் சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.
(iii) எல்லா இருசமபக்க முக்கேகாணங்களும் சமபக்க முக்கோணங்களே.
(iv) சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் ஆகும்.

(v) Some rational numbers are not integers.
(vi) Not all integers are rational.
(vii) Between any two rational numbers there is no rational number.

Solution :

(i) This statement is true, because equilateral triangles have equal sides, and therefore are isosceles.
(ii) This statement is true, because those isosceles triangles whose base angles are 60° are equilateral.
(iii) This statement is false. Give a counter-example for it.
(iv) This statement is true, since rational numbers of the form $\frac{p}{q}$, where p is an integer and $q = 1$, are integers (for example, $3 = \frac{3}{1}$).
(v) This statement is true, because rational numbers of the form $\frac{p}{q}$, p, q are integers and q does not divide p, are not integers (for example, $\frac{3}{2}$).
(vi) This statement is the same as saying 'there is an integer which is not a rational number'. This is false, because all integers are rational numbers.
(vii) This statement is false. As you know, between any two rational numbers r and s lies $\frac{r+s}{2}$, which is a rational number.

Example 3 : If $x < 4$, which of the following statements are true? Justify your answers.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

Solution :

(i) This statement is false, because, for example, $x = 3 < 4$ does not satisfy $2x > 8$.
(ii) This statement is false, because, for example, $x = 3.5 < 4$ does not satisfy $2x < 6$.
(iii) This statement is true, because it is the same as $x < 4$.

Example 4 : Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements:

(i) If the diagonals of a quadrilateral are equal, then it is a rectangle.
(ii) A line joining two points on two sides of a triangle is parallel to the third side.
(iii) $\sqrt{p}$ is irrational for all positive integers p.
(iv) All quadratic equations have two real roots.

AP SCERT

(v) சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் அல்ல.

(vi) அனைத்து முழுக்களும் விகிதமுறு எண்கள் அல்ல.

(vii) ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே எந்த விகிதமுறு எண்ணும் இல்லை.

தீர்வு :

(i) இக்கூற்று உண்மையே. ஏனெனில் சமபக்க முக்கோணங்கள் சமமான பக்கங்களை கொண்டவை. ஆகவே அவை இருசமபக்க முக்கோணங்களாகும்.

(ii) இக்கூற்று உண்மையே. ஏனெனில் அடித்தளக் கோணங்கள் 60° ஆக அமைந்த இருசமபக்க முக்கோணங்களாக அமைந்த சமபக்க முக்கோணங்களே ஆகும்.

(iii) இக்கூற்று பொய்யானது. இதற்கு ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டை கொடுக்கவும்.

(iv) இக்கூற்று உண்மையே. ஏனெனில் விகிதமுறு எண்கள் $\frac{p}{q}$, என்ற வடிவம் கொண்டவை. இங்கு p, q என்பவை முழுக்கள் மேலும் $q = 1$ (எடுத்துக்காட்டாக $3 = \frac{3}{1}$).

(v) இக்கூற்று உண்மையே. ஏனெனில் $\frac{p}{q}$, என்ற வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்களில் p, q என்பவை முழுக்கள், q என்பது p ஐ வகுக்காது. இவை முழுக்கள் அல்ல. (எ.கா $\frac{3}{2}$).

(vi) இக்கூற்றானது, விகிதமுறு எண் அல்லாத முழு ஒன்று உள்ளது என்று கூறுவதைப் போலவே பொருள்படும். இது பொய், ஏனெனில் அனைத்து முழுக்களும் விகிதமுறு எண்களே ஆகும்.

(vii) இக்கூற்று பொய். r மற்றும் s ஆகிய இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே $\frac{r+s}{2}$, என்ற விகிதமுறு எண் உள்ளது என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $x < 4$ எனில், பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை உண்மை? உன்விடையை நியாயப்படுத்து.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

தீர்வு :

(i) இக்கூற்று பொய், ஏனெனில் எடுத்துக்காட்டாக, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ ஐ திருப்திபடுத்தாது.

(ii) இக்கூற்று பொய், ஏனெனில் எடுத்துக்காட்டாக, $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ ஐ திருப்திபடுத்தாது.

(iii) இக்கூற்று உண்மை, ஏனெனில் இது $x < 4$ என்பதற்கு சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளுக்கு தகுந்த நிபந்தனைகளைக் கொடுத்து, அவற்றை உண்மை கூற்றுகளாக மாற்றி எழுதவும்.

(i) நாற்கரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் எனில் அது ஒரு செவ்வகம்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மீதமைந்த இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

(iii) $\sqrt{p}$ என்பது அனைத்து மிகை முழுவான p க்கும் விகிதமுறா எண் ஆகும்.

(iv) அனைத்து இருபடி சமன்பாடுகளும் இரண்டு மெய்மூலங்களை கொண்டுள்ளன.

AP SCERT

Solution :

(i) If the diagonals of a parallelogram are equal, then it is a rectangle.

(ii) A line joining the mid-points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

(iii) $\sqrt{p}$ is irrational for all primes p.

(iv) All quadratic equations have at most two real roots.

Remark : There can be other ways of restating the statements above. For instance, (iii) can also be restated as '$\sqrt{p}$ is irrational for all positive integers p which are not a perfect square'.

EXERCISE A1.1

1. State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

(i) All mathematics textbooks are interesting.

(ii) The distance from the Earth to the Sun is approximately 1.5×10^8 km.

(iii) All human beings grow old.

(iv) The journey from Uttarkashi to Harsil is tiring.

(v) The woman saw an elephant through a pair of binoculars.

2. State whether the following statements are true or false. Justify your answers.

(i) All hexagons are polygons. (ii) Some polygons are pentagons.

(iii) Not all even numbers are divisible by 2. (iv) Some real numbers are irrational.

(v) Not all real numbers are rational.

3. Let a and b be real numbers such that $ab \neq 0$. Then which of the following statements are true? Justify your answers.

(i) Both a and b must be zero. (ii) Both a and b must be non-zero.

(iii) Either a or b must be non-zero.

4. Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true.

(i) If $a^2 > b^2$, then $a > b$. (ii) If $x^2 = y^2$, then $x = y$.

(iii) If $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, then $x = 0$. (iv) The diagonals of a quadrilateral bisect each other.

A1.3 Deductive Reasoning

In Class IX, you were introduced to the idea of deductive reasoning. Here, we will work with many more examples which will illustrate how **deductive reasoning** is used to **deduce** conclusions from given statements that we assume to be true. The given statements

AP SCERT

தீர்வு :

(i) ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் எனில் அது ஒரு செவ்வகம்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

(iii) $\sqrt{p}$ என்பது அனைத்து பகா எண்கள் p க்கும் விகிதமுறா எண் ஆகும்.

(iv) அனைத்து இருபடி சமன்பாடுகளும் அதிகபட்சமாக இரண்டு மெய்மூலங்களை கொண்டுள்ளன.

குறிப்பு : மேற்கண்ட கூற்றுகளை வேறுவிதமாகவும் எழுதலாம். (iii) ஐ '$\sqrt{p}$' என்பது அனைத்து மிகை முழு p க்கும் விகிதமுறுஎண் ஆகும். ஆனால் முழுவர்க்கமாக இல்லாத போது மட்டுமே என்றும் எழுதலாம்.

பயிற்சி A1.1

1. பின்வரும் கூற்றுகள் எப்பொழுதும் உண்மையானவையா? உண்மையற்றவையா? அல்லது தெளிவற்றவையா? எனக்கூறுக. உன் விடையை நியாயப்படுத்து.
   (i) அனைத்து கணிதப்பாடப்புத்தகங்களும் ஆர்வத்தை தூண்டுபவை.
   (ii) பூமியிலிருந்து சூரியனுக்கு உள்ள தூரம் தோராயமாக 1.5×10^8 கி.மீ.
   (iii) அனைத்து மனிதர்களும் முதுமையடைவர்.
   (iv) உத்தரகாசியிலிருந்து ஹர்சிலுக்கு பயணம் செய்வது சோர்வை உண்டாக்கும்.
   (v) ஒரு பெண் தொலைநோக்கியின் வழியே ஒரு யானையை பார்த்தாள்.
2. பின்வரும் கூற்றுகள் உண்மையானவையா? அல்லது உண்மையற்றவையா? எனக்கூறுக. உன் விடையை நியாயப்படுத்து.
   (i) எல்லா அறுகோணங்களும் பலகோணமுகிகள் ஆகும்.
   (ii) சில பலகோணமுகிகள் ஐங்கோணங்களாகும்.
   (iii) எல்லா இரட்டை எண்களுமே 2ஆல் வகுபடும் என்று சொல்ல முடியாது
   (iv) சில மெய் எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.
   (v) எல்லா மெய்எண்களுமே விகிதமுறு எண்களாக இருக்காது.
3. a மற்றும் b என்பவை $ab \neq 0$. என்றமைந்த வகையில் உள்ள மெய் எண்கள் என்க. அப்படியெனில், கீழ்வருவனவற்றில் எக்கூற்றுகள் உண்மையானவை? விடைகளை நியாயப்படுத்து.
   (i) a மற்றும் b அவை இரண்டுமே கழி ஆக இருக்க வேண்டும்.
   (ii) a மற்றும் b இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று கீழ்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாகுமாறு மாற்றி எழுதவும்.(iii) a மற்றும் b இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று சுழி அல்லாததாக இருக்க வேண்டும்.
4. தகுந்த நிபந்தனைகளைக் கொண்டு கீழ்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக மாற்றி எழுதவும்.
   (i) $a^2 > b^2$, எனில் $a > b$ ஆகும் (ii) $x^2 = y^2$, எனில் $x = y$ ஆகும்
   (iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, எனில் $x = 0$ ஆகும்.
   (iv) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை மற்றொன்று இருசமக் கூறிடும் (இரு சமமாக வெட்டும்)

A 1.3 உய்த்தறிவு பகுத்தறிதல்

9ஆம் வகுப்பில் உய்த்தறிவு பகுத்தறிதல் *(deductive reasening)* என்பதற்கு அறிமுப்படுத்தப்பட்டீர்கள். இங்கு. நாம் பல எடுத்துக்காட்டுக்களைக் கொண்டு, உண்மை என்று நாம் ஊகிக்கும் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளில் இருந்து முடிவுகளை உய்த்துக் கொணடு நாம் எவ்வாறு உய்த்தறிவு பகுத்தறிதலை பயன்படுத்தலாம் என்பதைக் காட்டுவோம். கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகள் கற்பிதக்கொள்கை *(premises of hypothesis)* எனப்படும். சில எடுத்துக்காட்டுகளுடன் தொடங்கலாம்.

are called 'premises' or 'hypotheses'. We begin with some examples.

Example 5 : Given that Bijapur is in the state of Karnataka, and suppose Shabana lives in Bijapur. In which state does Shabana live?

Solution : Here we have two premises:

(i) Bijapur is in the state of Karnataka (ii) Shabana lives in Bijapur

From these premises, we deduce that Shabana lives in the state of Karnataka.

Example 6 : Given that all mathematics textbooks are interesting, and suppose you are reading a mathematics textbook. What can we conclude about the textbook you are reading?

Solution : Using the two premises (or hypotheses), we can deduce that you are reading an interesting textbook.

Example 7 : Given that $y = -6x + 5$, and suppose $x = 3$. What is y?

Solution : Given the two hypotheses, we get $y = -6\,(3) + 5 = -13$.

Example 8 : Given that ABCD is a parallelogram, and suppose AD = 5 cm, AB = 7 cm (see Fig. A1.1). What can you conclude about the lengths of DC and BC?

Fig. A1.1

Solution : We are given that ABCD is a parallelogram. So, we deduce that all the properties that hold for a parallelogram hold for ABCD. Therefore, in particular, the property that 'the opposite sides of a parallelogram are equal to each other', holds. Since we know AD = 5 cm, we can deduce that BC = 5 cm. Similarly, we deduce that DC = 7 cm.

Remark : In this example, we have seen how we will often need to find out and use properties hidden in a given premise.

Example 9 : Given that $\sqrt{p}$ is irrational for all primes p, and suppose that 19423 is a prime. What can you conclude about $\sqrt{19423}$?

Solution : We can conclude that $\sqrt{19423}$ is irrational.

In the examples above, you might have noticed that we do not know whether the hypotheses are true or not. We are **assuming** that they are true, and then applying deductive reasoning. For instance, in Example 9, we haven't checked whether 19423

படிக்கிறீர்கள் என்று கொள்வோம். நீங்கள் படிக்கும் பாடப்புத்தகத்தைப் பற்றி நாம் என்ன முடிவுக்கு வரலாம்?

எடுத்துக்காட்டு 5 : இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட கற்பிதக் கொள்கைகளைக் கொண்டு, நீங்கள் ஒரு சுவாரஸ்யமான பாடப்புத்தகத்தை படித்துக்கொண்டு இருக்கிறீர்கள் என்று ஊகித்து உணர்ந்து கொள்ளலாம்.

எ.கா. 07 : AB = 7 $y = -6x + 5$, என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $x = 3$ எனக் கொள்க. yன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கற்பிதக் கொள்கைகளைக் கொண்டு

$y = -6\,(3) + 5 = -8+5= -13$ என்பதை நாம் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 : ABCD ஒரு இணைகரம் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் AD = 5cm AB = 7 cm BC மற்றும் DC இவற்றின் நீளங்களைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவுக்கு வர முடியும்?

தீர்வு : ABCD ஒரு இணைகரம் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, ஒரு இணைகரத்திற்கு பொருந்தும் எல்லா பண்புகளும் ABCD க்கும் பொருந்தும் என்று நாம் உணரலாம். அதிலும் குறிப்பாக இணைகரத்தின் எதிரெதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் என்ற பண்பு இங்கு பொருந்தும் AD = 5 என்பதைத் கொண்டு BC = 5cm ன்பதை ஊகிக்கலாம். அதேபோல் DC = 7cm என்பதையும் ஊகித்து உணரலாம்.

படம் A1.1

குறிப்பு : இந்த எடுத்துக்காட்டில், கொடுக்கப்பட்ட கற்பிதக் கொள்கையில் மறைந்திருக்கும் பண்புகளை தேடிக்கண்டுபிடித்து அவற்றை எப்படி அடிக்கடி பயன்படுத்த வேண்டி இருக்கும் என்பதை நாம் பார்த்தோம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $\sqrt{p}$ என்பது எல்லா பகா எண் p –க்களுக்கும் விகிதமுறா எண். என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் 19423 ஒரு பகா எண். $\sqrt{19423}$ ஐ பற்றி என்ன முடிவு செய்வாய்?

தீர்வு : $\sqrt{19423}$ என்பது விகிதமுறா எண் என்று நாம் முடிவு செய்யலாம். மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில், கற்பிதக் கொள்கைகள் உண்மையா இல்லையா என்பதை நாம் அறிவோம் என்பதை நீங்கள் கவனித்திருக்கலாம். நாம் அவை உண்மை என்று கருதிக்கொண்டு, பிறகு அதை உய்த்தறிவு பகுத்திறிதலில் பயன்படுத்துகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, எடுத்துக்காட்டு 9 இல் 19423 என்பது ஒரு பகா எண்ணா இல்லையா என்பதை நாம் சரிபார்க்கவில்லை. நமது வாதத்திற்காக வேண்டி நாம் அதை பகா எண் என்று கருதிக்கொண்டோம். கொடுக்கப்பட்ட குறிப்பிட்ட கூற்றைக்கொண்டு எவ்வாறு நாம் உய்த்தறிவு பகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி

is a prime or not; we assume it to be a prime for the sake of our argument. What we are trying to emphasise in this section is that given a particular statement, how we use deductive reasoning to arrive at a conclusion. What really matters here is that we use the correct process of reasoning, and this process of reasoning does not depend on the trueness or falsity of the hypotheses. However, it must also be noted that if we start with an incorrect premise (or hypothesis), we may arrive at a wrong conclusion.

EXERCISE A1.2

1. Given that all women are mortal, and suppose that A is a woman, what can we conclude about A?

2. Given that the product of two rational numbers is rational, and suppose *a* and *b* are rationals, what can you conclude about *ab*?

3. Given that the decimal expansion of irrational numbers is non-terminating, non-recurring, and $\sqrt{17}$ is irrational, what can we conclude about the decimal expansion of $\sqrt{17}$?

4. Given that $y = x^2 + 6$ and $x = -1$, what can we conclude about the value of y?

5. Given that ABCD is a parallelogram and $\angle$ B = 80°. What can you conclude about the other angles of the parallelogram?

