CLASS – 8

جماعت – ہشتم

MATHEMATICS

SEMESTER - 1

ریاضی

سمسٹر – 1

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2026

DISCLAIMER

Any form of copying of the content, information and illustrations from this textbook is a punishable offence.

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published. Without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser. The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 GSM, SS Maplitho, Title Page 220 GSM, White Artcard.

Published by Samagra Shiksha & SCERT - Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

APSCERT

Our National Anthem قومی ترانہ

Jana-gana-mana-adhinayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata
Panjaba-Sindhu-Gujarata-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
uchchala-jaladhi-taranga
Tava Subha name jage,
tava subha asisa mage,
gahe tava jaya-gatha.
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

– Rabindranath Tagore

جن گن من ادھی نایک جیہ ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا
ڈراوڈ، اتکل، ونگا
وندھیا، ہماچل، یمنا، گنگا
اچھل جل دھی ترنگا
توشبھ نامے جاگے
توشبھ آسش ماگے
گاہے توجیا گاتھا
جن گن منگل دایک جیہ ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
جیہ ہے، جیہ ہے، جیہ ہے
جیہ جیہ جیہ جیہ ہے

–رابندر ناتھ ٹیگور

Pledge || عہد

ہندوستان میرا وطن ہے۔ تمام ہندوستانی میرے بھائی اور بہن ہیں۔ مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم اور گونا گوں ورثے پر فخر کرتا ہوں / کرتی ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کرتا رہوں گا / کرتی رہوں گی۔ میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا / کروں گی اور ہر ایک کے ساتھ خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا / کروں گی۔ میں جانوروں کے تئیں رحم دلی کا برتاؤ کروں گا / کروں گی۔ میں اپنے وطن اور ہم وطنوں کی خدمت کے لیے اپنے آپ کو وقف کرنے کا عہد کرتا ہوں / کرتی ہوں۔

–پیڈی مرّی وینکٹا سُبّاراؤ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

Printed in India
at the A.P. Govt., Textbook Press
Amaravati, Andhra Pradesh.

National Education Policy - 2020

The National Education Policy 2020 (NEP 2020) envisions a holistic, flexible, and learner-centred education system. It emphasizes competency-based learning and experiential approaches that make education meaningful and engaging. NEP 2020 highlights the importance of 21st-century skills such as critical thinking, creativity, communication, and problem-solving. It encourages the integration of real-life learning, innovation, and technology-enabled pedagogies. Overall, the policy aims to build an inclusive and future-ready education system that empowers every learner to thrive in a rapidly changing world.

قومی تعلیمی پالیسی 2020 (NEP 2020) ایک ہمہ جہت، لچکدار، اور طالبِ علم مرکز تعلیمی نظام کا تصور پیش کرتی ہے۔ یہ قابلیت پر مبنی تعلیم اور تجرباتی طریقۂ تدریس پر زور دیتی ہے، جو تعلیم کو بامعنی اور دلچسپ بناتے ہیں۔ NEP 2020 تنقیدی سوچ، تخلیقی صلاحیت، ابلاغ، اور مسئلہ حل کرنے جیسی اکیسویں صدی کی مہارتوں کی اہمیت کو اجاگر کرتی ہے۔ یہ حقیقی زندگی سے متعلق سیکھنے، اختراع، اور ٹیکنالوجی پر مبنی تدریسی طریقوں کے انضمام کی حوصلہ افزائی کرتی ہے۔ مجموعی طور پر، یہ پالیسی ایک ایسا جامع اور مستقبل کے تقاضوں سے ہم آہنگ تعلیمی نظام قائم کرنے کا مقصد رکھتی ہے جو ہر سیکھنے والے کو تیزی سے بدلتی ہوئی دنیا میں کامیابی کے ساتھ آگے بڑھنے کے قابل بنائے۔

APSCERT

NCF (SE) 2023 - Curricular Goals

Mathematics education in the middle stage (Grades 6–8) aims to nurture holistic development by building logical thinking, sound reasoning, and confident problem-solving skills in every learner. In alignment with NCF 2023, the focus shifts from rote memorization to deep conceptual understanding, encouraging students to explore, question, and connect mathematical ideas meaningfully. The Curriculum Goals and Competencies outlined in each chapter guide this journey by linking mathematical learning to real-world contexts, preparing students to apply their knowledge thoughtfully in everyday life.

National Curriculum Framework 2023 کے مطابق مڈل اسٹیج (جماعت 6 تا 8) میں ریاضی کی تعلیم کا مقصد ہر طالبِ علم میں ہمہ جہتی نشوونما پیدا کرنا ہے، جس کے ذریعے منطقی سوچ، درست استدلال، اور پُراعتماد مسئلہ حل کرنے کی مہارتیں فروغ پاتی ہیں۔ اس مرحلے میں توجہ رٹنے کی بجائے تصورات کی گہری سمجھ پر دی جاتی ہے، تاکہ طلبہ ریاضیاتی خیالات کو معنی خیز انداز میں دریافت کریں، سوال کریں، اور آپس میں جوڑ سکیں۔ ہر باب میں بیان کردہ نصابی اہداف اور صلاحیتیں اس تعلیمی سفر کی رہنمائی کرتی ہیں، جو ریاضی کے سیکھنے کو حقیقی زندگی کے حالات سے جوڑتی ہیں اور طلبہ کو اپنی معلومات کو روزمرہ زندگی میں سوچ سمجھ کر استعمال کرنے کے لیے تیار کرتی ہیں۔

APSCERT

Curricular Goal	Description	Competencies
CG - 1	Understands numbers and sets of numbers (whole numbers, fractions, integers, rational numbers, and real numbers), looks for patterns, and appreciates relationships between numbers.	C-1.1: Develops a sense for and an ability to manipulate (e.g., read, write, form, compare, estimate, and apply operations) and name (in words) large whole numbers of up to 20 digits, and expresses them in scientific notation using exponents and powers. C-1.2: Discovers, identifies, and explores patterns in numbers and describes rules for their formation (e.g., multiples of 7, powers of 3, prime numbers), and explains relations between different patterns. C-1.3: Learns about the inclusion of zero and negative quantities as numbers, and the arithmetic operations on them, as given by Brahmagupta. C-1.4: Explores and understands sets of numbers, such as whole numbers, fractions, integers, rational numbers, and real numbers, and their properties, and visualises them on the number line. C-1.5: Explores the idea of percentage and applies it to solve problems. C-1.6: Explores and applies fractions (both as ratios and in decimal form) in daily-life situations.
CG - 2	Understands the concepts of variable, constant, coefficient, expression, and (one-variable) equation, and uses these concepts to solve meaningful daily-life problems with procedural fluency.	C-2.1: Understands equality between numerical expressions and learns to check arithmetical equations. C-2.2: Extends the representation of a number in the form of a variable or an algebraic expression using a variable. C-2.3: Forms algebraic expressions using variables, coefficients, and constants and manipulates them through basic operations. C-2.4: Poses and solves linear equations to find the value of an unknown, including to solve puzzles and word problems. C-2.5: Develops own methods to solve puzzles and problems using algebraic thinking.
CG - 3	Understands, formulates, and applies properties and theorems regarding simple geometric shapes (2D and 3D).	C-3.1: Describes, classifies, and understands relationships among different types of two- and three-dimensional shapes using their defining properties/attributes. C-3.2: Outlines the properties of lines, angles, triangles, quadrilaterals, and polygons and applies them to solve related problems. C-3.3: Identifies attributes of three-dimensional shapes (cubes, parallelepipeds, cylinders, cones), works hands-on with material to construct these shapes, and also uses two-dimensional representations of three-dimensional objects to visualise and solve problems. C-3.4: Draws and constructs geometric shapes, such as lines, parallel lines, perpendicular lines, angles, and simple triangles, with specified properties using a compass and straightedge. C-3.5: Understands congruence and similarity as it applies to geometric shapes and identifies similar and congruent triangles.

Curricular Goal	Description	Competencies
CG - 5	Collects, organises, represents (graphically and in tables), and interprets data/information from daily-life experiences.	C-5.1: Collects, organises, and interprets the data using measures of central tendencies such as average/ mean, mode, and median. C-5.2: Selects, creates, and uses appropriate graphical representations (e.g., pictographs, bar graphs, histograms, line graphs, and pie charts) of data to make interpretations.
CG - 7	Engages with puzzles and mathematical problems and develops own creative methods and strategies to solve them.	C-7.1: Demonstrates creativity in discovering one's own solutions to puzzles and other problems, and appreciates the work of others in finding their own, possibly different, solutions. C-7.2: Engages in and appreciates the artistry and aesthetics of puzzle-making and puzzle-solving.
CG - 8	Develops basic skills and capacities of computational thinking, namely, decomposition, pattern recognition, data representation, generalisation, abstraction, and algorithms in order to solve problems where such techniques of computational thinking are effective.	C-8.1: Approaches problems using programmatic thinking techniques such as iteration, symbolic representation, and logical operations and reformulates problems into series of ordered steps (i.e., algorithmic thinking). C-8.2: Learns systematic counting and listing, systematic reasoning about counts and iterative patterns, and multiple data representations; learns to devise and follow algorithms, with an eye towards understanding correctness, effectiveness, and efficiency of algorithms.
CG - 9	Knows and appreciates the development of mathematical ideas over a period of time and the contributions of past and modern mathematicians from India and across the world.	C-9.1: Recognises how concepts (like counting numbers, whole numbers, negative numbers, rational numbers, zero, concepts of algebra, geometry) evolved over a period of time in different civilisations. C-9.2: Knows and appreciates the contributions of specific Indian mathematicians (such as Baudhayana, Pingala, Aryabhata, Brahmagupta, Virahanka, Bhaskara, and Ramanujan).
CG - 10	Knows about and appreciates the interaction of Mathematics with each of their other school subjects.	C-10.1: Recognizes how Mathematics interacts with Science, Social Science, Visual Arts, Music, Vocational Education, and Sports.

CLASS - 8
MATHEMATICS
SEMESTER - 1
CONTENTS

جماعت–ہشتم
ریاضی
سمسٹر–1
مواد

S.No	Chapter Name	Month	Page.No
	Readiness Programme آمادگی	June جون	2 - 57
1	A Square and A Cube ایک مربع اور ایک مکعب	July جولائی	58 - 93
2	Power Play قوت نماؤں کا کھیل	July جولائی	94 - 155
3	A Story of Numbers اعداد کی کہانی	July - August جولائی- اگست	156 - 209
4	Quadrilaterals چار ضلعی	August اگست	210 - 273
5	Number Play اعداد کا کھیل	August - September اگست- ستمبر	274 - 325
6	We Distribute, Yet Things Multiply ہم تقسیم کرتے ہیں پھر بھی چیزیں بڑھ جاتی ہیں	September ستمبر	326 - 375
7	Proportional Reasoning-1 تناسبی استدلال-1	September - October	376 - 421
	Answers جوابات		422 - 457
	Integrating Artificial Intelligence (AI) مصنوعی ذہانت کا انضمام	October	458 - 473
	Mind Map		474

Icons



Math Talk - Questions for Dicussion

Try This

Try This - Out of box thinking

Main Question
Sub- Question
} *Concept - Clarity*

Owl - Some important processes in the learning of Mathematics

A2S7A5
Teacher Corner

R2W5B1
Student Corner

DAY 1 — 1. A SQUARE AND A CUBE


Teacher Corner


M7G6L5

- **Key Terms :** Factor, Prime Number, Square Number, Perfect Square, Square Root, Prime Factorisation, Perfect Cube, Cube Root, Triangular Number
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Factor	A number that divides another number exactly, leaving no remainder.	Factors of 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12
Prime Number	A number greater than 1 that has exactly two factors: 1 and itself.	2, 3, 5, 7, 11,.. are prime numbers.
Square Number	A number obtained by multiplying any number by itself. Written as n^2.	$-5 \times -5 = (-5)^2 = 25$; $3 \times 3 = 3^2 = 9$ $2.5 \times 2.5 = (2.5)^2 = 6.25$
Perfect Square	The square of a natural number. It has an odd number of factors.	1, 4, 9, 16, 25, 36 ... are perfect squares.
Square Root ($\sqrt{\ }$)	The inverse process of squaring. $x^2 = y$, then $\sqrt{y} = x$. x is an integer	$\sqrt{49} = 7$, because $7 \times 7 = 49$
Prime Factorisation	Writing a number as a product of its prime factors only.	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$; factors pair up → perfect square!
Perfect Cube	A number obtained by multiplying a number by itself three times (n^3).	$8 = 2^3$; $27 = 3^3$; $64 = 4^3$
Cube Root ($\sqrt[3]{\ }$)	The inverse process of cubing. If $x^3 = y$, then x is the cube root of y $\sqrt[3]{y} = x$	$\sqrt[3]{27} = 3$, because $3 \times 3 \times 3 = 27$
Triangular Number	The number of points that can be formed as a triangle: sume of any two consecutive triangular numbers is a perfect square.	Ex:1, 3, 6, 10, 15, ... $1+3=4=2^2$; $3+6=9=3^2$; $6+10=16=4^2$

DAY 1 — 1. ایک مربع اور ایک مکعب

D2Q2L2



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: جزضربی، مفرد عدد، مربع عدد، کامل مربع، جذرالمربع، مفرد اجزائے ضربی میں تجزیہ، کامل مکعب، جذرالمکعب، تکونی عدد

تصور کی وضاحت — اصطلاحات کو جانیں :

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثال کے ذریعے متعارف کروائیں۔ ہر تصور کو حقیقی زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھ پیدا ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
جزضربی	ایسا عدد جو کسی دوسرے عدد کو بغیر باقی چھوڑے پورا تقسیم کرے۔	12 کے اجزائے ضربی: 1، 2، 3، 4، 6، 12
مفرد عدد	ایسا عدد جو 1 سے بڑا ہو اور جس کے صرف دو اجزائے ضربی ہوں: 1 اور وہ خود۔	2، 3، 5، 7، 11 مفرد اعداد ہیں۔
مربع عدد	ایسا عدد جو کسی عدد کو خود اسی سے ضرب دینے سے حاصل ہو۔	$3\times3=9$، $-5\times-5=(-25)^2=25$ $2.5\times2.5=(2.5)^2=6.25$
کامل مربع	کسی عدد کا مربع۔ اس کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہوتی ہے۔	1، 4، 9، 16، 25، 36 کامل مربع ہیں۔
جذرالمربع ($\sqrt{}$)	اگر مربع کرنے کے عمل کا معکوس۔ $x^2=y$ ہو تو $\sqrt{y}=x$	$\sqrt{49}=7$ کیونکہ $7\times7=49$
مفرد اجزائے ضربی میں	کسی عدد کو اس کے صرف مفرد اجزائے ضربی کی ضرب کی صورت میں لکھنا۔	$36=2\times2\times3\times3$
کامل مکعب	ایسا عدد جو کسی عدد کو تین مرتبہ خود سے ضرب دینے سے حاصل ہو۔	$2^3=8$، $3^3=27$، $4^3=64$ =
جذرالمکعب ($\sqrt[3]{}$)	مکعب کرنے کے عمل کا معکوس۔ اگر $x^3=y$ ہو تو $\sqrt[3]{y}=x$	$\sqrt[3]{27}=3$ کیونکہ $3\times3\times3=27$
تکونی عدد	نقطوں کی ایسی تعداد جو تکون کی شکل میں ترتیب دی جا سکے۔	1، 3، 6، 10، 15 تکونی اعداد ہیں۔

Note : All perfect squares are square numbers. But not all square numbers are perfect squares.

1 **Real-Life Connection:**

Side of a square tile whose area is 81cm^2 = $\sqrt{81}$ = 9 cm.

Edge of a cube-shaped gift box whose volume is 125 cm^3 = $\sqrt[3]{125}$ = 5 cm.

Squares and cubes help architects, designers, and engineers every day!

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read all key terms carefully. Attempt all questions independently. Check your understanding using examples.

A. Fill in the blanks.

1. The square root of 144 is _____, because _____× _____= 144.
2. A perfect square always has_____ number of factors, and it never ends with the digits 3, 7, _____ or _____.
3. $\sqrt[3]{512}$ = _____, and 5^3 = _____. A number is a perfect cube if its prime factors can be split into identical groups.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

1. Which of the following numbers is definitely NOT a perfect square?

   (i) 196 (ii) 238 (iii) 441 (iv) 625

2. The prime factorisation of 216 is $2^3 \times 3^3$. What is $\sqrt[3]{216}$?

   (i) 4 (ii) 6 (iii) 8 (iv) 12

C. Match the following.

Column A		Column B
1. $\sqrt{64}$	( )	(a) 125
2. 5^3	( )	(b) 8
3. Factors of 9	( )	(c) 10
4. 1 + 3 + 5 + 7	( )	(d) 1, 3, 9 (odd number of factors)
5. $\sqrt[3]{1000}$	( )	(e) 16 = 4^2 (sum of first 4 odd numbers)

APSCERT

نوٹ: تمام کامل مربع، مربع اعداد ہوتے ہیں، لیکن تمام مربع اعداد کامل مربع نہیں ہوتے۔

حقیقی زندگی سے تعلق:

81 مربع سمر رقبے والی مربع ٹائل کی ایک ضلع: $\sqrt{81}=9$ یعنی 9 سمر

125 مکعب سمر حجم والے مکعب نما تحفے کے ڈبے کا کنارہ: $\sqrt[3]{125}=5$ یعنی 5 سمر

مربع اور مکعب معماروں، ڈیزائنرز اور انجینئروں کی روزمرہ زندگی میں مدد کرتے ہیں۔



طلبہ کی سرگرمی—پڑھنا اور مشق

ہدایات: تمام اہم اصطلاحات کو غور سے پڑھیں۔ تمام سوالات خود حل کریں۔ مثالوں کے ذریعے اپنی سمجھ کو جانچیں۔

A) خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

1. 144 کا جذرِ مربع _____ ہے، کیونکہ _____ × _____ = 144
2. کامل مربع کے اجزائے ضربی کی تعداد ہمیشہ _____ ہوتی ہے، اور یہ کبھی بھی 3، 7، _____ یا _____ پر ختم نہیں ہوتا۔
3. $\sqrt[3]{125}$ = _____ اور 5^3 = _____ ایک عدد کامل مکعب ہوتا ہے اگر اس کے مفرد اجزائے ضربی یکساں گروہوں میں تقسیم ہو سکیں۔

B) معروضی سوالات — درست جواب پر (3) لگائیں

1. درج ذیل میں سے کون سا عدد یقینی طور پر کامل مربع نہیں ہے؟

196(i)　238(ii)　441(iii)　625(iv)

2. 216 کا مفرد اجزائے ضربی میں تجزیہ: $216=2^3x3^3$ تو $\sqrt[3]{216}$

4(i)　6(ii)　8(iii)　12(iv)

ج) جوڑ ملائیے۔

کالم (الف)		کالم (ب)
1- $\sqrt{64}$	(　)	(a) 8
2- 5^3	(　)	(b) 125
3- 9 کے اجزائے ضربی	(　)	(c) 1، 3، 9 (اجزائے ضربی کی طاق تعداد)
4- 1 + 3 + 5 + 7	(　)	(d) $16 = 4^2$ (پہلے 4 طاق اعداد کا مجموعہ)
5. $\sqrt[3]{1000}$	(　)	(e) 10

DAY 2 — 2. POWER PLAY



- **Key Terms :** Exponential Form, Base, Scientific Notation, Negative Exponent, Exponent, Power, Exponential Growth, Zero Exponent, Prime Factorisation
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Exponential Form	The symboilc form of representation the repeated multiplication	e.g. $5 \times 5 \times 5 = 5^3$
Base	The number that is repeatedly multiplied.	e.g. In 3^4, the base is 3.
Scientific Notation	Writing a number as $x \times 10^y$, where $1 \leq x < 10$.	e.g. $5900 = 5.9 \times 10^3$
Negative Exponent	$n^{-a} = 1/n^a$; it means the reciprocal of its power.	e.g. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
Exponent (Power)	The number of times a base is multiplied by itself.	e.g. In 2^5, the exponent is 5
Exponential Growth	Growth where a quantity multip -lies (doubles, triples) in each step.	e.g. Paper thickness doubles each fold.
Zero Exponent	For any non-zero number its power raised to 0 equals to 1.	e.g. $7^0 = 1$; $100^0 = 1$
Prime Factorisation	Expressing a number as a product of its prime factors.	e.g. $12 = 2^2 \times 3$

© NCERT not to be republished

DAY 2

2. قوت کا کھیل

معلم کی سرگرمی

اہم الفاظ: قوّت نمائی شکل، اساس (بیس)، سائنسی ترقیم، منفی قوّت نما، قوّت نما، قوّت نمائی اضافہ، صفر قوّت نما، مفرد اجزائے ضربی۔

تصور کی وضاحت — اصطلاحات کو جانیں

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثال کے ذریعے متعارف کروائیں۔ ہر تصور کو حقیقی زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ طلبہ میں دلچسپی پیدا ہو۔

مثال	تعریف	اہم لفظ
مثال: $5^3 = 5 \times 5 \times 5$	بار بار ہونے والی ضرب کو علامتی صورت میں لکھنا۔	قوّت نمائی شکل
مثال: 3^4 میں اساس 3 ہے۔	وہ عدد جسے بار بار ضرب دیا جائے۔	اساس
مثال: $10^3 \times 5.9 = 5900$	کسی عدد کو $x \times 10^y$ کی شکل میں لکھنا، جہاں $1 \leq x < 10$ ہو۔	سائنسی ترقیم
مثال: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$n^{-a} = 1/n^a$؛ یعنی قوت کا معکوس۔	منفی قوّت نما
مثال: 2^5 میں قوّت نما 5 ہے۔	یہ ظاہر کرتا ہے کہ اساس کو کتنی مرتبہ خود سے ضرب دیا گیا ہے۔	قوّت نما
مثال: کاغذ کی موٹائی ہر تہہ کے ساتھ دوگنی ہو جاتی ہے۔	ایسی بڑھوتری جس میں مقدار ہر مرحلے پر کئی گنا بڑھتی جائے۔	قوّتی نمائی اضافہ
مثال: $100^0 = 1$، $7^0 = 1$	کسی بھی غیر صفر عدد کی صفر قوت 1 کے برابر ہوتی ہے۔	صفر قوّت نما
مثال: $2^2 \times 3 = 12$	کسی عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی کی ضرب کی صورت میں لکھنا۔	مفرد اجزائے ضربی

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. In 4^3, the base is _____ and the exponent is _____.
2. 5^0 = _____ and 3^{-2} = _____.
3. The scientific notation of 45,000 is _____.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

4. The value of $2^3 \times 2^2$ is:

   (a) 2^6 (b) 2^5 (c) 4^6 (d) 2^{10}

5. Which of these is in scientific notation?

   (a) 54×10^3 (b) 0.9×10^5 (c) 3.7×10^2 (d) 12×10^4

C. Match the following :

1.

Column A		Column B
i. $2 \times 2 \times 2 \times 2$	( )	a. 65,000
ii. 10^{-2}	( )	b. 1 $(n \neq 0)$
iii. 6.5×10^4	( )	c. $2^4 = 16$
iv. n^0	( )	d. 0.01

2.

Column A		Column B
i. $n^a \times n^b =$	( )	a. n^{a-b}
ii. $(n^a)^b =$	( )	b. n^{ab}
iii. $n^a \div n^b =$	( )	c. n^{a+b}

AP SCERT

طلبہ کی سرگرمی–پڑھنا اور مشق

ہدایات: اہم الفاظ کو غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کریں۔

الف) خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

1. 4^3 میں اساس _____ ہے اور قوّت نما _____ ہے۔
2. _____ $= 5^0$ اور $3^{-2} =$ _____.
3. 45,000 کی سائنسی ترقیم _____ ہے۔

ب) معروضی سوالات — درست جواب پر (3) لگائیں

4. $2^3 \times 2^2$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 2^6 (b) 2^5 (c) 4^6 (d) 2^{10}

5. درج ذیل میں سے کون سی سائنسی ترقیم میں ہے؟

(a) 54×10^3 (b) 0.9×10^5 (c) 3.7×10^2 (d) 12×10^4

ج) درج ذیل کو جوڑ ملائیے۔

1.

Column A		Column B
i. $2 \times 2 \times 2 \times 2$	( )	a. 65,000
ii. 10^{-2}	( )	b. $1 \ (n \neq 0)$
iii. 6.5×10^4	( )	c. $2^4 = 16$
iv. n^0	( )	d. 0.01

2.

Column A		Column B
i. $n^a \times n^b =$	( )	a. n^{a-b}
ii. $(n^a)^b =$	( )	b. n^{ab}
iii. $n^a \div n^b =$	( )	c. n^{a+b}

APSCERT

DAY 3 — 3. A STORY OF NUMBERS



- **Key Terms :** Number System, Tally Marks, Landmark Numbers, Place Value System, One-to-One Mapping, Base-n Number System, Zero (0)
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Number System	A standard sequence of symbols or names used to represent and count quantities.	e.g. Hindu, Roman, Egyptian are number systems.
Tally Marks	Notches or marks made for each object counted; one of the oldest counting methods.	e.g. |||| = 4 objects counted.
Landmark Numbers	Special reference numbers in a system that help to represent and organise other numbers.	e.g. In Roman numberals: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, M=1000.
Place Value System	A positional system where the position of a digit deter mines which landmark number it represents.	e.g. In 375: 3 is in hundreds place, 7 in tens, 5 in ones.
One-to-One Mapping	Pairing each object in a collection with exactly one symbol or name, and vice versa.	e.g. Each cow paired with one stick to count a herd.
Base-n Number System	A system where each landmark number is n times the previous one; landmark numbers are powers of n.	e.g. Base-10: 1, 10, 100, 1000 - each 10× the last.

DAY 3

3. اعداد کی کہانی



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: عددی نظام، گنتی کے نشانات، اشاری اعداد، مقام قیمت کا نظام، ایک بہ ایک مطابقت، اساس n- نظام اعداد، صفر (0)

تصور کی وضاحت — اصطلاحات کو جانیں

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثال کے ذریعے متعارف کروائیں۔ ہر تصور کو حقیقی زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ طلبہ میں دلچسپی پیدا ہو۔

اہم لفظ	تعریف	مثال
عددی نظام	علامات یا ناموں کا ایک معیاری سلسلہ جو مقدار کو ظاہر کرنے اور گننے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔	مثال: ہندو، رومی اور مصری عددی نظام۔
گنتی کے نشانات	ہر شے کو گننے کے لیے لگائے جانے والے نشانات؛ گنتی کے قدیم ترین طریقوں میں سے ایک۔	مثال: |||| = 4 اشیاء گنی گئیں۔
اشاری اعداد	ایسے خاص اعداد جو دوسرے اعداد کو ظاہر کرنے اور ترتیب دینے میں مدد دیتے ہیں۔	مثال: رومی اعداد میں I=1، V=5، X=10، L=50، C=100، M=1000
مقام قیمت کا نظام	ایسا نظام جس میں ہندسے کی جگہ اس کی قیمت متعین کرتی ہے۔	مثال: 375 میں 3 سینکڑوں، 7 دہائیوں اور 5 اکائیوں کی جگہ پر ہیں۔
ایک بہ ایک مطابقت	مجموعے کی ہر شے کو ایک علامت یا نام کے ساتھ جوڑنا، اور بالعکس۔	مثال: ریوڑ گننے کے لیے ہر گائے کے ساتھ ایک لکڑی جوڑنا۔
اساس n- نظام اعداد	ایسا نظام جس میں ہر اشاری عدد پچھلے عدد سے n گنا ہو؛ اشاری اعداد n کی قوتیں ہوتے ہیں۔	مثال: اساس- 10 میں 1، 10، 100، 1000 — ہر عدد پچھلے سے 10 گنا ہے۔
صفر (0)	ایسا عدد جو کسی مقدار کے نہ ہونے کو ظاہر کرتا ہے اور مقام قیمت کے نظام میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔	مثال: 205 میں صفر یہ ظاہر کرتا ہے کہ دہائیوں کی جگہ خالی ہے۔

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The place value of 6 in 6,712 is _____, while its face value is _____.
2. In the Roman system, the numeral M stands for the number _____.
3. A number system where the position of a digit tells us its value is called a _____ system.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

4. What is the Hindu-Arabic equivalent of the Roman numeral CMXLIX?

   (a) 969 (b) 1149 (c) 949 (d) 1169

5. What makes the Hindu number system fully unambiguous?

   (a) Base 60 system (b) Use of tally marks

   (c) Using 0 as a digit (d) Roman symbols

C. Match the following :

Column A		Column B
1. CDXLIV	( )	a. 1900
2. MCM	( )	b. 444
3. DCLXVI	( )	c. 2026
4. MMXXVI	( )	d. 990
5. CMXC	( )	e. 666

AP SCERT

طلبہ کی سرگرمی–پڑھنا اور مشق

ہدایات: اہم الفاظ کو غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کریں۔

الف) خالی جگہیں کو پُر کیجیے۔

1. 6,712 میں 6 کی مقام قیمت _____ ہے، جبکہ اس کی ظاہری قیمت _____ ہے۔
2. رومی نظام میں علامت M عدد _____ کو ظاہر کرتی ہے۔
3. ایسا عددی نظام جس میں ہندسے کی جگہ اس کی قیمت بتاتی ہے، _____ نظام کہلاتا ہے۔

ب) معروضی سوالات — درست جواب پر (3) لگائیں۔

4. رومن اعداد CMXLIX کا ہندو-عربی مساوی کیا ہے؟

(a) 969 (b) 1149 (c) 949 (d) 1169

5. ہندو عددی نظام کو مکمل طور پر غیر مبہم کیا چیز بناتی ہے؟

(i) اساس 60 کا نظام (ii) گنتی کے نشانات کا استعمال

(iii) 0 کو ایک ہندسے کے طور پر استعمال کرنا (iv) رومی علامات

ج) جوڑ ملائیں۔

Column A		Column B
1. CDXLIV	( )	a. 1900
2. MCM	( )	b. 444
3. DCLXVI	( )	c. 2026
4. MMXXVI	( )	d. 990
5. CMXC	( )	e. 666

AP SCERT

DAY 4 — 4. QUADRILATERALS



- **Key Terms :** Quadrilateral, Bisect, Perpendicular Lines, Transversal, Diagonal, Parallel Lines, Congruent Triangles, Angle Sum Property
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Quadrilateral	A simple closed figure formed with exactly 4 line segments.	e.g. Square, rectangle, rhombus, trapezium.
Bisect	To divide a line segment/ angle into two equal parts.	e.g. Diagonals of a rectangle bisect each other.
Perpendicular Lines	Lines that meet at exactly 90°.	e.g. Diagonals of a square are perpendicular.
Transversal	A line that intersects two or more lines at distinct points.	e.g. A side of a paralle logram acts as a transversal to its parallel sides.
Diagonal	A line segment joining two non-adjacent (opposite) vertices of a quadrilateral.	e.g. In rectangle ABCD, AC and BD are diagonals.
Parallel Lines	Lines that never meet; they are always the same distance apart.	e.g. Opposite sides of a rectangle are parallel.
Congruent Triangles	Triangles that are identical in shape and size; all corresponding sides and angles are equal.	e.g. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ means AB = PQ, BC = QR AC = PR
Angle Sum Property	The sum of all interior angles in any quadrilateral is 360°.	e.g. Quadrilateral ABCD, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

DAY 4

4. چار ضلعی



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: چار ضلعی، تنصیف کرنا، عمودی خطوط، قاطع خط، قطر، متوازی خطوط، متطابق مثلثات، زاویہ جمعی خاصیت

تصور کی وضاحت — اصطلاحات کو جانیں

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثال کے ذریعے متعارف کروائیں۔ ہر تصور کو حقیقی زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ طلبہ میں دلچسپی پیدا ہو۔

اہم لفظ	تعریف	مثال
چار ضلعی	ایک سادہ بند شکل جو چار خطی قطعوں سے بنتی ہے۔	مثال: مربع، مستطیل، معین، ذوزنقہ
تنصیف کرنا	کسی خطی قطعے یا زاویے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا۔	مثال: مستطیل کے قطر ایک دوسرے کو نصف کرتے ہیں۔
عمودی خطوط	ایسے خطوط جو بالکل $90°$ پر ملتے ہیں۔	مثال: مربع کے قطر عمودی ہوتے ہیں۔
قاطع خط	ایسا خط جو دو یا دو سے زیادہ خطوط کو مختلف مقامات پر کاٹے۔	مثال: متوازی الاضلاع کا ایک ضلع اس کے متوازی اضلاع کے لیے قاطع خط بنتا ہے۔
قطر	چار ضلعی کے دو غیر متصل (مخالف) راسوں کو ملانے والا خطی قطعہ۔	مثال: مستطیل ABCD میں AC اور BD قطر ہیں۔
متوازی خطوط	ایسے خطوط جو کبھی نہیں ملتے اور ہمیشہ ایک ہی فاصلے پر رہتے ہیں۔	مثال: مستطیل کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔
متماثل مثلثات	ایسے مثلثات جو شکل اور جسامت میں ایک جیسے ہوں؛ ان کے تمام متعلقہ اضلاع اور زاویے برابر ہوں۔	مثال $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ یعنی: $AB = PQ، BC = QR، AC = PR$
زاویہ جمعی خاصیت	کسی بھی چار ضلعی کے تمام داخلی زاویوں کا مجموعہ $360°$ ہوتا ہے۔	مثال: چار ضلعی ABCD میں $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The sum of all angles in any quadrilateral is _____.
2. A quadrilateral with all sides equal and all angles 90° is called a _____.
3. The diagonals of a rectangle are _____ in length and they _____ each other.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

4. In a parallelogram, the adjacent angles:

   (a) are equal (b) sum in 90°

   (c) sum in 180° (d) sum in 360°

5. The diagonals of a square bisect each other at:

   (a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Rectangle	( )	(a) All sides are equal; diagonals bisect at 90°
2. Rhombus	( )	(b) At least one pair of parallel opposite sides are opposite
3. Parallelogram	( )	(c) Opposite sides are parallel; diagonals bisect each other
4. Trapezium	( )	(d) All angles are 90°; diagonals equal and bisect each other

APSCERT

طلبہ کی سرگرمی–پڑھنا اور مشق

ہدایات: اہم الفاظ کو غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کریں۔

الف) خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. کسی بھی چار ضلعی کے تمام زاویوں کا مجموعہ _____ ہوتا ہے۔
2. ایسا چار ضلعی جس کے تمام اضلاع برابر ہوں اور تمام زاویے $90°$ ہوں، _____ کہلاتا ہے۔
3. مستطیل کے قطر لمبائی میں _____ ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کو _____ کرتے ہیں۔

ب) معروضی سوالات — درست جواب پر (3) لگائیں۔

4. متوازی الاضلاع میں متجاور زاویے:

(i) برابر ہوتے ہیں (ii) مجموعہ $90°$ ہوتا ہے

(iii) مجموعہ $180°$ ہوتا ہے (iv) مجموعہ $360°$ ہوتا ہے

5. مربع کے قطر ایک دوسرے کو کس زاویے پر تنصیف کرتے ہیں؟

(i) $45°$ (ii) $60°$ (iii) $90°$ (iv) $120°$

ج) درج ذیل کو جوڑ ملائیں۔

کالم (الف)		کالم (ب)
1. مستطیل	( )	(a) تمام اضلاع برابر؛ قطر $90°$ پر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں
2. معین	( )	(b) کم از کم ایک جوڑا مخالف اضلاع متوازی ہوتا ہے
3. متوازی الاضلاع	( )	(c) مخالف اضلاع متوازی؛ قطر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں
4. منحرف	( )	(d) تمام زاویے $90°$؛ قطر برابر ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں

AP SCERT

DAY 5 — 5. NUMBER PLAY



- **Key Terms :** Consecutive Numbers, Multiple, Factor, Even Number, Odd Number, Parity, Remainder, Divisibility Rule, Digital Root
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Consecutive Numbers	Numbers that follow each other in order, differing by 1.	3, 4, 5, 6 are consecutive numbers.
Multiple	A number obtained by multiplying a given number by any whole number.	Multiples of 4: 4, 8, 12, 16 ...
Factor	A number that divides another number exactly (no remainder).	Factors of 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Even Number	A number exactly divisible by 2. Leaves remainder 0 when divided by 2.	2, 6, 14, 48 are even numbers.
Odd Number	A number that is NOT exactly divisible by 2. When divided by 2 leaves remainder 1.	3, 7, 15, 31 are odd numbers.
Parity	The property of two number being with equal property.	14 and 28 have the same parity (both even).
Remainder	What is left over after dividing a number as evenly as possible.	17 ÷ 5 = 3, remainder 2.

© NCERT

DAY 5

5. عدد کا کھیل



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: متواتر اعداد، اضعاف، جزِ ضربی، جفت عدد، طاق عدد، parity، باقی، قاعدہ تقسیم پذیری، ہندسی جذر

تصور کی وضاحت — اصطلاحات کو جانیں

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثال کے ذریعے متعارف کروائیں۔ ہر تصور کو حقیقی زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ طلبہ میں دلچسپی پیدا ہو۔

اہم لفظ	تعریف	مثال
متواتر اعداد	ایسے اعداد جو ترتیب وار آئیں اور جن میں فرق 1 ہو۔	3، 4، 5، 6 متواتر اعداد ہیں۔
اضعاف	ایسا عدد جو کسی عدد کو کسی صحیح عدد سے ضرب دینے سے حاصل ہو۔	4 کے اضعاف: 4، 8، 12، 16...
جزِ ضربی	ایسا عدد جو کسی دوسرے عدد کو مکمل تقسیم کرے۔	12 کے اجزائے ضربی: 1، 2، 3، 4، 6، 12
جفت عدد	ایسا عدد جو 2 سے مکمل تقسیم ہو جائے۔	2، 6، 14، 48 جفت اعداد ہیں۔
طاق عدد	ایسا عدد جو 2 سے مکمل تقسیم نہ ہو۔	3، 7، 15، 31 طاق اعداد ہیں۔
parity	دو اعداد کے جفت یا طاق ہونے کی خاصیت۔	14 اور 28 کی parity ایک جیسی ہے (دونوں جفت ہیں)۔
باقی	کسی عدد کو تقسیم کرنے کے بعد بچ جانے والی مقدار۔	17 ÷ 5 = 3، باقی 2

Divisibility Rule	A shortcut to check if a number divides another without actually dividing.	Sum of digits divisible by 9 → number is divisible by 9.
Digital Root	Add all digits of a number repeatedly until a single digit remains.	489710 → 4+8+9+7+1+0=29 → 2+9=11 → 1+1=2



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The sum of any two _____ numbers is always even.
2. A number is divisible by 9 if the _____ of its digits is divisible by 9.
3. The digital root of 729 is _____.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

1. Which of the following is always even when added?
   (a) odd + odd (b) odd + even
   (c) even + even (d) Both (a) and (c)
2. What is the digital root of 5832?
   (a) 8 (b) 9 (c) 6 (d) 3

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Parity of 14 and 28	( )	a. A shortcut - sum of digits ÷ 3
2. Digital Root of 36	( )	b. Leaves remainder 2 when divided by 5
3. Divisibility rule for 3	( )	c. Both even - same parity
4. 7 expressed as 5k + 2 (k = 1)	( )	d. Single digit = 9

APSCERT

قاعدہ تقسیم پذیری	ایسا مختصر اصول جس سے معلوم ہو کہ ایک عدد دوسرے عدد سے مکمل تقسیم ہوتا ہے یا نہیں، بغیر اصل تقسیم کیے۔	مثال: اگر ہندسوں کا مجموعہ 9 سے تقسیم ہو جائے تو عدد بھی 9 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔
ہندسی جذر	کسی عدد کے ہندسوں کو بار بار جمع کر کے حاصل ہونے والا ایک ہندسی عدد۔	مثال: 489710 ⟶ 4+8+9+7+1+0 = 29 ⟶ 9+2 = 11 ⟶ 1+1 = 2

طلبہ کی سرگرمی – پڑھنا اور مشق

ہدایات: اہم الفاظ کو غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کریں۔

الف) خالی جگہوں کو پُر کیجیے

1. کسی بھی دو _____ اعداد کا مجموعہ ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔
2. کوئی عدد 9 سے تقسیم ہوتا ہے اگر اس کے ہندسوں کا _____ 9 سے تقسیم ہو جائے۔
3. 729 کا ہندسی جذر _____ ہے۔

ب) معروضی سوالات — درست جواب پر (3) لگائیں۔

1. درج ذیل میں سے کون سا مجموعہ ہمیشہ جفت ہوتا ہے؟

(i) طاق + طاق (ii) طاق + جفت

(iii) جفت + جفت (iv) دونوں (i) اور (iii)

2. 5832 کا ہندسی جذر کیا ہے؟

ج) درج ذیل کو جوڑ ملائیں:

کالم (الف)		کالم (ب)
1. 14 اور 28 کی parity	( )	a. مختصر اصول — ہندسوں کا مجموعہ ÷3
2. 36 کا ہندسی جذر	( )	b. 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 بچے
3. 3 کے لیے قاعدۂ تقسیم پذیری	( )	c. دونوں جفت — ایک ہی parity
4. 7 کو 5 (k = 1) 2 + k کی صورت میں ظاہر کرنا	( )	d. ایک ہندسہ = 9

DAY 6 — 6. WE DISTRIBUTE, YET THINGS MULTIPLY


Teacher Corner


- **Key Terms :** Algebraic Expression, Variable (Letter-number), Distributive Property, Identity, Terms of an Expression, Coefficient, Like Terms, Expansion, Square of a Binomial, Difference of Squares
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Algebraic Expression	A combination of numbers and letter-symbols (variables) by operations.	3a + 2b - 5 is an algebraic expression.
Variable (Letter-number)	A letter that stands for any number; its value can change.	In 4x + 7, the variable is x.
Distributive Property	Multiplying a number by a sum equals multiplying each addend separately then adding. $a(b + c) = ab + ac$.	$3(4+5) = 12+15 = 27$.
Identity	A mathematical statement that is true for ALL values of the variables. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ is always true	$(2+3)^2 = 2^2+2.2.3+3^2 = 25$
Terms of an Expression	The individual parts of an expression separated by + or - signs.	In $4a^2 - 3ab + b$, terms are $4a^2$, $-3ab$, and b.
Coefficient	The number multiplied by a variable in a term.	In 5ab the coefficient is 5.

6. ہم تقسیم کرتے ہیں پھر بھی چیزیں بڑھتی ہیں

DAY 6



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ : جبری عبارت، متغیر (حرف-عدد)، تقسیمی خاصیت، مماثلت، عبارت کی اکائیاں، ضریب، ہم جنس حدود، پھیلاؤ، دورکنی کا مربع، مربعوں کا فرق

تصور کی وضاحت — اصطلاح جانیے :

ہدایات : ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روز مرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اصطلاح	تعریف	مثال
جبری عبارت	اعداد اور حرفی علامات (متغیرات) کا ریاضی اعمال کے ذریعے مجموعہ۔	$3a + 2b - 5$ ایک جبری عبارت ہے۔
متغیر (حرف-عدد)	ایک حرف جو کسی بھی عدد کی نمائندگی کرتا ہے؛ اس کی قدر بدل سکتی ہے۔	$4x + 7$ میں متغیر x ہے۔
تقسیمی خاصیت	کسی عدد کو مجموعے سے ضرب دینا، ہر جزو کو الگ الگ ضرب دے کر جوڑنے کے برابر ہے۔ $a(b + c) = ab + ac$	$3(4+5) = 12+15 = 27$
مماثلت	ایک ریاضیاتی بیان جو متغیرات کی تمام قدروں کے لیے سچ ہو۔ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ہمیشہ درست ہے۔	$(2+3)^2 = 2^2 + 2.2.3 + 3^2$ $= 25$
عبارت کی اکائیاں	عبارت کے وہ انفرادی حصے جو + یا — کی علامتوں سے الگ ہوں۔	$4a^2 - 3ab + b$ میں اکائیاں یہ ہیں: $4a^2$، $-3ab$، اور b
ضریب	وہ عدد جو کسی حد میں متغیر کے ساتھ ضرب ہو۔	$5ab$ میں ضریب 5 ہے۔

Like Terms	Terms that have exactly the same variables (and powers); only their coefficients differ.	$3x^2$ and $7x^2$ are like terms.
Expansion	Removing brackets by applying the distributive property to get a sum of terms.	$(x+2)(x+3)$ expands to x^2+5x+6.
Square of a Binomial	Squaring a two-term expression; key identities: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ and $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.	$(3+4)^2 = 9+24+16 = 49$. $(3-4)^2 = 9 - 24+16 = 1$.
Difference of Squares	The identity $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$, useful for fast multiplication.	$102\times98 = (100+2)(100-2)$ $= 10000-4 = 9996$.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The distributive property states: $a \times (b + c) =$ _____ + _____.
2. In the identity $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, the middle term $2ab$ is called the _____ term.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

3. Which identity helps calculate 98×102 quickly?
   (a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   (c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (d) $a(b + c) = ab + ac$

C. Match the following :

Column A		Column B
1. $(a + b)(a - b)$	( )	a. $a^2 - 2ab + b^2$
2. $(a + b)^2$	( )	b. $ab + mb + an + mn$
3. $(a - b)^2$	( )	c. $a^2 - b^2$
4. $(a + m)(b + n)$	( )	d. $a^2 + 2ab + b^2$

AP SCERT

مساوی ارکان	وہ ارکان جن میں بالکل ایک جیسے متغیرات (اور قوتیں) ہوں؛ صرف ان کے ضریب مختلف ہوں۔	$3x^2$ اور $7x^2$ یکساں ارکان ہیں۔
پھیلاؤ	قوسین کو تقسیمی خاصیت لگا کر ہٹانا تاکہ ارکان کا مجموعہ حاصل ہو۔	$(x+3)(x+2)$ کا پھیلاؤ x^2+5x+6 ہے۔
دور کنی کا مربع	دور کنی عبارت کو مربع کرنا؛ اہم شناختیں: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ اور $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$	$(3+4)^2 = 9+24+16 = 49$ اور $(4-3)^2 = 16+24-9 = 1$
مربعوں کا فرق	شناخت $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ جو تیز ضرب کے لیے مفید ہے۔	$102\times98 = (100+2)(100-2)$ $= 10000-4 = 9996$

طلبہ کی سرگرمی—پڑھنا اور مشق

ہدایات: اہم اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ تقسیمی خاصیت کے مطابق: _____ + _____ = $a \times (b + c)$

2۔ شناخت $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ میں درمیانی رکن $2ab$ کو _____ رکن کہتے ہیں۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیں:

3۔ 102×98 کو جلدی حل کرنے میں کون سی شناخت مددگار ہے؟

(a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (d) $a(b + c) = ab + ac$

ج) درج ذیل کو جوڑ ملائیے۔

Column A		Column B
1. $(a + b)(a - b)$	( )	a. $a^2 - 2ab + b^2$
2. $(a + b)^2$	( )	b. $ab + mb + an + mn$
3. $(a - b)^2$	( )	c. $a^2 - b^2$
4. $(a + m)(b + n)$	( )	d. $a^2 + 2ab + b^2$

DAY 7 — 7. PROPORTIONAL REASONING-1



- **Key Terms :** Ratio, Terms of Ratio, Simplest Form, HCF, Proportion, Factor of Change, Cross Multiplication, Dividing in a Ratio, Proportional Quantities
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Ratio	A comparison of two quantities using division, written as a : b. For every 'a' units of the first quantity, there are 'b' units of the second.	Ex: Width 60 mm, Height 40 mm → Ratio = 60 : 40
Terms of Ratio	The two numbers in a ratio a : b are called its terms. 'a' is the first term and 'b' is the second term.	Ex: In 3 : 5, the terms are 3 and 5.
Simplest Form	Highest Common Factor - the largest number that divides both terms of the ratio exactly. Used to simplify ratios.	Ex: HCF of 72 and 96 is 24.
HCF	A ratio reduced by dividing both terms by their HCF until no common factor remains (other than 1).	Ex: 60 : 40 → HCF=20 → Simplest = 3 : 2
Proportion	Two ratios are in proportion if they have the same simplest form. Written as a : b :: c : d.	Ex: 60:40 :: 30:20, since both = 3:2
Cross Multiplication	If a:b :: c:d, then ad = bc. Used to verify proportion and find unknown terms in a ratio.	Ex: 3:4 :: 6:8 → 3 × 8 = 24 = 4 × 6 (True)

DAY 7

7. تناسبی استدلال-1

معلم کی سرگرمی




اہم الفاظ : نسبت، نسبت کی ارکان، سادہ ترین صورت، ع۔ا۔م، تناسب، جز ضربی کی تبدیلی، کراس ضرب، نسبت میں تقسیم، تناسب کی قدریں

تصور کی وضاحت — اہم الفاظ جانیے :

ہدایات : ہر لفظ کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روزمرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

مثال	تعریف	اہم الفاظ
چوڑائی 60 ملی میٹر، اونچائی 40 ملی میٹر ← نسبت 40 : 60=	دو مقداروں کا تقسیم کے ذریعے موازنہ، جو a : b کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ پہلی مقدار کی ہر 'a' اکائی کے مقابلے میں دوسری مقدار کی 'b' اکائیاں ہوتی ہیں۔	نسبت
5 : 3 میں ارکان 3 اور 5 ہیں۔	نسبت a : b میں دونوں اعداد کو اس کی ارکان کہتے ہیں۔ 'a' پہلا رکن اور 'b' دوسرا رکن ہے۔	نسبت کی ارکان
60 : 40 ← ع۔ا۔م =20 ← سادہ ترین صورت = 2 : 3	نسبت کو اس وقت تک دونوں رکنوں کو ان کے ع۔ا۔م پر تقسیم کرکے کم کیا جائے جب تک کوئی مشترک جز ضربی (1 کے علاوہ) باقی نہ رہے۔	سادہ ترین صورت
72 اور 96 کا ع۔ا۔م 24 ہے۔	وہ سب سے بڑا عدد جو نسبت کی دونوں رکنوں کو پوری طرح تقسیم کرے۔ نسبت کو سادہ کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔	ع۔ا۔م
60:40 :: 30:20 کیونکہ دونوں =3:2	دو نسبتیں تناسب میں ہوتی ہیں اگر ان کی سادہ ترین صورت ایک جیسی ہو۔ a : b :: c : d کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔	تناسب
3×8 ← 3:4 :: 6:8 4×6 = 24 = (درست)	اگر a:b :: c:d ہو تو ad = bc ۔ تناسب کی تصدیق اور نسبت میں نامعلوم ارکان معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے	کراس ضرب

Factor of change	The number by which both terms of a ratio are multiplied or divided to obtain an equivalent proportional ratio.	Ex: (60 : 40) × 1/2 =30:20. Factor = 1/2
Dividing in a Ratio	To divide quantity 'x' in the ratio m:n, then the parts are $\frac{m \times x}{m+n}$ and $\frac{n \times x}{(m+n)}$.	Ex: Rs.4000 in ratio 3:1 → Rs.3000 & Rs.1000
Proportional Quantities	Two pairs of quantities are proportional when their ratios change by the same multipli -cative factor (NOT additive).	Ex: 6 glasses:10 spoons :: 18 glasses : 30 spoons and $30 \times \frac{6}{10} = \frac{18}{30} \times 30$ $\Rightarrow 18 = 18$



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The Simplest from of 48 : 36 is _____.
2. If 5 :8 :: 15 :_____, the missing term is _____.
3. Divide Rs. 700 in ratio 2 : 5. The larger share = Rs. _____.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

4. Which pair of ratios is in proportion?
   (A) 2:3 and 4:5 (B) 3:4 and 9:12
   (C) 5:6 and 10:13 (D) 1:2 and 2:5
5. If a:b :: c:d, then by cross multiplication:
   (A) ab = cd (B) ac = bd (C) ad = bc (D) a+d = b+c

C. Match the following :

Column A		Column B
A. 60 : 40	( )	1. Simplest form is 2 : 1
B. 40 : 20	( )	2. Simplest form is 1 : 1
C. 90 : 30	( )	3. Simplest form is 3 : 2
D. 60 : 60	( )	4. Simplest form is 3 : 1

AP SCERT

جزضربی کی تبدیلی	وہ عدد جس سے نسبت کی دونوں حدوں کو ضرب یا تقسیم کیا جائے تا کہ ایک مساوی متناسب نسبت حاصل ہو۔	$(60:40)\times\frac{1}{2}$ $30:20=$ جزضربی $=\frac{1}{2}$
نسبت میں تقسیم	مقدار 'x' کو m:n کی نسبت میں تقسیم کرنے کے لیے حصے اس طرح نکالے جاتے ہیں۔	4000روپیے کو 3:1 میں تقسیم ⟵3000روپیے اور 1000روپیے
تناسب کی قدریں	دو جوڑے مقداروں میں تناسب ہوتا ہے جب ان کی نسبتیں ایک ہی جزضربی سے بدلیں (جمع یا تفریق سے نہیں)۔	6گلاس:10 چمچ::18گلاس:30 چمچ اور $30\times\frac{6}{10}=\frac{18}{30}\times 30$ $\Rightarrow 18=18$



طلبہ کی سرگرمی۔ پڑھنا اور مشق

ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہیں پُر کیجیے :

1۔ 36 : 48 کی سادہ ترین صورت _____ ہے۔

2۔ اگر 5 : 15 :: 8 : _____ ہو تو گمشدہ کن _____ ہے۔

3۔ 700 روپے کو 2 : 5 کی نسبت میں تقسیم کیجیے۔ بڑا حصہ = _____ روپے۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے:

4۔ کون سا جوڑا نسبتوں میں تناسب رکھتا ہے؟

(الف) 2:3 اور 4:5 (ب) 3:4 اور 9:12 (ج) 5:6 اور 10:13 (د) 1:2 اور 2:5

5۔ اگر a:b :: c:d ہو تو کراس ضرب سے:

(الف) ab = cd (ب) ac = bd (ج) ad = bc (د) a+d = b+c

ج۔ درج ذیل کو جوڑ ملائیے۔

کالم (الف)		کالم (ب)
الف۔ 60 : 40	( )	1۔ سادہ ترین صورت 2 : 1 ہے
ب۔ 40 : 20	( )	2۔ سادہ ترین صورت 1 : 1 ہے
ج۔ 90 : 30	( )	3۔ سادہ ترین صورت 3 : 2 ہے
د۔ 60 : 60	( )	4۔ سادہ ترین صورت 3 : 1 ہے

AP SCERT

DAY 8 — 8. FRACTIONS IN DISGUISE


Teacher Corner


- **Key Terms :** Per Cent (%), Fraction, Equivalent Fraction, Percentage of a Quantity, Decimal, Percentage Increase, Percentage Decrease, Profit &Loss, Simple Interest.
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Per Cent (%)	Per cent means 'out of 100'. The symbol % represents a fraction with denominator 100.	Ex: 25% = $\frac{25}{100}$. 50% = $\frac{50}{100}$ = 50%
Fraction to Percentage	Multiply the fraction by 100 to get the percentage. Fraction $\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right) \times 100$ %.	Ex: $\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} \times 100\right)$% = 75%.
Equivalent Fraction	Fractions that represent the same value. Used to express fractions as percentages.	Ex: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100}$ = 75%.
Percentage of a Quantity	To find p% of a quantity Q, calculate $(\frac{p}{100}) \times Q$.	Ex: 25% of 120 = $(\frac{25}{100}) \times 120 = 30$.
Decimal & Percentage	Percentages, fractions and decimals are interchange able. Divide the percentage by 100 to get decimal.	Ex: 40% = $\frac{40}{100}$ = 0.4.
Percentage Increase	When a value grows: the percentage increase = (Increase/Original) × 100.	Ex: Price Rs.30 to Rs.42: $(\frac{12}{30}) \times 100$ = 40%.

DAY 8

8. چھپے ہوئے کسور



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ : فیصد (%)، کسر، یکساں کسور، مقدار کا فیصد، اعشاریہ، فیصد میں اضافہ، فیصد میں کمی، نفع و نقصان، سادہ سود

تصور کی وضاحت — اصطلاحات جانیے :

ہدایات : ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روزمرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
فیصد (%)	فیصد کا مطلب ہے '100 میں سے'۔ علامت % ایک ایسی کسر کو ظاہر کرتی ہے جس کا نسب نما 100 ہو۔	$25\% = \frac{25}{100}$. $50\% = \frac{50}{100}$
کسر سے فیصد	کسر کو فیصد میں بدلنے کے لیے 100 سے ضرب دیں۔ کسر $\frac{x}{y}$ $(100\times\frac{x}{y})\ \% =$	$\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} \times 100\right)\% = 75\%$
یکساں کسور	وہ کسریں جو ایک ہی قدر کو ظاہر کریں۔ کسروں کو فیصد میں ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتی ہیں۔	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = 75\%$
مقدار کا فیصد	کسی مقدار Q کا p% معلوم کرنے کے لیے $(p/100) \times Q$ حساب کریں۔	120 کا 25% = $30 = 120 \times (\frac{25}{100})$
اعشاریہ اور فیصد	فیصد، کسر اور اعشاریہ ایک دوسرے میں بدلے جاسکتے ہیں۔ فیصد کو 100 پر تقسیم کریں تو اعشاریہ ملتا ہے۔	$40\% = \frac{40}{100} = 0.4$
فیصد میں اضافہ	جب کوئی قدر بڑھے: فیصد میں اضافہ = (اضافہ ÷ اصل قدر) × 100	قیمت 30 روپے سے 42 روپے: $40\% = 100 \times (\frac{12}{30})$

Percentage Decrease	When a value falls: The percentage decrease = $\frac{\text{Decrease}}{\text{Original}} \times 100$.	Ex: decrease 160 to 100 then decrease % $\left(\frac{60}{160}\right) \times 100 = 37.5\%$.
Profit & Loss	Profit % = (Profit/Cost Price) × 100. Loss % = (Loss/CP) x Profit or loss Always calculated on CP.	Ex: CP Rs.300, SP 100. Rs.430: Profit = 43.3%.
Simple Interest (No Compounding)	Simple Interest = $\frac{p \times t \times r}{100}$ Total amount = $P\left(1 + \frac{RT}{100}\right)$ Same interest earned each period.	Ex: Rs.6000 × 10% for 3 yrs = Rs.7800.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. 25% means _____ out of every 100.
2. Express 3/5 as a percentage _____.
3. 30% of Rs. 200 = Rs. _____.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

4. A shopkeeper buys an article for Rs. 80 and sells at Rs. 100. Profit % is:
   (A) 20% (B) 25% (C) 80% (D) 125%
5. The money Rs. 5000 at 10% p.a. for 2 years without compounding gives total money:
   (A) Rs. 5500 (B) Rs. 6000 (C) Rs. 6050 (D) Rs. 5050

C. Match the following :

Column A		Column B
A. 3/4	( )	1. 0.2
B. 1/5	( )	2. 0.75
C. 50%	( )	3. 60%
D. 3/5	( )	4. 0.5

APSCERT

فیصد میں کمی	جب کوئی قدر گھٹے: فیصد میں کمی = (کمی ÷ اصل قدر) × 100	160 سے 100 تک کمی: $\left(\frac{60}{160}\right) \times 100 = 37.5\ \%$
نفع و نقصان	نفع% = (نفع÷قیمت خرید) × 100۔ نقصان% = (نقصان÷قیمت خرید) × 100 ۔ نفع یا نقصان ہمیشہ قیمت خرید پر حساب ہوتا ہے۔	قیمت خرید 300 روپے، فروخت قیمت 430 روپے: نفع = 43.3%
سود مفرد (مرکب کے بغیر)	سود مفرد = $\frac{p \times t \times r}{100}$ کل رقم = $P\left(1+\frac{RT}{100}\right)$ ہر مدت میں یکساں سود ملتا ہے۔	6000 روپے × 10% × 3 سال = 7800 روپے



طلبہ کی سرگرمی — پڑھنا اور مشق

ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ 25% کا مطلب ہے ہر 100 میں سے _____۔

2۔ 3/5 کو فیصد میں ظاہر کیجیے _____۔

3۔ 200 روپے کا 30% = _____ روپے۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے:

4۔ ایک دکاندار نے کوئی چیز 80 روپے میں خریدی اور 100 روپے میں بیچی۔ نفع فیصد کتنا ہے؟

(A) 20% (B) 25% (C) 80% (D) 125%

5۔ 5000 روپے پر 10% سالانہ شرح سے 2 سال کا بغیر مرکب سود کے کل رقم کتنی ہوگی؟

(A) Rs. 5500 (B) Rs. 6000 (C) Rs. 6050 (D) Rs. 5050

ج۔ درج ذیل کو جوڑ ملائیے:

Column A		Column B
A. 3/4	( )	1. 0.2
B. 1/5	( )	2. 0.75
C. 50%	( )	3. 60%
D. 3/5	( )	4. 0.5

APSCERT

DAY 9 9. THE BAUDHAYANA-PYTHAGORAS THEOREM



- **Key Terms :** Right Triangle, Hypotenuse, Legs / Perpendicular Sides, Square & Area, Diagonal, Baudha yana-Pythagoras Theorem, Irrational Number, Baudhayana Triple, Square Root, Congruence
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Right Triangle	A triangle with one angle equal to exactly 90 degrees. The side opposite the right angle is always the longest side.	Ex: Triangle with sides 3, 4, 5 - angle is between sides 3 and 4 is right angle.
Hypotenuse	The side opposite the right angle in a right triangle. It is always the longest side of a right triangle.	Ex: In a 3-4-5 triangle, the hypotenuse is the side of length 5.
Legs (Shorter Sides)	The two sides of a right triangle that form the right angle. Also called perpendicular sides or 'a' and 'b' in the theorem.	Ex: In 3-4-5, the legs are 3 and 4.
Area of a Square	If a square has side length s, its area = $s \times s = s^2$. (Used to understand why the theorem works through areas.)	Ex: Square of side 4 has area = $4 \times 4 =$ 16 sq. units.
Diagonal of a Square	A line joining two opposite corners of a square. The diagonal of a square of side 'a' has length = $a \times \sqrt{2}$	Ex: Square of side 1 has diagonal = $a \times \sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = 1.414...$

DAY 9

9. بودھایَن-فیثاغورث کا مسئلہ



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: قائمہ مثلث، وتر، اضلاع (عمودی اضلاع)، مربع اور رقبہ، قطر، بودھایَن-فیثاغورث مضمون، غیر ناطق عدد، بودھائن ثلاثی، جذر المربع، مطابقت

تصور کی وضاحت — اصطلاحات جانیے:

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روزمرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
قائمہ مثلث	وہ مثلث جس کا ایک زاویہ بالکل 90 درجے کا ہو۔ قائمہ زاویے کے سامنے والا ضلع ہمیشہ سب سے لمبا ہوتا ہے۔	3، 4، 5 اضلاع والا مثلث — 3 اور 4 کے درمیان قائمہ زاویہ ہے۔
وتر	قائمہ مثلث میں قائمہ زاویے کے سامنے والا ضلع۔ یہ ہمیشہ قائمہ مثلث کا سب سے لمبا ضلع ہوتا ہے۔	3-4-5 مثلث میں وتر 5 کا ضلع ہے۔
اضلاع (چھوٹے اضلاع)	قائمہ مثلث کے وہ دو اضلاع جو قائمہ زاویہ بناتے ہیں۔ انہیں عمودی اضلاع یا مضمون میں 'a' اور 'b' بھی کہتے ہیں۔	3-4-5 میں اضلاع 3 اور 4 ہیں۔
مربع کا رقبہ	اگر مربع کا ضلع s ہو تو رقبہ $= s \times s = s^2$۔ یہ سمجھنے کے لیے استعمال ہوتا ہے کہ مضمون رقبوں کے ذریعے کیوں کام کرتا ہے۔	4 ضلع والے مربع کا رقبہ $= 4 \times 4 = 16$ مربع اکائیاں۔
مربع کا قطر	مربع کے دو مخالف کونوں کو ملانے والی لکیر۔ 'a' ضلع والے مربع کے قطر کی لمبائی $= a \times \sqrt{2}$	1 ضلع والے مربع کا قطر $= a \times \sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = 1.44$ ....

Baudhayana-Pythagoras Theorem	In a right triangle with legs a, b and hypotenuse c: $a^2 + b^2 = c^2$. First stated by Baudhayana (800 BCE).	Ex: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. So (3,4,5) works!
Square Root	The square root of a number n (written $\sqrt{(n)}$ is the value hat when multiplied by itself gives n.	Ex: $\sqrt{25} = 5$ because $5 \times 5 = 25$. $\sqrt{2} = 1.414$.
Baudhayana Triple	A set of three positive integers (a, b, c) that satisfy $a^2 + b^2 = c^2$. These form the sides of a right triangle.	Ex: (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) are all Baudhayana tripletss.
Irrational Number	A number that cannot be written as a simple fraction m/n and is a non-terminating, non-repeating decimal. (m, $n \in z$, $n \neq 0$)	Ex: $\sqrt{2} = 1.41421356..$ cannot be written as a fraction.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. In a right triangle, the side opposite the right angle is called the _____.
2. If a = 3 and b = 4 in a right triangle, then c = _____ (use $a^2 + b^2 = c^2$).
3. The lengh of the diagonal of a square of side 5 units is _____ units.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

4. Which set is a Baudhayana triple?
   (A) (2, 3, 4) (B) (5, 12, 13) (C) (4, 5, 8) (D) (6, 7, 9)
5. If $\sqrt{2} = 1.414...$, then $\sqrt{2}$ is:
   (A) A fraction (B) A terminating decimal
   (C) An irrational number (D) A whole number

APSCERT

بودھائن۔ فیثاغورث مضمون	قائمہ مثلث میں جس کے اضلاع a ، b اور وتر c ہو: $a^2 + b^2 = c^2$ ۔ سب سے پہلے بودھائن (800 قبل مسیح) نے بیان کیا۔	$3^2 + 4^2 = 9 + 16$ $= 25 = 5^2$ ۔ پس (3،4،5) درست ہے!
جذرالمربع	کسی عدد n کا جذرالمربع ($\sqrt{n}$ لکھا جاتا ہے) وہ قدر ہے جسے خود سے ضرب دینے پر n حاصل ہو۔	$\sqrt{25} = 5$ کیونکہ $5 \times 5 = 25$ ۔ $\sqrt{2} = 1.414$
بودھائن ثلاثی	تین مثبت اعداد صحیح (a،b،c) کا وہ مجموعہ جو $a^2 + b^2 = c^2$ کو پورا کرے۔ یہ قائمہ مثلث کے اضلاع بناتے ہیں۔	(3،4،5)، (5،12،13)، (8،15،17) سب بودھائن ثلاثی ہیں۔
غیر ناطق عدد	وہ عدد جسے سادہ کسر m/n کی صورت میں نہ لکھا جاسکے اور جس کا اعشاریہ نہ ختم ہو اور نہ دہرائے۔ $(n \neq 0, n \in z, m)$	$\sqrt{2} = 1.41421356..$ کو کسر کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا۔



طلبہ کی سرگرمی۔ پڑھنا اور مشق

ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ قائمہ مثلث میں قائمہ زاویے کے سامنے والے ضلع کو _____ کہتے ہیں۔

2۔ قائمہ مثلث میں اگر $a = 3$ اور $b = 4$ ہو تو _____ $= c$ ($a^2 + b^2 = c^2$ استعمال کیجیے)۔

3۔ 5 اکائی ضلع والے مربع کے قطر کی لمبائی _____ اکائیاں ہے۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے

4۔ کون سا مجموعہ بودھائن ثلاثی ہے؟

(الف) (4،3،2) (ب) (13،12،5) (ج) (8،5،4) (د) (9،7،6)

5۔ اگر $\sqrt{2} = 1.414...$ ہو تو $\sqrt{2}$ ہے:

(الف) ایک کسر (ب) ایک ختم ہونے والا اعشاریہ

(ج) ایک غیر ناطق عدد (د) ایک عدد صحیح

DAY 10 — 10. PROPORTIONAL REASONING-2



- **Key Terms :** Ratio, Proportion, Cross Multiplication, Multi-term Ratio, Representative Fraction (RF), Direct Proportion, Inverse Proportion, Pie Chart, HCF
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Ratio	A ratio is a way of comparing two or more quantities to show how their sizes relate to one another. It indicates how many times one number contains another	In the ratio a:b, a is called antecedent and b is called the consequent In 3:2, antecedent = 3 condequent = 2
Multi-term Ratio	A ratio with more than 2 terms, e.g., a:b:c. All terms change by the same factor when scaled up or down.	Ex: Spice mix 8:4:2:1 scaled to half = 4:2:1:0.5.
Proportion	Proportion is a statement that two ratios are equal. If a,b,c,d are in proportion then a:b = c:d	If 15, 20, 6, 8 are in proportion then 15 : 20 = 6:8
Representative Fraction (RF)	The ratio of a distance on the map to the actual ground distance. Used to find real-world distances from map distances.	Ex: RF 1:60,00,000 means 1 cm on map = 60 km real.
Direct Proportion	Two quantities are in direct proportional if when one increases, the other increases by the same factor. $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ (constant).	Ex: More rice → more idlis. 5 workers make 4500 bricks; 20 workers make 18000 bricks.