6. Given that PQRS is a cyclic quadrilateral and also its diagonals bisect each other. What can you conclude about the quadrilateral?

7. Given that $\sqrt{p}$ is irrational for all primes p and also suppose that 3721 is a prime. Can you conclude that $\sqrt{3721}$ is an irrational number? Is your conclusion correct? Why or why not?

A1.4 Conjectures, Theorems, Proofs and Mathematical Reasoning

Consider the Fig. A1.2. The first circle has one point on it, the second two points, the third three, and so on. All possible lines connecting the points are drawn in each case.

The lines divide the circle into mutually exclusive regions (having no common portion). We can count these and tabulate our results as shown :

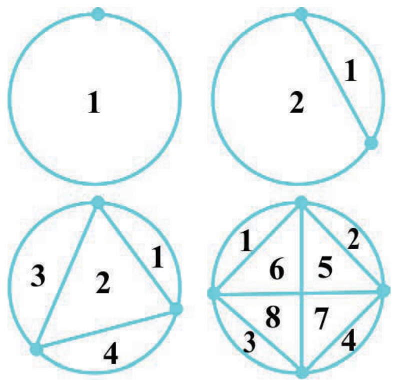


Fig. A1.2

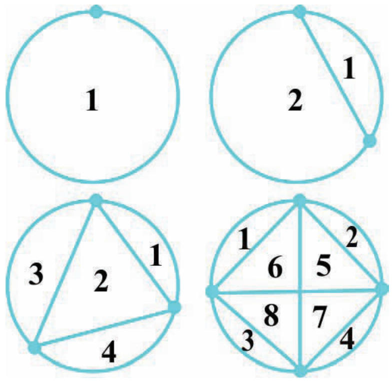
முடிவுக்கு வருகிறோம் என்பதன் மீது மட்டுமே நாம் இப்பாடத்தில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கிறோம். இங்கு, முக்கியமாகக் கருதுவது பகுத்தறிதலின் சரியான செயல்முறை பயன்படுத்தும் விதம் மட்டுமே மேலும் இப்பகுத்தறியும் செயல் முறையானது. கற்பிதக் கொள்கையின் உண்மையின் மீதோ, பொய்யின் மீதோ சார்ந்திருப்பது இல்லை. இவ்வாறு இருந்தபோதிலும் நாம் ஒரு விஷயத்தைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டியது என்னவென்றால், தவறான (பொய்யான) கற்பிதக் கொள்கையைக் கொண்டு தொடங்குவோமேயாயின் நாம் தவறான முடிவுக்கு வருவோம்.

பயிற்சி A1.2

1. எல்லா பெண்களும் இறப்பற்றவர்கள் எனக் கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் A என்பது ஒரு பெண் எனக்கொள்க. A வைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவு செய்யலாம்?
2. இரு விகிதமுறு எண்களின் பெருக்குத்தொகை ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் a மற்றும் b ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் எனக் கொள்க. ab ஐப் பற்றி நாம் என்ன முடிவு செய்யலாம்?
3. விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவாக்கமானது முடிவுற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராதது என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் $\sqrt{17}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனக்கொள்க. $\sqrt{17}$ இன் தசம விரிவாக்கத்தைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவு செய்ய முடியுமா?
4. $y = x^2 + 6$ மற்றும் $x = -1$, எனக் கொடுத்தால் y இன் மதிப்பைப் பற்றி என்ன முடிவு செய்வாய்?
5. ABCD ஒரு இணைகரம் என்பது கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $\angle B = 80°$. இணைகரத்தின் மற்ற கோணங்களைப் பற்றி நீங்கள் என்ன முடிவு செய்வீர்கள்?
6. PQRS என்பது எல்லா பகா எண்கள் P க்கும் விகுதமுறா எண் ஆகும் எனக்கொடுக்கப் பட்டுள்ளது மற்றும் 3721 என்பது ஒரு பகா எண் எனக்கொள்க. $\sqrt{3721}$ என்பது விகிதமுறா எண் என்று உன்னால் முடிவு செய்ய முடியுமா? உனது முடிவு சரியானது தானா? ஏன் அல்லது ஏனில்லை?

A 1.4 அனுமானங்கள், தேற்றங்கள், நிரூணங்கள் மற்றும் கணிதவியல் பகுத்தறிதல்.

படம் A1.2 ஐக் கருதுக. முதல் வட்டத்தின் மீது ஒரு புள்ளியும், இரண்டாம் வட்டத்தின் மீது 2 புள்ளிகள், மூன்றாவதன் மீது 3 புள்ளிகள் இதுபோல பல உள்ளன. புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகளின் அனைத்து சாத்தியக் கூறுகளும் வெவ்வொன்றிலும் வரையப்பட்டுள்ளன.



படம் A 1.2

கோடுகள் வட்டத்தை வெவ்வேறான, அதாவது ஒன்றை ஒன்று விலக்கும்.

AP SCERT

Number of points	Number of regions
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

Some of you might have come up with a formula predicting the number of regions given the number of points. From Class IX, you may remember that this intelligent guess is called a '*conjecture*'.

Suppose your conjecture is that given 'n' points on a circle, there are 2^{n-1} mutually exclusive regions, created by joining the points with all possible lines. This seems an extremely sensible guess, and one can check that if $n = 5$, we do get 16 regions. So, having verified this formula for 5 points, are you satisfied that for any n points there are 2^{n-1} regions? If so, how would you respond, if someone asked you, how you can be sure about this for $n = 25$, say? To deal with such questions, you would need a proof which shows beyond doubt that this result is true, or a counter-example to show that this result fails for some 'n'. Actually, if you are patient and try it out for $n = 6$, you will find that there are 31 regions, and for $n = 7$ there are 57 regions. So, $n =$ 6, is a counter-example to the conjecture above. This demonstrates the power of a counter-example. You may recall that in the Class IX we discussed that to **disprove a statement, it is enough to come up with a single counter-example**.

You may have noticed that we insisted on a proof regarding the number of regions in spite of verifying the result for $n = 1, 2, 3, 4$ and 5. Let us consider a few more examples. You are familiar with the following result (given in Chapter 5): $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. To establish its validity, it is not enough to verify the result for $n = 1, 2, 3,$ and so on, because there may be some 'n' for which this result is not true (just as in the example above, the result failed for $n = 6$). What we need is a proof which establishes its truth beyond doubt. You shall learn a proof for the same in higher classes.

புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	பகுதிகளின் எண்ணிக்கை
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

பகுதிகளாகப் (பொதுவானவைகளாக எந்த பகுதியும் இல்லாதவாறு) பிரிக்கின்றன. இவற்றை நாம் எண்ணி கீழ்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு, பகுதிகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடிக்கும் சூத்திரத்தைக் கூட உங்களில் சிலர் கண்டுபிடிக்கலாம். இவ்வகையான அறிவுபூர்வமான ஊகமே அனுமானம் (Conjecture) எனப்படும் என்பதை 9 வகுப்பில் இருந்து நினைவு கூர்க.

ஒரு வட்டத்தின் மீது n புள்ளிகள் இருப்பின், அப்புள்ளிகளை எல்லா சாத்தியமான கோடுகளாலும் இணைப்பதால் 2^{n-1} ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் பகுதிகள் கிடைக்கும் என்பதே உங்களது அனுமானம் என்க. இது மிகச் சரியான பொருள்படும் ஊகமாகத் தோன்றுகிறது. இதை $n = 5$, எனக் கொண்டு 16 பகுதிகள் கிடைப்பதை வைத்து சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம். 5 புள்ளிகளைக் கொண்டு சூத்திரத்தைச் சரிபார்த்த பிறகு, n புள்ளிகளுக்கு 2^{n-1} பகுதிகள் கிடைக்கும் என்று திருப்தி அடைகிறாயா? திருப்தி அடைகிறாய் என்றால், யாரேனும் n = 25க்கு இது பொருத்துமா என்று உன்னைக் கேட்டால் நீ என்ன பதில் சொல்வாய்? இத்தகைய கேள்விகளுக்கு பதில் சொல்ல உனக்கு, சந்தேகத்திற்கு இடமில்லாமல் இந்த முடிவு சரியே என்று காட்டு அறிவிற்கு ஒரு நிரூபணம் தேவை அல்லது 'n' இன் ஏதோ ஒரு மதிப்பிற்கு இம்முடிவு தோல்வியடைகிறது என்பதைக் காட்ட ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டு தேவை உண்மையில், நீ பொறுமையுடன் செய்து பார்த்துக்கொண்டே வந்தால் $n = 6$, க்கு 31 பகுதிகளும் $n = 7$ க்கு 57 பகுதிகளுக்கும் வருகின்றன என்பதைப் பார்க்கலாம். ஆகவே $n = 6$ என்பதை மேற்கூறிய அனுமானத்திற்கு ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டாகும். நாம் 9ஆம் வகுப்பில் கூற்றை பொய்யாக நிரூபிக்க ஒரே ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டே போதுமானது என்று கற்றதை நினைவு கூர்க.

$n = 1, 2, 3, 4$ 5 ஆகியவற்றிற்கான பகுதிகளின் எண்ணிக்கைகளை சரிபார்த்த பிறகும் நாம் நிரூபணத்தை வற்புறுத்திக் கொண்டே இருக்கிறோம் என்பதை நீங்கள் கவனித்திருக்கலாம். இன்னும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை கருதுவோம். பின்வரும் முடிவினை நீங்கள் நன்கு அறிவீர்கள். (பாடம் 1-இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Now, consider Fig. A1.3, where PQ and PR are tangents t

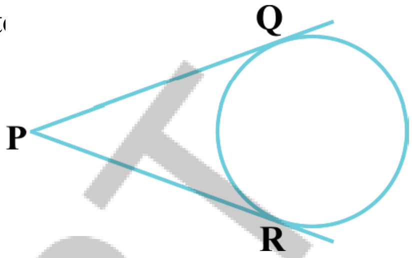


Fig. A1.3

You have proved that PQ = PR (Theorem 10.2). You were not satisfied by only drawing several such figures, measuring the lengths of the respective tangents, and verifying for yourselves that the result was true in each case.

Do you remember what did the proof consist of ? It consisted of a sequence of statements (called **valid arguments**), each following from the earlier statements in the proof, or from previously proved (and known) results independent from the result to be proved, or from axioms, or from definitions, or from the assumptions you had made. And you concluded your proof with the statement PQ = PR, i.e., the statement you wanted to prove. This is the way any proof is constructed.

We shall now look at some examples and theorems and analyse their proofs to help us in getting a better understanding of how they are constructed.

We begin by using the so-called 'direct' or 'deductive' method of proof. In this method, we make several statements. Each is **based on previous statements**. If each statement is logically correct (i.e., a valid argument), it leads to a logically correct conclusion.

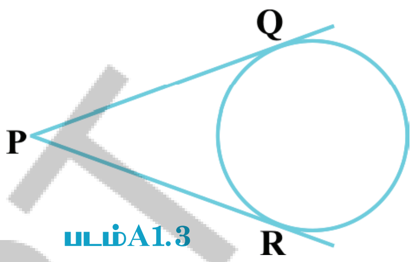
Example 10 : The sum of two rational numbers is a rational number.

Solution :

S.No.	Statements	Analysis/Comments
1.	Let x and y be rational numbers.	Since the result is about rationals, we start with x and y which are rational.
2.	Let $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ and $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ where m, n, p and q are integers.	Apply the definition of rationals.
3.	So, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	The result talks about the sum of rationals, so we look at $x + y$.

AP SCERT

இது செல்லுபடி ஆகிறது என்பதை நிலைநிறுத்த $n = 1, 2, 3$ இன்னும் பலவற்றை மட்டும் சரிபார்த்தல் போதுமானது அல்ல. ஏனெனில், (மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில், முடிவு $n = 6$ என்பதற்கு தோல்வி, அடைந்ததைப் போல) n இன் ஏதோ ஒரு மதிப்பிற்கு இந்த முடிவு பொய்யாக்கப்படலாம். ஆகவே நமக்கு தேவையானது என்னவென்றால், சந்தேகத்திற்கு இடமில்லாமல் அதன் உண்மையை நிலைநாட்டும் ஒரு நிரூபணமே இதற்கான நிரூபணத்தை மேல் வகுப்புகளில் கற்பீர்கள்.



படம்A1.3

இனி படம் A1.3 ஐக் கருதுக. இதில் PQ மற்றும் PR ஆகியவை புள்ளி P யில் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் ஆகும்.

நீங்கள் (தேற்றம் 10.2) PQ = PR என்பதை முன்பே நிரூபித்திருக்கீர்கள். நீங்கள் இத்தகைய பல படங்களை வரைந்து தொடுகோடுகளின் அளவுகளை அளந்து பார்த்து ஒவ்வொரு முறையும் முடிவு சரியே என்று பார்த்து அத்துடன் திருப்தி அடையவில்லை.

நிரூபணத்தில் என்ன அடங்கி இருந்தது என்பது நினைவிருக்கிறதா? அதில் (செல்லுபடி ஆகும் வாதங்கள் என்றழைக்கப்படும்) தொடர்ச்சியான கூற்றுகள் இருந்தன. ஒவ்வொரு, கூற்றுகளும், அதற்கு முன்னே உள்ள நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றிலிருந்தோ, முன்பே தெரிந்த முடிவுகளில் இருந்தோ (தற்போது நிரூபிக்கப்படுவது அல்லாமல்) எடுகோளில் இருந்தோ, (தற்போது நிரூபீக்கப்படுவது அல்லாமல்) வரையறைகளில் இருந்தோ, அல்லது நீங்கள் ஏற்கனவே கொண்டிருந்த ஊகங்களைக் கொண்டோ நிரூபிக்கப்பட்டவை, அதன்பிறகே, நீங்கள் உங்கள் நிரூபணத்தை PQ = PR என்ற வாக்கியத்துடன் முடித்தீர்கள். அதாவது எதை நிரூக்கவேண்டுமோ அதை கடைசியில் எழுதினீர்கள். எந்த ஒரு நிரூபணமும் இவ்வாறே அமைக்கப்படுகிறது.

இனி நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளையும் மற்றும் தேற்றங்களையும் மற்றும் அவற்றின் நிரூபணங்களையும் ஆராய்வோம். நிரூபணங்கள் எவ்வாறு அமைக்கப்படுகின்றன என்பதை நன்கு புரிந்து கொள்ள இது உதவும்.

நேரடி அல்லது உய்வு முறை நிரூபணங்களில் இருந்து நாம் தொடங்குவோம். இம்முறையில், நாம் பல கூற்றுகளை கூறுகிறோம். ஒவ்வொன்றும் அதன் முந்தைய கூற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். ஒவ்வொரு கூற்றும் தர்க்க ரீதியாக சரியாயின் (அதாவது செல்லுபடி ஆகும் வாதம் எனில்) அது தர்க்க ரீதியாய் சரியான விடைக்கே (முடிவுக்கே) சென்றடையும்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல் ஒரு விகிதமுறு எண்ணே

தீர்வு :

வரிசை எண்	கூற்றுகள்	ஆய்வு/குறிப்புகள்
1.	x மற்றும் y என்பன விகிதமுறு எண்கள் என்க	முடிவானது விகிதமுறு எண்களைப் பற்றியது என்பதால் x மற்றும் y விகிதமுறு எண்களுடன் தொடங்கலாம்
2.	$x = \frac{m}{n}$, இதில் $n \neq 0$ மற்றும் $y = \frac{p}{q}$, இதில் $q \neq 0$ என்க இதில் m, n, p ஆகியன முழுக்கள்	விகிதமுறு எண்களின் வரையறைகளை இடுதல்
3.	$x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	முடிவானது விகிதமுறு எண்களின் கூடுதலைப் பற்றியது, எனவே நாம் x, y யை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

4.	Using the properties of integers, we see that $mq + np$ and nq are integers.	Using known properties of integers.
5.	Since $n \neq 0$ and $q \neq 0$, it follows that $nq \neq 0$.	Using known properties of integers.
6.	Therefore, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ is a rational number	Using the definition of a rational number.

Remark : Note that, each statement in the proof above is based on a previously established fact, or definition.

Example 11 : Every prime number greater than 3 is of the form $6k + 1$ or $6k + 5$, where k is some integer.

Solution :

S.No.	Statements	Analysis/Comments
1.	Let p be a prime number greater than 3.	Since the result has to do with a prime number greater than 3, we start with such a number.
2.	Dividing p by 6, we find that p can be of the form $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, or $6k + 5$, where k is an integer.	Using Euclid's division lemma.
3.	But $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, and $6k + 3 = 3(2k + 1)$. So, they are not primes.	We now analyse the remainders given that p is prime.
4.	So, p is forced to be of the form $6k + 1$ or $6k + 5$, for some integer k.	We arrive at this conclusion having eliminated the other options.