DAY 10

10. تناسبی استدلال-2



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: نسبت، تناسب، کراس ضرب، کثیر الارکان نسبت، نمائندہ کسر (RF)، راست تناسب، معکوس تناسب، پائی چارٹ، ذ۔ا۔م

تصور کی وضاحت ــــ اصطلاحات جانیے:

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روزمرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
نسبت	نسبت دو یا زیادہ مقداروں کا موازنہ کرنے کا طریقہ ہے جو یہ ظاہر کرے کہ ان کے حجم آپس میں کیسے جڑے ہیں۔ یہ بتاتا ہے کہ ایک عدد دوسرے میں کتنی بار آتا ہے۔	نسبت a:b میں، a کو مقدّم اور b کو تالی کہتے ہیں۔ 3:2 میں مقدّم = 3، تالی = 2
کثیر الارکان نسبت	دو سے زیادہ ارکان والی نسبت، مثلاً a:b:c۔ اوپر یا نیچے کرنے پر تمام ارکان ایک ہی جز ضربی سے بدلتی ہیں۔	مصالحہ مرکب 8:4:2:1 کو آدھا کریں تو 4:2:1:0.5
تناسب	تناسب وہ بیان ہے کہ دو نسبتیں برابر ہوں۔ اگر a، b، c، d تناسب میں ہوں تو a:b :: c:d	اگر 15، 20، 6، 8 تناسب میں ہوں تو 6:8:: 15:20
نمائندہ کسر (RF)	نقشے پر فاصلے اور زمینی اصل فاصلے کا تناسب۔ نقشے کے فاصلوں سے حقیقی فاصلے معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔	RF 1:60,00,000 کا مطلب نقشے پر 1 سینٹی میٹر = 60 کلو میٹر اصل فاصلہ
راست تناسب	دو مقداریں راست تناسب میں ہوتی ہیں جب ایک بڑھے تو دوسری بھی اسی جز ضربی سے بڑھے (ثابت رہے)۔	زیادہ چاول ← زیادہ اڈلی۔ 5 مزدور 4500 اینٹیں بناتے ہیں؛ 20 مزدور 18000 اینٹیں بناتے ہیں۔

Inverse Proportion	Two quantities are in inversely proportional if when one increases by factor n, the other decreases by factor n. $x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = k$.	Ex: More speed → less time. More workers → fewer days.
Cross Multiplication	Cross multipication is a mathematical technique used to slove an equation involving to ratios or fractions.	If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then a×d = b×c If $\frac{x}{10} = \frac{3}{5}$ then, $5 \times x = 10 \times 3$ $5x = 30$, $x = 6$
Pie Chart	A circle divided into slices where each slice's angle is proportional to the data it represents. Total angle = 360º.	Ex: 12 out of 40 students → angle = $\frac{12}{40} \times 360^\circ = 108º$.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. In inverse proportion, when one quantity doubles, the other quantity _____.
2. Divide 90 in the ratio 1:2:3. The three parts are _____, _____, _____.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

3. 4 workers finish a job in 6 days. 8 workers will finish it in:
   (A) 12 days (B) 3 days (C) 6 days (D) 24 days
4. Speed and time for a fixed distance are:
   (A) Directly proportional (B) Inversely proportional
   (C) Not related (D) Equal

APSCERT

معکوس تناسب	دو مقداریں معکوس تناسب میں ہوتی ہیں جب ایک n گنا بڑھے تو دوسری n گنا گھٹے۔ $x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = k$	زیادہ رفتار ← کم وقت۔ زیادہ مزدور ← کم دن۔
کراس ضرب	کراس ضرب ایک ریاضیاتی طریقہ ہے جو نسبتوں یا کسروں پر مشتمل مساوات حل کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ اگر a:b :: c:d تو $a\times d = b\times c$ ایک دائرہ جو ٹکڑوں میں تقسیم ہو جہاں ہر ٹکڑے کا	اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تو $a\times d = b\times c$ اگر $\frac{x}{10} = \frac{3}{5}$ تو $5\times x = 10\times 3$، $5x = 30$، $x = 6$ 40 میں سے 12 طلبہ ←
پائی چارٹ	زاویہ اس کے اعداد و شمار کے متناسب ہو۔ کل زاویہ = 360 درجے۔	زاویہ = $360\times(\frac{12}{40})$ = 108 درجے

طلبہ کی سرگرمی۔ پڑھنا اور مشق



ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ معکوس تناسب میں جب ایک مقدار دوگنی ہو جائے تو دوسری مقدار _____۔

2۔ 90 کو 1:2:3 کی نسبت میں تقسیم کیجیے۔ تین حصے _____، _____، _____ ہوں گے۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے

3۔ 4 مزدور ایک کام 6 دن میں مکمل کرتے ہیں۔ 8 مزدور اسے کتنے دنوں میں مکمل کریں گے؟

(الف) 12 دن (ب) 3 دن (ج) 6 دن (د) 24 دن

4۔ ایک مقررہ فاصلے کے لیے رفتار اور وقت:

(الف) راست تناسب میں ہیں (ب) معکوس تناسب میں ہیں

(ج) آپس میں کوئی تعلق نہیں (د) برابر ہیں

DAY 11 — 11. EXPLORING SOME GEOMETRIC THEMES



- **Key Terms :** Fractal, Self-similarity, Net (of a solid), Face, Edge, Vertex, Projection, Isometric projection, Prism, Pyramid
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Fractal	A shape that shows the same or similar pattern at smaller and smaller scales (self-similar).	A fern leaf - each sub-leaf looks like the whole fern.
Self-similarity	When smaller parts of a shape look the same as the whole shape.	Koch Snowflake - each bump has smaller bumps of the same shape.
Net of a solid	A flat 2D shape that can be folded to form a 3D solid.	6 squares joined in a cross pattern fold into a cube.
Face	A flat (plane) surface that forms the boundary of a solid.	A cube has 6 square faces.
Edge	A line segment where two faces of a solid meet.	A cube has 12 edges.
Vertex	A point (corner) where two or more edges of a solid meet.	A cube has 8 vertices.
Projection	The shadow-like flat image of a 3D object formed on a plane surface when light shines perpendicularly on it.	Top view of a cylinder is a circle.

DAY 11

11. ہندسی موضوعات کی تلاش



اہم الفاظ : خود مشابہ شکل، خود مماثلت، ساخت کا جال، سطح، کنارہ، راس، عکس، ہم پیمانہ عکس، منشور، ہرم

تصور کی وضاحت — اصطلاحات جانیے :

ہدایات : ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روزمرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

مثال	تعریف	اہم الفاظ
فرن کا پتہ — ہر چھوٹا پتہ پورے فرن جیسا دکھتا ہے۔	وہ شکل جو چھوٹے اور چھوٹے پیمانوں پر ایک جیسا یا ملتا جلتا نمونہ دکھائے (خود مماثل)۔	خود مشابہ شکل
کوخ سنوفلیک — ہر ابھار میں اسی شکل کے چھوٹے ابھار ہوتے ہیں۔	جب کسی شکل کے چھوٹے حصے پوری شکل جیسے دکھیں۔	خود مماثلت
چھ مربع صلیب کی شکل میں جوڑے جائیں تو مکعب بنتا ہے۔	ایک چپٹی دو ابعادی شکل جسے موڑ کر تین ابعادی ساخت بنایا جا سکے۔	ساخت کا جال
مکعب کی 6 مربع سطحیں ہوتی ہیں۔	وہ چپٹی (ہموار) سطح جو کسی ساخت کی حد بناتی ہو۔	سطح
مکعب کے 12 کنارے ہوتے ہیں۔	وہ لکیری حصہ جہاں کسی ساخت کی دو سطحیں ملتی ہوں۔	کنارہ
مکعب کی 8 راسیں ہوتی ہیں۔	وہ نقطہ (کونہ) جہاں کسی ساخت کے دو یا دو سے زیادہ کنارے ملتے ہوں۔	راس
استوانہ کا اوپری عکس ایک دائرہ ہوتا ہے۔	کسی تین ابعادی ساخت کی وہ چپٹی سایہ نما تصویر جو روشنی کے عمودی پڑنے سے کسی ہموار سطح پر بنے۔	عکس

Isometric projection	A special projection of a solid where the lengths of all projected edges are equal. Drawn on isometric (hexagonal) grid paper.	A cube balanced on its corner vertex gives an isometric (hexagon) projection.
Prism	A solid with two identical parallel polygon faces (Top & base) connected by rectangles (parallelograms).	A triangular prism has 2 triangular faces and 3 rectangular faces.
Pyramid	A solid with a polygon base and triangular Lateral faces meeting at a single apex (top point).	A square pyramid has a square base and 4 triangular faces.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. A shape that shows the same pattern at smaller and smaller scales is called a _____.
2. The flat 2D shape that can be folded to form a 3D solid is called the _____ of the solid.
3. A cube has _____ faces, _____ edges and _____ vertices.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

1. Which of the following is an example of a fractal found in nature?
   (a) Cube (b) Fern leaf (c) Cylinder (d) Net
2. The projection of a cube in which all edges appear equal in length is called:
   (a) Front view (b) Top view
   (c) Isometric projection (d) Side view

C. Match the following :

Column A			Column B
1. Fractal	( )	A)	Flat shape that folds into a solid
2. Vertex	( )	B)	Same pattern repeating at smaller scales
3. Net	( )	C)	A shape made by repeating a pattern at smaller scales
4. Self-similarity	( )	D)	Shadow-like flat image of a 3D object on a plane
5. Projection	( )	E)	Point where two or more edges meet

ہم پیمانہ عکس	کسی ساخت کا وہ خاص عکس جہاں تمام عکسی کناروں کی لمبائی برابر ہو۔ ہم پیمانہ (مسدسی) جالی دار کاغذ پر بنایا جاتا ہے۔	مکعب کو اس کی راس پر کھڑا کریں تو ہم پیمانہ (مسدس) عکس ملتا ہے۔
منشور	وہ ساخت جس کی دو یکساں متوازی کثیر الاضلاع سطحیں (اوپر اور نیچے) مستطیلوں (متوازی الاضلاع) سے جڑی ہوں۔	مثلثی منشور میں 2 مثلثی سطحیں اور 3 مستطیل سطحیں ہوتی ہیں۔
ہرم	وہ ساخت جس کی بنیاد کثیر الاضلاع ہو اور اطرافی سطحیں مثلثی ہوں جو ایک چوٹی (اوپری نقطے) پر ملتی ہوں۔	مربع ہرم میں ایک مربع بنیاد اور 4 مثلثی سطحیں ہوتی ہیں۔



طلبہ کی سرگرمی۔ پڑھنا اور مشق

ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ وہ شکل جو چھوٹے اور چھوٹے پیمانوں پر ایک جیسا نمونہ دکھائے _____ کہلاتی ہے۔

2۔ وہ چپٹی دو ابعادی شکل جسے موڑ کر سہ ابعادی ساخت بنائی جا سکے اسے ساخت کا _____ کہتے ہیں۔

3۔ مکعب کی _____ سطحیں، _____ کنارے اور _____ راسیں ہوتی ہیں۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے:

1۔ قدرت میں خود مشابہ شکل کی مثال کون سی ہے؟

(الف) مکعب (ب) فرن کا پتہ (ج) استوانہ (د) جال

2۔ مکعب کا وہ عکس جس میں تمام کنارے لمبائی میں برابر دکھیں کیا کہلاتا ہے؟

(الف) سامنے کا منظر (ب) اوپر کا منظر (ج) ہم پیمانہ عکس (د) پہلو کا منظر

ج۔ درج ذیل کو جوڑ ملائیے:

کالم (الف)		کالم (ب)
1۔ خود مشابہ شکل	( )	الف) چپٹی شکل جو موڑنے سے ساخت بنے
2۔ راس	( )	ب) چھوٹے پیمانوں پر دہرایا جانے والا نمونہ
3۔ جال	( )	ج) چھوٹے پیمانوں پر نمونہ دہرا کر بنی شکل
4۔ خود مماثلت	( )	د) سہ ابعادی ساخت کا سطح پر سایہ نما چپٹا عکس
5۔ عکس	( )	ہ) وہ نقطہ جہاں دو یا زیادہ کنارے ملتے ہوں

DAY 12 — 12. TALES BY DOTS AND LINES



- **Key Terms :** Mean (Average), Median, Central Tendency, Frequency, Line Graph, Spreadsheet, Data (Dataset), Infographic, Arithmetic Mean formula
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Mean (Average)	Sum of all values divided by the number of values. It is the 'balance point' of the data.	Mean of 3,7,8 = $\frac{3+7+8}{3}$ = 18÷3 = 6
Median	The middle value when data is sorted in order. Half of the values of the data lie below it, half above.	Sorted: 3,5,7,9,11 → Median = 7
Central Tendency	A single value that represents the 'centre' or typical value of a data set.	Mean & Median are both measures of central tendency.
Frequency	The number of times a particular value appears in a data set.	In {4,4,4,7,9}, frequency of 4 is 3.
Line Graph	A graph where data points are connected by lines. Best used to show change over time.	Monthly temperature plotted over 12 months.
Spreadsheet	A digital table of rows and columns (cells) used to store and calculate data using formulae.	= AVERAGE(B2:B10) finds average of a column.

DAY 12

12. نقطوں اور لکیروں کی کہانیاں



معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ: اوسط، وسطانیہ، مرکزی رجحان، تعدد، خطی گراف، جدول بندی، اعداد و شمار، معلوماتی خاکہ، حسابی اوسط کا ضابطہ

تصور کی وضاحت ۔ اصطلاحات جانیے:

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روز مرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
اوسط	تمام قدروں کا مجموعہ قدروں کی تعداد پر تقسیم کریں۔ یہ اعداد و شمار کا 'توازن کا نقطہ' ہے۔	8،7،3 کی اوسط = $\frac{3+7+8}{3}$ = 18÷3 = 6
وسطانیہ	اعداد و شمار کو ترتیب سے سجانے پر درمیانی قدر۔ آدھی قدریں اس سے نیچے اور آدھی اوپر ہوتی ہیں۔	ترتیب سے: 3،5،7،9،11 ← وسطانیہ = 7
مرکزی رجحان	وہ واحد قدر جو کسی اعداد و شمار کے مجموعے کی 'درمیانی' یا مخصوص قدر کو ظاہر کرے۔	اوسط اور وسطانیہ دونوں مرکزی رجحان کی پیمائش ہیں۔
تعدد	کسی مخصوص قدر کے اعداد و شمار میں آنے کی تعداد۔	{4،4،4،7،9} میں 4 کا تعدد 3 ہے۔
خطی گراف	وہ خاکہ جس میں اعداد و شمار کے نقاط لکیروں سے جوڑے جائیں۔ وقت کے ساتھ تبدیلی دکھانے کے لیے بہترین ہے۔	12 مہینوں میں ماہانہ درجہ حرارت کا خاکہ۔
جدول بندی	قطاروں اور خانوں (سیلس) کی ڈیجیٹل جدول جو اعداد و شمار محفوظ کرنے اور ضابطوں سے حساب کرنے کے لیے استعمال ہو۔	=AVERAGE(B2:B10) کسی خانے کی اوسط نکالتا ہے۔

Data (Dataset)	A collection of information (numbers, facts) that is gathered for analysis.	Heights of 30 students is a dataset.
Infographic	A visual representation that combines images and data to communicate information clearly.	A map showing wheat vs. rice preference by state.
Arithmetic Mean formula	Mean = (Sum of all values) ÷ (Number of values). When all values increase by k, mean also increases by k.	Data: 4,6,8. Mean = 18÷3 = 6. Add 5 to each: New mean = 11.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The _____ is found by adding all values and dividing by the count.
2. The _____ is the middle value when data is sorted in order.
3. A graph that shows data points connected by lines, used to show change over time, is called a _____.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

1. If the mean of 4, 6, 8, 10 is 7 and we add 3 to each value, the new mean is:
   (a) 7 (b) 10 (c) 21 (d) 3
2. The median of the data 3, 5, 7, 9, 11 is:
   (a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 9

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Mean	( )	A) A graph connecting data points with lines
2. Median	( )	B) The middle value in sorted data
3. Frequency	( )	C) Number of times a value appears in data
4. Line Graph	( )	D) Sum of values divided by count

APSCERT

طلباء کے قد اعداد و شمار کا مجموعہ ہیں۔	معلومات (اعداد، حقائق) کا وہ مجموعہ جو تجزیے کے لیے اکٹھا کیا جائے۔	اعداد و شمار (ڈیٹا)
صوبے کے مطابق گندم اور چاول کی ترجیح دکھانے والا نقشہ۔	وہ بصری پیشکش جو تصاویر اور اعداد و شمار کو ملا کر معلومات واضح طور پر پہنچائے۔	معلوماتی خاکہ
اعداد: 4، 6، 8۔ اوسط = 18 ÷ 3 = 6 ہر قدر میں 5 جوڑیں: نئی اوسط = 11	اوسط = (تمام قدروں کا مجموعہ) ÷ (قدروں کی تعداد)۔ جب تمام قدروں میں k کا اضافہ ہو تو اوسط بھی k سے بڑھ جاتی ہے۔	حسابی اوسط کا ضابطہ



طلبہ کی سرگرمی۔ پڑھنا اور مشق

ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ تمام قدروں کو جوڑ کر تعداد پر تقسیم کرنے سے _____ حاصل ہوتی ہے۔

2۔ اعداد و شمار کو ترتیب سے سجانے پر درمیانی قدر کو _____ کہتے ہیں۔

3۔ وہ گراف جس میں اعداد و شمار کے نقاط لکیروں سے جوڑے جائیں اور وقت کے ساتھ تبدیلی دکھائے _____ کہلاتا ہے۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے:

1۔ اگر 4، 6، 8، 10 کی اوسط 7 ہو اور ہر قدر میں 3 جوڑیں تو نئی اوسط کتنی ہو گی؟

(الف) 7 (ب) 10 (ج) 21 (د) 3

2۔ اعداد و شمار 3، 5، 7، 9، 11 کی وسطانیہ کیا ہے؟

(الف) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

ج۔ درج ذیل کو جوڑ ملائیے:

کالم (الف)		کالم (ب)
1۔ اوسط	( )	الف) اعداد و شمار کے نقاط کو لکیروں سے جوڑنے والا گراف
2۔ وسطانیہ	( )	ب) ترتیب شدہ اعداد و شمار میں درمیانی قدر
3۔ تعدد	( )	ج) کسی قدر کے اعداد و شمار میں آنے کی تعداد
4۔ خطی گراف	( )	د) قدروں کا مجموعہ تعداد پر تقسیم

AP SCERT

DAY 13 — 13. ALGEBRA PLAY



- **Key Terms :** Variable (Letter-number), Expression, Equation, Solving an equation, Distributive property, Divisibility, Number Pyramid, Substitution, Constant, Algebraic identity
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Variable (Letter-number)	A letter used to represent an unknown number in an expression or equation.	x, a, b, M, D are variables.
Expression	A combination of numbers, variables and operations (no '=' sign).	$2x + 4$, $a + b$, $5M + 6$
Equation	A mathematical statement showing two expressions are equal (has an = sign).	$2x + 4 = 10$; $a + b = 60$
Solving an equation	Finding the value of the variable that makes the equation true.	$2x = 10 \rightarrow x = 5$
Distributive property	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Used to expand or factorise expressions.	$5(x+3) = 5x + 15$
Divisibility	A number is said to be divisible by n if dividing by n leaves remainder 0.	$27 \div 9 = 3$ (no remainder), so 27 is divisible by 9.
Number Pyramid	A structure where the value of each cell equals the sum of the two Values of the cells directly below it.	Bottom row: 3, 4 → Next level: 7 → Top: 7

DAY 13

13. الجبری کھیل

معلم کی سرگرمی



اہم الفاظ : متغیر (حرف-عدد)، جبری عبارت، مساوات، مساوات حل کرنا، تقسیمی خاصیت، قابلِ تقسیم، عددی اہرام، قائم مقامی، مستقل، جبری شناخت

تصور کی وضاحت — اصطلاحات جانیے:

ہدایات : ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روزمرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
متغیر (حرف-عدد)	کسی عبارت یا مساوات میں مجہول عدد کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والا حرف۔	x، a، b، M، D متغیرات ہیں۔
جبری عبارت	اعداد، متغیرات اور اعمال کا مجموعہ (کوئی '=' نشان نہیں)۔	2x + 4، a + b، M + 65
مساوات	وہ ریاضیاتی بیان جو دو عبارتوں کی برابری ظاہر کرے ('=' نشان ہو)۔	2x + 4 = 10؛ a + b = 60
مساوات حل کرنا	متغیر کی وہ قدر معلوم کرنا جو مساوات کو سچ کرے۔	2x = 10 ← x = 5
تقسیمی خاصیت	a × (b + c) = a×b + a×c۔ عبارتوں کو پھیلانے یا سمیٹنے کے لیے استعمال ہوتی ہے۔	5(x+3) = 5x + 15
قابلِ تقسیم	کوئی عدد n پر قابلِ تقسیم کہلاتا ہے اگر n سے تقسیم کرنے پر باقی صفر ہو۔	27 ÷ 9 = 3 (کوئی باقی نہیں)، پس 27، 9 پر قابلِ تقسیم ہے۔
عددی اہرام	وہ ساخت جس میں ہر خانے کی قدر اس کے نیچے دو خانوں کی قدروں کے مجموعے کے برابر ہو۔	نیچے کی قطار: 3، 4 ← اگلی سطح: 7 ← چوٹی: 7

Substitution	Replacing a variable with a specific number to evaluate an expression.	If a = 5, then a + 3 = 5 + 3 = 8.
Constant	A fixed number in an expression that does not change.	In 2x + 4, the number 4 is a constant.
Algebraic identity	An equation that is true for ALL values of the variables.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ is true for any a, b.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. A letter used to represent an unknown number in an expression is called a _____.
2. An expression that has an equal sign (=) is called an _____.
3. The rule a × (b + c) = a×b + a×c is called the _____ property.

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

1. In the expression 3x + 7, the variable is:
   (a) 3 (b) x (c) 7 (d) 3x
2. Solve: 2x + 4 = 14. The value of x is:
   (a) 7 (b) 9 (c) 5 (d) 4

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Variable	( )	A) Replacing a variable with a number to evaluate an expression
2. Equation	( )	B) A statement showing two expressions are equal (uses = sign)
3. Distributive Property	( )	C) A letter that represents an unknown number
4. Divisibility	( )	D) A number leaves remainder 0 when divided by another number
5. Substitution	( )	E) a × (b + c) = a×b + a×c

© NCERT

قائم مقامی	کسی عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے متغیر کی جگہ مخصوص عدد رکھنا۔	اگر a = 5 ہو تو a + 3 = 5 + 3 = 8
مستقل	عبارت میں وہ ثابت عدد جو تبدیل نہ ہو۔	2x + 4 میں عدد 4 مستقل ہے۔
جبری مماثلت	وہ مساوات جو متغیرات کی تمام قدروں کے لیے سچ ہو۔	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ کسی بھی a ، b کے لیے درست ہے۔



طلبہ کی سرگرمی۔ پڑھنا اور مشق

ہدایات : اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے :

1۔ کسی عبارت میں مجہول عدد کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والے حرف کو _____ کہتے ہیں۔

2۔ وہ عبارت جس میں مساوی نشان (=) ہو _____ کہلاتی ہے۔

3۔ ضابطہ a × (b + c) = a×b + a×c کو _____ خاصیت کہتے ہیں۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے :

1۔ عبارت 3x + 7 میں متغیر کون سا ہے؟

(الف) 3 (ب) x (ج) 7 (د) 3x

2۔ حل کیجیے: 2x - x + 4 = 14 کی قدر کتنی ہے؟

(الف) 7 (ب) 9 (ج) 5 (د) 4

ج۔ درج ذیل کو جوڑ ملائیے :

کالم (الف)		کالم (ب)
1۔ متغیر	( )	الف) عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے متغیر کی جگہ عدد رکھنا
2۔ مساوات	( )	ب) وہ بیان جو دو عبارتوں کی برابری ظاہر کرے (= نشان ہو)
3۔ تقسیمی خاصیت	( )	ج) وہ حرف جو مجہول عدد کو ظاہر کرے
4۔ قابلِ تقسیم	( )	د) کوئی عدد دوسرے عدد پر تقسیم ہونے پر باقی صفر چھوڑے
5۔ قائم مقامی	( )	ہ) a × (b + c) = a×b + a×c

DAY 14 — 14. AREA



- **Key Terms :** Area, Perimeter, Base & Height, Altitude, Parallelogram, Trapezium, Rhombus, Diagonal
- **Concept Explaination-Know the term :**

Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Area	The amount of 2D space covered by a flat shape, measured in square units.	e.g. 5 cm × 3 cm tile covers an area of 15 cm^2.
Perimeter	The total length of the boundary around a 2D shape.	e.g. 6 m × 4 m field has perimeter = 20 m.
Base & Height	Base = any chosen side; Height = perpendicular distance from that base to the opposite vertex/side.	e.g. In ΔABC, BC = 8 cm (base); altitude h = 5 cm.
Altitude	A perpendicular line segment drawn from a vertex to the opposite side (or its extension).	e.g. Altitude is always perpendicular to the base.
Parallelogram	A quadrilateral with two pairs of parallel sides. Opposite sides are equal in length.	e.g. In a parallelogram ABCD, AB $\parallel$ CD, BC $\parallel$ DA and AB=CD, BC=DA
Trapezium	A quadrilateral with exactly one pair of parallel sides a and b are called parallel sides	e.g. In a Trapezium ABCD, AB $\parallel$ CD, AB=a CD=b

DAY 14

14. رقبہ



اہم الفاظ: رقبہ، محیط، قاعدہ اور اونچائی، عمود، متوازی الاضلاع، منحرف، معین، قطر

تصور کی وضاحت — اصطلاحات جانیے:

ہدایات: ہر اصطلاح کو تعریف اور مثالوں کے ذریعے متعارف کرائیں۔ ہر تصور کو روز مرہ زندگی کی مثال سے جوڑیں تاکہ سمجھنے میں آسانی ہو۔

اہم الفاظ	تعریف	مثال
رقبہ	کسی چپٹی شکل کی وہ دوابعادی جگہ جو وہ گھیرے، مربع اکائیوں میں ناپی جاتی ہے۔	5 سمر×3 سمر کی ٹائل کا رقبہ 15 مربع سمر ہے۔
محیط	کسی دوابعادی شکل کے گرد حد کی کل لمبائی۔	6 میٹر×4 میٹر کے کھیت کا محیط=20 میٹر۔
قاعدہ اور اونچائی	قاعدہ= کوئی بھی منتخب ضلع؛ اونچائی= اس قاعدے سے مخالف راس یا ضلع تک عمودی فاصلہ۔	مثلث ABC میں BC = 8 سینٹی میٹر (قاعدہ)؛ عمود h = 5 سینٹی میٹر۔
عمود	کسی راس سے مخالف ضلع (یا اس کی توسیع) تک کھینچا گیا عمودی لکیری حصہ۔	عمود ہمیشہ قاعدے پر عمودی ہوتا ہے۔
متوازی الاضلاع	وہ چار ضلعی جس کے دو جوڑے متوازی اضلاع ہوں۔ مخالف اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔	متوازی الاضلاع ABCD میں AB∥CD اور BC∥DA، AB=CD، BC=DA۔
منحرف	وہ چار ضلعی جس کا صرف ایک جوڑا متوازی اضلاع ہو۔ a اور b متوازی اضلاع کہلاتے ہیں۔	منحرف ABCD میں AB∥CD، AB=a، CD=b۔

Rhombus	A parallelogram with all four sides equal. Diagonals bisect each other at right angles.	e.g. If ABCD is a Rhombus AB = BC = CD = DA
Diagonal	A line segment joining two non-adjacent vertices of a polygon; used to split shapes into triangles.	e.g. Drawing BD splits. quadrilateral ABCD into 2 triangles.



Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. Area of a triangle = $\frac{1}{2}$ × _____ × height.
2. A parallelogram with base 9 cm and height 4 cm has an area of ____cm².
3. A rhombus with diagonals 10 cm and 6 cm has an area of _____ cm².

B. MCQs - Tick (3) the correct answer.

1. A trapezium has parallel sides 8 cm and 12 cm, height 5 cm. Its area is:
   (A) 80 cm² (B) 50 cm² (C) 100 cm² (D) 60 cm²
2. Perimeter and area of a shape are:
   (A) Always equal
   (B) Both measured in cm²
   (C) Independent - same perimeter can give different areas
   (D) Interchangeable measures

C. Match the following :

Column A			Column B
1. Rectangle	( )	P.	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
2. Triangle	( )	Q.	$l \times b$
3. Rhombus	( )	R.	$b \times h$
4. Parallelogram	( )	S.	$\frac{1}{2} \times b \times h$

© NCERT

معین	وہ متوازی الاضلاع جس کے چاروں اضلاع برابر ہوں۔ قطر ایک دوسرے کو قائمہ زاویے پر نصف کریں۔	اگر ABCD معین ہو تو AB = BC = CD = DA
قطر	کسی کثیر الاضلاع کے دو غیر متصل راسوں کو ملانے والا لکیری حصہ؛ شکلوں کو مثلثوں میں تقسیم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔	BD کھینچنے سے چار ضلعی ABCD دو مثلثوں میں تقسیم ہو جاتی ہے۔



طلبہ کی سرگرمی–پڑھنا اور مشق

ہدایات: اصطلاحات غور سے پڑھیں۔ پھر تمام سوالات خود حل کرنے کی کوشش کریں۔

الف۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1۔ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × _____ × اونچائی۔

2۔ 9 سم قاعدہ اور 4 سم اونچائی والے متوازی الاضلاع کا رقبہ _____ مربع سم ہے۔

3۔ 10 سم اور 6 سم قطر والے معین کا رقبہ _____ مربع سم ہے۔

ب۔ کثیر الانتخاب سوالات — درست جواب پر نشان (3) لگائیے

1۔ ایک منحرف کے متوازی اضلاع 8 سم اور 12 سم ہیں، اونچائی 5 سم ہے۔ اس کا رقبہ کتنا ہے؟

(الف) 80 مربع سم (ب) 50 مربع سم (ج) 100 مربع سم (د) 60 مربع سم

2۔ کسی شکل کا محیط اور رقبہ:

(الف) ہمیشہ برابر ہوتے ہیں (ب) دونوں مربع سم میں ناپے جاتے ہیں

(ج) آزاد ہیں — ایک جیسا محیط مختلف رقبے دے سکتا ہے (د) ایک دوسرے کی جگہ استعمال ہو سکتے ہیں

ج۔ درج ذیل کو جوڑ ملائیے:

کالم (الف)	کالم (ب)
1۔ مستطیل	P. $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
2۔ مثلث	Q. $l \times b$
3۔ معین	R. $b \times h$
4۔ متوازی الاضلاع	S. $\frac{1}{2} \times b \times h$

AP SCERT

1 A SQUARE AND A CUBE

Learning outcomes

Learners will be able to

- ☞ Identify, explores in patterns numbers and describes rules (CG-1)
- ☞ Create puzzles and develop own solution (CG-7)
- ☞ Appreciate contributions of Indian mathematicians in mathematics (CG-9)
- ☞ Analyze possible solutions to problems with effective combination of steps (CG-8)

Y9A7A1

1.0 Introduction

Queen Ratnamanjari had a will written that described her fortune of ratnas (precious stones) and also included a puzzle. Her son Kumara Varma and their 99 relatives were invited to the reading of her will. She wanted to leave all of her ratnas to her son, but she knew that if she did so, all their relatives would pester Kumara Varma forever. She hoped that she had taught him everything he needed to know about solving puzzles. She left the following note in her will-

"I have created a puzzle. If all 100 of you answer it at the same time, you will share the ratnas equally. However, if you are the first one to solve the problem, you will get to keep the entire inheritance to yourself. Good luck." The minister took Kumara Varma and his 99 relatives to a secret room in the mansion containing 100 lockers.