Remark : In the above example, we have arrived at the conclusion by eliminating different options. This method is sometimes referred to as the **Proof by Exhaustion**.

4.	முழுக்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி, $mq + np$ மற்றும் nq ஆகியன முழுக்கள் எனக் காண்கிறோம்.	முழுக்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.
5.	$n \neq 0$ மற்றும் $q \neq 0$, என்பதால் $nq \neq 0$. என்பது தொடர்கிறது.	முழுக்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.
6.	ஆகவே $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்	விகிதமுறு எண்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

குறிப்பு : நிரூபணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கூற்றுமே முன்னமே நிலைநிறுத்தப்பட்ட உண்மை அல்லது வரையறையை அடிப்படையாக கொண்டுள்ளது என்பதைக் கவனி.

எடுத்துக்காட்டு 11 : 3 ஐ விடப் பெரிய ஒவ்வொரு பகா எண்ணும் $6k + 1$ அல்லது $6k + 5$ என்ற வடிவில் உள்ளது. இதில் k என்பது ஒரு முழு.

தீர்வு :

வ.எண்.	கூற்றுகள்	ஆய்வு /குறிப்புகள்.
1.	p என்பது 3 ஐவிடப் பெரிய பகா எண் என்க.	முடிவானது 3ஐ விடப் பெரியதொரு பகா எண்.-ஐப் பற்றியது என்பதால், இத்தகையதொரு எண்ணுடன் தொடங்கலாம்.
2	p ஐ 6 ஆல் வகுத்தால் p ஆனது $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4,$ ஆகிய வடிவத்தில் உள்ளது இதில் k என்பது ஒரு முழு.	யூக்ளிட் இன் வகுத்தல் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி.
3.	ஆனால் $6k = 2(3k), 6k + 2 = 2(3k + 1),$ மற்றும் $6k + 4 = 2(3k + 2)$, ஆகவே இவை பகா எண்கள் அல்ல.	p என்பது பகா எண் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், நாம் மீதிகளை ஆராய்வோம்.
4.	ஆகவே p என்பது $6k + 1$ அல்லது $6k + 5$, ஆகிய வடிவத்தில் மட்டுமே இருப்பது சாத்தியப்படும். இதில் k என்பது ஒரு முழு எண்.	மற்ற தேர்வுகளை எல்லாம் நீக்கிவிட்டு இந்த முடிவிற்கு நாம் வருகிறோம்.

குறிப்பு : மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டில் பல்வேறு தேர்வுகளை (options) நீக்குவதன் மூலம் நாம் தேவையான முடிவுக்கு வந்தோம். இந்த முறையை சிலசமயம் நீக்குதல் முறை நிரூபணம் (Proof by Exhaustion) என்பர்

Theorem A1.1 ***(Converse of the Pythagoras Theorem) :*** *If in a triangle the square of the length of one side is equal to the sum of the squares of the other two sides, then the angle opposite the first side is a right angle.*

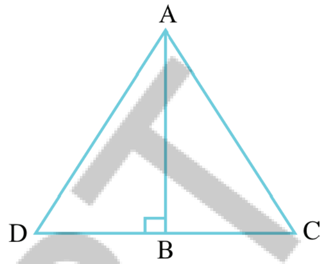


Fig. A1.4

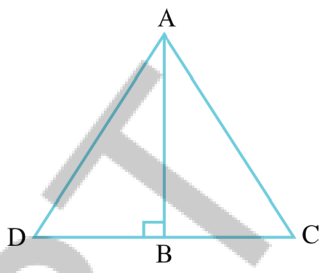
Proof :

S.No.	Statements	Analysis
1.	Let ΔABC satisfy the hypothesis $AC^2 = AB^2 + BC^2$.	Since we are proving a statement about such a triangle, we begin by taking this.
2.	Construct line BD perpendicular to AB, such that BD = BC, and join A to D.	This is the intuitive step we have talked about that we often need to take for proving theorems.
3.	By construction, ΔABD is a right triangle, and from the Pythagoras Theorem, we have $AD^2 = AB^2 + BD^2$.	We use the Pythagoras theorem, which is already proved.
4.	By construction, BD = BC. Therefore, we have $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	Logical deduction.
5.	Therefore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$.	Using assumption, and previous statement.
6.	Since AC and AD are positive, we have AC = AD.	Using known property of numbers.
7.	We have just shown AC = AD. Also BC = BD by construction, and AB is common. Therefore, by SSS, ΔABC ≅ ΔABD.	Using known theorem.
8.	Since ΔABC ≅ ΔABD, we get ∠ABC = ∠ABD, which is a right angle.	Logical deduction, based on previously established fact.

AP SCERT

தேற்றம் A1.1 (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை)

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்கு சமமாக இருப்பின், முதல் பக்கத்திற்கு எதிரமைந்த கோணம் ஒரு செங்கோணம் ஆகும்.



படம் A1.4

நிரூபணம் :

வ.எண்.	கூற்றுகள்	ஆய்வு /குறிப்புகள்.
1	ΔABC யானது $AC^2 = AB^2 + BC^2$. என்ற கற்பிதன் கொள்கையை நிறைவு செய்வதாக இருக்கட்டும்.	இத்தகையதொரு முக்கோணத்தைப் பற்றிய கூற்றை நாம் நிரூபிக்க வேண்டும் என்பதால். இந்த முக்கோணத்தை நாம் எடுத்துக்கொள்வோம்.
2	$BD = BC$ என்றமைந்த வகையில் AB க்கு செங்குத்தாக BD யை வரையவும். பிறகு A வை D யுடன் இணைக்கவும்.	இது நாம் தேற்றங்களை நிரூபிக்க முற்படும்போது எடுக்கும் உள்ளுணர்வு அடி ஆகும்.
3	அமைப்பின் படி ΔABD ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும். மேலும் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $AD^2 = AB^2 + BD^2$	முன்னமே நிரூபிக்கப்பட்ட பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்துவோம்.
4	அமைப்பில் இருந்து $BD = BC$ ஆகவே $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு
5	ஆகவே $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$.	ஊகம் மற்றும் முந்தய கூற்றைக் கொண்டு.
6	AC மற்றும் AD ஆகியன மிகை எண்கள் ஆதலால் $AC = AD$.	எண்களின் தெரிந்த பண்புகளைக் கொண்டு
7	$AC = AD$ என்பதைக் காட்டினோம். மேலும் அமைப்பினால் $BC = BD$ மேலும் AB யானது பொது ஆகவே SSS நிபந்தனையின் படி $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.	முன்பே அறிந்தே தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி.
8	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ ஆகையால், $\angle ABC = \angle ABD$ ஒரு செங்கோணம்.	முன்னமே நிலை நிறுத்தப்பட்ட உண்மையை சார்ந்த தாக்க ரீதியான உய்ப்பு.

Remark : Each of the results above has been proved by a sequence of steps, all linked together. Their order is important. Each step in the proof follows from previous steps and earlier known results. (Also see Theorem 6.9.)

EXERCISE A1.3

In each of the following questions, we ask you to prove a statement. List all the steps in each proof, and give the reason for each step.

1. Prove that the sum of two consecutive odd numbers is divisible by 4.
2. Take two consecutive odd numbers. Find the sum of their squares, and then add 6 to the result. Prove that the new number is always divisible by 8.
3. If $p \geq 5$ is a prime number, show that $p^2 + 2$ is divisible by 3.

   [**Hint:** Use Example 11].
4. Let x and y be rational numbers. Show that xy is a rational number.
5. If a and b are positive integers, then you know that $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, where q is a whole number. Prove that HCF (a, b) = HCF (b, r).

   [**Hint :** Let HCF $(b, r) = h$. So, $b = k_1 h$ and $r = k_2 h$, where k_1 and k_2 are coprime.]
6. A line parallel to side BC of a triangle ABC, intersects AB and AC at D and E respectively.

   Prove that $\frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}}$.

A1.5 Negation of a Statement

In this section, we discuss what it means to 'negate' a statement. Before we start, we would like to introduce some notation, which will make it easy for us to understand these concepts. To start with, let us look at a statement as a single unit, and give it a name. For example, we can denote the statement 'It rained in Delhi on 1 September 2005' by p. We can also write this by

p: It rained in Delhi on 1 September 2005.

Similarly, let us write

q: All teachers are female.

r: Mike's dog has a black tail.

s: $2 + 2 = 4$.

t: Triangle ABC is equilateral.

This notation now helps us to discuss properties of statements, and also to see how we can combine them. In the beginning we will be working with what we call 'simple' statements, and will then move onto 'compound' statements.

குறிப்பு : மேலே கூறப்பட்ட ஒவ்வொரு முடிவுகளும், ஒன்றோடொன்று இணைந்து, தொடர்ச்சியான படிநிலைகளைக் கொண்டு நிரூபிக்கப்படுகிறது. அவற்றின் வரிசையானது மிக முக்கியம். நிரூபணத்தில் ஒவ்வொரு படிநிலையும், அதற்கு முந்தைய படிநிலையை தொடர்ந்தே வரும் மற்றும் தெரிந்த முடிவுகளைக் கொண்டும் வரும் (தேற்றம் 6.9 ஐப் பார்)

பயிற்சி A1.3

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு கேள்வியிலும் நாம் உங்களை ஒரு கூற்றை நிரூபிக்கச் சொல்கிறோம். ஒவ்வொரு நிரூபணத்திலும் உள்ள அனைத்து படிகளையும் வரிசைப்படுத்துக மற்றும் அவற்றில் ஒவ்வொன்றிற்கும் காரணத்தைக் கூறுக.

1. இரு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் 4 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.
2. இரு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களை எடுத்துக்கொள். அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுடன் 6-ஐக் கூட்டுக. கிடைத்த புதிய எண் 8-ஆல் எப்பொழுதுமே வகுபடும் என நிருபி.
3. $p \geq 5$ என்பது ஒரு பகா எண் எனில் $p^2 + 2$ என்பது 3ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டு. (குறிப்பு :எடுத்துக்காட்டு 11ஐப் பயன்படுத்து)
4. x மற்றும் y விகிதமுறு எண்கள் என்க. xy என்பது விகிதமுறு எண் எனக்காட்டுக.
5. a மற்றும் b ஆகியவை. மிகை முழுக்கள் எனில் $a = bq + r,\ 0 \leq r < b$, என்பது உனக்குத் தெரியும். இதில் q என்பது முழு எண் HCF (a, b) = HCF (b, r). என நிருபி.
6. முக்கோணம் ABC, யில் பக்கம் BC க்கு இணையான கோடு, AB மற்றும் AC ஆகியவற்றை D மற்றும் E என்ற புள்ளிகளில் முறையே வெட்டுகிறது. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

A 1.5 கூற்றின் மறுப்புக் கூற்று (Negation of a Statement)

இப்பாடப்பகுதியில் கூற்றின் 'மறுப்புக்கூற்று' என்றால் என்ன என்பதைப் பற்றி பார்ப்போம். அதைத் தொடங்குவதற்கு முன்பாக, சில குறியீடுகளை நாம் அறிமுகப் படுத்துவோம். இக்குறியீடுகளானவை, கருத்துக்களை நன்கு புரிந்து கொள்வதற்கு உதவும். முதலில், நாம் ஒரு கூற்றை ஒரு தனி அலகாகப் பார்ப்போம். அதற்கு ஒரு பெயரை இடுவோம் எடுத்துக்காட்டாக செப்டம்பர் - 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்தது, என்ற வாக்கியத்தை p எனக்குறிப்போம். இதையே

p: 1 செப்டம்பர் - 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்தது, என எழுதலாம். அதேபோல்

q: எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள்.

r: மைக் என்பவரின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது.

s: $2 + 2 = 4$.

t: ΔABC சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

இக்குறியீடுகளை இப்போது நமக்கு வாக்கியங்களின் பண்புகளை ஆராய்வதில் உதவும். மேலும் அவற்றை எவ்வாறு இணைப்பது என்பதிலும் உதவும். முதலில் நாம் 'சரளமான' வாக்கியங்களுக்கு செல்வோம். பிறகு 'கலவை' வாக்கியங்களுக்கு செல்லலாம். கீழ்வரும் அட்டவணையில் நாம் கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியங்களிலிருந்து புதிய வாக்கியங்களை அமைக்கலாம்.

Now consider the following table in which we make a new statement from each of the given statements.

Original statement	New statement
p: It rained in Delhi on 1 September 2005	$\sim p$: It is false that it rained in Delhi on 1 September 2005.
q: All teachers are female.	$\sim q$: It is false that all teachers are female.
r: Mike's dog has a black tail.	$\sim r$: It is false that Mike's dog has a black tail.
s: $2 + 2 = 4$.	$\sim s$: It is false that $2 + 2 = 4$.
t: Triangle ABC is equilateral.	$\sim t$: It is false that triangle ABC is equilateral.

Each new statement in the table is a *negation* of the corresponding old statement. That is, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ and $\sim t$ are negations of the statements p, q, r, s and t, respectively. Here, $\sim p$ is read as 'not p'. The statement $\sim p$ negates the assertion that the statement p makes. Notice that in our usual talk we would simply mean $\sim p$ as 'It did not rain in Delhi on 1 September 2005.' However, we need to be careful while doing so. You might think that one can obtain the negation of a statement by simply inserting the word 'not' in the given statement at a suitable place. While this works in the case of p, the difficulty comes when we have a statement that begins with 'all'. Consider, for example, the statement q: All teachers are female. We said the negation of this statement is $\sim q$: It is false that all teachers are female. This is the same as the statement 'There are some teachers who are males.' Now let us see what happens if we simply insert 'not' in q. We obtain the statement: 'All teachers are not female', or we can obtain the statement: 'Not all teachers are female.' The first statement can confuse people. It could imply (if we lay emphasis on the word 'All') that all teachers are male! This is certainly not the negation of q. However, the second statement gives the meaning of $\sim q$, i.e., that there is at least one teacher who is not a female. So, be careful when writing the negation of a statement!

So, how do we decide that we have the correct negation? We use the following criterion.

Let p be a statement and $\sim p$ its negation. Then $\sim p$ is false whenever p is true, and $\sim p$ is true whenever p is false.

முதலில் கூறிய கூற்று/ வாக்கியம்	புதிய வாக்கியம்
p : 1-செப்டம்பர் 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்தது.	$\sim p$: 1 தில்லியில் 1-செப்டம்பர் 2005 இல் மழை பெய்தது என்பது தவறு.
q: எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள்	$\sim q$: எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள் என்பது தவறு
r: மைக்கின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது.	$\sim r$: மைக்கின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது என்பது தவறு
s: $2+2=4$	$\sim s$: $2+2=4$ என்பது தவறு.
t: ΔABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்	$\sim t$: ΔABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என்பது தவறு

அட்டவணையில் ஒவ்வொரு முதலில் கூறிய கூற்றிக்கு ஒத்த புதிய வாக்கியம், முதலில் கூறிய கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றாகும். அதாவது $\sim p, \sim q, \sim r, \sim s$ ஆகியவை கூற்றுகள் p, q, r, s, t இவற்றின் மறுப்புக் கூற்றுகள் ஆகும். $\sim p$ கூற்றானது. கூற்று 'p க்கு எதிர்மறை' $(not\ p)$ என்று படிக்க வேண்டும். அன்றாட வாழ்வில் நாம் பொதுப் படையாப் பேசும் போது $\sim p$ என்பது 1 செப்டம்பர் 2005 அன்று தில்லியில் மழை பெய்யவில்லை. என்று பொருள்படுகிறது என்பதை கவனி. ஆகையால் நாம் இதில் மிகுந்த கவனம் செலுத்த இல்லை என்ற வார்தையை பொறுத்தினால் போதும் என்று நினைக்கலாம். வாக்கியம் p யில் இது செல்லுபடி ஆகும். ஆனால், 'எல்லா' என்று தொடங்கும் வாக்கியங்களுக்கு இது செல்லுபடி ஆவது கடினம். q- வைக் கருதுக. $\sim q$: எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்கள் என்பது தவறு. இக்கூறு 'சில ஆண் ஆசிரியர்களும் இருக்கிறார்கள்' என்பது தவறு. இக்கூற்று 'சில ஆண் ஆசிரியர்களும் இருக்கிறார்கள்' என்று பொருள்படும். இப்பொழுது 'இல்லை' என்ற வார்த்தையை q வில் பொருத்திப் பார்க்கலாம். அல்லது 'எல்லா ஆசிரியர்களும் பெண்களாக இருப்பத்தில்லை' போன்ற பல கூற்றுகள் நமக்குக் கிடைக்கலாம்.