The minister explained- "Each person is assigned a number from 1 to 100.

- ❖ Person 1 opens every locker.
- ❖ Person 2 toggles every 2nd locker (i.e., closes it if it is open, opens it if it is closed).
- ❖ Person 3 toggles every 3rd locker (3rd, 6th, 9th, ... and so on).
- ❖ Person 4 toggles every 4th locker (4th, 8th, 12th, ... and so on).

APSCERT

1 ایک مربع اور ایک مکعب

G1V9S1

اکتسابی نتائج

طلبہ اس قابل بنیں گے:

- اعداد کے نمونوں کی شناخت کریں گے، ان کا جائزہ لیں گے اور قواعد بیان کریں گے (CG-1)
- پہیلیاں بنائیں گے اور اپنے حل تیار کریں گے (CG-7)
- ریاضی میں ہندوستانی ریاضی دانوں کی خدمات کو سراہیں گے (CG-9)
- مسائل کے ممکنہ حل کا تجزیہ کریں گے اور مؤثر مراحل کا بہترین امتزاج استعمال کریں گے۔ (CG-8)

1.0 تعارف

ملکہ رتنا منجری نے ایک وصیت لکھی جس میں اپنے جواہرات (قیمتی پتھروں) کی دولت کا ذکر تھا اور ساتھ ایک پہیلی بھی شامل تھی۔ اس کے بیٹے کمار ورما اور ان کے 99 رشتہ داروں کو وصیت کی قرأت کے لیے مدعو کیا گیا۔ وہ اپنے تمام جواہرات اپنے بیٹے کو دینا چاہتی تھی، لیکن وہ جانتی تھی کہ اگر ایسا کیا تو تمام رشتہ دار کمار ورما کو ہمیشہ تنگ کرتے رہیں گے۔ اسے امید تھی کہ اس نے اپنے بیٹے کو پہیلیاں حل کرنے کے لیے سب کچھ سکھا دیا ہے۔ اس نے وصیت میں یہ نوٹ چھوڑا:

"میں نے ایک پہیلی بنائی ہے۔ اگر آپ سب 100 لوگ بیک وقت اسے حل کریں تو جواہرات برابر تقسیم ہوں گے۔ لیکن اگر آپ سب سے پہلے مسئلہ حل کر لیں تو پوری وراثت صرف آپ کی ہو گی۔ نیک قسمت۔"

وزیر کمار ورما اور اس کے 99 رشتہ داروں کو حویلی کے ایک خفیہ کمرے میں لے گیا جس میں 100 الماریاں تھیں۔

وزیر نے وضاحت کی: "ہر شخص کو 1 سے 100 تک ایک نمبر دیا گیا ہے۔

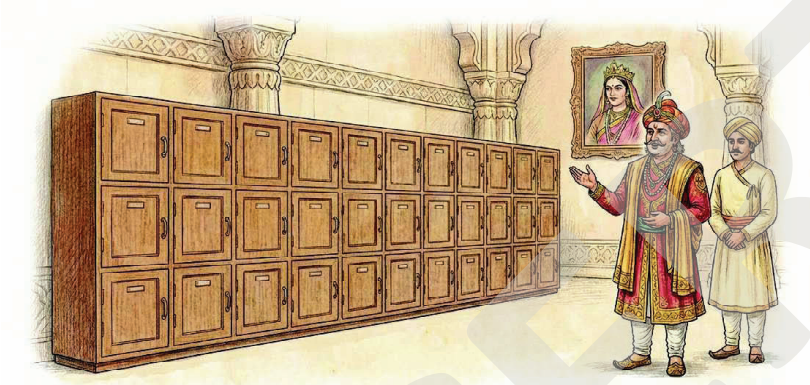
- شخص نمبر 1 ہر الماری کھولے گا۔
- شخص نمبر 2 ہر دوسری الماری بدلے گا (یعنی اگر کھلی ہو تو بند کرے گا، اگر بند ہو تو کھولے گا)۔
- شخص نمبر 3 ہر تیسری الماری بدلے گا (3، 6، 9 اور اسی طرح آگے)۔
- شخص نمبر 4 ہر چوتھی الماری بدلے گا (4، 8، 12 اور اسی طرح آگے)۔

This continues until all 100 get their turn.

In the end, only some lockers remain open. The open lockers reveal the code to the fortune in the safe."

(?) Before the process begins, Kumara Varma realizes that he already knows which lockers will be open at the end. How did he figure out the answer?

Hint: Find out how many times each locker is toggled.



If a locker is toggled an odd number of times, it will be open. Otherwise, it will be closed. The number of times a locker is toggled is the same as the number of factors of the locker number. For example, for locker #6, Person 1 opens it, Person 2 closes it, Person 3 opens it and Person 6 closes it. The numbers 1, 2, 3, and 6 are factors of 6. If the number of factors is even, the locker will be toggled by an even number of people and it will eventually be closed.

6 :
1 × 6
2 × 3
Factors are
1, 2, 3 and 6.

Note that each factor of a number has a 'partner factor' so that the product of the pair of factors yields the given number. Here, 1 and 6 form a pair of partner factors of 6, and 2 and 3 form another pair.

(?) Does every number have an even number of factors?

1:
1 × 1
The only factor is 1.

4:
1 × 4
2 × 2
Factors are
1, 2 and 4.

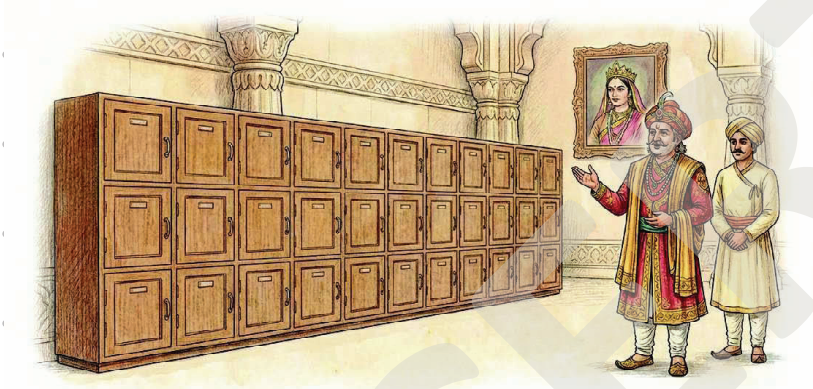
9 :
1 × 9
3 × 3
Factors are
1, 3 and 9.

یہ سلسلہ اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک تمام 100 افراد اپنی باری نہ لے لیں۔

آخر میں صرف کچھ الماریاں کھلی رہتی ہیں۔ کھلی الماریاں تجوری میں موجود دولت کا کوڑ ظاہر کرتی ہیں۔"

عمل شروع ہونے سے پہلے ہی کمار ورما کو معلوم ہو جاتا ہے کہ آخر میں کون سی الماریاں کھلی رہیں گی۔ اس نے یہ جواب کیسے معلوم کیا؟

اشارہ : معلوم کیجیے کہ ہر الماری کو کتنی بار بدلا جاتا ہے۔



اگر کسی الماری کو طاق تعداد میں بدلا جائے تو وہ کھلی رہے گی، ورنہ بند ہو جائے گی۔ کسی الماری کو جتنی بار بدلا جاتا ہے وہ اس الماری کے نمبر کے اجزائے ضربی کی تعداد کے برابر ہے۔ مثال کے طور پر الماری نمبر 6 کے لیے، شخص نمبر 1 اسے کھولتا ہے، شخص نمبر 2 بند کرتا ہے، شخص نمبر 3 کھولتا ہے اور شخص نمبر 6 بند کر دیتا ہے۔ اعداد 1، 2، 3 اور 6 عدد 6 کے اجزائے ضربی ہیں۔ اگر اجزائے ضربی کی تعداد جفت ہو تو الماری کو جفت تعداد میں لوگ بدلیں گے اور وہ آخر کار بند ہو جائے گی۔

6 :
1 × 6
2 × 3
اجزائے ضربی
1, 2, 3 and 6.

غور کیجیے کہ کسی عدد کے اجزائے ضربی کا ایک 'ہم جوڑ اجزائے ضربی' ہوتا ہے جس سے ضرب کرنے پر وہ عدد حاصل ہوتا ہے۔ یہاں 1 اور 6 عدد 6 کے ہم جوڑ اجزائے ضربی ہیں، اور 2 اور 3 ایک اور جوڑا بناتے ہیں۔

کیا ہر عدد کے اجزائے ضربی کی تعداد جفت ہوتی ہے؟

1:
1 × 1
اجزائے ضربی
1.

4:
1 × 4
2 × 2
اجزائے ضربی
1, 2 and 4.

9 :
1 × 9
3 × 3
اجزائے ضربی
1, 3 and 9.

We see in some cases, like 2 × 2, that the numbers in the pair are the same.

Can you use this insight to find more numbers with an odd number of factors?

For instance, 36 has a factor pair 6 × 6 where both numbers are 6. Does this number have an odd number of factors? If every factor of 36 other than 6 has a different factor as its partner, then we can be sure that 36 has an odd number of factors. Check if this is true.

Hence all the following numbers have an odd number of factors -

1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, ...

*A number that can be expressed as the product of a number with itself is called a **square number**, or simply a **square**.* The only numbers that have an odd number of factors are the squares, because they each have one factor which, when multiplied by itself, equals the number. Therefore, every locker whose number is a square will remain open.

Write the locker numbers that remain open.

KumaraVarma immediately collects word clues from these 10 lockers and reads, "The passcode consists of the first five locker numbers that were touched exactly twice."

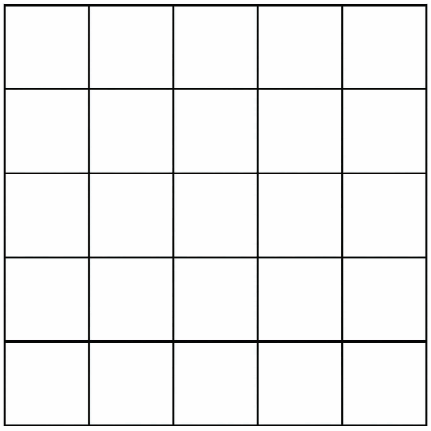
Which are these five lockers?

The lockers that are toggled twice are the prime numbers, since each prime number has 1 and the number itself as factors. So, the code is 2-3-5-7-11.

1.1 Square Numbers

Why are the numbers, 1, 4, 9, 16, ..., called squares? We know that the number of unit squares in a square (the area of a square) is the product of its sides. The table below gives the areas of squares with different sides.

Sidelength (in units)	Area (in sq units)
1	1 × 1 = 1 sq. unit
2	2 × 2 = 4 sq. units
3	3 × 3 = 9 sq. units
4	4 × 4 = 16 sq. units
5	5 × 5 = 25 sq. units
10	10 × 10 = 100 sq. units



APSCERT

ہم دیکھتے ہیں کہ بعض صورتوں میں، جیسے 2 × 2، جوڑے کے دونوں اعداد ایک جیسے ہوتے ہیں۔

کیا آپ اس سمجھ کو استعمال کرتے ہوئے مزید ایسے اعداد تلاش کر سکتے ہیں جن کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہو؟

مثال کے طور پر 36 کا ایک جوڑا 6 × 6 ہے جہاں دونوں اعداد 6 ہیں۔ کیا اس عدد کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہے؟ اگر 6 کے علاوہ 36 کے ہر جزوِ ضربی کا ایک الگ ہم جوڑ جزوِ ضربی ہو تو ہم یقین سے کہہ سکتے ہیں کہ 36 کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہے۔ جانچ کیجیے کہ کیا یہ درست ہے۔

اس لیے درج ذیل تمام اعداد کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہے:

1×1، 2×2، 3×3، 4×4، ...

وہ عدد جسے کسی عدد کو خود سے ضرب دے کر حاصل کیا جائے مربع عدد یا سادہ الفاظ میں مربع کہلاتا ہے۔ صرف مربع اعداد ہی ایسے ہوتے ہیں جن کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہوتی ہے، کیونکہ ان میں ایک ایسا جزوِ ضربی ہوتا ہے جسے خود سے ضرب دینے پر وہی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے ہر وہ الماری جس کا نمبر مربع عدد ہو کھلی رہے گی۔

وہ الماری نمبر لکھیے جو کھلی رہیں گی۔

کمار ورما فوری طور پر ان 10 الماریوں سے لفظی اشارے اکٹھے کرتا ہے اور پڑھتا ہے: "کوڈ پہلی پانچ الماریوں کے نمبروں پر مشتمل ہے جنہیں بالکل دو بار بدلا گیا۔"

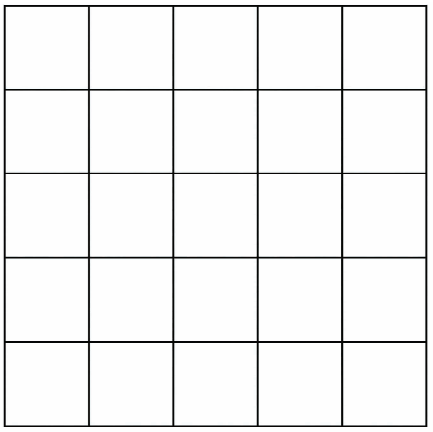
یہ پانچ الماریاں کون سی ہیں؟

جن الماریوں کو دو بار بدلا گیا وہ اول اعداد ہیں، کیونکہ ہر اول عدد کے صرف دو اجزائے ضربی ہوتے ہیں: 1 اور خود وہ عدد۔

پس کوڈ ہے: 2 - 3 - 5 - 7 - 11

1.1 مربع اعداد

اعداد 1، 4، 9، 16، ... کو مربع کیوں کہا جاتا ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ کسی مربع میں اکائی مربعوں کی تعداد (یعنی مربع کا رقبہ) اس کے اضلاع کی ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ نیچے دی گئی جدول مختلف اضلاع والے مربعوں کے رقبے ظاہر کرتی ہے۔



ضلع کی لمبائی (اکائیوں میں)	رقبہ (مربع اکائیوں میں)
1	1 × 1 = 1 sq. unit
2	2 × 2 = 4 sq. units
3	3 × 3 = 9 sq. units
4	4 × 4 = 16 sq. units
5	5 × 5 = 25 sq. units
10	10 × 10 = 100 sq. units

We use the following notation for squares.

$1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^2 = 9,$

$4 \times 4 = 4^2 = 16$

$5 \times 5 = 5^2 = 25.$

In general, for any number n, we write $n \times n = n^2$, which is read as 'n squared'.

Can we have a square of side length $\frac{3}{5}$ or 2.5 units?

Yes, there area in square units are $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{25}\right)$

and $(2.5)^2 = (2.5) \times (2.5) = 6.25$.

The squares of natural numbers are called **perfect squares**. For example, 1, 4, 9, 16, 25, ... are all perfect squares.

1.1.1 Patterns and Properties of Perfect Squares

Find the squares of the first 30 natural numbers and fill in the table below.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 = 9$	$13^2 =$	
$4^2 = 16$	$14^2 =$	
$5^2 = 25$	$15^2 =$	
$6^2 =$	$16^2 =$	
$7^2 =$	$17^2 =$	
$8^2 =$	$18^2 =$	
$9^2 =$	$19^2 =$	
$10^2 =$	$20^2 =$	



? What patterns do you notice? Share your observations and make conjectures.

Study the squares in the table above. What are the digits in the units places of these numbers? All these numbers end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9. None of them end with 2, 3, 7 or 8.



? If a number ends in 0, 1, 4, 5, 6 or 9, is it always a square?

The numbers 16 and 36 are both squares with 6 in the units place.

ہم مربع (squares) کے لیے درج ذیل علامت/ترتیب (notation) استعمال کرتے ہیں۔

$$1 \times 1 = 1^2 = 1$$
$$2 \times 2 = 2^2 = 4$$
$$3 \times 3 = 3^2 = 9,$$
$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$
$$5 \times 5 = 5^2 = 25.$$

عام طور پر، کسی بھی عدد n کے لیے، ہم $n \times n = n^2$ لکھتے ہیں، جسے 'n کا مربع (n squared)' پڑھا جاتا ہے۔

کیا ہمارے پاس ایسے مربع ہو سکتے ہیں جن کے ضلع کی لمبائی $\frac{3}{5}$ یا 2.5 اکائی (units) ہو؟

جی ہاں، ان کا رقبہ مربع اکائیوں میں یہ ہو گا: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{25}\right)$ اور

$$(2.5)^2 = (2.5) \times (2.5) = 6.25$$

طبعی اعداد (natural numbers) کے مربعوں کو **کامل مربع (perfect squares)** کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر

1، 4، 9، 16، 25، ... سب کامل مربع ہیں۔

1.1.1 کامل مربع کے نمونے اور خصوصیات

پہلے 30 طبعی اعداد کے مربع معلوم کریں اور نیچے دیے گئے جدول کو پُر کریں۔

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 = 9$	$13^2 =$	
$4^2 = 16$	$14^2 =$	
$5^2 = 25$	$15^2 =$	
$6^2 =$	$16^2 =$	
$7^2 =$	$17^2 =$	
$8^2 =$	$18^2 =$	
$9^2 =$	$19^2 =$	
$10^2 =$	$20^2 =$	



آپ کن نمونوں (patterns) پر غور کرتے ہیں؟ اپنے مشاہدات بیان کریں اور اندازہ (conjectures) لگائیں۔ اوپر دیے گئے جدول میں مربعوں کا مطالعہ کریں۔

ان اعداد کے اکائی کے مقام (units places) پر کون سے ہندسے ہیں؟ یہ تمام اعداد 0، 1، 4، 5، 6 یا 9 پر ختم ہوتے ہیں۔ ان میں سے کوئی بھی 2، 3، 7 یا 8 پر ختم نہیں ہوتا۔



اگر کوئی عدد 0، 1، 4، 5، 6 یا 9 پر ختم ہو، تو کیا وہ ہمیشہ ایک مربع ہوتا ہے؟ اعداد 16 اور 36 دونوں مربع ہیں جن کے اکائی کے مقام پر 6 ہے۔

However, 26, whose units digit is also 6, is not a square. Therefore, we cannot determine if a number is a square just by looking at the digit in the units place. ***But, the units digit can tell us when a number is not a square.*** If a number ends with 2, 3, 7, or 8, then we can definitely say that it is not a square.

Write 5 numbers such that you can determine by looking at their units digit that they are not squares.

The squares, 1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2, and 29^2, all have 1 in their units place. Write the next two squares. Notice that if a number has 1 or 9 in the units place, then its square ends in 1.

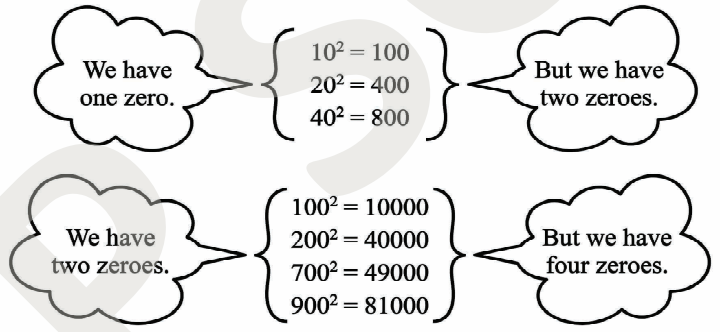
Let us consider square numbers ending in 6: $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, $196 = 14^2$, $256 = 16^2$, $576 = 24^2$, and $676 = 26^2$.

Which of the following numbers have the digit 6 in the units place?

(i) 38^2 (ii) 34^2 (iii) 46^2 (iv) 56^2 (v) 74^2 (vi) 82^2

Find more such patterns by observing the numbers and their squares from the table you filled earlier.

Consider the following numbers and their squares.



If a number contains 3 zeros at the end, how many zeros will its square have at the end?

What do you notice about the number of zeros at the end of a number and the number of zeros at the end of its square? Will this always happen? Can we say that squares can only have an even number of zeros at the end?

What can you say about the parity of a number and its square?

1.1.2 Perfect Squares and Odd Numbers

Let us explore the differences between consecutive squares. What do you notice?

تاہم، 26، جس کا اکائی کا ہندسہ بھی 6 ہے، ایک مربع نہیں ہے۔ اس لیے، ہم صرف اکائی کے مقام پر موجود ہندسے کو دیکھ کر یہ فیصلہ نہیں کر سکتے کہ آیا کوئی عدد مربع ہے یا نہیں۔ **لیکن، اکائی کا ہندسہ ہمیں یہ بتا سکتا ہے کہ کب کوئی عدد مربع نہیں ہوتا۔** اگر کوئی عدد 2، 3، 7 یا 8 پر ختم ہو، تو ہم یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ وہ مربع نہیں ہے۔

? ایسے 5 اعداد لکھیں جن کے اکائی کے ہندسے کو دیکھ کر آپ یہ بتا سکیں کہ وہ مربع (squares) نہیں ہیں۔

مربع اعداد $1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2$ اور 29^2 ان سب کے اکائی کے مقام پر 1 آتا ہے۔ اگلے دو مربع لکھیں۔

غور کریں کہ اگر کسی عدد کے اکائی کے مقام پر 1 یا 9 ہو، تو اس کا مربع 1 پر ختم ہوتا ہے۔

? آیئے 6 پر ختم ہونے والے مربع اعداد پر غور کریں :

$4^2 = 16, 6^2 = 36, 14^2 = 196, 16^2 = 256, 24^2 = 576$

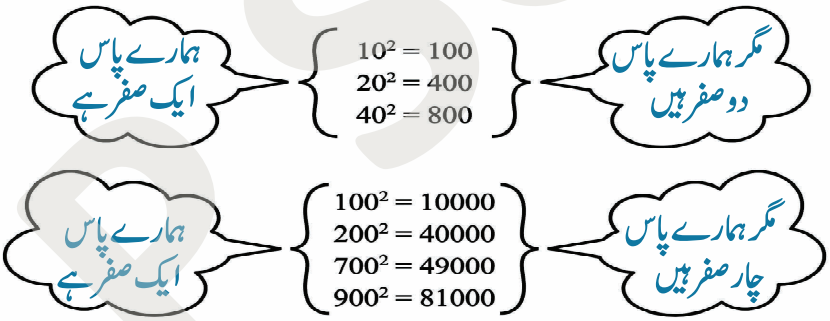
اور $26^2 = 676$۔

درج ذیل میں سے کن اعداد کے مربع کے اکائی کے مقام پر ہندسہ 6 ہو گا؟

(i) 38^2 (ii) 34^2 (iii) 46^2 (iv) 56^2 (v) 74^2 (vi) 82^2

? اپنے تیار کردہ جدول کا مشاہدہ کر کے اس طرح کے مزید نمونے تلاش کریں۔

درج ذیل اعداد اور ان کے مربعوں پر غور کریں۔



? اگر کسی عدد کے آخر میں موجود صفروں کی تعداد اور اس کے مربع کے آخر میں صفروں کی تعداد کے بارے میں کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ کیا یہ ہمیشہ ہوتا ہے؟ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ مربع اعداد کے آخر میں صفروں کی تعداد ہمیشہ جفت ہوتی ہے؟

? آپ کسی عدد اور اس کے مربع کے جفت یا طاق (parity) ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

1.1.2 کامل مربع اور طاق اعداد

آیئے مسلسل مربعوں (consecutive squares) کے درمیان فرق کا جائزہ لیتے ہیں۔ آپ کیا نوٹ کرتے ہیں؟

$4 - 1 = 3$ $9 - 4 = 5$ $16 - 9 = 7$ $25 - 16 = 9$

See if this pattern continues for the next few square numbers.

From this we observe that adding consecutive odd numbers starting from 1 gives consecutive square numbers, as shown below.

$1 = 1$

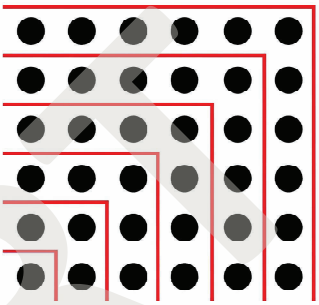
$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

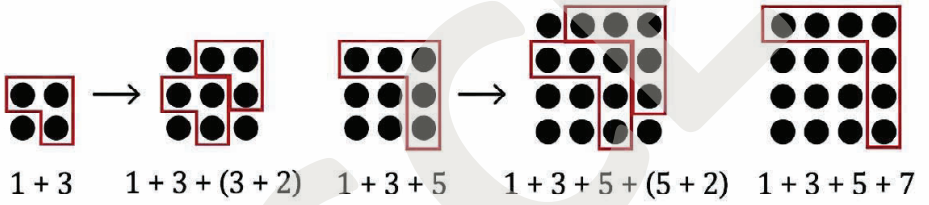
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$



Do you remember this pattern from Grade 6?

The picture below explains why each subsequent inverted L gives the next odd number:



We see that the sum of the first n odd numbers is n^2. Alternatively, every square is a sum of successive odd numbers starting from 1.

In mathematics, sometimes arguments and reasoning can be presented without any words. Visual proofs can be complete by themselves.

Also, we can find out whether a number is a perfect square by successively subtracting odd numbers. Consider the number 25, successively subtract 1, 3, 5, ... until you get or cross over 0,

$25 - 1 = 24$ $24 - 3 = 21$ $21 - 5 = 16$ $16 - 7 = 9$ $9 - 9 = 0$

This means $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ and is thus a perfect square. Since we subtracted the first five odd numbers, $25 = 5^2$.

? Using the pattern above, find 36^2, given that $35^2 = 1225$.

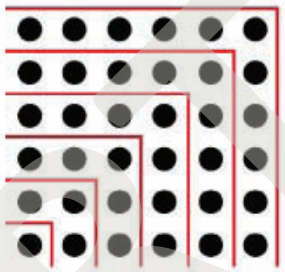
From the question we know that 1225 is the sum of the first 35 odd numbers. To find 36^2, we need to add the 36th odd number to 1225.

$4-1=3 \qquad 9-4=5 \qquad 16-9=7 \qquad 25-16=9$

دیکھیں کہ کیا یہ نمونہ (pattern) اگلے چند مربع اعداد کے لیے بھی جاری رہتا ہے۔

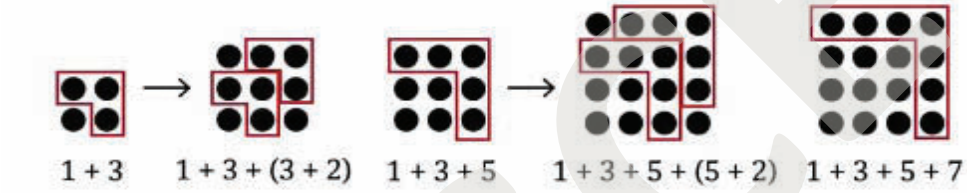
اس سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ 1 سے شروع ہونے والے مسلسل طاق اعداد (consecutive odd numbers) کو جمع کرنے سے مسلسل مربع اعداد حاصل ہوتے ہیں، جیسا کہ درج ذیل میں دکھایا گیا ہے:

$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$



کیا آپ کو ششم جماعت کا یہ نمونہ یاد ہے؟

نیچے دی گئی تصویر وضاحت کرتی ہے کہ کیوں ہر اگلا الٹا 'L' (inverted L) اگلا طاق عدد دیتا ہے:



ہم دیکھتے ہیں کہ پہلے n طاق اعداد کا مجموعہ n^2 ہوتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں، ہر مربع عدد 1 سے شروع ہونے والے مسلسل طاق اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔

بعض اوقات دلائل اور منطق بغیر کسی لفظ کے بھی پیش کیے جاسکتے ہیں۔ بصری ثبوت (visual proofs) بذاتِ خود مکمل ہوسکتے ہیں۔

مزید، ہم طاق اعداد کو مسلسل تفریق (subtracting) کے طریقے سے بھی یہ معلوم کرسکتے ہیں کہ آیا کوئی عدد کامل مربع (perfect square) ہے یا نہیں۔ عدد 25 پر غور کریں، اس میں سے مسلسل 1، 3، 5، ... تفریق کریں جب تک کہ آپ 0 تک نہ پہنچ جائیں یا اسے پار نہ کرلیں۔

$25-1=24 \quad 24-3=21 \quad 21-5=16 \quad 16-7=9 \quad 9-9=0$

اس کا مطلب ہے $25 = 1+3+5+7+9$ اور یوں یہ ایک کامل مربع ہے۔ چونکہ ہم نے پہلے پانچ طاق اعداد کو تفریق کیا ہے، اس لیے $25 = 5^2$ ہے۔

؟ اوپر دیے گئے نمونے کو استعمال کرتے ہوئے 36^2 معلوم کریں، جبکہ دیا گیا ہے کہ $35^2 = 1225$ ۔ سوال سے ہم جانتے ہیں کہ 1225 پہلے 35 طاق اعداد کا مجموعہ ہے۔ 36^2 معلوم کرنے کے لیے ہمیں 1225 میں 36 واں طاق عدد جمع کرنے کی ضرورت ہے۔

How do we find the 36th odd number?

The 1st odd number is 1, 2nd odd number is 3, 3rd number is 5, ..., 6th odd number is 11 and so on.

What is the nth odd number?

The nth odd number is 2n–1. Therefore, the 36th odd number is 71.

By adding 71 to 1225, we get 1296, which is 36^2.

Consider a number such as 38 that is not a square and subtract consecutive odd numbers starting from 1.

38 – 1 = 37 37 – 3 = 34 34 – 5 = 29 29 – 7 = 22 22 – 9 = 13

13 – 11 = 2 2 – 13 = – 11

This shows that 38 cannot be expressed as a sum of consecutive odd numbers starting with 1.

Thus, we can say that a natural number is not a perfect square if it cannot be expressed as a sum of successive odd natural numbers starting from 1. We can use this result to find out whether a natural number is a perfect square or not.

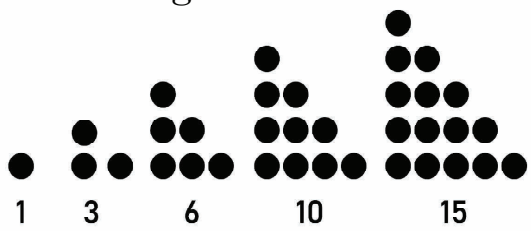
Find how many numbers lie between two consecutive perfect squares. Do you notice a pattern?

How many square numbers are there between 1 and 100? How many are between 101 and 200? Using the table of squares you filled earlier, enter the values below, tabulating the number of squares in each block of 100. What is the largest square less than 1000?

1 – 100	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500
_____	_____	_____	_____	_____
501 – 600	601 – 700	701 – 800	801 – 900	901 – 1000
_____	_____	_____	_____	_____

1.1.3 Perfect Squares and Triangular Numbers

Do you remember triangular numbers?



ہم 36واں طاق عدد کیسے معلوم کریں؟

پہلا طاق عدد 1 ہے، دوسرا طاق عدد 3 ہے، تیسرا عدد 5 ہے، ... چھٹا طاق عدد 11 ہے اور اسی طرح آگے۔

nواں طاق عدد کیا ہے؟

nواں طاق عدد $2n-1$ ہے۔ اس لیے 36واں طاق عدد 71 ہے۔ 71 کو 1225 میں جوڑنے سے 1296 حاصل ہوتا ہے جو 36^2 ہے۔

اب کوئی ایسا عدد لیجیے جیسے 38 جو مربع عدد نہیں ہے اور 1 سے شروع ہونے والے یکے بعد دیگرے طاق اعداد گھٹاتے جایئے۔

$38 - 1 = 37$ $37 - 3 = 34$ $34 - 5 = 29$ $29 - 7 = 22$ $22 - 9 = 13$

$13 - 11 = 2$ $2 - 13 = -11$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ 38 کو 1 سے شروع ہونے والے یکے بعد دیگرے طاق اعداد کے مجموعے کے طور پر ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی طبعی عدد مکمل مربع نہیں ہے اگر اسے 1 سے شروع ہونے والے یکے بعد دیگرے طاق طبعی اعداد کے مجموعے کے طور پر ظاہر نہ کیا جاسکے۔ ہم اس نتیجے کو استعمال کرکے معلوم کرسکتے ہیں کہ کوئی طبعی عدد مکمل مربع ہے یا نہیں۔

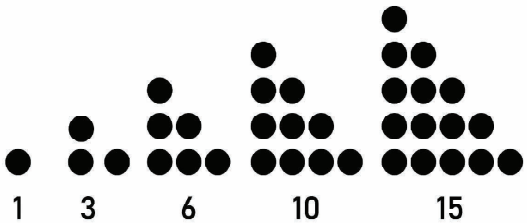
معلوم کیجیے کہ دو یکے بعد دیگرے مکمل مربعوں کے درمیان کتنے اعداد آتے ہیں۔ کیا آپ کوئی نمونہ دیکھتے ہیں؟

1 سے 100 کے درمیان کتنے مربع اعداد ہیں؟ 101 سے 200 کے درمیان کتنے ہیں؟ پہلے بھری گئی مربعوں کی جدول کو استعمال کرتے ہوئے نیچے قدریں درج کیجیے اور 100 کے ہر حصے میں مربعوں کی تعداد لکھیے۔ 1000 سے چھوٹا سب سے بڑا مربع عدد کون سا ہے؟

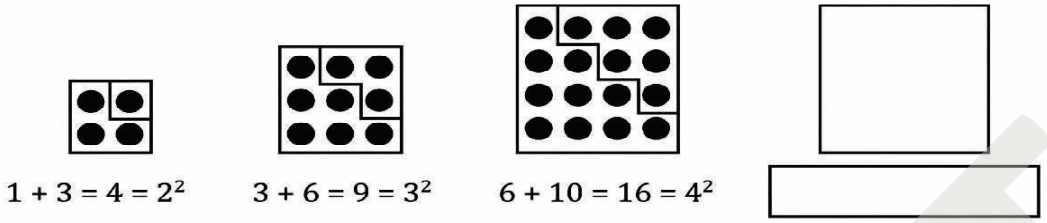
1 - 100	101 - 200	201 - 300	301 - 400	401 - 500
_____	_____	_____	_____	_____
501 - 600	601 - 700	701 - 800	801 - 900	901 - 1000
_____	_____	_____	_____	_____

1.1.3 مکمل مربع اور مثلثی اعداد

کیا آپ کو مثلثی اعداد یاد ہیں؟



? Can you see any relation between triangular numbers and square numbers? Extend the pattern shown and draw the next term.