முதலில் உள்ள வாக்கியம் குழப்புவதாக உள்ளது. (எல்லா என்ற வார்த்தை மீது மட்டம் கவனம் செலுத்துவோமாயின்) அது எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள் என்று கூட பொருள்படலாம். அதனால் நாம் எதிர்மறையான 'மறுப்பு கூற்றை' எழுதும் போது மிகவும் கவனமாக இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, சரியான மறுப்பு கூற்று எது என்று எவ்வாறு முடிவு செய்வது? கீழ்வரும் நிபந்தனையை நாம் பயன்படுத்துவோம்.

p என்பது கூற்று என்க மற்றும் $\sim p$ என்பது அதன் மறுப்புக் கூற்று என்க. இப்படியிருப்பின் p உண்மையாக இருக்கும்போது $\sim p$ என்பது பொய் ஆகும். மற்றும் p பொய்யாக இருக்கும் போது $\sim p$ உண்மையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்கட்டாக, மைக்கின் நாய் கருப்பு வாலைக் கொண்டது என்பது உண்மை எனில் மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை என்பது பொய். மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் உள்ளது என்பது பொய் எனில் மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை என்பது உண்மை.

இதேபோல், s மற்றும் t ஆகிய கூற்றுகளின் மறுப்புக் கூற்றுகள் ஆனவை.

s: $2+2=4$ மறுப்பு கூற்று $\sim s$: $2+2=4$

t: ΔABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் இதன் மறுப்புக்கூற்று $\sim t$: ΔABC சமபக்க முக்கோணம் அல்ல.

APSCERT

For example, if it is true that Mike's dog has a black tail, then it is false that Mike's dog does not have a black tail. If it is false that 'Mike's dog has a black tail', then it is true that 'Mike's dog does not have a black tail'.

Similarly, the negations for the statements s and t are:

s: $2 + 2 = 4$; negation, $\sim s$: $2 + 2 \neq 4$.

t: Triangle ABC is equilateral; negation, $\sim t$: Triangle ABC is not equilateral.

Now, what is $\sim(\sim s)$? It would be $2 + 2 = 4$, which is s. And what is $\sim(\sim t)$? This would be 'the triangle ABC is equilateral', i.e., t. In fact, **for any statement p, $\sim(\sim p)$ is p**.

Example 12 : State the negations for the following statements:

(i) Mike's dog does not have a black tail.

(ii) All irrational numbers are real numbers.

(iii) $\sqrt{2}$ is irrational.

(iv) Some rational numbers are integers.

(v) Not all teachers are males.

(vi) Some horses are not brown.

(vii) There is no real number x, such that $x^2 = -1$.

Solution :

(i) It is false that Mike's dog does not have a black tail, i.e., Mike's dog has a black tail.

(ii) It is false that all irrational numbers are real numbers, i.e., some (at least one) irrational numbers are not real numbers. One can also write this as, 'Not all irrational numbers are real numbers.'

(iii) It is false that $\sqrt{2}$ is irrational, i.e., $\sqrt{2}$ is not irrational.

(iv) It is false that some rational numbers are integers, i.e., no rational number is an integer.

(v) It is false that not all teachers are males, i.e., all teachers are males.

(vi) It is false that some horses are not brown, i.e., all horses are brown.

(vii) It is false that there is no real number x, such that $x^2 = -1$, i.e., there is at least one real number x, such that $x^2 = -1$.

Remark : From the above discussion, you may arrive at the following **Working Rule** for obtaining the negation of a statement :

(i) First write the statement with a 'not'.

(ii) If there is any confusion, make suitable modification , specially in the statements involving 'All' or 'Some'.

இனி $\sim(\sim t)$ என்வாக இருக்கும்? அது $2+2\neq 4$. ஆகும். அதாவது $s: 2+2=4$; மேலும் $\sim s: 2+2\neq 4$. என்னவாக இருக்கும்? அது ABC சமபக்க முக்கோணம் ஆகும். அதாவது p ஆகும். அதாவது p என்ற எந்த ஒரு கூற்றுக்கும் $\sim(\sim p)$ p p என்பது 'p' p ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 : கீழ்வரும் வாக்கியங்களும் மறுப்புக் கூற்றுகளை எழுதுக.

(i) மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை.

(ii) எல்லா விகிதமுறா எண்களும் மெய் எண்கள்.

(iii) $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண்.

(iv) சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் ஆகும்.

(v) எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள் இல்லை.

(vi) சில குதிரைகள் பழுப்பு நிறத்தில் இல்லை.

(vii) $x^2 = -1$ என்ற வகையில் x என்ற மெய் எண் எதுவும் இல்லை.

தீர்வு :

(i) மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் இல்லை என்பது தவறு. அதாவது மைக்கின் நாய்க்கு கருப்பு வால் உண்டு.

(ii) எல்லா விகிதமுறா எண்களும் மெய் எண்கள் என்பது தவறு, அதாவது, சில (குறைந்தது ஒரு) விகிதமுறா எண்கள் மெய் எண்கள் இல்லை. இதையே 'எல்லா விகிதமுறா எண்களும் மெய் எண்கள் அல்ல' என்றும் கூறலாம்.

(iii) $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்பது தவறு, அதாவது, $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் அல்ல.

(iv) சில விகிதமுறு எண்கள் முழுக்கள் ஆகும் என்பது தவறு அதாவது, எந்த விகிதமுறு எண்ணுமே முழுக்கள் அல்ல.

(v) எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள் இல்லை என்பது தவறு, அதாவது, எல்லா ஆசிரியர்களும் ஆண்கள்.

(vi) சில குதிரைகள் பழுப்பு வண்ணம் இல்லை என்பது தவறு, அதாவது, எல்லா குதிரைகளும் பழுப்பு வண்ணம்.

(vii) $x^2 = -1$ என்ற வகையில் x என்ற மெய் எண் எதுவும் இல்லை என்பது தவறு, அதாவது $x^2 = -1$ என்ற வகையில் குறைந்தது x என்ற ஒரு மெய் எண்ணாவது இருக்கிறது.

குறிப்பு : ஒரு கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றை எழுதும் போது, கீழ்வரும் சில நடைமுறை விதிகளை பின்பற்றலாம்.

(i) முதலில் இல்லை/அல்ல என்ற வார்த்தையுடன் கூற்றை எழுதுக.

(ii) இதில் குழப்பம் ஏதேனம் இருப்பின் தகுந்த மாற்றங்கள் செய்க, (அதிலும் குறிப்பாக, 'எல்லா' அல்லது 'சில' போன்றவை உள்ள வாக்கியங்களில்)

EXERCISE A1.4

1. State the negations for the following statements :
   - (i) Man is mortal.
   - (ii) Line l is parallel to line m.
   - (iii) This chapter has many exercises.
   - (iv) All integers are rational numbers.
   - (v) Some prime numbers are odd.
   - (vi) No student is lazy.
   - (vii) Some cats are not black.
   - (viii) There is no real number x, such that $\sqrt{x} = -1$.
   - (ix) 2 divides the positive integer a.
   - (x) Integers a and b are coprime.
2. In each of the following questions, there are two statements. State if the second is the negation of the first or not.
   - (i) Mumtaz is hungry.
     Mumtaz is not hungry.
   - (ii) Some cats are black.
     Some cats are brown.
   - (iii) All elephants are huge.
     One elephant is not huge.
   - (iv) All fire engines are red.
     All fire engines are not red.
   - (v) No man is a cow.
     Some men are cows.

A1.6 Converse of a Statement

We now investigate the notion of the converse of a statement. For this, we need the notion of a 'compound' statement, that is, a statement which is a combination of one or more 'simple' statements. There are many ways of creating compound statements, but we will focus on those that are created by connecting two simple statements with the use of the words 'if' and 'then'. For example, the statement 'If it is raining, then it is difficult to go on a bicycle', is made up of two statements:

p: It is raining

q: It is difficult to go on a bicycle.

Using our previous notation we can say: If p, then q. We can also say 'p implies q', and denote it by $p \Rightarrow q$.

Now, supose you have the statement 'If the water tank is black, then it contains potable water.' This is of the form $p \Rightarrow q$, where the hypothesis is p (the water tank is black) and the conclusion is q (the tank contains potable water). Suppose we interchange the hypothesis and the conclusion, what do we get? We get $q \Rightarrow p$, i.e., if the water in the tank is potable, then the tank must be black. This statement is called the **converse** of the statement $p \Rightarrow q$.

பயிற்சி A1.4

1. கீழ்வரும் கூற்றுகளுக்கான மறுப்புக் கூற்றுகளை எழுதுக.

(i) மனிதன் இறப்புள்ளவன். (ii) நேர்கோடு l நேர்கோடு m இதற்கு இணை.

(iii) இப்பாடம் பல பயிற்சிகளை உடையது (iv) எல்லா முழுக்களும் விகிதமுறு எண்கள்.

(v) சில பகா எண்கள் ஒற்றை எண்கள் (vi) எந்த மாணவனும் சோம்பேறி அல்ல.

(vii) சில பூனைகள் கருப்பு அல்ல.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ என்ற வகையில் x, என்ற எந்த மெய் எண்ணும் இல்லை.

(ix) a என்ற மிகை முழுவை 2 வகுக்கிறது. (x) a மற்றும் b ஆகிய முழுக்கள் (1-ஐத் தவிர வேறு எந்த) பொதுக்காரணி (யும்) அற்றவை.

2. கீழ்வரும் ஒவ்வொரு கேள்வியிலும் இரண்டு வாக்கியங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இரண்டாவது வாக்கியங்கள் முதல் வாக்கியத்தின் மறுப்புக் கூற்றா இல்லையா என்று கூறுக.

(i) மும்தாஜுக்கு பசிக்கிறது.
மும்தாஜுக்கு பசிக்கவில்லை

(ii) சில பூனைகள் கருப்பாக உள்ளன.
சில பூனைகள் ப்ரௌன் ஆக உள்ளன.

(iii) எல்லா யானைகளும் பெரிய உருவம் உள்ளவை
ஒரு யானை பெரிய உருவம் இல்லாதது.

(iv) எல்லா தீயணைப்பு வண்டிகளும் சிகப்பு
எல்லா தீயணைப்பு வண்டிகளும் சிகப்பு அல்ல.

(v) எந்த மனிதனும் பசு அல்ல.
சில மனிதர்கள் பசுக்கள்.

A 1.6 ஒரு கூற்றின் மறுதலை (Convers of a Statement)

ஒரு கூற்றின் மறுதலை என்ற கருத்தை நாம் இனி துப்பறியலாம். இதற்கு நமக்கு 'கலவை' வாக்கியம் என்ற கருத்து தேவைப்படுகிறது. அதாவது, ஒன்றோ அல்லது அதைவிட அதிகமாக 'சரளமான' வாக்கியங்களின் கலவையான வாக்கியம். கலவை வாக்கியங்களை உண்டாக்குவதற்கு பல வழிகள் உள்ளன. ஆனால் நாம் இங்கு, 'எனில்' மற்றும் 'ஆகும்.' என்ற வார்த்தைகளைக் கொண்டு இரு சரளமான வாக்கியங்களை இணைப்பதன் மூலம் உருவாகும் கலவை வாக்கியங்களை மட்டும் கவனிப்போம். எடுத்துக்காட்டாக, 'மழை பெய்கிறது எனில், சைக்கிள் மீது செல்வது கடினம் ஆகும். என்ற வாக்கியம் இரண்டு வாக்கியங்களால் ஆனது.

p: மழை பெய்கிறது.

q: சைக்கிள் மீது செல்வது கடினம்.

முந்தைய குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி, நாம் p எனில் q ஆகும். என்று கூறலாம். p ஆனது q உணர்த்துகிறது *(pimlies q)* என்றும் கூறலாம் மற்றும் இதை $p \Rightarrow q$ என்னும் குறிக்கிறோம்.

இனி நீர்தொட்டி கருப்பு நிறம் எனில் அதில் குடிநீர் உள்ளது என்ற வாக்கியத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இது $p \Rightarrow q$,என்ற வடிவில் உள்ளது இதில் p என்பது முடிவு (அதில் குடிநீர் உள்ளது) கற்பிதக் கொள்கையையும் முடிவையும் இடம் மாற்றி எழுதினால் என்ன கிடைக்கும்? $q \Rightarrow p$, i என்பது கிடைக்கும் அதாவது, தொட்டியில் உள்ளது குடிநீர் எனில், தொட்டி கருப்பு நிறத்தில் இருக்க வேண்டும். இந்த வாக்கியமே $q \Rightarrow p$ என்ற வாக்கியத்தின் மறுதலைக் கூற்றாகும்.

In general, the **converse** of the statement $p \Rightarrow q$ is $q \Rightarrow p$, where p and q are statements. Note that $p \Rightarrow q$ and $q \Rightarrow p$ are the converses of each other.

Example 13 : Write the converses of the following statements :

(i) If Jamila is riding a bicycle, then 17 August falls on a Sunday.

(ii) If 17 August is a Sunday, then Jamila is riding a bicycle.

(iii) If Pauline is angry, then her face turns red.

(iv) If a person has a degree in education, then she is allowed to teach.

(v) If a person has a viral infection, then he runs a high temperature.

(vi) If Ahmad is in Mumbai, then he is in India.

(vii) If triangle ABC is equilateral, then all its interior angles are equal.

(viii) If x is an irrational number, then the decimal expansion of x is non-terminating non-recurring.

(ix) If $x - a$ is a factor of the polynomial $p(x)$, then $p(a) = 0$.

Solution : Each statement above is of the form $p \Rightarrow q$. So, to find the converse, we first identify p and q, and then write $q \Rightarrow p$.

(i) p: Jamila is riding a bicycle, and q: 17 August falls on a Sunday. Therefore, the converse is: If 17 August falls on a Sunday, then Jamila is riding a bicycle.

(ii) This is the converse of (i). Therefore, its converse is the statement given in (i) above.

(iii) If Pauline's face turns red, then she is angry.

(iv) If a person is allowed to teach, then she has a degree in education.

(v) If a person runs a high temperature, then he has a viral infection.

(vi) If Ahmad is in India, then he is in Mumbai.

(vii) If all the interior angles of triangle ABC are equal, then it is equilateral.

(viii) If the decimal expansion of x is non-terminating non-recurring, then x is an irrational number.

(ix) If $p(a) = 0$, then $x - a$ is a factor of the polynomial $p(x)$.

Notice that we have simply written the converse of each of the statements above without worrying if they are true or false. For example, consider the following statement: If Ahmad is in Mumbai, then he is in India. This statement is true. Now consider the converse: If Ahmad is in India, then he is in Mumbai. This need not be true always – he could be in any other part of India.

பொதுவாக $p \Rightarrow q$ என்ற கூற்றின் மறுதலையானது, $q \Rightarrow p$ என்பதாகும். இதில் இதில் p மற்றும் q ஆகியன கூற்றுகள் ஆகும். $p \Rightarrow q$ மற்றும் $q \Rightarrow p$ என்பன ஒன்று மற்றொன்றின் மறுதலைகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 13 : கீழ்வரும் வாக்கியங்களின் மறுதலைக் கூற்றுகளை எழுதுக.

(i) ஜமிலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள் எனில், ஆகஸ்டு 17 ஞாயிற்றுக்கிழமையில் வருகிறது.

(ii) ஆகஸ்டு 17 ஞாயிறு எனில் ஜமீலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள்.

(iii) பாலீன் கோபப்படுகிறான் எனில் அவனது முகம் சிவக்கிறது.

(iv) ஒருவரிடம் கல்வியியலில் பட்டம் *(degree)* இருப்பின், அவள் கல்வி கற்பிக்க அனுமதிக்கப்படுகிறார்.

(v) ஒருவருக்கு வைரல் நோய் *(Viral infection)* இருக்கிறது எனில் அவருக்கு காய்ச்சல் இருக்கிறது.

(vi) அகமது மும்பையில் இருக்கிறார் எனில் அவர் இந்தியாவில் இருக்கிறார்.

(vii) ABC சமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் எல்லா உட்கோணங்களும் சமம்.

(viii) x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், x இன் தசம விரிவாக்கமானது முடிவற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராதது.

(ix) $x-a$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் காரணி எனில் $p(a)=0$ ஆகும்.