1.1.4 Square Roots

? The area of a square is 49 sq. cm. What is the length of its side?

We know that $7 \times 7 = 49$, or $7^2 = 49$.

So, the length of the side of a square with an area of 49 sq. cm is 7 cm. We call 7 the **square root of** 49.

In general, if $y = x^2$ then x is the **square root** of y.

? What is the square root of 64?

We know that 8×8 is 64. So, 8 is the square root of 64. What about -8×-8 ? That is 64 too!

$$8^2 = 64, \text{ and } (-8)^2 = 64.$$

So, the square roots of 64 are + 8 and –8.

Every perfect square has two integer square roots. One is positive and the other is negative. The square root of a number is denoted by $\sqrt{\ }$

Thus, $\sqrt{64} = \pm 8$ and $\sqrt{100} = \pm 10$.

Note that $\sqrt{8^2} = \pm 8$ and $\sqrt{10^2} = \pm 10$. In general, $\sqrt{n^2} = \pm n$.

In this chapter, we shall only consider the positive square root.

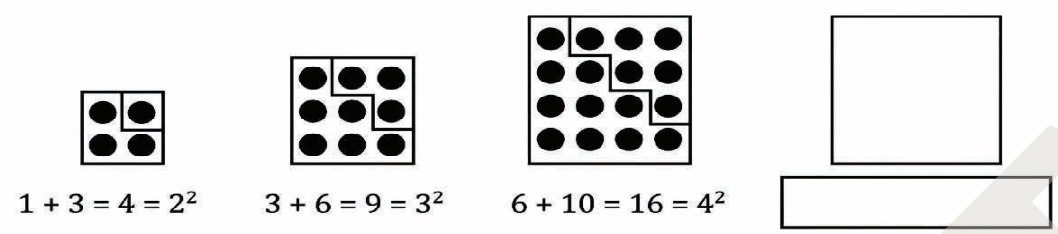
? Given a number, such as 576 or 327, how do we find out if it is a perfect square? If it is a perfect square, how can we find its square root?

We know that perfect squares end in 1, 4, 9, 6, 5, or an even number of zeros. But, it is not certain that a number that satisfies this condition is a square.

We can clearly say that 327 is not a perfect square. However, we cannot be sure that 576 is a perfect square.

APSCERT

کیا آپ مثلثی اعداد (triangular numbers) اور مربع اعداد کے درمیان کوئی تعلق دیکھ سکتے ہیں؟ دکھائے گئے نمونے کو آگے بڑھائیں اور اگلی شکل بنائیں۔



1.1.4 جزر المربع (Square Roots)

ایک مربع کا رقبہ 49 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی کیا ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ $7 \times 7 = 49$ یا $7^2 = 49$

لہٰذا، 49 مربع سینٹی میٹر رقبے والے مربع کے ضلع کی لمبائی 7 سینٹی میٹر ہے۔ ہم 7 کو 49 کا **جزر المربع** کہتے ہیں۔

عام طور پر، اگر $y = x^2$ ہو تو x، عدد y کا جزر المربع ہوتا ہے۔

64 کا جزر المربع کیا ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ $8 \times 8 = 64$ ہے۔ لہٰذا، 8 عدد 64 کا جزر المربع ہے۔ -8×-8 کے بارے میں کیا خیال ہے؟

وہ بھی 64 ہی ہوتا ہے! $8^2 = 64$ اور $(-8)^2 = 64$

اس لیے، 64 کے جزر المربع $+8$ اور -8 ہیں۔

ہر کامل مربع کے دو صحیح عددی جزر المربع ہوتے ہیں۔ ایک مثبت ہوتا ہے اور دوسرا منفی۔ کسی عدد کے جزر المربع کو علامت $\sqrt{\ }$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ

$\sqrt{64} = \pm 8$، اور $\sqrt{100} = \pm 10$۔

غور کریں $\sqrt{8^2} = \pm 8$ اور $\sqrt{10^2} = \pm 10$۔ عام طور پر، $\sqrt{n^2} = \pm n$۔

اس باب (chapter) میں، ہم صرف مثبت جزر المربع پر ہی غور کریں گے۔

اگر کوئی عدد دیا گیا ہو، جیسے 576 یا 327، تو ہم یہ کیسے معلوم کریں گے کہ آیا وہ ایک کامل مربع ہے یا نہیں؟ اگر وہ ایک کامل مربع ہے، تو ہم اس کا جزر المربع کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں کہ کامل مربع اعداد 1، 4، 9، 16، 25، یا صفروں کی جفت تعداد (even number of zeros) پر ختم ہوتے ہیں۔

لیکن، یہ یقینی نہیں ہے کہ جو عدد اس شرط کو پورا کرے وہ لازمی طور پر مربع ہی ہو۔

ہم واضح طور پر کہہ سکتے ہیں کہ 327 ایک کامل مربع نہیں ہے۔ تاہم، ہم یقین کے ساتھ نہیں کہہ سکتے کہ 576 ایک کامل مربع ہے یا نہیں۔

1. We can list all the square numbers in sequence and find out whether 576 occurs among them. We know that $20^2 = 400$, we can find squares of 21, 22, 23, ... and so on until we get 576 or a number greater than 576.

$20^2 = 400$ $21^2 = 441$ $22^2 = 484$ $23^2 = 529$ $24^2 = 576$

However, this process becomes inefficient for larger numbers.

2. Recall that every square can be expressed as a sum of consecutive odd numbers starting from 1.

Consider $\sqrt{81}$.

$81 - 1 = 80$ $80 - 3 = 77$ $77 - 5 = 72$ $72 - 7 = 65$ $65 - 9 = 56$

$56 - 11 = 45$ $45 - 13 = 32$ $32 - 15 = 17$ $17 - 17 = 0$

From 81, we successively subtracted consecutive odd numbers starting from 1 until we obtained 0 at the 9th step. Therefore $\sqrt{81} = 9$.

Can we find the square root of 729 using this method? Yes, but it will be time - consuming

3. We know that a perfect square is obtained by multiplying an integer by itself. Will looking at a number's prime factorisation help in determining whether it is a perfect square?

Yes, if we can divide the prime factors of a number into two equal groups, then the product of the prime factors in either group combine to form the square root.

? Is 324 a perfect square?

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

These can be grouped as

$$324 = (2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3).$$
$$= (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2.$$

We can also write the prime factors in pairs. That is,

$$324 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3),$$

which shows that 324 is a perfect square. Thus,

$$324 = (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2.$$

Therefore, $\sqrt{324} = 18$.

? Is 156 a perfect square?

The prime factorisation of 156 is $2 \times 2 \times 3 \times 13$.

APSCERT

1. ہم ترتیب وار تمام مربع (square) اعداد کی فہرست بناسکتے ہیں اور معلوم کرسکتے ہیں کہ آیا ان میں 576 آتا ہے یا نہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $20^2 = 400$ ہے، چنانچہ ہم 21، 22، 23 وغیرہ کے مربع معلوم کرسکتے ہیں جب تک کہ ہمیں 576 یا اس سے بڑا عدد حاصل نہ ہو جائے۔

$$20^2 = 400 \quad 21^2 = 441 \quad 22^2 = 484 \quad 23^2 = 529 \quad 24^2 = 576$$

تاہم، بڑے اعداد کے لیے یہ طریقہ غیر مؤثر ہو جاتا ہے۔

2. یاد رکھیں کہ ہر مربع عدد کو 1 سے شروع ہونے والے مسلسل طاق اعداد (consecutive odd numbers) کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ $\sqrt{81}$ پر غور کریں۔

81 - 1 = 80	80 - 3 = 77	77 - 5 = 72	72 - 7 = 65	65 - 9 = 56
56 - 11 = 45	45 - 13 = 32	32 - 15 = 17	17 - 17 = 0	

ہم نے 81 میں سے 1 سے شروع ہونے والے مسلسل طاق اعداد کو ایک کے بعد دیگر اس وقت تک گھٹایا جب تک کہ 9 ویں مرحلے پر ہمیں 0 حاصل نہیں ہو گیا۔ اس لیے $\sqrt{81} = 9$ ہے۔

کیا ہم اس طریقے سے 729 کا جزر المربع (square root) معلوم کرسکتے ہیں؟ جی ہاں، لیکن اس میں بہت زیادہ وقت درکار ہے۔

3. ہم جانتے ہیں کہ ایک کامل مربع (perfect square) کسی صحیح عدد (integer) کو خود اسی سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ کیا کسی عدد کے مفرد اجزائے ضربی (prime factors) کو دیکھنے سے یہ معلوم کرنے میں مدد ملے گی کہ آیا وہ ایک کامل مربع ہے؟

جی ہاں، اگر ہم کسی عدد کے مفرد اجزائے ضربی کو دو برابر گروپوں میں تقسیم کرسکیں، تو دونوں میں سے کسی بھی گروپ کے مفرد اجزائے ضربی کا حاصل ضرب مل کر جزر المربع بناتا ہے۔

کیا 324 ایک کامل مربع ہے؟

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

انہیں اس طرح گروپوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے،

$$324 = (2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3)$$
$$= (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2$$

ہم مفرد اجزائے ضربی کو جوڑیوں (pairs) کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں، یعنی،

$$324 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ 324 ایک کامل مربع ہے۔ چنانچہ،

$$324 = (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2$$

اس لیے، $\sqrt{324} = 18$ ہے۔

کیا 156 ایک کامل مربع ہے؟

156 کے مفرد اجزائے ضربی (prime factorisation) یہ ہیں: $2 \times 2 \times 3 \times 13$۔

APSCERT

We cannot pair up these factors.

Therefore, 156 is not a perfect square.

1.1.5 Estimating :

? Find whether 1156 and 2800 are perfect squares using prime factorisation.

We can estimate the square root of larger perfect squares by looking at the closest perfect squares we are familiar with and then narrowing down the interval to search.

For example, to find $\sqrt{1936}$, we can reason as follows:

(i) 1936 is between 1600 (40^2) and 2500 (50^2), so $40 < \sqrt{1936} < 50$.

(ii) The last digit of 1936 is 6. So, the last digit of the square root must either be 4 or 6. It can be 44 or 46.

(iii) If we calculate 45^2, we can compare it with 1936 to halve the interval to search from 40-50 to either 40-45 or 45-50. We can write 45^2 as $(40 + 5)\ (40 + 5) = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$.

(iv) $2025 > 1936$. So, $40 < \sqrt{1936} < 45$

(v) From the observation in point (ii) we can guess and then verify that $\sqrt{1936}$ is 44.

Consider the following situations -

Mayur and Rushitha play a game. One says a number and the other replies with its square root. Mayur starts. He says 25, and Rushitha quickly responds with 5. Then Rushitha says 81, and Mayur answers 9. The game goes on till Mayur says 250. Rushitha is not able to answer because 250 is not a perfect square. Mayur asks Rushitha if she can at least provide a number that is close to the square root of 250.

For this, Rushitha needs to estimate the square root of 250.

We know that $100 < 250 < 400$ and $\sqrt{100} = 10$ and $\sqrt{400} = 20$.

So, $10 < \sqrt{250} < 20$.

But, we are still not very close to the number whose square is 250.

We know that $15^2 = 225$ and $16^2 = 256$.

Therefore, $15 < \sqrt{250} < 16$. Since 256 is much closer to 250 than 225, $\sqrt{250}$ is approximately 16. We also know it is less than 16.

Here is another problem that requires estimating square roots.

ہم ان اجزائے ضربی کی جوڑیاں نہیں بنا سکتے۔

اس لیے، 156 ایک کامل مربع نہیں ہے۔

1.1.5 تخمینہ لگانا:

مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کریں کہ آیا 1156 اور 2800 کامل مربع ہیں یا نہیں۔ ہم بڑے کامل مربعوں کے جزر المربع کا تخمینہ ان قریبی کامل مربعوں کو دیکھ کر لگا سکتے ہیں جن سے ہم واقف ہیں، اور پھر تلاش کے لیے درمیانی وقفے کو محدود کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $\sqrt{1396}$ معلوم کرنے کے لیے، ہم درج ذیل طریقے سے غور کر سکتے ہیں:

i. 1936 عدد 1600 (40^2) اور 2500 (25^2) کے درمیان ہے، اس لیے $40 < \sqrt{1936} < 50$۔

ii. 1936 کا آخری ہندسہ (اکائی کا ہندسہ) 6 ہے۔ اس لیے جزر المربع کا آخری ہندسہ یا تو 4 ہونا چاہیے یا 6۔ یہ 44 یا 46 ہو سکتا ہے۔

iii. اگر ہم 45^2 کا حساب لگائیں، تو ہم اس کا موازنہ 1936 سے کر کے تلاش کے وقفہ کو آدھا کر سکتے ہیں، یعنی $40 - 50$ سے کم کر کے ے یا تو $40 - 45$ یا $45 - 50$ کر سکتے ہیں۔

ہم 45^2 کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$(40 + 5)(40 + 5) = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$$

iv. چونکہ $1936 < 2025$ ہے، اس لیے $40 < \sqrt{1936} < 45$ ہو گا۔

v. نقطہ (ii) کے مشاہدے سے ہم اندازہ لگا سکتے ہیں اور پھر تصدیق کر سکتے ہیں کہ $\sqrt{1936}$ دراصل 44 ہے۔

درج ذیل صورتحال پر غور کریں:

میور (Mayur) اور روشی تا (Rushitha) ایک کھیل کھیلتے ہیں۔ ایک شخص کوئی عدد بولتا ہے اور دوسرا اس کا جزر المربع بتاتا ہے۔ میور شروعات کرتا ہے۔ وہ 25 کہتا ہے، اور روشی تا فوراً 5 جواب دیتی ہے۔ پھر روشی تا 81 کہتی ہے، اور میور 9 جواب دیتا ہے۔ یہ کھیل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک میور 250 نہیں کہہ دیتا۔ روشی تا اس کا جواب دینے کے قابل نہیں ہوتی کیونکہ 250 ایک کامل مربع نہیں ہے۔ میور روشی تا سے پوچھتا ہے کہ کیا وہ کم از کم کوئی ایسا عدد بتا سکتی ہے جو 250 کے جزر المربع کے قریب ترین ہو۔

اس کے لیے، روشی تا کو 250 کے جزر المربع کا تخمینہ لگانے کی ضرورت ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $100 < 250 < 400$ ہے، اور $\sqrt{100} = 10$ اور $\sqrt{400} = 20$ ہے۔

اس لیے، $10 < \sqrt{250} < 20$ ہو گا۔

لیکن، ہم ابھی تک اس عدد کے بہت قریب نہیں پہنچے جس کا مربع 250 ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $15^2 = 225$ اور $16^2 = 256$۔

اس لیے، $15 < \sqrt{250} < 16$ ہو گا۔ چونکہ 256 ، 225 کے مقابلے میں 250 کے بہت زیادہ قریب ہے، اس لیے $\sqrt{250}$ تقریباً 16 ہے۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ یہ 16 سے کم ہے۔

یہاں ایک اور مسئلہ دیا گیا ہے جس میں جزر المربع کا تخمینہ لگانے کی ضرورت ہے۔

Akhil has a square piece of cloth of area 125 cm^2. He wants to know if he can cut out a square handkerchief of side 15 cm. If not, he wants to know the maximum size handkerchief that can be cut out from this piece of cloth with an integer side length.

125 is not a perfect square. The nearest perfect squares are $11^2 = 121$ and $12^2 = 144$. So the largest square handkerchief with integer side length that can be cut out from this piece of cloth has side length 11 cm.



Figure it Out - 1.1

1. Which of the following numbers are not perfect squares?
   (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089
2. Which one among 64^2, 108^2, 292^2, 36^2 has last digit 4?
3. Given $125^2 = 15625$, what is the value of 126^2?
   (i) 15625 + 126 (ii) 15625 + 26^2 (iii) 15625 + 253
   (iv) 15625 + 251 (v) 15625 + 51^2
4. Find the length of the side of a square whose area is 441 m^2.
5. Find the smallest square number that is divisible by each of the following numbers:
   4, 9, and 10.
6. Find the smallest number by which 9408 must be multiplied so that the product is a perfect square. Find the square root of the product.
7. How many numbers lie between the squares of the following numbers?
   (i) 16 and 17 (ii) 99 and 100
8. In the following pattern, fill in the missing numbers:
   $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
   $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
   $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
   $4^2 + 5^2 + 20^2 = (\_\_\_\_\_)^2$
   $9^2 + 10^2 + (\_\_\_\_\_)^2 = (\quad)^2$
9. How many tiny squares are there in the following picture? Write the prime factorisation of the number of tiny squares.

اکھیل (Akhil) کے پاس کپڑے کا ایک مربع شکل کا ٹکڑا ہے جس کا رقبہ 125 مربع سینٹی میٹر ہے۔ وہ یہ جاننا چاہتا ہے کہ کیا وہ اس میں سے 15 سینٹی میٹر سائیڈ (ضلع) والا مربعی رومال کاٹ سکتا ہے۔ اگر نہیں، تو وہ یہ جاننا چاہتا ہے کہ کپڑے کے اس ٹکڑے سے صحیح عدد (integer) کی لمبائی والی سائیڈ (ضلع) کا زیادہ سے زیادہ کس پیمائش کا رومال کاٹا جا سکتا ہے۔

125 ایک کامل مربع (perfect square) نہیں ہے۔ اس کے قریب ترین کامل مربعے $11^2 = 121$ اور $12^2 = 144$ ہیں۔ لہٰذا کپڑے کے اس ٹکڑے سے صحیح عدد (integers) کی لمبائی والی سائیڈ (ضلع) کا جو سب سے بڑا مربع رومال کاٹا جا سکتا ہے، اس کی سائیڈ کی لمبائی 11 سینٹی میٹر ہوگی۔



حل کیجیے–1.1

1. درج ذیل میں سے کون سے اعداد کامل مربع نہیں ہیں؟

(i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089

2. 64^2، 108^2، 292^2 اور 36^2 میں سے کس عدد کا آخری ہندسہ 4 ہے؟

3. دیا گیا ہے کہ $125^2 = 15625$ ہے، تو 126^2 کی قیمت کیا ہوگی؟

(i) $15625 + 126$ (ii) $15625 + 26^2$ (iii) $15625 + 25$

(iv) $15625 + 251$ (v) $15625 + 51^2$

4. ایک ایسے مربع کے ضلع (side) کی لمبائی معلوم کیجیے جس کا رقبہ 441 مربع میٹر ہے۔

5. وہ اقل ترین مربع عدد معلوم کیجیے جو درج ذیل میں سے ہر ایک عدد سے مکمل تقسیم ہو جائے:

4، 9 اور 10۔

6. وہ اقل ترین عدد معلوم کیجیے جس سے 9408 کو ضرب دیا جائے تاکہ حاصل ضرب ایک کامل مربع بن جائے۔ حاصل ضرب کا جزر المربع (square root) بھی معلوم کیجیے۔

7. درج ذیل اعداد کے مربعوں (squares) کے درمیان کتنے اعداد آتے ہیں؟

(i) 16 اور 17 (ii) 99 اور 100

8. درج ذیل نمونوں (pattern) میں خالی جگہوں پر درست اعداد لکھیے:

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

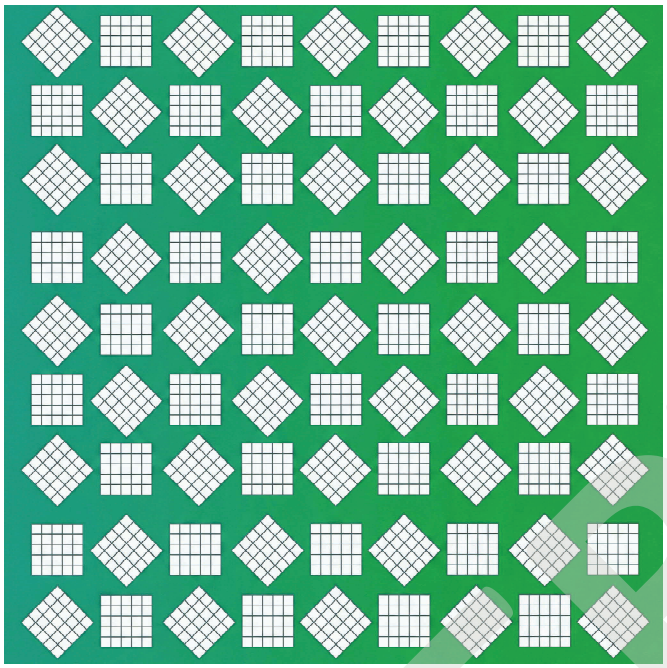
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + 20^2 = (\_\_\_\_\_)^2$

$9^2 + 10^2 + (\_\_\_\_\_)^2 = (\_\_\_\_\_)^2$

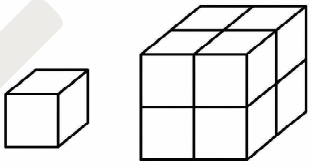
9. نیچے دی گئی تصویر میں کتنے چھوٹے مربع ہیں؟ ان چھوٹے مربعوں کی تعداد کے مفرد اجزائے ضربی لکھیے۔

AP SCERT



1.2 Cubic Numbers

You know the word cube from geometry. A cube is a solid figure all of whose all sides meet at right angles and are equal. How many cubes of side 1 cm make a cube of side 2 cm?

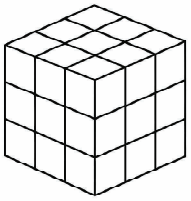


? How many cubes of side 1 cm will make a cube of side 3 cm?

Consider the numbers 1, 8, 27, ...

These numbers are called perfect cubes. Can you see why they are named so?

Each of them is obtained by multiplying a number by itself three times. We note that



$1 = 1 \times 1 \times 1$

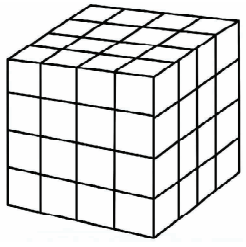
$8 = 2 \times 2 \times 2$

$27 = 3 \times 3 \times 3$

? Is 9 a cube?

We see that $2 \times 2 \times 2 = 8$ and $3 \times 3 \times 3 = 27$. This shows that 9 is not a perfect cube and no other number from 10 to 26.

? Can you estimate the number of unit cubes in a cube with an edge length of 4 units?

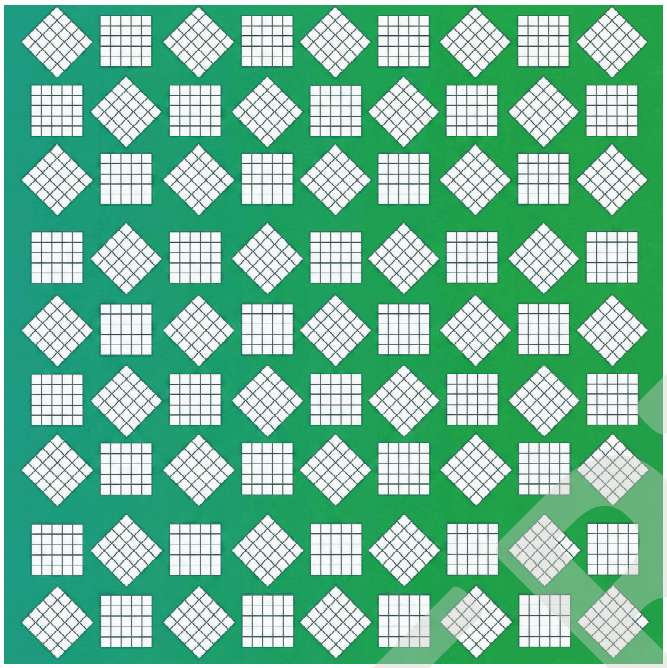


It has 64 unit cubes! If you notice carefully, each layer of this cube has 4×4 unit cubes. Each square layer has 16 unit cubes (4×4), and there are 4 such layers, so the total number of unit cubes is $4 \times 4 \times 4 = 64$.

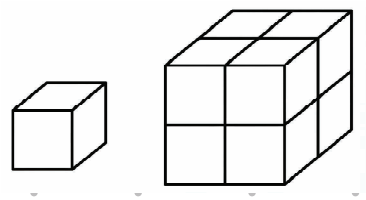
Since $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, 125 is a cube.

In general, for any number n, we write the cube $n \times n \times n$ as n^3.

© NCERT



1.2 مکعب اعداد

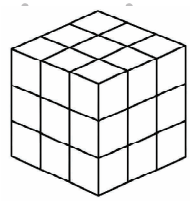


آپ جیومیٹری سے لفظ "مکعب" کے بارے میں جانتے ہیں۔ مکعب ایک ٹھوس شکل ہوتی ہے جس کے تمام اضلاع ایک دوسرے سے قائم زاویہ پر ملتے ہیں اور آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

1 سینٹی میٹر ضلع والے کتنے مکعب مل کر 2 سینٹی میٹر ضلع والا ایک مکعب بنائیں گے؟

1 سینٹی میٹر ضلع والے کتنے مکعب مل کر 3 سینٹی میٹر ضلع والا ایک مکعب بنائیں گے؟

اعداد 1، 8، 27، ... پر غور کریں۔ ان اعداد کو **کامل مکعب** کہا جاتا ہے۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان کا یہ نام کیوں رکھا گیا ہے؟ ان میں سے ہر ایک عدد کسی عدد کو خود اسی سے تین بار ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ:

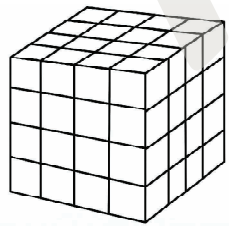


$$1 = 1 \times 1 \times 1$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

کیا 9 ایک مکعب عدد ہے؟

ہم دیکھتے ہیں کہ $8 = 2 \times 2 \times 2$ اور $27 = 3 \times 3 \times 3$ ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ 9 ایک کامل مکعب نہیں ہے اور نہ ہی 10 سے 26 تک کا کوئی دوسرا عدد کامل مکعب ہے۔

کیا آپ 4 اکائی لمبائی کے کنارے والے مکعب میں اکائی مکعبوں کی تعداد کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟



اس میں 64 اکائی مکعب ہوتے ہیں! اگر آپ غور سے دیکھیں تو اس مکعب کی ہر تہہ میں 4×4 اکائی مکعب موجود ہیں۔ ہر مربع شکل کی تہہ میں 16 اکائی مکعب (4×4) ہیں، اور ایسی 4 تہیں ہیں، اس لیے اکائی مکعبوں کی کل تعداد درج ذیل ہو گی:

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

چونکہ $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ ہے۔

ہم اس کے مکعب $n \times n \times n$ کو n^3 کی شکل میں لکھتے ہیں

APSCERT

Complete the table below.

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$
$2^3 = 8$	$12^3 =$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$
$5^3 = 125$	$15^3 =$
$6^3 =$	$16^3 =$
$7^3 =$	$17^3 = 4913$
$8^3 =$	$18^3 =$
$9^3 =$	$19^3 = 6859$
$10^3 =$	$20^3 =$

What patterns do you notice in the table above?

We know that 0, 1, 4, 5, 6, 9 are the only last digits possible for squares. What are the possible last digits of cubes?

Similar to squares, can you find the number of cubes with 1 digit, 2 digits, and 3 digits? What do you observe?

Can a cube end with exactly two zeroes (00)? Explain.

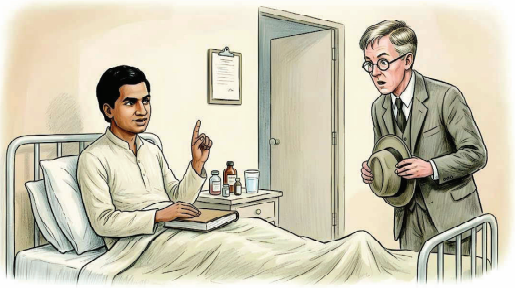
Just as we can take squares of fractions/decimals : $\left(\frac{4}{6}\right)^2$, $(13.08)^2$, and $(-6)^2$ we also can compute cubes of such numbers : $\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $(13.08)^3$, and $(-6)^3$.

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{64}{216}\right)$$

$(13.08)^3 = 13.08 \times 13.08 \times 13.08 = 2237.810112$

$(-6)^3 = -6 \times -6 \times -6 = -216.$

1.2.1 Taxicab Numbers



Once when Srinivasa Ramanujan was working with G. H. Hardy at the University of Cambridge, Hardy had come to visit Ramanujan at a hospital when he was ill. Hardy had ridden in a taxicab numbered 1729 and he remarked that 1729 was 'rather a dull number,' adding that he hoped that this was not a bad sign. Ramanujan immediately replied, "No, Hardy, it is a very interesting

❓ نیچے دی گئی جدول کو مکمل کریں۔

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$
$2^3 = 8$	$12^3 =$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$
$5^3 = 125$	$15^3 =$
$6^3 =$	$16^3 =$
$7^3 =$	$17^3 = 4913$
$8^3 =$	$18^3 =$
$9^3 =$	$19^3 = 6859$
$10^3 =$	$20^3 =$

❓ اوپر دی گئی جدول میں آپ کو کیا پیٹرن (طریقہ کار) نظر آتے ہیں؟

❓ ہم جانتے ہیں کہ مربعوں کے ممکنہ آخری ہندسے صرف 0، 1، 4، 5، 6، 9 ہی ہوسکتے ہیں۔ مکعب اعداد کے ممکنہ آخری ہندسے کون سے ہوسکتے ہیں؟

❓ مربعوں کی طرح، کیا آپ 1 ہندسی، 2 ہندسی اور 3 ہندسی والے مکعب اعداد کی تعداد معلوم کرسکتے ہیں؟ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ کیا کوئی مکعب عدد ٹھیک دو صفروں (00) پر ختم ہوسکتا ہے؟ وضاحت کریں۔

❓ جس طرح ہم کسر یا اعشاریہ والے اعداد کے مربعے معلوم کرسکتے ہیں، جیسا کہ:

$\left(\frac{4}{6}\right)^2$، $(13.08)^2$ اور $(-6)^2$ اسی طرح ہم ایسے اعداد کے مکعب بھی معلوم کرسکتے ہیں: $\left(\frac{4}{6}\right)^3$، $(13.08)^3$ اور $(-6)^3$۔

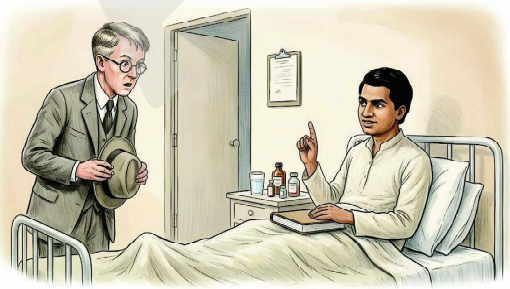
$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{64}{216}\right)$$

$$(13.08)^3 = 13.08 \times 13.08 \times 13.08 = 2237.810112$$

$$(-6)^3 = -6 \times -6 \times -6 = -216$$

1.2.1 ٹیکسی کیب نمبر

ایک مرتبہ جب سرینیواسا رامانوجن کیمبرج یونیورسٹی میں جی۔ ایچ۔ ہارڈی کے ساتھ کام کر رہے تھے، تو ہارڈی ہسپتال میں رامانوجن کی عیادت کے لیے آئے کیونکہ وہ بیمار تھے۔ ہارڈی ایک ٹیکسی میں سوار ہو کر آئے تھے جس کا نمبر 1729 تھا اور انہوں نے تبصرہ کیا کہ 1729 'بے رونق عدد ہے'، اور ساتھ ہی یہ امید بھی ظاہر کی کہ یہ کوئی برا شگون نہ ہو۔ رامانوجن نے فوراً جواب دیا، "نہیں ہارڈی، یہ ایک بہت ہی دلچسپ



number. It is the smallest number that can be expressed as the sum of two cubes in two different ways".

$$1729 = 1^3 + 12^3$$
$$= 9^3 + 10^3.$$

Because of this story, 1729 has since been known as the **Hardy-Ramanujan** Number. And numbers that can be expressed as the sum of two cubes in two different ways are called **taxicab numbers**.

? The next two taxicab numbers after 1729 are 4104 and 13832. Find the two ways in which each of these can be expressed as the sum of two positive cubes.

How did Ramanujan know this? Well, he loved numbers. All through his life, he tinkered with numbers. During Ramanujan's time in Cambridge, his colleagues often marveled at his ability to see deep patterns in numbers that seemed arbitrary to others. His colleague, John Littlewood, once said, "Every positive integer was one of his [Ramanujan's] personal friends".

1.2.2 Perfect Cubes and Consecutive Odd Numbers

Consecutive odd numbers have a role to play with cubes too. Look at the following pattern:

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3.$$

Later in this series, we get the following set of consecutive numbers:

$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109.$$

? Can you tell what this sum is without doing the calculation?

1.2.3 Cube Roots

We know that $8 = 2^3$.

We call 2 the cube root of 8 and denote this by $2 = \sqrt[3]{8}$.