தீர்வு : மேலே கூறப்பட்ட ஒவ்வொரு கூற்றும் $p \Rightarrow q$ என்றவாறு உள்ளன. ஆகவே, மறுதலையைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு, முதலில் p மற்றும் q ஆகியவற்றை அடையாளங்களை கண்டு பிறகு $q \Rightarrow p$ என்று எழுத வேண்டும்.

(i) p: ஜமீலா சைக்கிள் ஓட்டுகிறாள். மற்றும் q: 17 ஆகஸ்டு ஒரு ஞாயிற்றுக்கிழமையில் வருகிறது. ஆகவே, மறுதலையானவை 17 ஆகஸ்டு ஞாயிற்றுக்கிழமை எனில், ஜமீலா சைக்கிள் ஒட்டுகிறாள்.

(ii) இது கூற்று (i). இது மறுதலை ஆகவே, அதன் மறுதலையானது மேலே கண்ட (i) ஆகும்.

(iii) பாலீனின் முகம் சிவந்தால் அவள் கோபத்துடன் இருக்கிறாள்.

(iv) ஒருவர் கற்பிக்க அனுமதிக்கப்படுகிறார் எனில் அவரிடம் கல்வியியலில் பட்டம் உள்ளது.

(v) ஒருவருக்கு காய்ச்சல் இருக்கிறது எனில் அவருக்கு வைரல் நோய் இருக்கிறது.

(vi) அகமது இந்தியாவில் இருக்கிறார் எனில் அவர் மும்பையில் இருக்கிறார்.

(vii) ABC யின் எல்லா உட்கோணங்களும் சமம் எனில் அது சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

(viii) x இன் தசம விரிவாக்கம் முடிவுற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராதது எனில் x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

(ix) $p(a)=0$ எனில், $x-a$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் காரணி ஆகும்.

மேற்கூறிய ஒவ்வொரு கூற்றுகளுக்கும் அவற்றின் மறுதலையை, அவை உண்மையா, பொய்யா என்று பார்க்காமலேயே நாம் எழுதி வருகிறோம் என்பதைக் கவனிக்கவும். எடுத்துக்காட்டாக, கீழ்வரும் வாக்கியத்தை கவனி. அகமது அவர் இந்தியாவில் இருக்கிறார் எனில் அவர் மும்பையில் இருக்கிறார். இது எப்பொழுதுமே உண்மையாக இருக்க வேண்டியது அவசியம் இல்லை. அவர் இந்தியாவின் எப்பகுதியில் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

AP SCERT

In mathematics, especially in geometry, you will come across many situations where $p \Rightarrow q$ is true, and you will have to decide if the converse, i.e., $q \Rightarrow p$, is also true.

Example 14 : State the converses of the following statements. In each case, also decide whether the converse is true or false.

(i) If n is an even integer, then $2n + 1$ is an odd integer.

(ii) If the decimal expansion of a real number is terminating, then the number is rational.

(iii) If a transversal intersects two parallel lines, then each pair of corresponding angles is equal.

(iv) If each pair of opposite sides of a quadrilateral is equal, then the quadrilateral is a parallelogram.

(v) If two triangles are congruent, then their corresponding angles are equal.

Solution :

(i) The converse is 'If $2n + 1$ is an odd integer, then n is an even integer.' This is a false statement (for example, $15 = 2(7) + 1$, and 7 is odd).

(ii) 'If a real number is rational, then its decimal expansion is terminating', is the converse. This is a false statement, because a rational number can also have a non-terminating recurring decimal expansion.

(iii) The converse is 'If a transversal intersects two lines in such a way that each pair of corresponding angles are equal, then the two lines are parallel.' We have assumed, by Axiom 6.4 of your Class IX textbook, that this statement is true.

(iv) 'If a quadrilateral is a parallelogram, then each pair of its opposite sides is equal', is the converse. This is true (Theorem 8.1, Class IX).

(v) 'If the corresponding angles in two triangles are equal, then they are congruent', is the converse. This statement is false. We leave it to you to find suitable counter-examples.

EXERCISE A1.5

1. Write the converses of the following statements.

(i) If it is hot in Tokyo, then Sharan sweats a lot.

(ii) If Shalini is hungry, then her stomach grumbles.

(iii) If Jaswant has a scholarship, then she can get a degree.

(iv) If a plant has flowers, then it is alive.

(v) If an animal is a cat, then it has a tail.

கணிதத்தில், குறிப்பாக வடிவியலில் : $p \Rightarrow q$ என்பது உண்மையாகவும் அதன் மறுதலையான $q \Rightarrow p$, என்பதும் உண்மையா இல்லையா என்று முடிவு செய்ய வேண்டிய பல சந்தர்பங்களை எதிர் கொள்வீர்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 14 : கீழ்வரும் வாக்கியங்களின் மறுதலைகளை எழுதுக. ஒவ்வொன்றின் மறுதலையும் உண்மையா? பொய்யா? என்று முடிவு செய்யுங்கள்.

(i) n என்பது இரட்டை முழு எனில், $2n+1$ என்பது ஒரு ஒற்றை முழு எண் ஆகும்.

(ii) ஒரு மெய் எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுள்ளது எனில் அந்த எண் விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(iii) இரு இணை கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி *(transversal)* வெட்டுகிறது எனில், ஒவ்வொரு ஜோடி ஒத்த கோணங்களும் சமம்.

(iv) ஒரு நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்பக்கங்களும் சமமாக இருப்பின், அந்த நாற்கரமானது ஒரு இணைகரம் ஆகும்.

(v) இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமம் எனில், அவற்றின் ஒத்த கோணங்களும் சமம்.

தீர்வு :

(i) மறுதலைக் கூற்று, $2n+1$ என்பது ஒற்றை முழு எனில் n என்பது ஒரு இரட்டை முழு எண் ஆகும். என்பது ஒரு தவறான கூற்றாகும். (எடுத்துக்காட்டாக, $15 = 2(7) + 1$, மற்றும் 7 என்பது ஒற்றை எண்)

(ii) 'ஒரு மெய் எண்ணானது விகிதமுறு எண் எனில் அதன் தசம விரிவாக்கம் முடிவு கொண்டது.' என்பதே மறுதலையாகும். இது தவரான கூற்றாகும். ஏனெனில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணானது. முடிவுற்ற திரும்ப திரும்ப வரும் தசம விரிவாக்கத்தை கொண்டதாகவும் இருக்கலாம்.

(iii) 'ஒரு குறுக்குவெட்டி இரு கோடுகளை, ஒவ்வொரு ஜோடி ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கம் வகையில் வெட்டுமேயாயின், அவ்விரு கோடுகளும் இணை கோடுகள் ஆகும்.' என்பதே மறுதலை ஆகும். 9 ஆம் வகுப்பு பாடப்புத்தகத்தில், எடுகோள் 6.4 இன்படி, இக்கூற்று உண்மையே என்று ஊகித்துள்ளோம்.

(iv) 'ஒரு நாற்கரமானது இணைகரம் எனில், ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம், என்பதே மறுதலையாகும். இது உண்மையான கூற்றாகும் (தேற்றம் 8.1 வகுப்பு 9)

(v) இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில், அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும். என்பதே மறுதலையாகும். இக்கூற்று பொய்யானது. இதற்கான தக்க எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டை நீங்களே கண்டுபிடியுங்கள்.

பயிற்சி A1.5

1. கீழ்வரும் கூற்றுகளின் மறுதலையை எழுதுக.

(i) டோக்கியோவில் வெப்பம் அதிகமாக இருந்தால் சரண் அதிகமாக வியர்வை விடுவான்.

(ii) ஷாலினிக்கு பசித்தால் அவள் வயிறு முணுமுணுக்கும்.

(iii) ஜஸ்வந்த்திற்கு உதவித்தொகை கிடைக்குமேயாயின் அவள் பட்டம் பெறலாம்.

(iv) ஒரு செடியில் மலர்கள் உள்ளன என்றால், அது உயிருடன் உள்ளது என்று பொருள்.

(v) ஒரு விலங்கு பூனையாக இருக்கமேயாயின், அதற்கு வால் உண்டு.

APSCERT

2. Write the converses of the following statements. Also, decide in each case whether the converse is true or false.

(i) If triangle ABC is isosceles, then its base angles are equal.

(ii) If an integer is odd, then its square is an odd integer.

(iii) If $x^2 = 1$, then $x = 1$.

(iv) If ABCD is a parallelogram, then AC and BD bisect each other.

(v) If a, b and c, are whole numbers, then $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(vi) If x and y are two odd numbers, then $x + y$ is an even number.

(vii) If vertices of a parallelogram lie on a circle, then it is a rectangle.

A1.7 Proof by Contradiction

So far, in all our examples, we used direct arguments to establish the truth of the results. We now explore 'indirect' arguments, in particular, a very powerful tool in mathematics known as 'proof by contradiction'. We have already used this method in Chapter 1 to establish the irrationality of several numbers and also in other chapters to prove some theorems. Here, we do several more examples to illustrate the idea.

Before we proceed, let us explain what a *contradiction* is. In mathematics, a contradiction occurs when we get a statement p such that p is true and $\sim p$, its negation, is also true. For example,

p: $x = \frac{a}{b}$, where a and b are coprime.

q: 2 divides both 'a' and 'b'.

If we assume that p is true and also manage to show that q is true, then we have arrived at a contradiction, because q implies that the negation of p is true. If you remember, this is exactly what happened when we tried to prove that $\sqrt{2}$ is irrational (see Chapter 1).

How does proof by contradiction work? Let us see this through a specific example.

Suppose we are given the following :

All women are mortal. A is a woman. Prove that A is mortal.

Even though this is a rather easy example, let us see how we can prove this by contradiction.

- Let us assume that we want to establish the truth of a statement p (here we want to show that p : 'A is mortal' is true).

AP SCERT

2. பின்வரும் கூற்றுகளின் மறுதலைகளை எழுதுக. மேலும் அவை ஒவ்வொன்றிலும் மறுதலையானது உண்மையா? பொய்யா? என்று முடிவு செய்க.

(i) ABC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் அடித்தளக் கோணங்கள் சமம்.

(ii) ஒரு முழுவானது ஒற்றை எண்ணாக இருந்தால், அதன் வாக்கமானது ஒரு ஒற்றை முழு ஆகும்.

(iii) $x^2 = 1$ எனில், $x = 1$.

(iv) ABCD என்பது இணைகரம் எனில், AC மற்றும் BD ஒன்றை மற்றொன்று இருசமக் கூறிடும்.

(v) a, b என்பன முழு எண்கள், *(Whole Numbers)* எனில் $a + (b + c) = (a + b) + c$. ஆகும்.

(vi) x மற்றும் y இரு ஒற்றை எண்கள் எனில், $x + y$ என்பது ஒரு இரட்டை எண் ஆகும்.

(vii) ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருப்பின், அது ஒரு செவ்வகம்.

A 1.7 முரண்பாட்டு நிரூபணம் (Proof by contradiction)

இது வரையில், எல்லா எடுத்தக்காட்டுகளிலும் நாம், முடிவுகளின் உண்மையை நிலை நிறுத்த, நேரடி வாதங்களையே பயன்படுத்தினோம். இனி நாம், 'மறைமுகமான' வாதங்களை குறிப்பாக, கணிதத்தில் ஒரு சக்திவாய்ந்த கருவியான 'ரண்பாடல் நிரூபணம்' என்பதைப் பற்றி ஆராய்வோம். இதை நாம் பாடம் 8-இல் பல எண்களின் விகிதமுறாத்தன்மையை நிலைநாட்ட பயன்படுத்தியுள்ளோம். மேலும் வேறு சில பாடங்களில், தேற்றங்களை நிரூபிக்கவும் பயன்படுத்தியுள்ளோம். இங்கு, இக்கருத்தை எடுத்துரைக்க பல்வேறு எடுத்துக் காட்டுகளை செய்வோம்.

முதலில் முரண்பாடு *(Contradiction)* என்றால் என்ன என்பதை விவரிப்போம். கணிதவியலில் p என்ற கூற்று உண்மையாகவும் மற்றும் அதன் மறுப்புக் கூற்று $\sim p$ என்பதும் உண்மையாகவும் அமையும் போது, முரண்பாடு என்பது வருகிறது. எடுத்துக்காட்டாக.

p: $x = \dfrac{a}{b}$, இதில் a, மற்றும் b ஆகியவை அதாவது சார்பகா எண்கள், அதாவது a, மற்றும் b இவற்றின் 1ஐத் தவிர வேறு எந்த பொதுக்காரணியும் கிடையாது.

q: 'a' மற்றும் 'b'ஐ 2 என்ற எண் வகுக்கிறது.

p என்பது உண்மை என்று நாம் ஊகிக்கிறோம் மற்றும் எவ்வாறேனும் q என்பதும் உண்மை என நாம் காட்டுவோமேயானால் நாம் ஒரு முரண்பாட்டை வந்தடைந்து இருக்கிறோம் என்று பொருள். ஏனெனில் p யின் மறுப்புக்கூற்றான q என்பதும் உண்மை என உணர்த்துகிறது. நாம் $\sqrt{2}$ வை விகிதமுறா எண் எனக்காட்ட முயலும் போது, மிகச் சரியாக இதுவே நடக்கிறது என்பதை நினைவுக் கூறுக. (அத்தியாயம் 1 ஐ பார்க்க)

முரண்பாட்டிலால் நிரூபணம் என்பது எவ்வாறு செயல்படுகிறது? குறிப்பிட்ட தொரு எடுத்துக்காட்டைக் கொண்டு இதைப் பார்க்கலாம்.

கீழ்வருவனவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்க :

எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள் A என்பது ஒரு பெண் A இறப்புள்ளவன் ஆவாள் என நிரூபி.

- கூற்று p யின் உண்மையை நிலைநாட்ட வேண்டும் என நாம் ஊகித்துக்கொள்ளலாம். (இங்கு நாம் p : 'A இறப்புள்ளவன் ஆவாள், என்பது உண்மை என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்)

AP SCERT

- So, we begin by assuming that the statement is not true, that is, we assume that the negation of p is true (i.e., A is not mortal).
- We then proceed to carry out a series of logical deductions based on the truth of the negation of p. (Since A is not mortal, we have a counter-example to the statement 'All women are mortal.' Hence, it is false that all women are mortal.)
- If this leads to a contradiction, then the contradiction arises because of our faulty assumption that p is not true. (We have a contradiction, since we have shown that the statement 'All women are mortal' and its negation, 'Not all women are mortal' is true at the same time. This contradiction arose, because we assumed that A is not mortal.)
- Therefore, our assumption is wrong, i.e., p has to be true. (So, A is mortal.)

Let us now look at examples from mathematics.

Example 15 : The product of a non-zero rational number and an irrational number is irrational.

Solution :

Statements	Analysis/Comment
We will use proof by contradiction. Let r be a non-zero rational number and x be an irrational number. Let $r = \frac{m}{n}$, where m, n are integers and $m \neq 0$, $n \neq 0$. We need to prove that rx is irrational.	
Assume rx is rational.	Here, we are assuming the negation of the statement that we need to prove.
Then $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, where p and q are integers.	This follow from the previous statement and the definition of a rational number.
Rearranging the equation $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, and using the fact that $r = \frac{m}{n}$, we get $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$.	

AP SCERT

- ஆகவே நாம் கூற்று உண்மை இல்லை என்று ஊகித்துக் கொண்டு தொடங்குவோம். அதாவது p யின் மறுப்புக் கூற்று உண்மை என்று ஊகிப்போம். (அதாவது A இறப்பதற்றவன்)
- ஆகவே நாம் கூற்று உண்மை இல்லை என்று ஊகித்துக் கொண்டு தொடங்குவோம். அதாவது p யின் மறப்புக் கூற்று உண்மை என்று ஊகிப்போம். (அதாவது A இறப்பற்றவள்)
- p யின் மறுப்புக் கூற்று உண்மை என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரிசையாக தர்க்கரீதியாக சில உய்ப்புகளை மேற்கொள்கிறோம். (A இறப்பற்றவள் என்பதால், நமக்கு எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள், என்பதற்கு ஒரு எதிர்மறை எடுத்துக்காட்டு கிடைத்துள்ளது. ஆகவே, எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள் என்பது பொய்யாகிறது.
- இது முன்னுக்கு பின் முரணாக அமைந்துள்ளது. இந்த முரண்பாடு வந்ததன் காரணம் p என்பது உண்மை அல்ல என்ற நமது தவறான ஊகமே.

(இதில் முரண்பாடு என்னவென்றால், நாம் இங்கே, ‘எல்லா பெண்களும் இறப்புள்ளவர்கள்’ மற்றும் அதன் மறுப்புக் கூற்றான பெண்களில் எல்லோருமே இறப்புள்ளவர்கள் அல்ல’ என்ற இரண்டையுமே ஒரே சமயத்தில் உண்மை எனக் காட்டியுள்ளோம். இம்முரண்பாடானது வந்ததன் காரணம் A என்பவர் இறப்பற்றவள் என்ற ஊகித்ததே)

- ஆகவோ, நமது ஊகமே தவறானது, அதாவது p என்பது உண்மையாக இருந்தே ஆக வேண்டும் (ஆக, A இறப்புள்ளவன் ஆவாள்)

எடுத்துக்காட்டு 15 : ஒரு சுழி அல்லாத விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகியவற்றின் பெருக்கல் தொகையானது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

தீர்வு :

கூற்றுகள்	**ஆய்வு / குறிப்பு**
நாம் முரண்பாட்டினால் நிரூபணத்தைப் பயன்படுத்தலாம். r என்பது சுழி அல்லாத விகிதமுறு எண் மற்றும் x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்க. $r=\frac{m}{n}$ என்க. இதில் m, n என்பன முழுக்கள் $m \neq 0, n \neq 0$. rx என்பது விகிதமுறா எண் என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்	
rx என்பது விகிதமுறு எண் என ஊகிப்போம்.	இங்கு நாம், நிரூபிக்கப்பட வேண்டிய கூற்றின் மறுப்புக்கூற்றை ஊகிக்கிறோம்.
அப்படியெனில் $rx=\frac{p}{q}$ இதில் p, மற்றும் q ஆகியன முழுக்கள்	இது முந்தைய கூற்றில் இருந்து தொடர்கிறது. மற்றும் விகிதமுறு எண்களின் வறையறை.
$rx=\frac{p}{q}$ $p,\ q \in Z$ மற்றும் என்பதைப் பயன்படுத்தி $q \neq 0$. $x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{mq}$	

Since np and mq are integers and $mq \neq 0$, x is a rational number.	Using properties of integers, and definition of a rational number.
This is a contradiction, because we have shown x to be rational, but by our hypothesis, we have x is irrational.	This is what we were looking for — a contradiction.
The contradiction has arisen because of the faulty assumption that rx is rational. Therefore, rx is irrational.	Logical deduction.

We now prove Example 11, but this time using proof by contradiction. The proof is given below:

Statements	**Analysis/Comment**
Let us assume that the statement is note true.	As we saw earlier, this is the starting point for an argument using 'proof by contradiction'.
So we suppose that there exists a prime number $p > 3$, which is not of the form $6n + 1$ or $6n + 5$, where n is a whole number.	This is the negation of the statement in the result.
Using Euclid's division lemma on division by 6, and using the fact that p is not of the form $6n + 1$ or $6n + 5$, we get $p = 6n$ or $6n + 2$ or $6n + 3$ or $6n + 4$.	Using earlier proved results.
Therefore, p is divisible by either 2 or 3.	Logical deduction.
So, p is not a prime.	Logical deduction.
This is a contradiction, because by our hypothesis p is prime.	Precisely what we want!
The contradiction has arisen, because we assumed that there exists a prime number $p > 3$ which is not of the form $6n + 1$ or $6n + 5$.	
Hence, every prime number greater than 3 is of the form $6n + 1$ or $6n + 5$.	We reach the conclusion.

APSCERT

np மற்றும் mq என்பன முழுக்கள், $mq \neq 0$, ஆகவே x என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.	முழுக்களின் பண்புகள் மற்றும் விகிதமுறு எண்களின் வரையறை இவற்றைப் பயன்படுத்துதல்.
இது ஒரு முரண்பாடு, ஏனெனில் x என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என்று நாம் காட்டியுள்ளோம். ஆனால் நமது கற்பிதன் கொள்கையின் படி x ஏன்பது விகதமுறா எண்.	இதைத்தான் நாம் எதிர் பார்க்கிறோம் – ஒரு முரண்பாடு
இந்த முரண்பாடு வந்ததன் காரணம் நமது தவறான ஊகமான rx என்பது விகிதமுறு எண் என்பதே ஆகவே rx என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு.

இனி நாம் எடுத்துக்காட்டு 11 – ஐ முரண்பாட்டினால் நிரூபிக்கலாம். நிரூபணம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்பு
கூற்றானது உண்மை அல்ல என்று ஊகிப்போம்	நாம் முன்னமே கற்றவாறு, முரண்பாட்டினால் நிரூபணத்திற்கு இதுவே முதல் வாதம்.
எனவே, $6n + 1$ அல்லது $6n + 5$, என்ற வடிவில் இல்லாதவாறு 3 ஐ விட அதிகமான ஒரு பகா எண் $p > 3$ இருக்கிறது என்று கொள்க.	இது முடிவு கூற்றின் மறுப்புக் கூற்றாகும்.
யூக்லிட்-இன் வகுத்தல் கோட்பாட்டை *(lemma)* கொண்டு (6-ஆல் வகுப்பதன் மீது) மற்றும் p என்பது $6n + 1$ அல்லது $6n + 5$ ஆகிய வடிவில் இல்லை என்பதைக் கொண்டு நமக்கு $p = 6n$ அல்லது $6n + 2$ அல்லது $6n + 3$ அல்லது $6n + 4$. என்பது கிடைக்கிறது.	முன்னமே நிரூபிக்கப்பட்ட முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி
ஆகவே p என்பது 2 அல்லது 3 ஆல் வகுபடுகிறது.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு.
ஆக p என்பது பகா எண் அல்ல.	தர்க்க ரீதியான உய்ப்பு
இது ஒரு முரண்பாடு காரணம் நமது கற்பிதக் கொள்கையான p ஒரு பகா எண் என்பதால்.	இதுவே நமக்குத் தேவைப்பட்டது.
இம் முரண்பாடு எழுதவற்கான காரணம், நாம் $6n + 1$ அல்லது $6n + 5$ ஆகிய வடிவில் இல்லாத 3-ஐ விடப் பெரிய பகா எண் $p > 3$ ஒன்று இருக்கிறது என்று ஊகித்ததே.	
ஆகவே, 3-ஐ விடப்பெரிய ஒவ்வொரு பகா எண்ணும் $6n + 1$ அல்லது $6n + 5$ ஆகிய வடிவில் உள்ளது	நாம் சரியான முடிவிற்கு வந்தடைந்தோம்.

Remark : The example of the proof above shows you, yet again, that there can be several ways of proving a result.

Theorem A1.2 : *Out of all the line segments, drawn from a point to points of a line not passing through the point, the smallest is the perpendicular to the line.*

Proof :

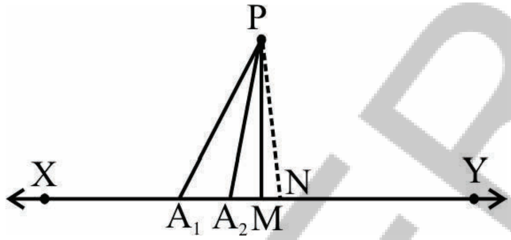


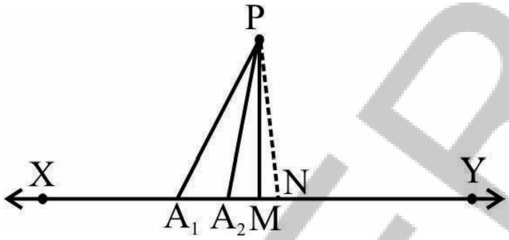
Fig. A1.5

Statements	Analysis/Comment
Let XY be the given line, P a point not lying on XY and PM, PA_1, PA_2, . . . etc., be the line segments drawn from P to the points of the line XY, out of which PM is the smallest (see Fig. A1.5).	Since we have to prove that out of all PM, PA_1, PA_2, . . . etc., the smallest is perpendicular to XY, we start by taking these line segments.
Let PM be not perpendicular to XY	This is the negation of the statement to be proved by contradiction.
Draw a perpendicular PN on the line XY, shown by dotted lines in Fig. A1.5.	We often need constructions to prove our results.
PN is the smallest of all the line segments PM, PA_1, PA_2, . . . etc., which means PN < PM.	Side of right triangle is less than the hypotenuse and known property of numbers.
This contradicts our hypothesis that PM is the smallest of all such line segments.	Precisely what we want!
Therefore, the line segment PM is perpendicular to XY.	We reach the conclusion.

கூற்று : மேலே உள்ள நிரூபணத்தின் எடுத்துக்காட்டானது. திரும்ப திரும்ப, ஒரு முடிவை பல வழிகளில் நிரூபிக்கப்படலாம் என்பதையே காட்டுகிறது.

தேற்றம் A1.2 : ஒரு புள்ளியில் இருந்து, அதன் வழியே செல்லாத நேர்கோட்டின் மீதமைந்த புள்ளிகளுக்கு வரையப்படும் எல்லா கோட்டுதுண்களிலும், மிகச் சிறியதானது, அக்கோட்டிற்கான செங்குத்துக்கோடே ஆகும்.

நிரூபணம் :



படம்A 1.5

கூற்றுகள்	ஆய்வு / குறிப்பு
XY என்பது கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடு என்க. P என்ற புள்ளி XY கோட்டின் மீது அமையாத ஒரு புள்ளி மற்றும் PM, PA_1, PA_2, . . . ஆகியன புள்ளி P யில் இருந்து கோடு XY, மீதமைந்த புள்ளிகளுக்கு வரையப்படும் கோட்டுத்துண்டுகள், இவற்றில் PM என்பதே மிகச்சிறியது.	PM, PA_1, PA_2, . . .ஆகிய பலவற்றில் XY, க்கான குத்துக்கோடே மிகச்சிறியது என்று நிரூபிக்கப்பட வேண்டியதால், நாம் இக்கோட்டுத்துண்டுகளை எடுத்துக் கொண்டு தொடங்குகிறோம்.
PM என்பது XY க்கு செங்குத்தாக இல்லை எனக் கொள்வோம்.	முரண்பாடு முறையினால் நிரூபிக்கப்பட வேண்டிய கூற்றுக்கு இது மறுப்புக் கூற்று ஆகும்.
படம் A 1.5 ஐல் காட்டியவாறு கோடு XYக்கு PN என்ற (dotted) செங்குத்துக்கோடு ஒன்றை வரைக.	நமது முடிவுகளை நிரூபிக்க நாம் அடிக்கடி சில அமைப்புகளை செய்ய வேண்டி உள்ளது.
PM, PA_1, PA_2, . . .ஆகிய பலவற்றில் PN என்பதே மிகச்சிறிய கோடு ஆகும். அதாவது PN < PM.	செங்கோண, முக்கோணத்தில் பக்க அளவானது கர்ணத்தைவிட சிறியது மற்றும் எண்களின் தெரிந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்துதல்
இது நமது கற்பிதக் கொள்கையான PM என்பதே எல்லாவற்றையும் விடச்சிறிய கோடு என்பதற்கு முரண்படுகிறது.	இதுவே நமக்கு தேவை!
ஆகவே, கோட்டுத்துண்டு என்பது PM என்பதே XY க்கான செங்குத்துக் கோடாகும்.	நாம் முடிவை வந்தடைந்தோம்.

AP SCERT

EXERCISE A1.6

1. Suppose $a + b = c + d$, and $a < c$. Use proof by contradiction to show $b > d$.
2. Let r be a rational number and x be an irrational number. Use proof by contradiction to show that $r + x$ is an irrational number.
3. Use proof by contradiction to prove that if for an integer a, a^2 is even, then so is a. [**Hint :** Assume a is not even, that is, it is of the form $2n + 1$, for some integer n, and then proceed.]
4. Use proof by contradiction to prove that if for an integer a, a^2 is divisible by 3, then a is divisible by 3.
5. Use proof by contradiction to show that there is no value of n for which 6^n ends with the digit zero.
6. Prove by contradiction that two distinct lines in a plane cannot intersect in more than one point.

A1.8 Summary

In this Appendix, you have studied the following points :

1. Different ingredients of a proof and other related concepts learnt in Class IX.
2. The negation of a statement.
3. The converse of a statement.
4. Proof by contradiction.

AP SCERT

பயிற்சி A1.6

1. $a+b=c+d$, மற்றும் $a<c$ என்க. முரண்பாட்டால் நிரூபிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி $b>d$ என்ற நிரூபி.

2. r என்பது விகிதமுறு எண் மற்றும் x என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்க. $r+x$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்று முரண்பாடு நிரூபிக்கும் முறையைக் கொண்டு நிரூபி.

3. முரண்பாடு நிரூபிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி a என்ற முழுவிற்கு a^2 என்பது இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் a என்ற முழுவிற்கு n என்பது இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் a என்பதும் இரட்டை எண்ணே என்று நிரூபி.

குறிப்பு : a என்பது இரட்டை எண் அல்ல என்று ஊகி, அதாவது, அது n என்ற ஏதேனும் ஒரு முழுவிற்கு $2n+1$, என்ற வடிவில் இருப்பதாகவும் ஊகித்துக்கொண்டு நிரூபிக்க முற்படவும்.)

4. முரண்பாடான நிரூபண முறையைப் பயன்படுத்தி, a என்ற முழுவிற்கு a^2 என்பது 3 ஆல் வகுபடுமேயாயின் a என்பதும் 3 ஆல் வகுபடும் என்று நிரூபி.

5. முரண்பாடு நிரூபிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி n இன் எந்த மதிப்பிற்கும் 6^n என்பதன் முடிவு இலக்கம் சுழியாக இருக்க முடியாது எனக்காட்டு.

6. ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகளானவை, ஒன்றைவிட அதிகமான புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்வது சாத்தியமில்லை என்பதை முரண்பாடு நிரூபிக்கும் முறையினால் நிரூபி.

A 1.8 பாடச்சுருக்கம்

இந்த பின்னிணைப்பில், நீங்கள் கீழ்க்கண்ட கருத்துகளை படித்தீர்கள்:

1. 9 ஆம் வகுப்பில் கற்ற நிரூபணங்களின் படிகள் மற்றும் இதர தகவல்கள்.

2. ஒரு கூற்றின் எதிர்மறை

3. ஒரு கூற்றின் மறுதலை

4. முரண்பாடு முறை நிரூபணம்.

ANSWERS/HINTS

EXERCISE 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) LCM = 182; HCF = 13 (ii) LCM = 23460; HCF = 2 (iii) LCM = 3024; HCF = 6

3. (i) LCM = 420; HCF = 3 (ii) LCM = 11339; HCF = 1 (iii) LCM = 1800; HCF = 1

4. 22338 **7.** 36 minutes

EXERCISE 2.1

1. (i) No zeroes (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

EXERCISE 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

EXERCISE 3.1

1. (i) Required pair of linear equations is
$x + y = 10$; $x - y = 4$, where x is the number of girls and y is the number of boys.
To solve graphically draw the graphs of these equations on the same axes on graph paper.
Girls = 7, Boys = 3.

APSCERT

விடைகள் / குறிப்புகள்

பயிற்சி 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i)மீ.சி.ம=182;மீ.பொ.கா=13(ii)மீ.சி.ம=23460;மீ.பொ.கா= 2(iii)மீ.சி.ம=3024;மீ.பொ.கா= 6

3. (i)மீ.சி.ம=420;மீ.பொ.கா=3 (ii)மீ.சி.ம=11339; மீ.பொ.கா=1(iii)மீ.சி.ம=1800;மீ.பொ.கா = 1

4. 22338 **7.** 36 நிமிடங்கள்

பயிற்சி 2.1

1. (i) பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

பயிற்சி 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

பயிற்சி 3.1

1. (i) தேவையான நேரிய சமன்பாடுகள் ஜோடி

$x + y = 10$; $x - y = 4$, இங்கு x என்பது மாணவிகளின் எண்ணிக்கை y என்பது மாணவர்களின் எண்ணிக்கை. இச் சமன்பாடுகளை தீர்க்க, வரைபடத்தாளில் ஒரே அச்சுகளின் மீது வரையவும்.
மாணவிகளின் எண்ணிக்கை $= 7$, மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 3$.

AP SCERT

(ii) Required pair of linear equations is

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, where x and y represent the cost (in ₹) of a pencil and of a pen respectively.

To solve graphically, draw the graphs of these equations on the same axes on graph paper.