More generally, if $y = x^3$, then x is the cube root of y. This is denoted by

عدد ہے۔ یہ وہ سب سے چھوٹا عدد ہے جسے دو الگ الگ طریقوں سے دو مکعب اعداد (cubes) کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے"۔

$$1729 = 1^3 + 12^3$$
$$= 9^3 + 10^3$$

اس واقعے کی وجہ سے، 1729 کو اس وقت سے **ہارڈی - رامانوجن نمبر** (Hardy–Ramanujan Number) کے نام سے جانا جاتا ہے۔ اور ایسے اعداد جنہیں دو الگ الگ طریقوں سے دو مکعب اعداد کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے، انہیں **ٹیکسی کیب نمبر** کہا جاتا ہے۔

1729 کے بعد اگلے دو ٹیکسی کیب نمبرز 4104 اور 13832 ہیں۔ وہ دو طریقے معلوم کیجیے جن سے ان میں سے ہر ایک کو دو مثبت مکعب اعداد کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

رامانوجن یہ کیسے جانتے تھے؟ دراصل، انہیں اعداد سے محبت تھی۔ اپنی پوری زندگی میں، وہ اعداد کے ساتھ کھیلتے (غور و فکر کرتے) رہتے۔ کیمبرج میں رامانوجن کے قیام کے دوران، ان کے ساتھی اکثر اعداد میں گہرے پیٹرن (طریقہ کار) دیکھنے کی ان کی صلاحیت پر حیران ہوتے تھے جو دوسروں کو بالکل عام یا بے ترتیب معلوم ہوتے تھے۔ ان کے ایک ساتھی، جان لٹل وڈ نے ایک بار کہا تھا، "ہر مثبت صحیح عدد رامانوجن کے ذاتی دوستوں میں سے ایک تھا"۔

1.2.2 کامل مکعب اور مسلسل طاق اعداد

مسلسل طاق اعداد کا مکعب اعداد کے ساتھ بھی ایک خاص کردار ہے۔ درج ذیل پیٹرن (طریقہ کار) کو دیکھیے:

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3.$$

بعد میں اس سلسلے میں، ہمیں مسلسل طاق اعداد کا درج ذیل سیٹ حاصل ہوتا ہے:

$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109$$

کیا آپ بغیر حساب (جمع) کیے بتاسکتے ہیں کہ یہ مجموعہ کتنا ہوگا؟

1.2.3 جزر المکعب

ہم جانتے ہیں کہ $8 = 2^3$ ہے۔ ہم 2 کو 8 کا **جزر المکعب** کہتے ہیں اور اسے $\sqrt[3]{8} = 2$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

عمومی طور پر، اگر $x^3 = y$ ہو، تو x کو y کا جزر المکعب کہا جاتا ہے۔ اسے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے

$x = \sqrt[3]{y}$. So, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

Similarly, $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ and $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 3$. In general, $\sqrt[3]{n^3} = n$.

How do we find out if a number is a cube? Taking inspiration from the case of squares, let us see if we can use prime factorisations.

? Let us check if 3375 is a perfect cube.

$$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5.$$

Can the factors be split into three identical groups? For 3375, we can form three groups of (3×5). So,

$$3375 = (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^3 = 15^3.$$

Another way is to check if the factors can be grouped into triplet(s):

$3375 = (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 3^3 \times 5^3$.

This means $\sqrt[3]{3375} = 15$.

? Is 500 a perfect cube?

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$. We see that the factors cannot be split into three identical groups. Therefore, 500 is not a perfect cube.

Prime Factorisation of a Number	Prime Factorisation of its Cube
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

Observe that each prime factor of a number appears three times in the prime factorisation of its cube.

? Find the cube roots of these numbers:

(i) $\sqrt[3]{64}$ = (ii) $\sqrt[3]{512}$ = (iii) $\sqrt[3]{729}$ =

1.2.4 Successive Differences

We know that the differences between consecutive perfect squares gives the sequence of odd numbers. Observe the figure below where the differences

$x = \sqrt[3]{y}$ اس لیے، $2 = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}$۔

اسی طرح، $3 = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27}$ اور $10 = \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[3]{1000}$۔ عام طور پر $n = \sqrt[3]{n^3}$۔

ہم کیسے معلوم کریں کہ کوئی عدد مکعب ہے یا نہیں؟ مربع کی مثال سے ترغیب لیتے ہوئے، آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم مفرد اجزائے ضربی کا استعمال کر سکتے ہیں۔

آیئے جانچ کریں کہ کیا 3375 ایک کامل مکعب ہے۔ $3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

کیا ان اجزائے ضربی کو تین یکساں گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے؟ 3375 کے لیے، ہم (3×5) کے تین گروہ بنا سکتے ہیں۔ لہٰذا،

$$3375 = (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^3 = 15^3$$

دوسرا طریقہ یہ جانچ کرنا ہے کہ آیا اجزائے ضربی کو تین تین کے گروہ (triplet) میں تقسیم کیا جا سکتا ہے یا نہیں:

$$3375 = (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 3^3 \times 5^3$$

اس کا مطلب ہے کہ $\sqrt[3]{3375} = 15$۔

کیا 500 ایک کامل مکعب ہے؟

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اجزائے ضربی کو تین یکساں گروہوں میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا۔

اس لیے، 500 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔

کسی عدد کی مفرد اجزائے ضربی	اس کے مکعب کی مفرد اجزائے ضربی
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

غور کریں کہ کسی عدد کا ہر مفرد جزوِ ضربی اس کے مکعب کی مفرد اجزائے ضربی میں تین مرتبہ ظاہر ہوتا ہے۔

ان اعداد کے جزر المکعب معلوم کریں:

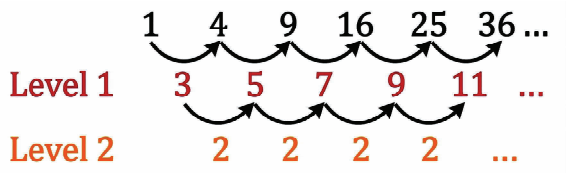
(i) $\sqrt[3]{64}$ (ii) $\sqrt[3]{512}$ (iii) $\sqrt[3]{729}$

1.2.4 متواتر فرق

ہم جانتے ہیں کہ مسلسل کامل مربّعوں کے درمیان فرق طاق اعداد کا تسلسل دیتا ہے۔ نیچے دی گئی شکل پر غور کریں

are computed successively for perfect squares. After two levels, all the differences are the same.

Perfect Squares



? Compute successive differences over levels for perfect cubes until all the differences at a level are the same. What do you notice?

Perfect Cubes



1.3 A Pinch of History

The first known list of perfect squares and perfect cubes was compiled by the Babylonians as far back as 1700 BCE. These lists, found on clay tablets, were used to quickly find square roots and cube roots in problems involving land measurement, architectural design, and other areas where geometric calculations were necessary.



In ancient Sanskrit works the term varga was used both for the square figure or its area, as well as the square power, and the term ghana was used both for the solid cube as well as the product of a number with itself three times. The fourth power was called varga-varga . These terms were used in India at least from the third century BCE.

Aryabhata (499 CE) states

"A square figure of four equal sides and the number representing its area are called varga. The product of two equal quantities is also called varga."

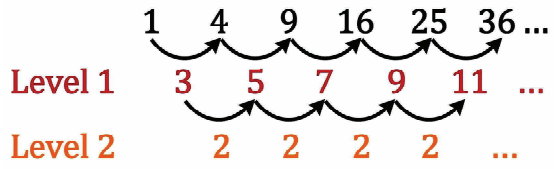
Thus, the term varga for square power has its origin in the graphical representation of a square figure.

Why is the word 'root' (the root of a plant) used for the mathematical operation $\sqrt{\ }$ (square root, cube root, etc.)?

It is because, in ancient India, the Sanskrit word mula, meaning root of a plant, basis, cause, origin, etc., was used for the mathematical operations of taking roots.

© NCERT

جہاں کامل مربعے کے لیے فرق یکے بعد دیگرے نکالے جارہے ہیں۔ دو سطحوں کے بعد، تمام فرق ایک جیسے ہو جاتے ہیں۔

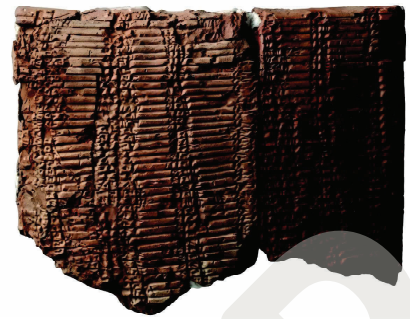


کامل مکعب کے لیے مختلف درجات پر یکے بعد دیگرے فرق اس وقت تک معلوم کریں جب تک کہ کسی ایک درجے پر تمام فرق یکساں نہ ہو جائیں۔ آپ کیا غور کرتے ہیں؟



1.3 تاریخ کی ایک جھلک

کامل مربعوں اور کامل مکعبوں کی سب سے پہلی معلوم فہرست بابلیوں (Babylonians) نے 1700 قبل مسیح (BCE) جتنے قدیم دور میں تیار کی تھی۔ مٹی کی تختیوں پر پائی جانے والی یہ فہرستیں زمین کی پیائش، تعمیری ڈیزائن اور دیگر ایسے شعبوں جہاں ہندسی حساب کتاب ضروری تھا، جزر المربع اور جزر المکعب تیزی سے معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتی تھیں۔



قدیم سنسکرت تصانیف میں لفظ 'ور گا (varga) 'مربع کی شکل یا اس کے رقبے اور ساتھ ہی مربع کی طاقت (square power) دونوں کے لیے استعمال ہوتا تھا۔ اور لفظ 'گھنا (ghana) 'ٹھوس مکعب (solid cube) اور ساتھ ہی کسی عدد کو اپنے آپ سے تین مرتبہ ضرب دینے سے حاصل ہونے والے حاصل ضرب دونوں کے لیے استعمال ہوتا تھا۔ قوت نما چار کو 'ور گا-ور گا (varga-varga) 'کہا جاتا تھا۔ یہ اصطلاحات ہندوستان میں کم از کم تیسری صدی قبل مسیح (BCE) سے استعمال ہو رہی تھیں۔

آریہ بھٹ (499 عیسوی) بیان کرتے ہیں:

"چار مساوی اضلاع والی مربعی شکل اور اس کے رقبے کو ظاہر کرنے والے عدد کو 'ور گا' کہا جاتا ہے۔ دو مساوی مقداروں کے حاصل ضرب کو بھی 'ور گا' کہا جاتا ہے۔" اس طرح، قوت نما دو کے لیے لفظ 'ور گا' کا آغاز مربعی شکل کی نقشی خاکہ یا تصویری پیش کش سے ہوا ہے۔

ریاضی کے عمل $\sqrt{}$ (جذر المربع، مکعب جذر وغیرہ) کے لیے 'جذر' (پودے کی جڑ) کا کیوں استعمال ہوتا ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ قدیم ہندوستان میں سنسکرت کا لفظ مول، جس کے معنی پودے کی جڑ، بنیاد، سبب، اصل وغیرہ ہیں، جذر نکالنے کے ریاضی عمل کے لیے استعمال کیا جاتا تھا۔

In Sanskrit, varga-mula (the basis, cause, origin of the square) was used for square-root and ghana-mula was used for cube-root. This use of mula for the mathematical concept of root was subsequently emulated in Arabic and Latin through their corresponding words for the root of a plant - jidhr and radix respectively. The term mula for root has been used in India at least from the first century BCE. Another term used was pada (foot, basis, cause, origin). Brahmagupta (628 CE) explains, 'The pada (root) of a krti (square) is that of which it is a square.'



Figure it Out - 1.2

1. Find the cube roots of 27000 and 10648.
2. What number will you multiply by 1323 to make it a cube number?
3. State true or false. Explain your reasoning.
   (i) The cube of any odd number is even.
   (ii) There is no perfect cube that ends with 8.
   (iii) The cube of a 2-digit number may be a 3-digit number.
   (iv) The cube of a 2-digit number may have seven or more digits.
   (v) Cube numbers have an odd number of factors.
4. You are told that 1331 is a perfect cube. Can you guess without factorisation what its cube root is? Similarly, guess the cube roots of 4913, 12167, and 32768.
5. Which of the following is the greatest? Explain your reasoning.
   (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$

SUMMARY

- A number obtained by multiplying a number by itself is called a square number. Squares of natural numbers are called perfect squares.
- All perfect squares end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9. Squares can only have an even number of zeros at the end.
- Square root is the inverse operation of square. Every perfect square has two integral square roots. The positive square root of a number is denoted by the symbol $\sqrt{\ }$. For example, $\sqrt{9} = 3$.
- A number obtained by multiplying a number by itself three times is called a cube. For example 1, 8, 27, ... ,etc., are cubes.

سنسکرت میں ورگ مول (مربع کی بنیاد، سبب، اصل) مربع کے جذر کے لیے اور گھن مول مکعب کے جذر کے لیے استعمال ہوتا تھا۔ ریاضی کے تصور کے لیے مول کا یہ استعمال بعد میں عربی اور لاطینی زبانوں میں پودے کی جڑ کے لیے ان کے متعلقہ الفاظ جذر اور ریڈکس کی صورت میں اپنایا گیا۔ ہندوستان میں مول کا لفظ جذر کے لیے کم از کم پہلی صدی قبل مسیح سے استعمال ہو رہا ہے۔ ایک اور اصطلاح پاد (قدم، بنیاد، سبب، اصل) بھی استعمال ہوتی تھی۔ برہم گپت (628 عیسوی) نے وضاحت کی: "کرتی (مربع) کا پاد (جذر) وہ ہے جس کا یہ مربع ہے۔"



حل کیجیے-1.2

1۔ 27000 اور 10648 کے مکعب جذر معلوم کیجیے۔

2۔ 1323 کو کس عدد سے ضرب دینے پر مکعب عدد حاصل ہو گا؟

3۔ درست یا غلط بتائیے۔ اپنی وجہ بیان کیجیے۔

- (i) کسی بھی طاق عدد کا مکعب جفت ہوتا ہے۔
- (ii) کوئی بھی مکمل مکعب 8 پر ختم نہیں ہوتا۔
- (iii) دو ہندسوں والے عدد کا مکعب تین ہندسوں والا عدد ہو سکتا ہے۔
- (iv) دو ہندسوں والے عدد کے مکعب میں سات یا اس سے زیادہ ہندسے ہو سکتے ہیں۔
- (v) مکعب اعداد کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہوتی ہے۔

4۔ آپ کو بتایا گیا ہے کہ 1331 ایک مکمل مکعب ہے۔ کیا آپ اجزاء میں تقسیم کیے بغیر اندازہ لگا سکتے ہیں کہ اس کا مکعب جذر کیا ہے؟

اسی طرح 4913، 12167 اور 32768 کے مکعب جذر کا اندازہ لگائیے۔

5۔ درج ذیل میں سے سب سے بڑا کون سا ہے؟ اپنی وجہ بیان کیجیے۔

$43^2 - 42^2$(iv) $67^2 - 66^2$(iii) $43^3 - 42^3$(ii) $67^3 - 66^3$(i)

خلاصہ

- کسی عدد کو خود سے ضرب دینے پر حاصل ہونے والا عدد مربع عدد کہلاتا ہے۔ فطری اعداد کے مربعوں کو مکمل مربع کہتے ہیں۔
- تمام مکمل مربع 0، 1، 4، 5، 6 یا 9 پر ختم ہوتے ہیں۔ مربعوں کے آخر میں صفر کی تعداد صرف جفت ہو سکتی ہے۔
- جذر المربع، مربع کا الٹا عمل ہے۔ ہر مکمل مربع کے دو عددی جذر المربع ہوتے ہیں۔ کسی عدد کا مثبت جذر المربع $\sqrt{}$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\sqrt{9}=3$۔
- کسی عدد کو خود سے تین بار ضرب دینے پر حاصل ہونے والا عدد مکعب کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر 1، 8، 27 وغیرہ مکعب اعداد ہیں۔

- A number is a perfect square if its prime factors can be split into two identical groups.
- A number is a perfect cube if its prime factors can be split into three identical groups
- The symbol $\sqrt[3]{\ }$ denotes cube root. For example, $\sqrt[3]{27} = 3$.



Look at the following numbers: 3 6 10 15 1
They are arranged such that each pair of adjacent numbers adds up to a square.

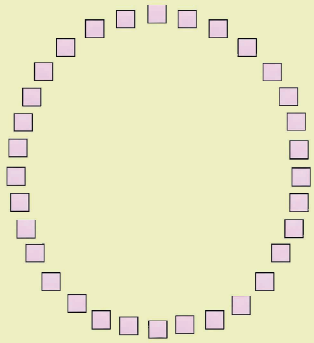
$3 + 6 = 9,\ 6 + 10 = 16,\ 10 + 15 = 25,\ 15 + 1 = 16.$

Try arranging the numbers 1 to 17 (without repetition) in a row in a similar way - the sum of every adjacent pair of numbers should be a square.

Can you arrange them in more than one way? If not, can you explain why?



Can you do the same with numbers from 1 to 32 (again, without repetition), but this time arranging all the numbers in a circle?





- کوئی عدد مکمل مربع ہے اگر اس کے اولیہ اجزائے ضربی کو دو یکساں گروہوں میں تقسیم کیا جاسکے۔
- کوئی عدد مکمل مکعب ہے اگر اس کے اولیہ اجزائے ضربی کو تین یکساں گروہوں میں تقسیم کیا جاسکے۔
- $\sqrt[3]{}$ کی علامت مکعب جذر کو ظاہر کرتی ہے۔ مثال کے طور پر $\sqrt[3]{27}=3$



درج ذیل اعداد پر غور کیجیے: 1 15 10 6 3

انہیں اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ ہر دو ملحقہ اعداد کا مجموعہ ایک مربع عدد ہو۔

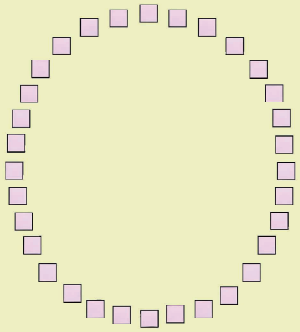
$15 + 1 = 16$، $10 + 15 = 25$، $6 + 10 = 16$، $3 + 6 = 9$

اب 1 سے 17 تک کے اعداد (بغیر دہرائے) کو اسی طرح ایک قطار میں ترتیب دینے کی کوشش کیجیے — ہر دو ملحقہ اعداد کا مجموعہ ایک مربع عدد ہونا چاہیے۔

کیا آپ انہیں ایک سے زیادہ طریقوں سے ترتیب دے سکتے ہیں؟ اگر نہیں تو کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں؟



کیا آپ 1 سے 32 تک کے اعداد (پھر بغیر دہرائے) کے ساتھ بھی ایسا کر سکتے ہیں، لیکن اس بار تمام اعداد کو ایک دائرے میں ترتیب دیجیے؟





2 POWER PLAY

Learning outcomes

Learners will able to

- Analyze situations, farmulate questions, and arrive at solutions by sequentially guessing and initial answer modelling the problem statement and applying assumptions and approximation (CG-6)
- Understand laws of exponents (CG-1)
- Compare exponential growth with additive growth. (CG-1)
- Convert very large numbers in standard form (CG-1)
- Compare very large numbers (CG-1)

K4N3R2

2.0 Experiencing the Power Play ..

An Impossible Venture!

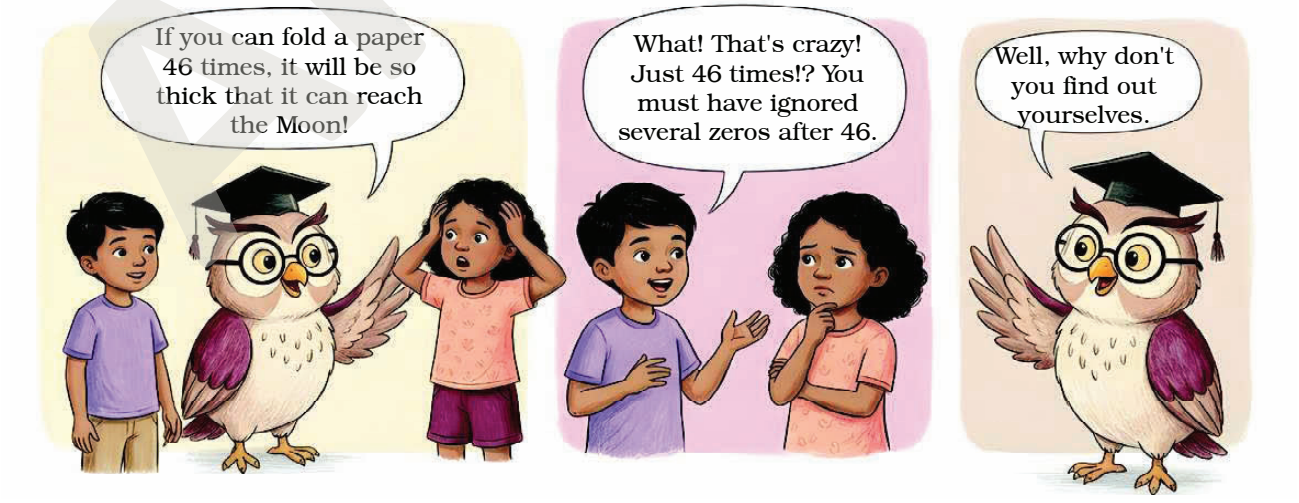
Take a sheet of paper, as large a sheet as you can find. Fold it once. Fold it again, and again.

? How many times can you fold it over and over?

Raju says "I heard that a sheet of paper can't be folded more than 7 times".

Rekha replies "What if we use a thinner paper, like a newspaper or a tissue paper?"

Try it with different types of paper and see what happens.



2 قوت نماؤں کا کھیل

W7Q5V7

اکتسابی نتائج:

طلبہ اس قابل بنیں گے

- صورتحال کا تجزیہ کر سکیں گے، سوالات مرتب کر سکیں گے، اور ترتیب وار اندازہ لگا کر اور ابتدائی جواب کا ماڈل تیار کر کے، نیز مفروضات اور تخمینوں کا اطلاق کر کے مسائل کے حل تک پہنچ سکیں گے۔
- قوت نما کے قوانین کو سمجھ سکیں گے۔
- اضافی نشوونما کے ساتھ تیزی سے بڑھنے والی نشوونما کا موازنہ کریں گے۔
- بہت بڑے اعداد کو معیاری شکل میں تبدیل کریں گے۔
- بہت بڑے اعداد کا موازنہ کریں گے۔

2.0 قوت نماؤں کے ساتھ کھیل کی سمجھ بوجھ ....ایک ناممکن مہم جوئی!

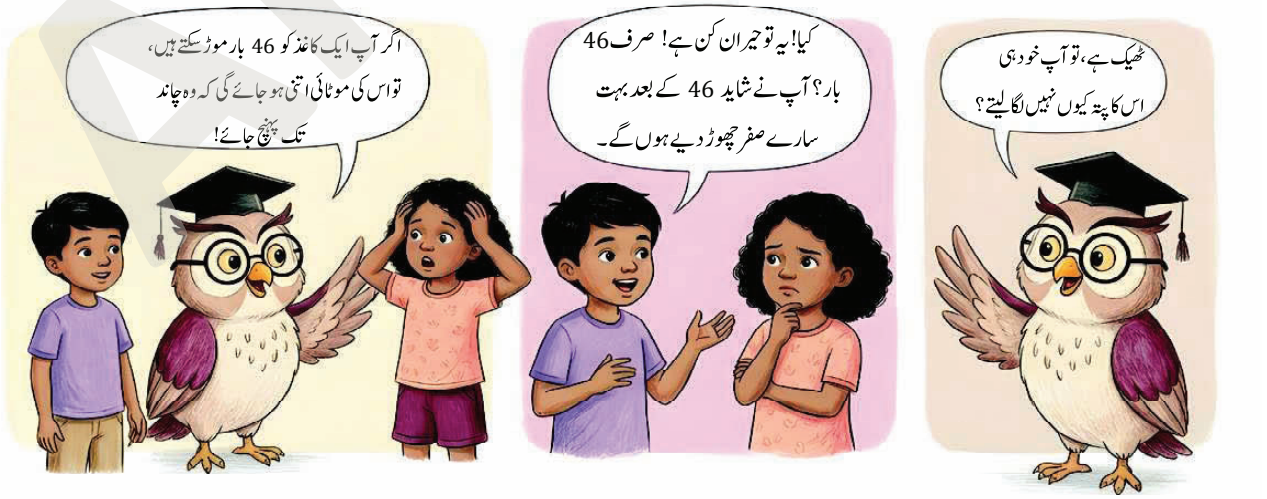
آپ نے اب تک جتنا بڑا کاغذ دیکھا ہے، اسے لیں۔ اسے ایک بار موڑیں۔ پھر سے موڑیں۔ اور پھر سے موڑیں۔

آپ اسے بار بار کتنی دفعہ موڑ سکتے ہیں؟

راجو کہتا ہے: "میں نے سنا ہے کہ ایک کاغذی شیٹ کو 7 بار سے زیادہ نہیں موڑا جا سکتا۔"

ریکھا کہتی ہے: "اگر ہم اخبار یا ٹشو پیپر جیسا پتلا کاغذ استعمال کریں تو کیا ہو گا؟"

مختلف قسم کے کاغذات کے ساتھ یہ کوشش کریں اور دیکھیں کہ کیا ہوتا ہے۔



? Say you can fold a sheet of paper as many times as you wish. What would its thickness be after 30 folds? Make a guess.

Let us find out how thick a sheet of paper will be after 46 folds. Assume that the thickness of the sheet is 0.001 cm.

? The following table lists the thickness after each fold. Observe that the thickness doubles after each fold.

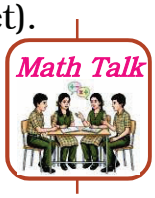
Fold	Thickness	Fold	Thickness	Fold	Thickness
1	0.002 cm	7	0.128 cm	13	8.192 cm
2	0.004 cm	8	0.256 cm	14	16.384 cm
3	0.008 cm	9	0.512 cm	15	32.768 cm
4	0.016 cm	10	1.024 cm	16	65.536 cm
5	0.032 cm	11	2.048 cm	17	≈ 131 cm
6	0.064 cm	12	4.096 cm		

(We use the sign '≈' to indicate 'approximately equal to'.)

After 10 folds, the thickness is just above 1 cm (1.024 cm).

After 17 folds, the thickness is about 131 cm (a little more than 4 feet).

? Now, what do you think the thickness would be after 30 folds? 45 folds? Make a guess.

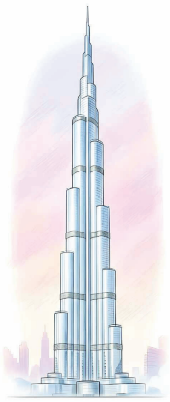


? Fill the table below.

Fold	Thickness	Fold	Thickness	Fold	Thickness
18	≈ 262 cm	21		24	
19	≈ 524 cm	22		25	
20	≈ 10.4 m	23		26	

After 26 folds, the thickness is approximately 670 m. Burj Khalifa in Dubai, the tallest building in the world, is 830 m tall.

Fold	Thickness	Fold	Thickness
27	≈ 1.3 km	29	
28		30	



After 30 folds, the thickness of the paper is about 10. the typical height at which planes fly. The deepest

APSCERT

فرض کریں کہ آپ ایک کاغذی شیٹ کو جتنی بار چاہیں موڑ سکتے ہیں۔ 30 بار موڑنے کے بعد اس کی موٹائی کتنی ہو گی؟ اندازہ لگائیں۔

آیئے معلوم کرتے ہیں کہ 46 بار موڑنے کے بعد کاغذ کی شیٹ کتنی موٹی ہو گی۔ فرض کریں کہ کاغذ کی ابتدائی موٹائی 0.001 سمر ہے۔

نیچے دیا گیا جدول ہر بار موڑنے کے بعد کی موٹائی کو ظاہر کرتا ہے۔ غور کریں کہ ہر بار موڑنے کے بعد موٹائی دوگنی ہو رہی ہے۔

موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی
1	0.002 سمر	7	0.128 سمر	13	8.192 سمر
2	0.004 سمر	8	0.256 سمر	14	16.384 سمر
3	0.008 سمر	9	0.512 سمر	15	32.768 سمر
4	0.016 سمر	10	1.024 سمر	16	65.536 سمر
5	0.032 سمر	11	2.048 سمر	17	$\approx$ 131 سمر
6	0.064 سمر	12	4.096 سمر		

(نوٹ: ہم تقریباً برابر ظاہر کرنے کے لیے '$\approx$' کی علامت استعمال کرتے ہیں۔)



10 بار موڑنے کے بعد، موٹائی 1 سمر سے تھوڑی زیادہ ہوتی ہے (1.024 سمر)۔

17 بار موڑنے کے بعد، موٹائی تقریباً 131 سمر ہوتی ہے (4 فٹ سے تھوڑی زیادہ)۔

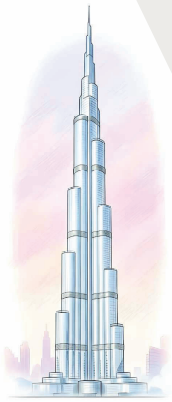
تو پھر، آپ کے خیال میں 30 بار موڑنے کے بعد موٹائی کتنی ہو گی؟ 45 بار موڑنے کے بعد موٹائی کتنی ہو گی؟ اندازہ لگا کر بتائیں۔

نیچے دیے گئے جدول کو مکمل کریں۔

موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی
18	$\approx$ 262 سمر	21		24	
19	$\approx$ 524 سمر	22		25	
20	$\approx$ 10.4 میٹر	23		26	

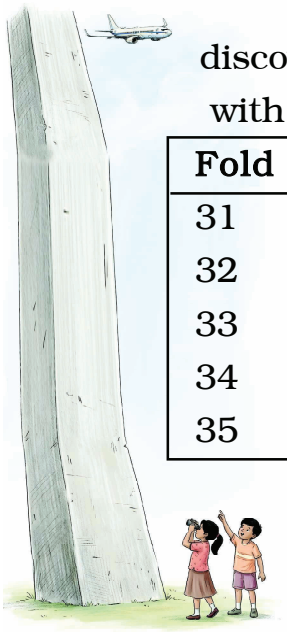
26 بار موڑنے کے بعد، اس کی موٹائی تقریباً 670 میٹر ہو گی۔ دنیا کی سب سے اونچی عمارت دبئی کے 'برج خلیفہ' کی اونچائی 830 میٹر ہے۔

موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی
27	$\approx$ 1.3 کلومیٹر	29	
28		30	



30 بار موڑنے کے بعد، کاغذ کی موٹائی تقریباً 10.7 کلومیٹر ہو گی، جو کہ عام طور پر ہوائی جہازوں کے اڑنے کی اونچائی کے برابر ہے۔

APSCERT



discovered in the oceans is the Mariana Trench, with a depth of 11 km.

Fold	Thickness	Fold	Thickness	Fold	Thickness
31		36		41	
32		37		42	
33		38		43	
34		39		44	
35		40		45	

It might be hard to digest the fact that after just 46 folds, the thickness is more than 7,00,000 km. This is the power of multiplicative growth, also called exponential growth. Let us analyse the growth.

We have seen that the thickness doubles after every fold.

Fold 4	0.016 cm
Fold 5	0.032 cm

Fold 9	0.512 cm
Fold 10	1.024 cm

Notice the change in thickness after two folds. By how much does it increase?

Fold 4	0.016 cm
Fold 6	1.064 cm

After any 3 folds, the thickness increases 8 times (= 2 × 2 × 2). Check if that is true. Similarly, from any point, the thickness after 10 folds increases by 1024 times (= 2 multiplied by itself 10 times), as shown in the table below.

Fold	Thickness	Times increased by
0 to 10	1.024 cm - 0.001 cm = 1. 023 cm	1.024 ÷ 0.001 cm = 1024
10 to 20	10.485 m - 1.024 cm ≈ 10. 474 m	10.485 m ÷ 1.024 cm = 1024
20 to 30	10.737 km - 10.485 m ≈ 10. 726 km	10.737 km ÷ 10.485 m = 1024
30 to 40	10995 km - 10.737 m ≈ 10984.2 km	10995 km ÷ 10.737 km = 1024

© NCERT

سمندروں میں پایا جانے والا سب سے گہرا مقام ماریانا خندق ہے،
جس کی گہرائی 11 کلو میٹر ہے۔



موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی	موڑنا	موٹائی
31		36		41	
32		37		42	
33		38		43	
34		39		44	
35		40		45	

صرف 46 بار موڑنے کے بعد، موٹائی 7,00,000 کلو میٹر سے زیادہ ہو جائے گی، اس حقیقت کو تسلیم کرنا شاید مشکل ہو۔ یہی ضربی ترقی کی طاقت ہے، جسے قوت نمائی اضافہ بھی کہا جاتا ہے۔ آیئے ہم اس ترقی کا تجزیہ کرتے ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بار موڑنے کے بعد موٹائی دوگنی ہو جاتی ہے۔

موڑ4	0.016 سمر	موڑ9	0.512 سمر
موڑ5	0.032 سمر	موڑ10	1.024 سمر

دوبار موڑنے کے بعد موٹائی میں آنے والی تبدیلی پر غور کریں۔

موڑ4	0.016 سمر
موڑ6	1.064 سمر

وہ کتنی بڑھتی ہے؟

کوئی بھی 3 تہیں لگانے کے بعد، موٹائی 8 گنا ($= 2 \times 2 \times 2$) بڑھ جاتی ہے۔ جانچ کیجیے۔

اسی طرح، نیچے دی گئی جدول میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق، کسی بھی مقام سے 10 بار موڑنے کے بعد موٹائی 1024 گنا بڑھ جاتی ہے
(2 = وخود اسی سے 10 بار ضرب دینے پر حاصل ہونے والا عدد)۔

موڑنا	موٹائی	کتنے گنا اضافہ ہوا
0 سے 10	1.024 سمر - 0.001 سمر	1.024 ÷ 0.001 سمر
	= 1.023 سمر	=1024
10 سے 20	10.485 میٹر - 1.024 سمر	1.024 سینٹی میٹر ÷ 10.485 میٹر
	≈ 10.474 میٹر	=1024
20 سے 30	10.737 کلو میٹر - 10.485 میٹر	10.485 میٹر ÷ 10.737 کلو میٹر
	≈ 10.726 میٹر	=1024
30 سے 40	10995 کلو میٹر - 10.737 کلو میٹر	10.737 کلو میٹر ÷ 10995 کلو میٹر
	≈ 10984.2 کلو میٹر	=1024

2.1 Exponential Notation and Operations

The initial thickness of the paper was 0.001 cm.