Cost of one pencil = ₹ 3, Cost of one pen = ₹ 5

2. (i) Intersect at a point (ii) Coincident (iii) Parallel

3. (i) Consistent (ii) Inconsistent (iii) Consistent

(iv) Consistent (v) Consistent

4. (i) Consistent (ii) Inconsistent (iii) Consistent (iv) Inconsistent

The solution of (i) above, is given by $y = 5 - x$, where x can take any value, i.e., there are infinitely many solutions.

The solution of (iii) above is $x = 2$, $y = 2$, i.e., unique solution.

5. Length = 20 m and breadth = 16 m.

6. One possible answer for the three parts:

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. Vertices of the triangle are (–1, 0), (4, 0) and (2, 3).

EXERCISE 3.2

1. (i) $x = 9$, $y = 5$ (ii) $s = 9$, $t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

where x can take any value, i.e., infinitely many solutions.

(iv) $x = 2$, $y = 3$ (v) $x = 0$, $y = 0$ (vi) $x = 2$, $y = 3$

2. $x = -2$, $y = 5$; $m = -1$

3. (i) $x - y = 26$, $x = 3y$, where x and y are two numbers ($x > y$); $x = 39$, $y = 13$.

(ii) $x - y = 18$, $x + y = 180$, where x and y are the measures of the two angles in degrees; $x = 99$, $y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, where x and y are the costs (in ₹) of one bat and one ball respectively; $x = 500$, $y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$, where x is the fixed charge (in ₹) and y is the charge (in ₹ per km); $x = 5$, $y = 10$; ₹ 255.

(v) $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$, where x and y are numerator and denominator of the fraction; $\frac{7}{9}$ ($x = 7$, $y = 9$).

(vi) $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$, where x and y are the ages in years of Jacob and his son; $x = 40$, $y = 10$.

(ii) தேவையான நேரிய சமன்பாடுகள் ஜோடி

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, இங்கு x – பென்சிலின் விலை, y – பேனாவின் விலை. இச் சமன்பாடுகளை தீர்க்க, வரைபடத்தாளில் ஒரே அச்சுகளின் மீது வரையவும்.

பென்சிலின் விலை = ₹ 3, பேனாவின் விலை = ₹ 5

2. (i) ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. (ii) ஒன்றன் மீது ஒன்று (iii) இணை

3. (i) இசைவு (ii) ஒவ்வா (iii) இசைவு

(iv) இசைவு (v) இசைவு

4. (i) இசைவு (ii) ஒவ்வா (iii) இசைவு (iv) ஒவ்வா

மேலே உள்ள (i) ன் தீர்வு $y = 5 - x$, வழியே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு x எந்த மதிப்பையும் கொண்டிருக்கலாம். அதாவது, எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன.

மேலே உள்ள (iii) ன் தீர்வு $x = 2, y = 2$, அதாவது ஒரே ஒரு தீர்வு.

5. நீளம் = 20 மீ மற்றும் அகலம் = 16 மீ

6. மூன்றிற்கும் ஒரு இயன்ற விடையானது,

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகள் $(-1, 0)$, $(4, 0)$ மற்றும் $(2, 3)$.

பயிற்சி 3.2

1. (i) $x = 9, \ y = 5$ (ii) $s = 9, \ t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

இங்கு x எந்த மதிப்பையும் கொண்டிருக்கலாம். அதாவது, எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன.

(iv) $x = 2, \ y = 3$ (v) $x = 0, \ y = 0$ (vi) $x = 2, \ y = 3$

2. $x = -2, \ y = 5; \ m = -1$

3. (i) $x - y = 26, \ x = 3y$, இங்கு x மற்றும் y ஆகிய இரண்டு எண்கள் $(x > y)$; $x = 39, y = 13$.

(ii) $x - y = 18, \ x + y = 180$, இங்கு x மற்றும் y ஆகியவை இரண்டு கோண அளவுகள்; $x = 99, \ y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, இங்கு x மற்றும் y என்பன முறையே ஒரு மட்டை மற்றும் பந்தின் விலை (₹ ல்); $x = 500, y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105, \ x + 15y = 155$, இங்கு x என்பது நிலையான பயண கட்டணம் (₹ல்) மற்றும் y என்பது கி.மீ. க்கு பயண கட்டணம் (₹ ல்); $x = 5, \ y = 10$; ₹ 255.

(v) $11x - 9y + 4 = 0, 6x - 5y + 3 = 0$, இங்கு x மற்றும் y என்பவை தொகுதி,பகுதி $\frac{7}{9}$ $(x = 7, \ y = 9)$.

(vi) $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$, இங்கு x மற்றும் y என்பவை ஜாகப் மற்றும் மகனின் வயது (ஆண்டுகளில்); $x = 40, y = 10$.

EXERCISE 3.3

1. (i) $x = \frac{19}{5},\ y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2,\ y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2,\ y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, where x and y are the numerator and denominator of the fraction; $\frac{3}{5}$.

(ii) $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, where x and y are the ages (in years) of Nuri and Sonu respectively. Age of Nuri (x) = 50, Age of Sonu (y) = 20.

(iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$, where x and y are respectively the tens and units digits of the number; 18.

(iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, where x and y are respectively the number of ₹ 50 and ₹ 100 notes; $x = 10$, $y = 15$.

(v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, where x is the fixed charge (in ₹) and y is the additional charge (in ₹) per day; $x = 15$, $y = 3$.

EXERCISE 4.1

1. (i) Yes (ii) Yes (iii) No (iv) Yes

(v) Yes (vi) No (vii) No (viii) Yes

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, where x is breadth (in metres) of the plot.

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, where x is the smaller integer.

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, where x (in years) is the present age of Rohan.

(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, where u (in km/h) is the speed of the train.

EXERCISE 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. Numbers are 13 and 14. **4.** Positive integers are 13 and 14.

5. 5 cm and 12 cm **6.** Number of articles = 6, Cost of each article = ₹ 15

AP SCERT

பயிற்சி 3.3

1. (i) $x = \frac{19}{5},\ y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2,\ y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

   (iv) $x = 2,\ y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0, 2x - y - 1 = 0$, இங்கு x மற்றும் y என்பவை தொகுதி, பகுதி. பின்னம் $\frac{3}{5}$.

   (ii) $x - 3y + 10 = 0,\ x - 2y - 10 = 0$, இங்கு x மற்றும் y என்பது முறையே நூரி மற்றும் சோனுவின் வயதுகள் (ஆண்டுகளில்) நூரி வயது $(x) = 50$, சோனு வயது $(y) = 20$.

   (iii) $x + y = 9,\ 8x - y = 0$, இங்கு x மற்றும் y என்பது முறையே பத்து மற்றும் ஒன்று தான இட மதிப்புகள்; 18.

   (iv) $x + 2y = 40,\ x + y = 25$, இங்கு x மற்றும் y என்பது முறையே ₹ 50 மற்றும் ₹ 100 நோட்டுகள்; $x = 10, y = 15$.

   (v) $x + 4y = 27,\ x + 2y = 21$, இங்கு x என்பது ஒரு நாளைக்கு நிலையான செலவு (₹ல்) மற்றும் y என்பது கூடுதல் செலவு (₹ல்) ; $x = 15,\ y = 3$.

பயிற்சி 4.1

1. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) இல்லை (iv) ஆம்

   (v) ஆம் (vi) இல்லை (vii) இல்லை (viii) ஆம்

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, இங்கு x என்பது மனையின் அகலம் (மீட்டர்களில்).

   (ii) $x^2 + x - 306 = 0$, இங்கு x என்பது சிறிய முழுக்கள்.

   (iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, இங்கு x என்பது (வருடங்களில்) ரோகனின் தற்போதைய வயது.

   (iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, இங்கு u என்பது (கி.மீ/மணி) இரயிலின் வேகம்.

பயிற்சி 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

   (iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. எண்கள் 13 மற்றும் 14. 4. மிகை முழுக்கள் 13 மற்றும் 14.

5. 5 செ.மீ. மற்றும் 12 செ.மீ. 6. பொருட்களின் எண்ணிக்கை = 6, ஒவ்வொரு பொருளின் விலை = ₹ 15

APSCERT

EXERCISE 4.3

1. (i) Real roots do not exist (ii) Equal roots; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) Distinct roots; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm\, 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. Yes. 40 m, 20 m **4.** No **5.** Yes. 20 m, 20 m

EXERCISE 5.1

1. (i) Yes. 15, 23, 31, . . . forms an AP as each succeeding term is obtained by adding 8 in its preceding term.

(ii) No. Volumes are V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \cdots$ (iii) Yes. 150, 200, 250, . . . form an AP.

(iv) No. Amounts are 10000 $\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \cdots$

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1. 50, – 1.75, – 2.0

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) No (ii) Yes. $d = \frac{1}{2}$; 4, $\frac{9}{2}$, 5

(iii) Yes. $d = -2$; – 9.2, –11.2, – 13.2 (iv) Yes. $d = 4$; 6, 10, 14

(v) Yes. $d = \sqrt{2}$; $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) No

(vii) Yes. $d = -4$; – 16, – 20, – 24 (viii) Yes. $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) No (x) Yes. $d = a$; $5a, 6a, 7a$

(xi) No (xii) Yes. $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) No (xiv) No (xv) Yes. $d = 24$; 97, 121, 145

EXERCISE 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

AP SCERT

பயிற்சி 4.3

1.(i)மெய்மூலங்கள் இல்லை(ii) சமமான மூலங்கள்; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii)வெவ்வேறு மூலங்கள்; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm\, 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. ஆம், 40 மீ, 20 மீ **4.** முடியாது **5.** ஆம், 20 மீ, 20 மீ

பயிற்சி 5.1

1. (i) ஆம், 15, 23, 31, . . . AP தொடரில் முன்உறுப்பிற்கு 8 ஐ சேர்த்தால் அடுத்தஉறுப்பு கிடைக்கும்.

(ii) இல்லை. கன அளவுகளின் எண்ணிக்கை $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \ldots$

(iii) ஆம், 150, 200, 250, . . . AP தொடராக ஏற்படும்.

(iv) இல்லை, மொத்ததொகை வரிசையாக $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \ldots$

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1. 50, – 1.75, – 2.0

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) இல்லை (ii) ஆம், $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) ஆம், $d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) ஆம், $d = 4;\ 6, 10, 14$

(v) ஆம், $d = \sqrt{2};\ 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) இல்லை

(vii) ஆம், $d = -4;\ -16, -20, -24$ (viii) ஆம், $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) இல்லை (x) ஆம், $d = a; 5a, 6a, 7a$

(xi) இல்லை (xii) ஆம், $d = \sqrt{2};\ \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) இல்லை (xiv) இல்லை (xv) ஆம், $d = 24;$ 97, 121, 145

பயிற்சி 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16th term **5.** (i) 34 (ii) 27

6. No **7.** 178 **8.** 64

9. 5th term **10.** 1 **11.** 65th term

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. 20th term from the last term is 158.

18. –13, –8, –3 **19.** 11th year **20.** 10

EXERCISE 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16$, $S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$ (iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$

(iv) $d = -1$, $a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5$, $a_n = 34$

(vii) $n = 6$, $d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7$, $a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. By putting $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ in the formula $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, we get a quadratic equation $4n^2 + 5n - 636 = 0$. On solving, we get $n = -\frac{53}{4}, 12$. Out of these two roots only one root 12 is admissible.

5. $n = 16$, $d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, $S = 6973$ **7.** Sum = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 வது உறுப்பு **5.** (i) 34 (ii) 27

6. No **7.** 178 **8.** 64

9. 5 வது உறுப்பு **10.** 1 **11.** 65 வது உறுப்பு

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. கடைசி உறுப்பிலிருந்து 20 வது உறுப்பு158.

18. –13, –8, –3 **19.** 11வது வருடம் **20.** 10

பயிற்சி 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ ஐ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ எனும் சூத்திரத்தில் பதிலீடு செய்தால் கிடைக்கும் இருபடி சமன்பாடு $4n^2 + 5n - 636 = 0$. இதன் தீர்வு $n = -\frac{53}{4}, 12$. இந்த இரண்டு மூலங்களில் 12 என்ற மூலத்தை மட்டும் எடுத்துக்கொள்கின்றோம்.

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38, S = 6973$ **7.** மொத்தம் = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4$; $a_2 = S_2 - S_1 = 1$; $S_3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = -1$,
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15$; $a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$.

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. Values of the prizes (in ₹) are 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 cm

19. 16 rows, 5 logs are placed in the top row. By putting S = 200, a = 20, d = –1 in the formula

$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, we get, $41n - n^2 = 400$. On solving, n = 16, 25. Therefore, the number of rows is either 16 or 25. $a_{25} = a + 24\,d = -4$

i.e., number of logs in 25th row is – 4 which is not possible. Therefore n = 25 is not possible. For n = 16, a_{16} = 5. Therefore, there are 16 rows and 5 logs placed in the top row.

20. 370 m

EXERCISE 5.4 (Optional)*

1. 32nd term **2.** S_{16} = 20, 76 **3.** 385 cm

4. 35 **5.** 750 m^3

EXERCISE 6.1

1. (i) Similar (ii) Similar (iii) Equilateral

(iv) Equal, Proportional **3.** No

EXERCISE 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm

2. (i) No (ii) Yes (iiii) Yes

9. Through O, draw a line parallel to DC, intersecting AD and BC at E and F respectively.

EXERCISE 6.3

1. (i) Yes. AAA, Δ ABC ~ Δ PQR (ii) Yes. SSS, Δ ABC ~ Δ QRP

(iii) No (iv) Yes. SAS, Δ MNL ~ Δ QPR

(v) No (vi) Yes. AA, Δ DEF ~ Δ PQR

2. 55°, 55°, 55°

14. Produce AD to a point E such that AD = DE and produce PM to a point N such that PM = MN. Join EC and NR.

15. 42 m

11. $S_1 = 3, S_2 = 4;\ a_2 = S_2 - S_1 = 1;\ S_3 = 3,\ a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15;\ a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. பரிசுப்பொருட்களின் மதிப்புகள் (₹ல்) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 செ.மீ

19. 16 நிரைகள், 5 திண்மைகள் மேல் நிரையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. $S = 200, a = 20,$ $d = -1$ ஐ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ல் பதிலீடு செய்தால் $41n - n^2 = 400$ கிடைக்கிறது. தீர்வில் , $n = 16, 25$. ஆகவே, இரண்டு நிரைகளில் ஏதேனும் ஒரு எண் 16 அல்லது 25. $a_{25} = a + 24d = -4$ எனவே, 25 வது வரிசையில் உள்ள திண்மைகள் எண்ணிக்கை -4 என்பது சாத்தியமில்லை. ஆகவே, $n = 25$ என்பது சாத்தியமில்லை. $n = 16$, $a_{16} = 5$. எனவே, 16 நிரைகள் மற்றும் மேல் நிரையில் 5 திண்மைகள் இருக்கும்.

20. 370 மீ

பயிற்சி 5.4 (விருப்பத்திற்குட்பட்டது)*

1. 32 வது உறுப்பு **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 செ.மீ

4. 35 **5.** 750 மீ^{3}

பயிற்சி 6.1

1. (i) வடிவொத்தவை (ii) வடிவொத்தவை (iii) சமபக்கம்
(iv) சமம், விகிதசமம் **3.** இல்லை

பயிற்சி 6.2

1. (i) 2 செ.மீ (ii) 2.4 செ.மீ

2. (i) இல்லை (ii) ஆம் (iiii) ஆம்

9. O வழியாக, DC க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்தால், அக்கோடு முறையே E மற்றும் F ஆகிய இடங்களில் AD மற்றும் BC ஐ வெட்டுகிறது.

பயிற்சி 6.3

1. (i) ஆம், AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) ஆம், SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$
(iii) இல்லை (iv) ஆம், SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$
(v) இல்லை (vi) ஆம், AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14. AD ஐ நீட்டும்போது, E இடத்தில் AD = DE, PM ஐ நீட்டும்போது, N இடத்தில் PM = MN என ஆகும். EC மற்றும் NR ஐ இணைக்கவும்.

15. 42 மீ

AP SCERT

EXERCISE 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km **3.** No **4.** Yes **5.** Champa is correct.

6. (i) Square (ii) No quadrilateral (iii) Parallelogram

7. (– 7, 0) **8.** – 9, 3 **9.** ± 4, $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

EXERCISE 7.2

1. (1, 3) **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ m; 5th line at a distance of 22.5 m **4.** 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6$, $y = 3$ **7.** (3, – 10)

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 sq. units

EXERCISE 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** Yes

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) False (ii) True (iii) False (iv) False (v) False

AP SCERT

பயிற்சி 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 கி.மீ. **3.** இல்லை **4.** ஆம் **5.** சம்பா சரியாக கூறியது

6. (i) சதுரம் (ii) நாற்கரம் கிடையாது (iii) இணைகரம்

7. $(-7, 0)$ **8.** $-9, 3$ **9.** ± 4, $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

பயிற்சி 7.2

1. $(1, 3)$ **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ மீ; 22.5 மீ தூரத்தில் 5 வது வரிசை **4.** $2 : 7$

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6,\ y = 3$ **7.** $(3, -10)$

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 சதுர அலகுகள்

AP SCERT

EXERCISE A1.1

1. (i) Ambiguous (ii) True (iii) True (iv) Ambiguous
(v) Ambiguous

2. (i) True (ii) True (iii) False (iv) True (v) True

3. Only (ii) is true.

4. (i) If $a > 0$ and $a^2 > b^2$, then $a > b$.
(ii) If $xy \geq 0$ and $x^2 = y^2$, then $x = y$.
(iii) If $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ and $y \neq 0$, then $x = 0$.
(iv) The diagonals of a parallelogram bisect each other.

EXERCISE A1.2

1. A is mortal **2.** ab is rational

3. Decimal expansion of $\sqrt{17}$ is non-terminating non-recurring.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 180°$

6. PQRS is a rectangle.

7. Yes, because of the premise. No, because $\sqrt{3721} = 61$ which is not irrational. Since the premise was wrong, the conclusion is false.

EXERCISE A1.3

1. Take two consecutive odd numbers as $2n + 1$ and $2n + 3$ for some integer n.

EXERCISE A1.4

1. (i) Man is not mortal.
(ii) Line l is not parallel to line m.
(iii) The chapter does not have many exercises.
(iv) Not all integers are rational numbers.
(v) All prime numbers are not odd.
(vi) Some students are lazy.
(vii) All cats are black.
(viii) There is at least one real number x, such that $\sqrt{x} = -1$.

AP SCERT

பயிற்சி A1.1

1. (i) தெளிவற்றது (ii) உண்மை (iii) உண்மை (iv) தெளிவற்றது
(v) தெளிவற்றது

2. (i) மெய் (ii) மெய் (iii) மெய்யற்றது (iv)மெய் (v) மெய்

3. (ii) மட்டுமே மெய்.

4. (i) $a > 0$ மற்றும் $a^2 > b^2$எனில் $a > b$.
(ii) $xy \geq 0$ மற்றும் $x^2 = y^2$ எனில் $x = y$.
(iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$மற்றும் $y \neq 0$ எனில் $x = 0$.
(iv) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும்.

பயிற்சி A1.2

1. A இறப்பற்றவள் **2.** ab என்பது விகிதமுறா எண்

3. $\sqrt{17}$ இன் தசம விரிவாக்கம் முடிவற்றது மற்றும் திரும்ப திரும்ப வராது.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6. PQRS ஒரு செவ்வகம்

7. ஆம், கொடுக்கப்பட்ட $\sqrt{3721} = 61$ விகிதமுறா எண் அல்ல. கொடுக்கப்பட்ட இடம் தவறானதால் முடிவும் தவறு ஆகும்,

பயிற்சி A1.3

1. ஏதேனும் ஒரு முழு 'n' க்கு, இரண்டு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களாக $2n + 1$ மற்றும் $2n + 3$ ஆக எடுத்துக் கொள்ளவும்.

பயிற்சி A1.4

1. (i) மனிதன் இறப்பற்றவன்.
(ii) l கோடு m கோட்டிற்கு இணையாக இருக்காது.
(iii) பாடம் பல பயிற்சிகளை கொண்டதாக இல்லை
(iv) எல்லா முழுக்களுமே விகிதமுறு எண்கள் அல்ல
(v) அனைத்து பகா எண்களும் ஒற்றை எண்கள் அல்ல
(vi) சில மாணவர்கள் சோம்பேறிகள்
(vii) எல்லா பூனைகளும் கருப்பு நிறத்தில் இருக்கும்.
(viii) $\sqrt{x} = -1$, என்றமைந்தவகையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு மெய் எண் x ஆவது இருக்கும்,

(ix) 2 does not divide the positive integer a.

(x) Integers a and b are not coprime.

2. (i) Yes (ii) No (iii) No (iv) No (v) Yes

EXERCISE A1.5

1. (i) If Sharan sweats a lot, then it is hot in Tokyo.

(ii) If Shalini's stomach grumbles, then she is hungry.

(iii) If Jaswant can get a degree, then she has a scholarship.

(iv) If a plant is alive, then it has flowers.

(v) If an animal has a tail, then it is a cat.

2. (i) If the base angles of triangle ABC are equal, then it is isosceles. True.

(ii) If the square of an integer is odd, then the integer is odd. True.

(iii) If $x = 1$, then $x^2 = 1$. True.

(iv) If AC and BD bisect each other, then ABCD is a parallelogram. True.

(v) If $a + (b + c) = (a + b) + c$, then a, b and c are whole numbers. False.

(vi) If $x + y$ is an even number, then x and y are odd. False.

(vii) If a parallelogram is a rectangle, its vertices lie on a circle. True.

EXERCISE A1.6

1. Suppose to the contrary $b \leq d$.

3. See Example 10 of Chapter 1.

6. See Theorem 5.1 of Class IX Mathematics Textbook.

AP SCERT

(ix) 2 ஆனது மிகை முழு ‘a’ வை வகுப்பதில்லை

(x) a மற்றும் b என்பவை சார்பகா எண்கள் அல்ல.

2. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii)இல்லை (iv)இல்லை (v)ஆம்

பயிற்சி A1.5

1. (i) சரணிற்கு வியர்வை அதிகமாக வருகிறது எனில் டோக்கியோவில் வெப்பம் அதிகம்.

(ii) ஷாலினியின் வயிறு முணுமுணுக்கிறது எனில் அவள் பசியுடன் இருக்கிறாள்.

(iii) ஜஸ்வந்திற்கு பட்டம் கிடைக்குமேயானால், அவளிடம் படிப்பு உதவி தொகை உண்டு.

(iv) ஒரு செடி உயிருடன் உள்ளது எனில், அது மலர்களைக் கொண்டுள்ளது.

(v) ஒரு விலங்கிற்கு வால் உள்ளது எனில் அது பூனை ஆகும்.

2. (i) முக்கோணம் ABC ன் அடித்தள கோணங்கள் சமம் எனில், அது இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகும். மெய்.

(ii) ஒரு முழுவின் வர்க்கம் ஒற்றை எனில், அந்த முழுவும் ஒற்றை எண் ஆகும். மெய்.

(iii) $x = 1$ எனில் $x^2 = 1$ ஆகும். மெய்.

(iv) AC மற்றும் BD ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும் எனில், ABCD என்பது ஒரு இணைகரம் ஆகும். மெய்.

(v) $a + (b + c) = (a + b) + c$ எனில் a, b மற்றும் c ஆகியன முழு எண்கள். மெய்யற்றது.

(vi) $x + y$ என்பது ஒரு இரட்டை எண் எனில், x மற்றும் y என்பவை ஒற்றை எண்கள். மெய்யற்றது

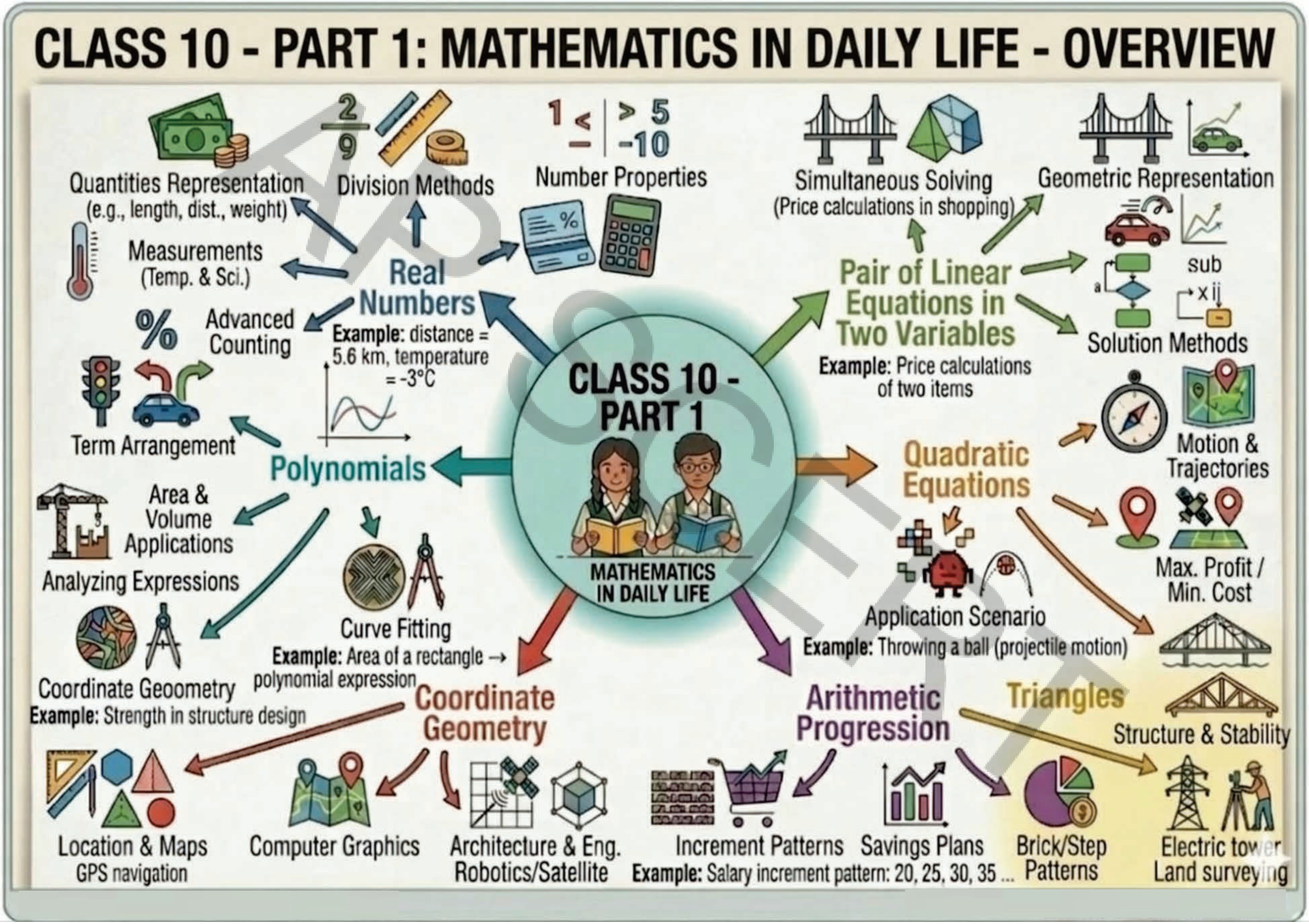
(vii) ஒரு இணைகரமானது செவ்வகமாக இருப்பின், அதன் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்திருக்கும். மெய்.

பயிற்சி A1.6

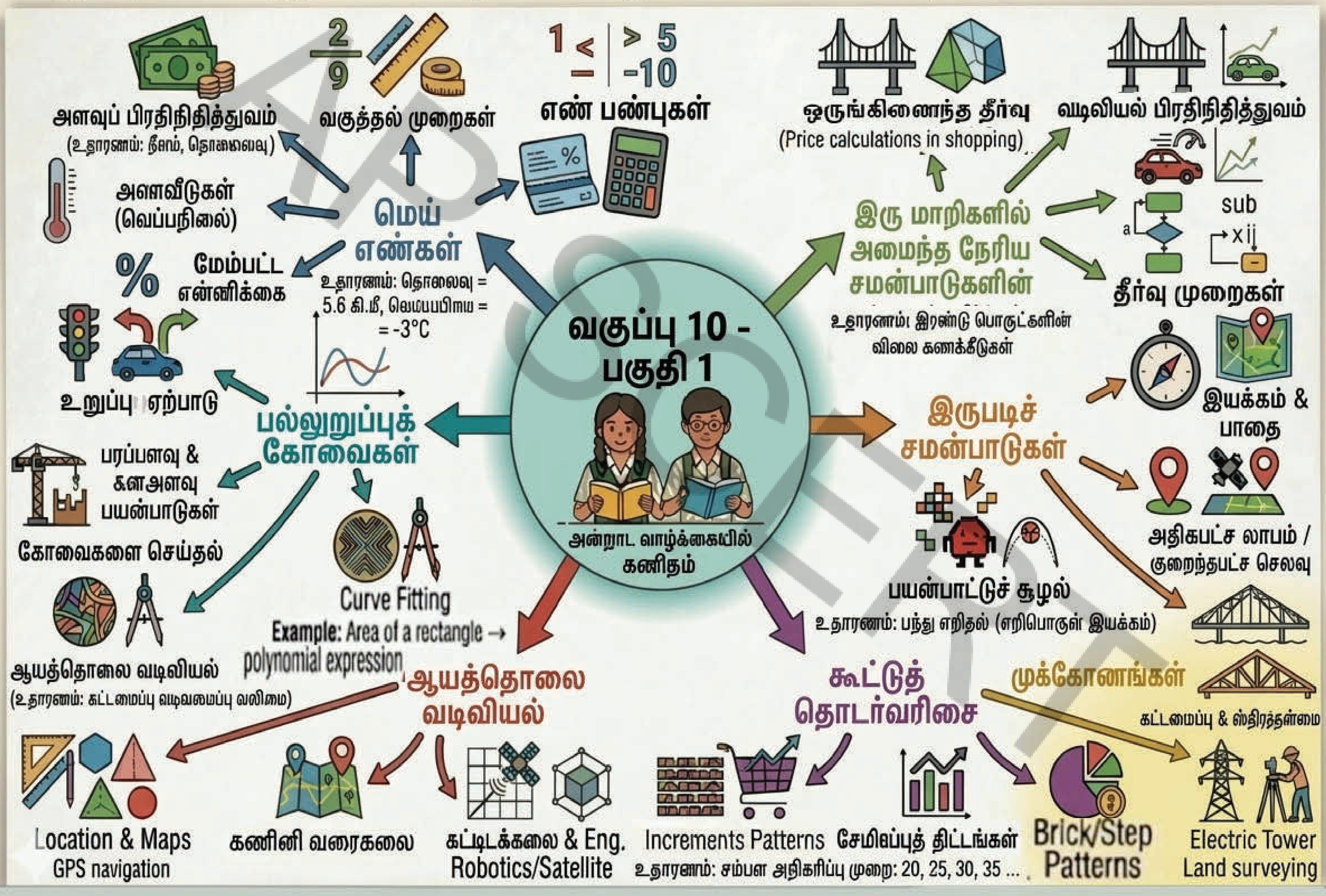
1. மாறாக $b \leq d$ எனக் கொள்க.

3. 1வது அத்தியாயத்தில், எடுத்துக்காட்டு 10 ஐ பார்க்வும்.

6. ஒன்பதாம் வகுப்பு கணிதப் பாடப்புத்தகத்தில் தேற்றம் 5.1 ஐ பார்க்கவும்,


CLASS 10 - PART 1: MATHEMATICS IN DAILY LIFE - OVERVIEW
CLASS 10 - PART 1
MATHEMATICS IN DAILY LIFE
Real Numbers
Example: distance = 5.6 km, temperature = -3°C
Quantities Representation (e.g., length, dist., weight)
Division Methods
Number Properties
Measurements (Temp. & Sci.)
Advanced Counting
Polynomials
Term Arrangement
Area & Volume Applications
Analyzing Expressions
Curve Fitting
Coordinate Geoometry
Example: Strength in structure design
Example: Area of a rectangle → polynomial expression
Coordinate Geometry
Location & Maps
GPS navigation
Computer Graphics
Architecture & Eng.
Robotics/Satellite
Pair of Linear Equations in Two Variables
Example: Price calculations of two items
Simultaneous Solving
(Price calculations in shopping)
Geometric Representation
Solution Methods
sub
Quadratic Equations
Motion & Trajectories
Max. Profit / Min. Cost
Application Scenario
Example: Throwing a ball (projectile motion)
Arithmetic Progression
Increment Patterns
Savings Plans
Brick/Step Patterns
Example: Salary increment pattern: 20, 25, 30, 35 ...
Triangles
Structure & Stability
Electric tower
Land surveying

வகுப்பு 10 - பகுதி 1: அன்றாட வாழ்க்கையில் கணிதம் - கண்ணோட்டம்



FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence.

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- **Constitution of India,**
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.

AP SCERT