Upon folding once, its thickness became 0.001 cm × 2 = 0.002 cm.

Folding it twice, its thickness became -

0.001 cm × 2 × 2 = 0.004 cm, or 0.001 cm × 2^2 = 0.004 cm (in shorthand).

Upon folding it thrice, its thickness became -

0.001 cm × 2 × 2 × 2, or 0.001 cm × 2^3 = 0.008 cm.

When folded four times, its thickness became -

0.001 cm × 2 × 2 × 2 × 2, or 0.001 cm × 2^4 = 0.016 cm.

Similarly, the expression for the thickness of the paper when folded 7 times will be 0.001 cm × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2, or 0.001 cm × 2^7 = 0.128 cm.

We have seen that square numbers can be expressed as n^2 and cube numbers as n^3.

$n \times n = n^2$ (read as 'n squared' or 'n raised to the power 2')

$n \times n \times n = n^3$ (read as 'n cubed' or 'n raised to the power 3')

$n \times n \times n \times n = n^4$ (read as 'n raised to the power 4' or 'the 4th power of n') $n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^7$ (read as 'n raised to the power 7' or 'the 7th power of n') and so on.

In general, we write n^a to denote n multiplied by itself a times.

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

5^4 is the exponential form of 625. Here, 4 is the exponent/power, and 5 is the base. Exponents of the form 5^n are called powers of 5: 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, etc.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$.

Remember the 1024 from earlier? There, it meant that after every 10 folds, the thickness increased 10^{24} times.

5^4 is read as '5 raised to the power 4' or '5 to the power 4' or '5 power 4' or '4th power of 5'

? Which expression describes the thickness of a sheet of paper after it is folded 10 times? The initial thickness is represented by the letter-number v.

(i) 10v (ii) 10 + v (iii) 2 × 10 × v

(iv) 2^{10} (v) 2^{10}v (vi) 10^2v

Some more examples of exponential notation:

APSCERT

2.1 قوّت نمائی علامتیں اور اُنکے اعمال

کاغذ کی ابتدائی موٹائی 0.001 سمر ہے۔

ایک بار موڑنے پر، اس کی موٹائی 0.001×2 سمر $= 0.002$ سمر ہو گئی۔

دوبار موڑنے پر، اس کی موٹائی۔

$0.001 \times 2 \times 2$ سمر $= 0.004$ سمر یا 0.001×2^2 سمر $= 0.004$ سمر (مختصر طور پر)

تین بار موڑنے پر، اس کی موٹائی۔

$0.001 \times 2 \times 2 \times 2$ سمر $= 0.008$ سمر یا 0.001×2^3 سمر $= 0.008$ سمر

چار بار موڑنے پر، اس کی موٹائی۔

$0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ سمر $= 0.016$ سمر یا 0.001×2^4 سمر $= 0.016$ سمر

اسی طرح، کاغذ کو 7 بار موڑنے پر اس کی موٹائی سے متعلق مساوات

$0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ سمر $= 0.128$ سمر یا 0.001×2^7 سمر

$= 0.128$ سمر

ہم دیکھ چکے ہیں کہ مربعی اعداد کو n^2 اور مکعبی اعداد کو n^3 کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$n^2 = n \times n$ (اسے 'n اسکوائر' یا 'n کی قوت نما 2' پڑھا جاتا ہے)

$n^3 = n \times n \times n$ (اسے 'n کیوب' یا 'n کی قوت نما 3' پڑھا جاتا ہے)

$n^4 = n \times n \times n \times n$ ('n کی قوت نما 4' پڑھا جاتا ہے)

$n^7 = n \times n \times n \times n \times n \times n \times n$ ('n کی قوت نما 7' یا 'n کی 7 ویں قوت' پڑھا جاتا ہے) اور اسی طرح آگے بھی۔

عام طور پر، عدد n کو خود اسی سے 'a' مرتبہ ضرب دینے کو ظاہر کرنے کے لیے ہم n^a لکھتے ہیں۔

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$۔

5^4 دراصل 625 کی قوت نمائی شکل ہے۔ یہاں، 4 قوت نما یا قوت ہے اور 5 اساس ہے۔

5^n کی شکل میں موجود قوت نماؤں کو 5 کی قوتیں کہا جاتا ہے: 5^1، 5^2، 5^3، 5^4 وغیرہ۔

$1024 = 2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

کیا آپ کو پہلے دیکھا ہوا 1024 یاد ہے؟ وہاں، اس کا مطلب یہ تھا کہ ہر 10 مرتبہ موڑنے کے بعد موٹائی 1024 گنا بڑھ جاتی ہے۔

ایک کاغذ کی شیٹ کو 10 بار موڑنے کے بعد اس کی موٹائی کو کون سی مساوات واضح کرتی ہے؟ جبکہ ابتدائی موٹائی کو حرف V سے ظاہر کیا گیا ہو۔

(i) $10v$ (ii) $10 + v$ (iii) $2 \times 10 \times v$

(iv) 210 (v) $210v$ (vi) $102v$

قوت نمائی شکل کی کچھ مزید مثالیں:

5^4 کو اس طرح پڑھا جاتا ہے
'5 کی قوت نما 4'
'یا '5 کی 4 چوتھی قوت'

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

$(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3 = -64$.

Similarly,

$a \times a \times a \times b \times b$ can be expressed as a^3b^2 (read as a cubed b squared).

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ can be expressed as a^2b^4 (read as a squared b raised to the power 4).

Remember that $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$, where as $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

? Express the number 32400 as a product of its prime factors and represent the prime factors in their exponential form.

$32400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

In exponential form, this would be

$32400 = 2^4 \times 5^2 \times 3^4$.

2	32400
2	16200
2	8100
2	4050
5	2025
5	405
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

? What is $(-1)^5$? Is it positive or negative? What about $(-1)^{56}$?

? Is $(-2)^4 = 16$? Verify.

What is 0^2, 0^5 ? What is 0^n ? What is $(-1)^n$ when n is even integer? and when n is odd integer?



Figure it Out - 2.1

1. Express the following in exponential form:

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $y \times y$

   (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

   (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

2. Express each of the following as a product of powers of their prime factors in exponential form.

   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

3. Write the numerical value of each of the following:

   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^3$ (iii) 3×4^4

   (iv) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (v) $3^2 \times 10^4$ (vi) $(-2)^5 \times (-10)^6$

APSCERT

$64 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4$.

$-64 = (-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4)$.

اسی طرح:

$a \times a \times a \times b \times b$ کو a^3b^2 کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔(a کیوب b اسکوائر پڑھا جائے گا)۔

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ کو a^2b^4 کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔(a اسکوائر b کی قوت نما 4 پڑھا جائے گا)۔

یاد رکھیے کہ $12 = 3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ ، جبکہ $64 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4$

عدد 32400 کو اس کے مفرد اجزائے ضربی کے حاصلِ ضرب کے طور پر ظاہر کیجیے اور مفرد اجزائے ضربی کو ان کی قوت نمائی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$32400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

قوت نمائی شکل میں، یہ اس طرح ہوگا:

$32400 = 2^4 \times 5^2 \times 3^4$

2 | 32400
2 | 16200
2 | 8100
2 | 4050
5 | 2025
5 | 405
3 | 81
3 | 27
3 | 9
3 | 3
1

$(-1)^5$ کی قیمت کیا ہے؟ کیا یہ مثبت ہے یا منفی؟ $(-1)^{56}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟

کیا $16 = (-2)^4$ ہوتا ہے؟ تصدیق کیجیے۔

0^2، 0^5 کی قیمت کیا ہے؟ 0^n کی قیمت کیا ہے؟

جب n ایک جفت صحیح عدد ہو، اور جب n ایک طاق صحیح عدد ہو، تو $(-1)^n$ کی قیمت کیا ہوگی؟



حل کیجیے-2.1

1. درج ذیل کو قوت نمائی شکل (exponent form) میں ظاہر کیجیے:

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $y \times y$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

(v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

2. درج ذیل میں سے ہر ایک کو ان کے مفرد اجزائے ضربی کی قوتوں کے حاصلِ ضرب کے طور پر قوت نمائی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

3. درج ذیل میں سے ہر ایک کی عددی قیمت لکھیے:

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^3$ (iii) 3×4^4

(iv) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (v) $3^2 \times 10^4$ (vi) $(-2)^5 \times (-10)^6$

AP SCERT

The Stones that Shine ...

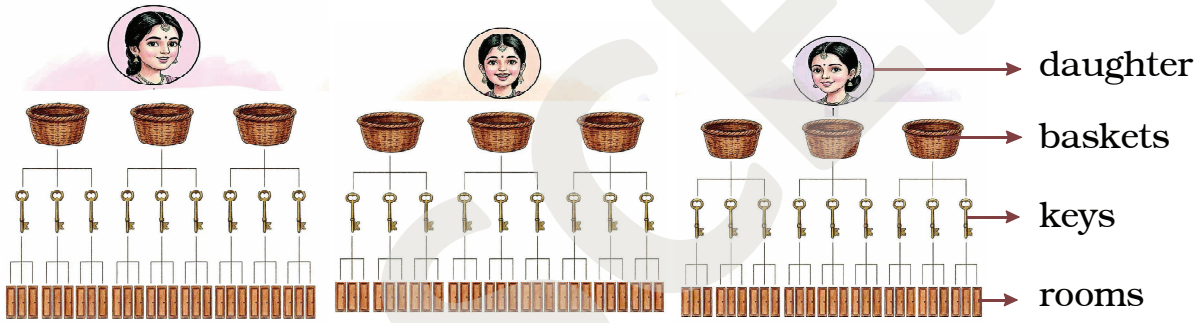


Three daughters with curious eyes,
Each got three baskets - a kingly prize.
Each basket had three silver keys,
Each opens three big rooms with ease.
Each room had tables - one, two, three,
With three bright necklaces on each, you see.
Each necklace had three diamonds so fine...
Can you count these stones that shine?

Hint: Find out the number of baskets and rooms.

How many rooms were there altogether?

The information given can be visualised as shown below.



From the diagram, the number of rooms is 3^4. This can be computed by repeatedly multiplying 3 by itself,

$3 \times 3 = 9.$

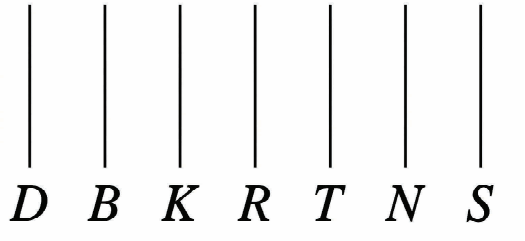
$9 \times 3 = 27.$

$27 \times 3 = 81.$

$81 \times 3 = 243.$

How many diamonds were there in total? Can we find out by just one multiplication using the products above?

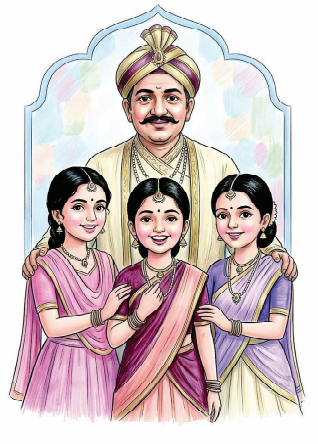
The number of diamonds is $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$.



We can write

$3^7 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$

چمکتے ہوئے پتھر...



تجسس بھری آنکھوں والی تین بیٹیاں۔

ہر ایک کو تین ٹوکریاں ملیں — یہ ایک شاہی تحفہ تھا۔

ہر ٹوکری میں چاندی کے تین چابیاں ہیں،

جن میں سے ہر ایک چابی تین بڑے کمروں کو آسانی سے کھولتی ہے۔

ہر کمرے میں میزیں ہیں۔ ایک۔ دو۔ تین،

ہر میز پر تین چمکدار ہار ہیں، جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں۔

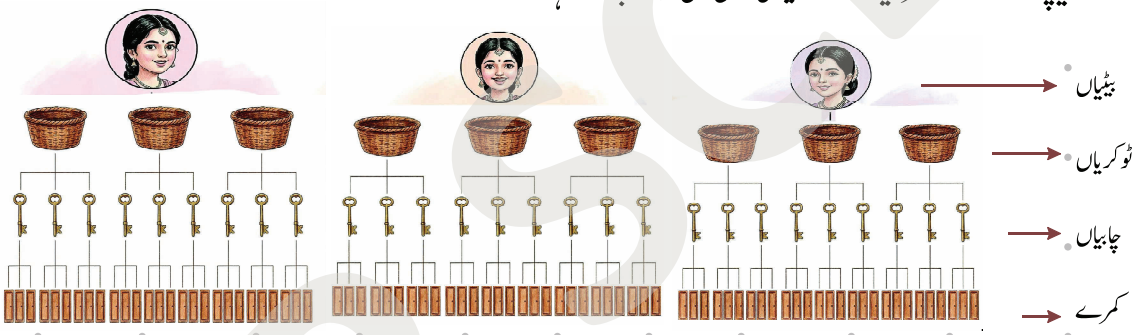
ہر ہار میں تین ہیرے بہت خوبصورت لگ رہے ہیں...

کیا آپ ان چمکتے ہوئے پتھروں کو گن سکتے ہیں؟

اشارہ: ٹوکریوں اور کمروں کی تعداد معلوم کیجیے۔

کل کتنے کمرے ہیں؟

دی گئی معلومات کو نیچے دکھائے گئے طریقے سے تصویری شکل میں دیکھا جا سکتا ہے۔

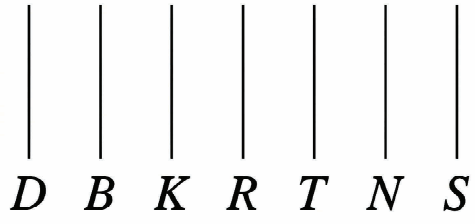


تصویر سے، کمروں کی تعداد 3^4 معلوم ہوتی ہے۔ اسے 3 کو بار بار اسی عدد سے ضرب دے کر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$3 \times 3 = 9$
$9 \times 3 = 27$
$27 \times 3 = 81$
$81 \times 3 = 243$

کل کتنے ہیرے ہیں؟ کیا ہم اوپر دیے گئے حاصلِ ضرب کا استعمال کرتے ہوئے محض ایک ضرب کے ذریعے یہ معلوم کر سکتے ہیں؟

جملہ ہیروں کی تعداد $3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$۔



ہم اسے اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ $3^7 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$

We had computed till 34. To find 37, we can just multiply 34 (= 81) with 3^3(= 27).

$= 3^4 \times 3^3$

$= 81 \times 27 = 2187$

$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3^4} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3^3}$

? 3^7 can also be written as $3^2 \times 3^5$. Can you reason out why?

This can be easily extended to products where exponents are the same letter-numbers.

? Write the product $p^4 \times p^6$ in exponential form.

$p^4 \times p^6 = (p \times p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p \times p \times p) = p^{10}$.

We can generalise this to -

$n^a \times n^b = n^{a+b}$, where a and b are counting numbers.

? Use this observation to compute the following.

(i) 2^9 (ii) 5^7 (iii) 4^6



4^6 can be evaluated in these two ways,

$(4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^3 \times 4^3$ $= 64 \times 64$ $= 4096.$	$(4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$ $= 16 \times 16 \times 16$ $= 4096.$
$4^3 \times 4^3$ is the square of 4^3, i.e., $4^3 \times 4^3$ can also be written as $(4^3)^2$.	$4^2 \times 4^2 \times 4^2$ is the cube of 4^2, i.e., $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ can also be written as $(4^2)^3$.

Similarly, $7^4 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^2 \times 7^2 = (7^2)^2$, and

$2^{10} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$= (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$

$= (2^2)^5$.

? Is 2^{10} also equal to $(2^5)^2$? Write it as a product.

$2^{10} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (2^5) \times (2^5)$

$= (2^5)^2$.

In general,

$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b} = n^{ab}$, where a and b are counting numbers.

? Write the following expressions as a power of a power in at least two different ways:

(i) 8^6 (ii) 7^{15} (iii) 9^{14} (iv) 5^8

APSCERT

ہم نے 3^4 تک حساب لگایا تھا۔ 3^7 معلوم کرنے کے لیے، ہم $3^4 (= 81)$ کو $3^3 (= 27)$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

3^4 3^3

$$3^4 \times 3^3 =$$
$$2187 = 81 \times 27 =$$

3^7 کو $3^2 \times 3^5$ کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہے؟

اسے آسانی سے ایسے حاصل ضرب تک بڑھایا جا سکتا ہے جہاں قوت نما کے اساس ایک جیسے حروف یا اعداد ہوں۔

حاصل ضرب $p^4 \times p^6$ کو قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

$$p^4 \times p^6 = (p \times p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p \times p \times p) = p^{10}$$

ہم اسے اس طرح عام شکل میں لا سکتے ہیں۔



$n^a \times n^b = n^{a+b}$ جہاں a اور b گنتی کے اعداد ہیں۔

اس مشاہدے کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا حساب لگائیے۔

(i) 2^9 (ii) 5^7 (iii) 4^6

4^6 کی قیمت ان دو طریقوں سے جانچ کی جا سکتی ہے۔

$4^3 \times 4^3 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$ $64 \times 64 =$ $4096 =$ $4^3 \times 4^3$ دراصل میں 4^3 کا مربع ہے یعنی: $4^3 \times 4^3$ کو $(4^3)^2$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔	$4^2 \times 4^2 \times 4^2$ $= (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4)$ $16 \times 16 \times 16 =$ $4096 =$ $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ دراصل میں 4^2 کا مکعب ہے یعنی: $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ کو $(4^2)^3$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح، $(7^2)^2 = 7^2 \times 7^2 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^4$ اور

$$(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^{10}$$
$$(2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) =$$
$$(2^2)^5 =$$

کیا 2^{10} کی قیمت $(2^5)^2$ کے برابر ہے؟ اسے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے۔

$$(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{10}$$
$$(2^5) \times (2^5) =$$
$$(2^5)^2 =$$

عام طور پر،

$n^{ab} = n^{a \times b} = (n^b)^a = (n^a)^b$ جہاں a اور b گنتی کے اعداد ہیں۔

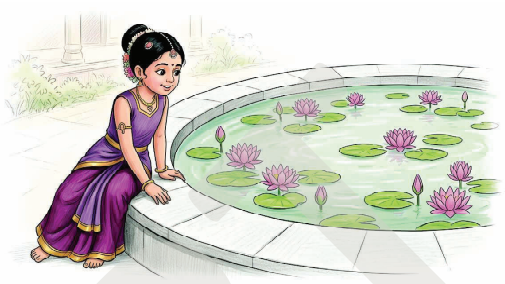
درج ذیل عبارتوں کو کم از کم دو مختلف طریقوں سے قوت کی قوت کے طور پر لکھیے:

(i) 8^6 (ii) 7^{15} (iii) 9^{14} (iv) 5^8

APSCERT

Magical Pond

In the middle of a beautiful, magical pond lies a bright pink lotus. The number of lotuses doubles every day in this pond. After 30 days, the pond is completely covered with lotuses. On which day was the pond half full?



If the pond is completely covered by lotuses on the 30th day, how much of it is covered by lotuses on the 29th day?

Since the number of lotuses doubles every day, the pond should be half covered on the 29th day.

Write the number of lotuses (in exponential form) when the pond was -

(i) fully covered (ii) half covered

There is another pond in which the number of lotuses triples every day. When both the ponds had no flowers, Damayanti placed a lotus in the doubling pond. After 4 days, she took all the lotuses from there and put them in the tripling pond. How many lotuses will be in the tripling pond after 4 more days?

After the first 4 days, the number of lotuses is $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.

After the next 4 days, the number of lotuses is $2^4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$.

What if Damayanti had changed the order in which she placed the flowers in the lakes? How many lotuses would be there?

$$1 \times 3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2).$$

Can this product be expressed as an exponent m^n, where m and n are some counting numbers?

By regrouping the numbers,

$$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$$

$$= (3 \times 2)^4 = 6^4.$$

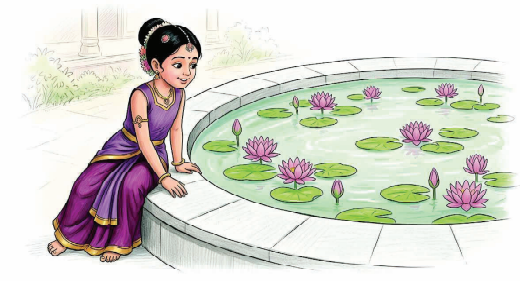
In general form,

$m^a \times n^a = (mn)^a$, where a is a counting number or natural number.

Use this observation to compute the value of $2^5 \times 5^5$.

APSCERT

جادوئی تالاب



ایک خوبصورت اور جادوئی تالاب کے درمیان میں ایک چمکدار گلابی رنگ کا کنول کا پھول ہے۔ اس تالاب میں ہر روز کنول کے پھولوں کی تعداد دگنی ہو جاتی ہے۔ 30 دنوں کے بعد، تالاب مکمل طور پر کنول کے پھولوں سے بھر جاتا ہے۔ کس دن تالاب آدھا بھرا ہوا تھا؟

اگر 30ویں دن تالاب مکمل طور پر کمل کے پھولوں سے بھر جاتا ہے، تو 29ویں دن اس کا کتنا حصہ کنول کے پھولوں سے بھرا ہوا ہو گا؟

چونکہ ہر روز کنول کے پھولوں کی تعداد دگنی ہو جاتی ہے، اس لیے 29ویں دن تالاب آدھا بھرا ہوا ہو گا۔

تالاب کے (i) مکمل طور پر بھرے ہونے اور (ii) آدھے بھرے ہونے کی صورت میں کنول کے پھولوں کی تعداد کو (قوت نمائی شکل میں) لکھیے۔

ایک اور تالاب بھی ہے، جس میں کنول کے پھولوں کی تعداد ہر روز تین گنا ہو جاتی ہے۔ جب دونوں تالابوں میں کوئی پھول نہیں تھا، تو دمئنتی نے دگنا ہونے والے تالاب میں کنول کا ایک پھول رکھا۔ 4 دنوں کے بعد، اس نے وہاں سے تمام کنول کے پھول نکال لیے اور انہیں تین گنا ہونے والے تالاب میں ڈال دیا۔ مزید 4 دنوں کے بعد تین گنا ہونے والے تالاب میں کنول کے کتنے پھول ہوں گے؟

پہلے 4 دنوں کے بعد، کنول کے پھولوں کی تعداد $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$۔

اگلے 4 دنوں کے بعد، کنول کے پھولوں کی تعداد $2^4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \times 2^4$۔

اگر دمئنتی نے تالابوں میں پھول رکھنے کی ترتیب بدل دی ہوتی تو کیا ہوتا؟ تب کتنے کنول کے پھول ہوتے؟

$$1 \times 3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

کیا اس حاصلِ ضرب کو قوت نما m^n کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے، جہاں m اور n کچھ گنتی کے اعداد ہوں؟

اعداد کو دوبارہ گروہ بند کرنے سے۔

$$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$$
$$= (3 \times 2)^4 = 6^4$$

عام شکل میں، $(mn)^a = m^a \times n^a$ جہاں a ایک گنتی کا عدد یا طبعی عدد ہے۔

$2^5 \times 5^5$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے اس مشاہدے کا استعمال کیجیے۔

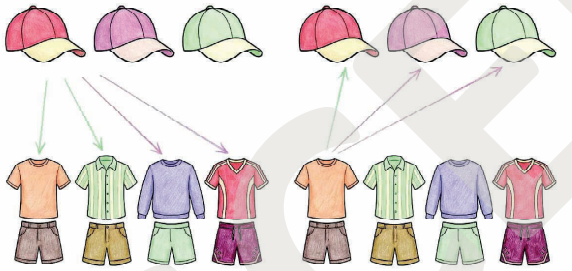
Simplify $\frac{10^4}{5^4}$ and write it in exponential form.

In general, we can show that $\frac{m^a}{n^a} = \left(\frac{m}{n}\right)^a$

How Many Combinations

Raju has 4 dresses and 3 caps. How many different ways canRaju combine the dresses and caps?

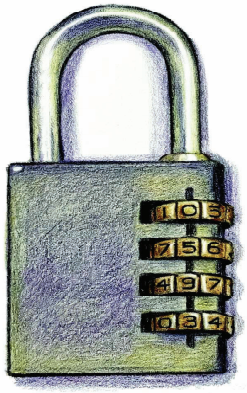
For each cap, he can choose any of the 4 dresses, so for 3 caps,
4 + 4 + 4 = 4 × 3 = 12 combinations are possible. We can also look at it as - for each dress,Raju can choose any of the 3 caps, so for 4 outfits,
3 + 3 + 3 + 3 = 3 × 4 = 12 combinations are possible.



Rekha has 7 dresses, 2 hats, and 3 pairs of shoes. How many different ways can Rekha dress up?

Hint: Try drawing a diagram like the one above.

Raju and Rekha came across a safe containing old stamps and coins that their great-grandfather had collected. It was secured with a 5-digit password. Since nobody knew the password, they had no option except to try every password until it opened. They were unlucky and the lock only opened with the last password, after they had tried all possible combinations. How many passwords did they end up checking?



If you can't solve a problem,try to find a simpler version of the problem that you can solve.This technique can come in handy many times. Instead of a 5-digit lock, let us assume we have a 2-digit lock and try to find out how many passwords are possible.

$\frac{10^4}{5^4}$ کو مختصر کیجیے اور اسے قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

عام طور پر اسے اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $\left(\frac{m}{n}\right)^a = \frac{m^a}{n^a}$

کتنے امتزاج ہیں

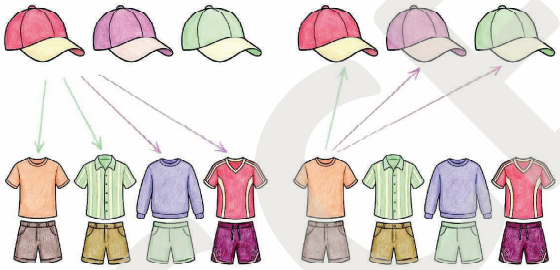
راجو کے پاس 4 کپڑے اور 3 ٹوپیاں ہیں۔ راجو کپڑے اور ٹوپیوں کو کتنے مختلف طریقوں سے جوڑ سکتا ہے؟

ہر ٹوپی کے لیے، وہ 4 کپڑوں میں سے کسی ایک کا انتخاب کر سکتا ہے، اس لیے 3 ٹوپیوں کے لیے،

$4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$ قسم کے امتزاج ممکن ہیں۔ ہم اسے اس طرح بھی دیکھ سکتے ہیں—

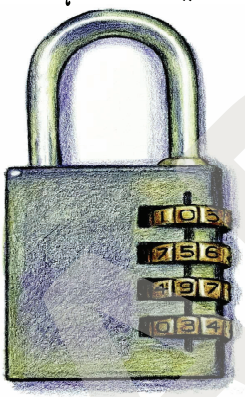
ہر کپڑے کے لیے، راجو 3 ٹوپیوں میں سے کسی ایک کا انتخاب کر سکتا ہے، اس لیے 4 کپڑوں کے لیے

$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$ قسم کے امتزاج ممکن ہیں۔



ریکھا کے پاس 7 کپڑے، 2 ٹوپیاں، اور 3 جوڑے جوتے ہیں۔ ریکھا کتنے مختلف طریقوں سے تیار ہو سکتی ہے؟

اشارہ: اوپر دی گئی تصویر کی طرح ایک خاکہ بنانے کی کوشش کیجیے۔



راجو اور ریکھا کو ایک صندوق ملا جس میں ان کے پردادا کے جمع کیے ہوئے پرانے ڈاک ٹکٹ اور سکے تھے۔ اس صندوق پر 5 ہندسوں والا پاس ورڈ لگا ہوا تھا۔ چونکہ کسی کو بھی پاس ورڈ معلوم نہیں تھا، اس لیے ان کے پاس ہر ممکن پاس ورڈ آزمانے کے علاوہ کوئی اور راستہ نہیں تھا۔ بدقسمتی سے، تالا آخری پاس ورڈ پر جا کر کھلا، یعنی انہوں نے تمام ممکنہ امتزاج آزما لیے تھے۔ انہوں نے آخر میں کتنے پاس ورڈ چیک کیے؟

اگر آپ کسی مسئلے کو حل نہیں کر سکتے، تو اُس مسئلے کی ایک آسان شکل تلاش کریں جسے آپ حل کر سکیں۔ یہ طریقہ کئی مواقع پر بہت مفید ثابت ہو سکتا ہے۔

5 ہندسوں والے تالے کے بجائے، فرض کریں کہ ہمارے پاس 2 ہندسوں والا تالا ہے، اور معلوم کریں کہ کتنے پاس ورڈ ممکن ہیں۔

There are 10 options for the first digit (0 to 9). For each of these, there are 10 options for the second digit (If 0 is the first digit then 00, 01, 02, 03, ..., 09 are possible). Therefore the total number of combinations for a 2-digit lock is $10 \times 10 = 100$.

Now, suppose we have a 3-digit lock. For each of the earlier 100 (2-digit) passwords there are 10 choices for the third digit. So, there are $100 \times 10 = 1000$ combinations for a 3-digit lock. You can list them all: 000, 001, 002, ..., 997, 997, 999.

How many 5-digit passwords are possible?



Each digit has 10 choices, so a 5-digit lock will have:

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

= 1,00,000 passwords. This is the same as writing numbers till 99,999 with all 5 digits, i.e., 00000, 00001, 00002, ...00010, 00011, ..., 00100, 00101, ..., 00999, ..., 30456, ..., 99998, 99999.

Raju says, "Next time, I will buy a lock that has 6 slots with the letters A to Z. I feel it is safer."

? How many passwords are possible with such a lock?

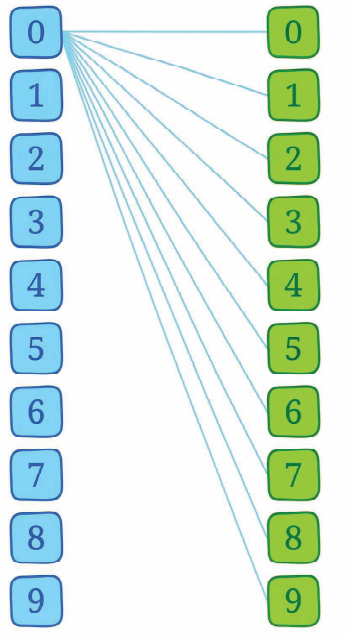
? Think about how many combinations are possible in contexts. Some examples are -

(i) Pincodes of places in India - The Pincode of Rajam in Andhra Pradesh is 532127. The Pincode of Puri in Odisha is 796017.

(ii) Mobile numbers.

(iii) Vehicle registration numbers.

Try to find out how these numbers or codes are allotted/generated.



2.2 The Other Side of Powers

Imagine a line of length 16 units. Erasing half of it would result in

$$2^4 \div 2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \text{ units.}$$

پہلے ہندسے کے لیے 10 اختیارات ہیں(0 سے 9 تک)۔ان میں سے ہر ایک کے لیے دوسرے ہندسے کے بھی 10 اختیارات ہیں۔(اگر پہلا ہندسہ 0 ہو، تو00،01،02،03،...،09 ممکن ہیں۔)لہٰذا، 2 ہندسوں والے تالے کے لیے کل امتزاج $10 \times 10 = 100$

اب فرض کریں کہ ہمارے پاس 3 ہندسوں والا تالا ہے۔پہلے والے 100 (دو ہندسوں والے) پاس ورڈز میں سے ہر ایک کے لیے تیسرے ہندسے کے 10 انتخاب موجود ہیں۔اس لیے 3 ہندسوں والے تالے کے لیے $100 \times 10 = 1000$ امتزاج ممکن ہیں۔ آپ ان سب کو لکھ سکتے ہیں:000،001،002،...،997،998،999۔

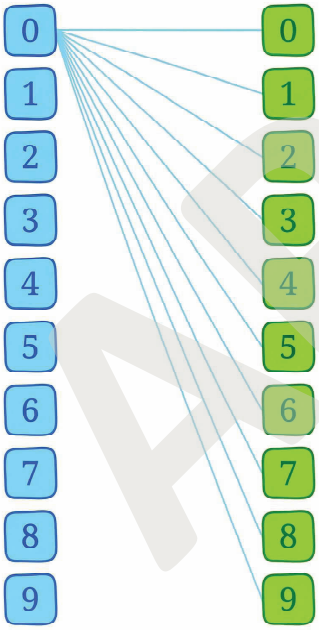
اب بتائیں کہ 5 ہندسوں والے کتنے پاس ورڈ ممکن ہیں؟

ہر ہندسے کے لیے 10 انتخاب ہیں،اس لیے 5 ہندسوں والے تالے کے لیے:

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$
$$= 1,00,000$$



پاس ورڈز ممکن ہیں۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے 99,999 تک تمام اعداد کو 5 ہندسوں کی شکل میں لکھا جائے،یعنی:00000،00001،00002،...،00010،00011،...،00100،00101،...،00999،...،30456،...،99998،99999۔



"راجو کہتا ہے،اگلی بار میں ایسا تالا خریدوں گا جس میں 6 خانے ہوں گے اور اُن میں A سے Z تک حروف ہوں گے۔ مجھے لگتا ہے کہ یہ زیادہ محفوظ ہو گا۔" ایسے تالے کے لیے کتنے پاس ورڈ ممکن ہیں؟ سوچیے کہ مختلف حالات میں کتنے کا امتزاج ممکن ہوتے ہیں۔

کچھ مثالیں یہ ہیں: (i)بھارت کے مختلف مقامات کے پن کوڈز — آندھرا پردیش میں راجام ٹاؤن (سریکاکولم) کا پن کوڈ 532127 ہے۔ اوڈیشہ میں پوری کا پن کوڈ 752001 ہے۔ (ii)موبائل نمبر۔ (iii)گاڑیوں کے رجسٹریشن نمبر۔ یہ معلوم کرنے کی کوشش کریں کہ یہ نمبر یا کوڈ کس طرح دیے یا تیار کیے جاتے ہیں۔

2.2 قوّتوں کا دوسرا پہلو

فرض کریں کہ ایک لکیر کی لمبائی 16 اکائیاں ہے۔اگر ہم اس کا آدھا حصہ مٹا دیں، تو نتیجے میں

$8 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2^4 \div 2$ اکائیاں

Erasing half one more time would result in,

$$(2^4 \div 2) \div 2 = 2^4 \div 2^2 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2} = 2 \times 2 = 2^2 = 4 \text{ units.}$$

Halving 16 cm three times may be written as,

$$2^4 \div 2^3 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2 = 2^1 = 2 \text{ units.}$$

From this we can see that

$2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 21.$

? What is $2^{100} \div 2^{25}$ in powers of 2?

In a generalised form,

$$n^a \div n^b = n^{a-b},$$

where $n \neq 0$ and a and b are counting numbers and $a > b$.

? Why can't n be 0?

? We have not covered the case when the exponent is 0; for example, what is 2^0?

Let us define 2^0 in a way that the generalised form above holds true.

$$2^0 = 2^{4-4} = 2^4 \div 2^4 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2} = 1.$$

In fact for any letter number a

$$2^0 = 2^{a-a} = 2^a \div 2^a = 1.$$

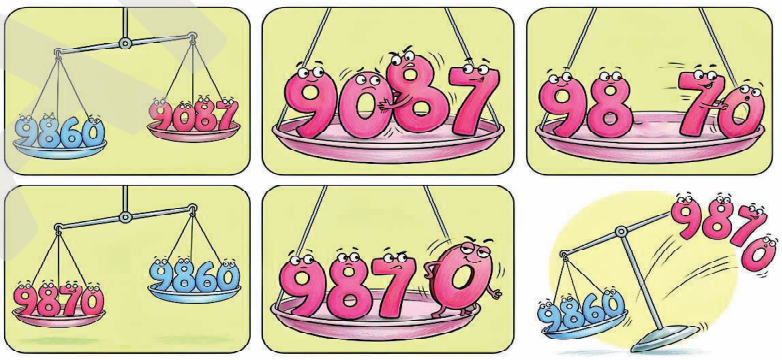
In general,

$$x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0, \text{ and so}$$

$$1 = x^0,$$

where $x \neq 0$ and a is a counting number.

When Zero is in Power!



When a line of length 2^4 units is halved 5 times,

دوسری بار آدھا کرنے پر 8 :کا آدھا4یونٹ ہوتا ہے۔

$4 = 2^2 = 2 \times 2 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2} = 2^4 \div 2^2 = (2^4 \div 2) \div 2$ اکائیاں

تیسری بار آدھا کرنے پر :4کا آدھا2یونٹ ہوتا ہے۔

$2 = 2^1 = 2 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2^4 \div 2^3$ اکائیاں

اسے قوت نما کی شکل میں یوں لکھ سکتے ہیں

$2^1 = 2^{4-3} = 2^4 \div 2^3$۔

$2^{100} \div 2^{25}$ کو 2 کی قوت نما کی شکل میں لکھیں؟

ضابطہ کی عام شکل $n^a \div n^b = n^{a-b}$,

یہاں a اور b گنتی کے اعداد ہیں، جہاں $a > b$ اور $n \neq 0$ ہے۔

n کی قیمت 0 کیوں نہیں ہو سکتی؟

جب کسی عدد کی قوت 0 ہو، تو اس کے نتیجے کا ذکر نہیں کیا گیا۔ مثال کے طور پر 2^0 کی قیمت کیا ہے؟

آیئے 2^0 کو اس طرح سے بیان کریں کہ اوپر دی گئی عام شکل درست ثابت ہو۔

$1 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2} = 2^4 \div 2^4 = 2^{4-4} = 2^0$

حقیقت میں، کسی بھی عدد a کے لیے

$1 = 2^a \div 2^a = 2^{a-a} = 2^0$

عام طور پر، $x^0 = x^{a-a} = x^a \div x^a$

اور $x^0 = 1$

جہاں $x \neq 0$ اور a ایک طبعی عدد ہے۔

جب صفر(0) قوت نما ہو!



جب 2 اکائی لمبائی والی ایک لکیر کو 5 بار آدھا کیا جائے گا، (تو کیا ہو گا؟)

$$2^4 \div 2^5 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2} \text{ units.}$$

Using the generalised form, we get $2^4 \div 2^5 = 2^{(4-5)} = 2^{-1}$.

So, $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

When a line of length 24 units is halved 10 times,

we get $2^4 \div 2^{10} = 2^{(4-10)} = 2^{-6}$ units.

When expanded, $2^4 \div 2^{10} = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

which is also written as 2^{-6}.

Similarly, $10^{-3} = \frac{1}{10^{32}} 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$, etc.

? Can we write $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$?

We can write, $\frac{1}{10^{-3}} = \frac{1}{1/10^3} = 1 \div \frac{1}{10^3} = 1 \times 10^3 = 10^3$

Similarly, $7^2 = \frac{1}{7^{-2}}$ and $4^a = \frac{1}{4^{-a}}$.

In a generalised form,

$n^{-a} = \frac{1}{n}$ and $n^a = \frac{1}{n^{-a}}$, where $n \neq 0$.

Consider the following general forms we have identified.

$n^a \times n^b = n^{a+b}$	$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a\times b}$	$n^a \div n^b = n^{a-b}$

? We had required a and b to be counting numbers. Can a and b be any integers? Will the generalised forms still hold true?

? Write equivalent forms of the following.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) $(-7)^{-2}$

(iv) $(-5)^{-3}$ (v) 10^{-100}

? Simplify and write the answers in exponential form.

(i) $2^{-4} \times 2^7$ (ii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $2^4 \times (-4)^{-2}$ (v) $8^p \times 8^q$

Power Lines

Let us arrange the powers of 4 along a line.

$\frac{1}{2} = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = 2^4 \div 2^5$ اکائیاں

عام شکل کا استعمال کرتے ہوئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے، $2^{-1} = 2^{(4-5)} = 2^4 \div 2^5$

لہذا، $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

جب 24 اکائیوں والی لمبی لکیر کو 10 بار آدھا کیا جائے،

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے، $2^{-6} = 2^{(4-10)} = 2^4 \div 2^{10}$ اکائیاں۔

اسے توسعی شکل میں لکھنے پر، $\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2} = 2^4 \div 2^{10}$

جسے 2^{-6} بھی لکھا جاتا ہے۔

اسی طرح، $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$، $\frac{1}{7^2} = 7^{-2}$، وغیرہ۔

کیا ہم $\frac{1}{10^{-3}} = 10^3$ لکھ سکتے ہیں؟

ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں، $10^3 = 1\times10^3 = 1 \div \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1/10^3} = \frac{1}{10^{-3}}$

اسی طرح، $\frac{1}{7^{-2}} = 7^2$ اور $\frac{1}{4^{-a}} = 4^a$ ۔

عام شکل میں، $\frac{1}{n^{-a}} = n^a$ اور $\frac{1}{n^a} = n^{-a}$ جہاں $n \neq 0$۔

ذیل میں دی گئی عام شکلوں پر غور کریں جو ہم نے پہچانی ہیں۔

$n^a \div n^b = n^{a-b}$	$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a\times b}$	$n^a \times n^b = n^{a+b}$

ہمیں a اور b کے لیے گنتی کے اعداد درکار تھے۔ کیا a اور b کوئی بھی صحیح اعداد ہو سکتے ہیں؟ کیا یہ عمومی شکلیں اب بھی درست ثابت ہوں گی؟

درج ذیل کی مساوی شکلیں لکھیں۔

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) $(-7)^{-2}$ (iv) $(-5)^{-3}$ (v) 10^{-100}

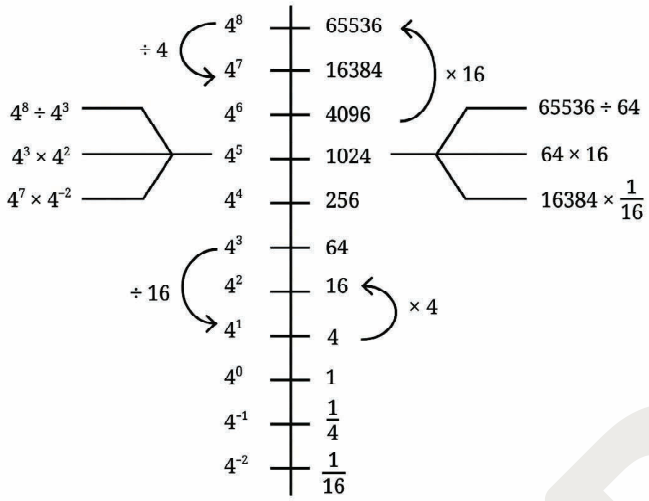
حل کریں اور جوابات کو قوت نمائی شکل میں لکھیں۔

(i) $2^{-4} \times 2^7$ (ii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $2^4 \times (-4)^{-2}$ (v) $8^p \times 8^q$

قوت کے خطوط

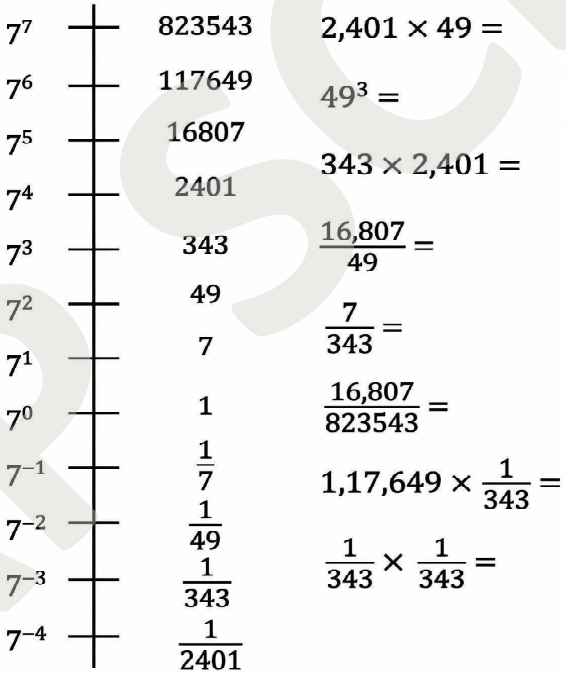
آیئے 4 کی قوتوں کو ایک خط کے ساتھ ترتیب دیں۔



? Can we say that 16384 (4^7) is 16 (4^2) times larger than 1,024 (4^5)?
Yes, since $4^7 \div 4^5 = 4^2$.

? How many times larger than 4^{-2} is 4^2?

? Use the power line for 7 to answer the following

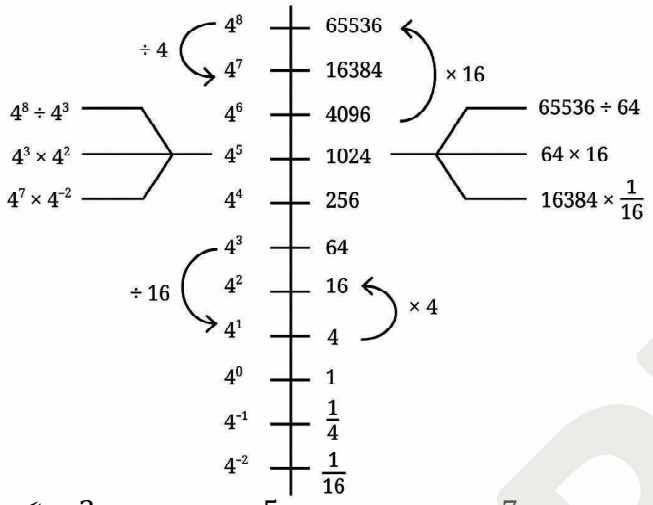


2.3 Powers of 10

We have used numbers like 10, 100, 1000, and so on when writing Indian numerals in an expanded form. For example,

47561 = (4 × 10000) + (7 × 1000) + (5 × 100) + (6 × 10) + 1.

This can be written using powers of 10 as

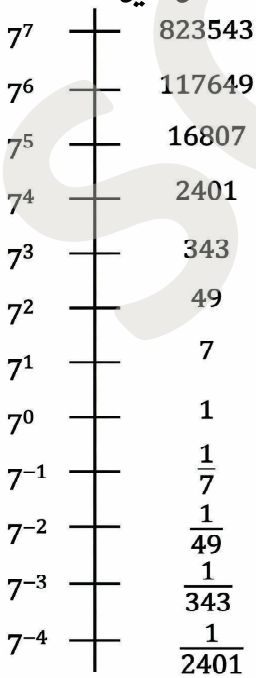


کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ عدد $16384 (4^7)$، عدد $1,024 (4^5)$ سے $16 (4^2)$ گنا بڑا ہے؟

جی ہاں، کیونکہ $4^2 = 4^7 \div 4^5$

عدد 4^2، عدد 4^{-2} سے کتنے گنا بڑا ہے؟

درج ذیل کے جوابات دینے کے لیے 7 کی قوتوں کی خط کا استعمال کریں۔



$2,401 \times 49 =$

$49^3 =$

$343 \times 2,401 =$

$\frac{16,807}{49} =$

$\frac{7}{343} =$

$\frac{16,807}{823543} =$

$1,17,649 \times \frac{1}{343} =$

$\frac{1}{343} \times \frac{1}{343} =$

2.3 10 کی قوتیں

ہم نے ہندوستانی ہندسوں کو پھیلا کر (توسیعی شکل میں) لکھتے وقت 10، 100، 1000 وغیرہ جیسے اعداد کا استعمال کیا ہے۔ مثال کے طور پر،

$$47561 = (4 \times 10000) + (7 \times 1000) + (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1$$

اسے 10 کی قوتوں کا استعمال کرتے ہوئے اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$(4 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (5 \times 10^{2)} + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$.

? Write these numbers in the same way: (i) 172, (ii) 5642, (iii) 6374.

? How can we write 561.903?

$561.903 = (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1 + (9 \times \frac{1}{10}) + (0 \times \frac{1}{100}) + (3 \times \frac{1}{1000})$.

Writing it using powers of 10, we have

$561.903 = (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3})$.

? Expand the following numbers using exponents (a)810.65 (b)70.697

Scientific Notation

Let's look at some facts involving large numbers -

(i) The Sun is located 30,00,00,00,00,00,00,00,000 m from the centre of our Milky Way galaxy.

(ii) The number of stars in our galaxy is 1,00,00,00,00,000.

(iii) The mass of the Earth is 59,76,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 kg.

As the number of digits increases, it becomes difficult to read the numbers correctly. We may miscount the number of zeroes or place commas incorrectly. We will then read the wrong value. It is like getting ` 5,000 when you were supposed to get ` 50,000. The number of zeroes is more important than the initial digits in several cases.

Can we use the exponential notation to simplify and read these very large numbers correctly?

For example, the number 5900 can be expressed as -

$$5900 = 590 \times 10 = 590 \times 10^1$$
$$= 59 \times 100 = 59 \times 10^2$$
$$= 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$= 0.59 \times 10000 = 0.59 \times 10^4.$$

Any number can be written as the product of a number between 1 and 10 and a power of 10. For example,

$5900 = 5.9 \times 10^3$ $20800 = 2.08 \times 10^4$ $80,00,000 = 8 \times 10^6$

? Write the large-number facts we read just before in this form.

In **scientific notation or scientific form** (also called **standard form**), we write numbers as $x \times \frac{10}{y}$, where $x \geq 1$ and $x < 10$ is the coefficient and y, the exponent, is any integer. Often, the exponent y is more important than the coefficient x.

APSCERT

$$(4 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$$

ان اعداد کو بھی اسی طریقے سے لکھیں: (i) 172 (ii) 5642 , (iii) 6374

ہم 561.903 کو کیسے لکھ سکتے ہیں؟

$$561.903 = (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1 + \left(9 \times \frac{1}{10}\right) + \left(0 \times \frac{1}{100}\right) + \left(3 \times \frac{1}{1000}\right)$$

اسے 10 کی قوتوں کا استعمال کرتے ہوئے لکھیں تو ہمیں حاصل ہو گا

$$561.903 = (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3})$$

درج ذیل اعداد کو قوت نماؤں کا استعمال کرتے ہوئے توسیعی شکل میں لکھیں (a) 810.65 (b) 70.697

سائنسی ترقیم

آیئے بڑے اعداد پر مشتمل کچھ حقائق کو دیکھتے ہیں۔

1. سورج ہماری کہکشاں کے مرکز سے 30,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 میٹر کے فاصلے پر واقع ہے۔
2. ہماری کہکشاں میں ستاروں کی تعداد 1,00,00,00,00,000 ہے۔
3. زمین کی کمیت 59,76,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 کلوگرام ہے۔

جیسے جیسے ہندسوں کی تعداد بڑھتی ہے، اعداد کو درست طریقے سے پڑھنا مشکل ہو جاتا ہے۔ ہو سکتا ہے کہ ہم صفر (zeroes) کی گنتی میں غلطی کر دیں یا کوما (commas) غلط جگہ پر لگا دیں، جس کی وجہ سے ہم غلط قیمت پڑھیں گے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے کہ جہاں آپ کو 50,000 ملنے تھے وہاں آپ کو صرف 5,000 ملیں۔ کئی معاملات میں ابتدائی ہندسوں کے مقابلے میں صفر کی تعداد زیادہ اہم ہوتی ہے۔

کیا ہم ان بہت بڑے اعداد کو آسان بنانے اور درست طریقے سے پڑھنے کے لیے قوت نمائی ترقیم کا استعمال کر سکتے ہیں؟

مثال کے طور پر، عدد 5900 کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} 5900 &= 590 \times 10 = 590 \times 10^1 \\ &= 59 \times 100 = 59 \times 10^2 \\ &= 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3 \\ &= 0.59 \times 10000 = 0.59 \times 10^4 \end{aligned}$$

کسی بھی عدد کو 1 اور 10 کے درمیان کے ایک عدد اور 10 کی قوت کے حاصلِ ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر،

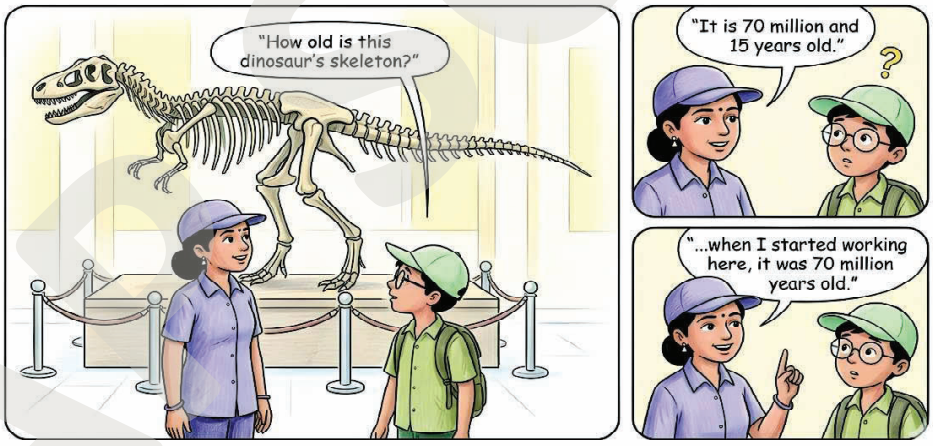
$5900 = 5.9 \times 10^3$ $\quad 20800 = 2.08 \times 10^4$ $\quad 80,00,000 = 8 \times 10^6$

بڑے اعداد والے جن حقائق کو ہم نے ابھی اوپر پڑھا ہے، انہیں اسی شکل میں لکھیں۔

سائنسی ترقیم یا سائنسی شکل جسے معیاری شکل بھی کہا جاتا ہے میں، ہم اعداد کو $x \times 10^y$ کے طور پر لکھتے ہیں جہاں $x \geq 1$ اور $x < 10$ اس کا ضریب ہوتا ہے، اور y قوت نما۔ کوئی بھی صحیح عدد ہوتا ہے۔ اکثر، قوت نما y ضریب x سے زیادہ اہم ہوتا ہے۔

When we write the 2 crore population of Mumbai as 2×10^7, the 7 is more important than the 2. Indeed, if the 2 is changed to 3, the population increases by one-half, i.e., 2 crore to 3 crore, whereas if the 7 is changed to 8, the change in population is 10 times, i.e., 2 crores to 20 crores. Therefore, the standard form explicitly mentions the exponent, which indicates the number of digits.

If we say that the population of Kohima is 1,42,395, then it gives the impression that we are quite sure about this number up to the units place. When we use large numbers, in most cases, we are more concerned about how big a quantity or measure is, rather than the exact value. If we are only sure that the population is around 1 lakh 42 thousand, we can write it as 1.42 × 105. If we can only be certain that it is around 1 lakh 40 thousand, we write it as 1.4 × 105. The number of digits in the coefficient reflects how well we know the number. The most important part of any number written in scientific form is the exponent, and then the first digit of the coefficient. The digits following the coefficient are small corrections to the first digit.



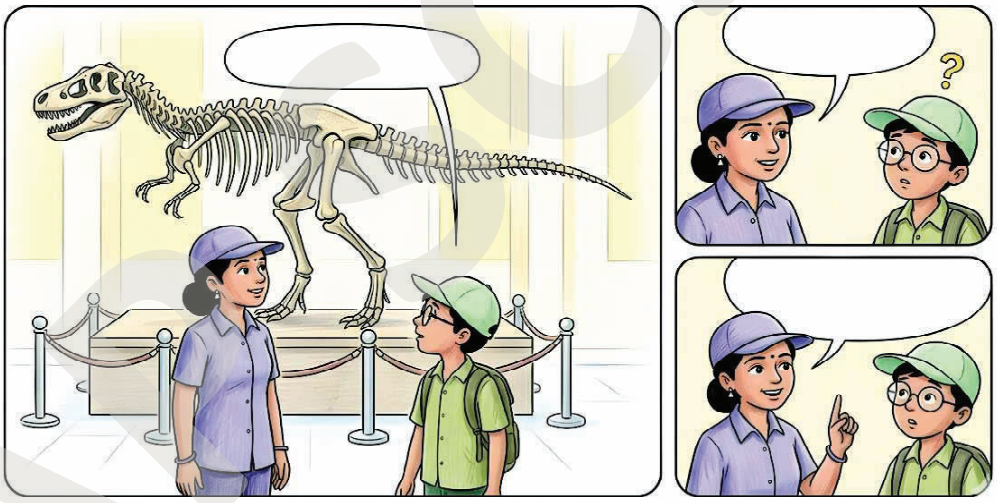
These values are rounded-off estimates, averages, or approximations; most of the time, they serve the purpose at hand.

The distance between the Sun and Saturn is 14,33,50,00,00,000 m = 1.4335×10^{12} m.

The distance between Saturn and Uranus is 14,39,00,00,00,000 m = 1.439×10^{12} m. The distance between the Sun and Earth is 1,49,60,00,00,000 m = 1.496×10^{11} m.

جب ہم ممبئی کی 2 کروڑ آبادی کو 2×10^7 لکھتے ہیں، تو 7 کی اہمیت 2 سے زیادہ ہے۔ حقیقت میں، اگر 2 کو بدل کر 3 کر دیا جائے، تو آبادی میں نصف (آدھا) اضافہ ہوتا ہے، یعنی 2 کروڑ سے 3 کروڑ، جبکہ اگر 7 کو بدل کر 8 کر دیا جائے، تو آبادی میں تبدیلی 10 گنا ہو جاتی ہے، یعنی 2 کروڑ سے 20 کروڑ۔ اس لیے، معیاری شکل میں واضح طور پر قوت نما کا ذکر کیا جاتا ہے، جو ہندسوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر ہم کہیں کہ کوہیما کی آبادی 1,42,395 ہے، تو اس سے یہ تاثر ملتا ہے کہ ہم اکائی کے مقام تک اس عدد کے بارے میں بالکل یقین سے کہہ رہے ہیں۔ جب ہم بڑے اعداد کا استعمال کرتے ہیں، تو زیادہ تر معاملات میں، ہمارا تعلق اس بات سے ہوتا ہے کہ کوئی مقدار یا پیمائش کتنی بڑی ہے، نہ کہ اس کی بالکل درست قیمت سے۔ اگر ہمیں صرف یہ یقین ہو کہ آبادی تقریباً 1 لاکھ 42 ہزار ہے، تو ہم اسے 1.42×10^5 لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم صرف اس بات پر یقین رکھ سکتے ہوں کہ یہ تقریباً 1 لاکھ 40 ہزار ہے، تو ہم اسے 1.4×10^5 لکھتے ہیں۔ ضریب میں ہندسوں کی تعداد یہ ظاہر کرتی ہے کہ ہم اس عدد کو کتنی اچھی طرح جانتے ہیں۔ سائنسی شکل میں لکھے گئے کسی بھی عدد کا سب سے اہم حصہ قوت نما ہوتا ہے، اور پھر ضریب کا پہلا ہندسہ۔ ضریب کے بعد آنے والے ہندسے پہلے ہندسے میں معمولی تصحیح کی مانند ہوتے ہیں۔



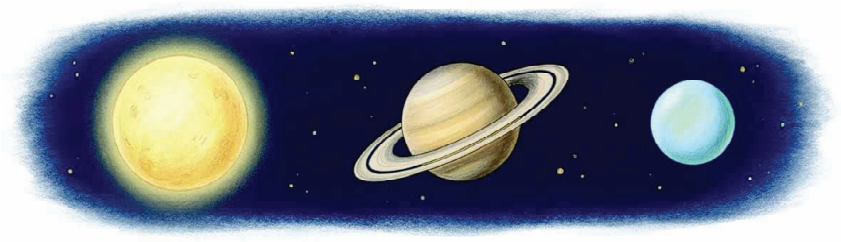
یہ قیمتیں راؤنڈ آف کردہ اندازے، اوسط، یا تخمینے ہوتے ہیں؛ زیادہ تر، یہ موجودہ مقصد کو پورا کر دیتے ہیں۔

سورج اور زحل (Saturn) کے درمیان فاصلہ 14,33,50,00,00,000 میٹر $= 1.4335 \times 10^{12}$ میٹر ہے۔

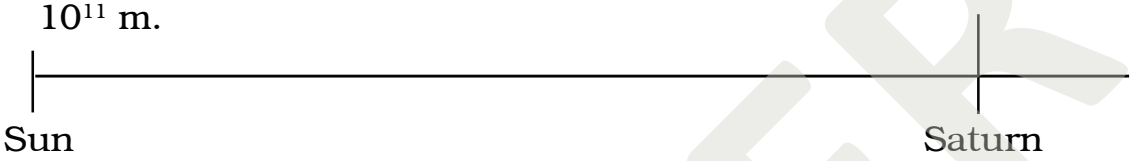
زحل اور یورینس (Uranus) کے درمیان فاصلہ 14,39,00,00,00,000 میٹر $= 1.439 \times 10^{12}$ میٹر ہے۔

سورج اور زمین کے درمیان فاصلہ 1,49,60,00,00,000 میٹر $= 1.496 \times 10^{11}$ میٹر ہے۔

Can you say which of the three distances is the smallest?



The number line below shows the distance between the Sun and Saturn (1.4335×10^{12} m). On the number line below, mark the relative position of the Earth. The distance between the Sun and the Earth is 1.496×10^{11} m.



Express the following numbers in standard form.

(i) 59,853 (ii) 65,950

(iii) 34,30,000 (iv) 70,04,00,00,000

2.4 Did You Ever Wonder?

Last year, we looked at interesting thought experiments in the chapter on Large Numbers. Let us continue this journey.

Navaneeth wants to donate jaggery equal to Rekha's weight and wheat equal to Estu's weight. He is wondering how much it would cost.



What would be the worth (in rupees) of the donated jaggery? What would be the worth (in rupees) of the donated wheat?

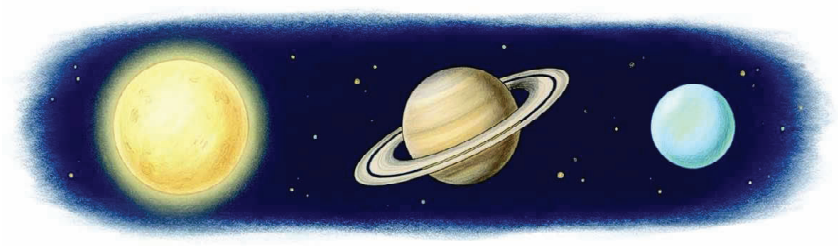
In order to find out, let us first describe the relationships among the quantities present.

Worth of jaggery (in rupees) = Roxie's weight in kg × cost of 1 kg jaggery.

Worth of wheat (in rupees) = Estu's weight in kg × cost of 1 kg wheat.

Make necessary and reasonable assumptions for the unknowns and find

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان تینوں فاصلوں میں سے سب سے چھوٹا فاصلہ کون سا ہے؟



نیچے دی گئی عددی خط سورج اور زحل کے درمیان کا فاصلہ $\left(1.4335 \times 10^{12}\right.$ میٹر$)$ ظاہر کرتی ہے۔ اس عددی خط پر زمین کا تقابلی مقام واضح کریں۔ سورج اور زمین کے درمیان فاصلہ 1.496×10^{11} میٹر ہے۔



درج ذیل اعداد کو معیاری شکل (standard form) میں ظاہر کریں۔

(i) 59,853 (ii) 65,950 (iii) 34,30,000 (iv) 70,04,00,00,000

2.4 کیا آپ نے کبھی سوچا؟

پچھلے سال، ہم نے 'بڑے اعداد' کے باب میں دلچسپ فکری تجربات دیکھے تھے۔ آیئے اس سفر کو جاری رکھتے ہیں۔

نوانیت، ریکھا کے وزن کے برابر گُڑ اور ایسٹو کے وزن کے برابر گندم عطیہ کرنا چاہتا ہے۔ وہ سوچ رہا ہے کہ اس پر کتنی لاگت آئے گی۔



عطیہ کیے گئے گُڑ کی قیمت (روپیوں میں) کیا ہو گی؟ عطیہ کی گئی گندم کی قیمت (روپیوں میں) کیا ہو گی؟

یہ معلوم کرنے کے لیے، آیئے سب سے پہلے موجودہ مقداروں کے درمیان تعلق کو بیان کرتے ہیں۔

گُڑ کی قیمت (روپیوں میں) = راکسی کا وزن کلوگرام میں $\times$ 1 کلوگرام گُڑ کی قیمت۔

گندم کی قیمت (روپیوں میں) = ایسٹو کا وزن کلوگرام میں $\times$ 1 کلوگرام گندم کی قیمت۔

نامعلوم معلومات کے لیے ضروری اور معقول مفروضات قائم کریں اور جوابات تلاش کریں۔

AP SCERT

the answers. Remember, Rekha is 13 years old andRaju is 11 years old.

Assuming Roxie's weight to be 45 kg and the cost of 1 kg of jaggery to be ` 70, the worth of donated jaggery is 45 × 70 = ` 3150. Assuming Estu's weight to be 50 kg and the cost of 1 kg of wheat to be ` 50, the worth of donated wheat is 50 × 50 = ` 2500.

The practice of offering goods equal to the weight of a person, called Tulabhara or Tulabharam, is quite old and is still followed in many places in Southern India. It is a symbol of bhakti (surrendering oneself), a token of gratitude; it also supports the community.

? Rekha wonders, "Instead of jaggery if we use 1-rupee coins, how many coins are needed to equal my weight?". How can we find out?

For questions like these, you can consider following the steps suggested below.

1. Guessing: Make an instinctive (quick) guess of what the answer could be, without any calculations.
2. Calculating using estimation and approximation -
   (i) Describe the relationships among the quantities that are needed to find the answer.
   (ii) Make reasonable assumptions and approximations if the required information is not available.
   (iii) Compute and find the answer (and check how close your guess was.

? Would the number of coins be in hundreds, thousands, lakhs, crores, or even more? Make an instinctive guess.

? Find the answer by making necessary and reasonable assumptions and approximations for the unknowns. Remember, we are not looking for an exact answer but a reasonably close estimate.

How about measuring to find out the weight of a 1-rupee coin?

Initially, your guesses may be very far off from the answer and it is perfectly fine! You will get better at it like as you do it often and in different situations. Guessing and estimating can build intuition about numbers and various quantities.

APSCERT

یاد رکھیں، ریکھا کی عمر 13 سال اور راجو کی عمر 11 سال ہے۔ ریکھا کا وزن 45 کلو گرام اور 1 کلو گرام گُڑ کی قیمت 70 روپے فرض کرتے ہوئے، عطیہ کیے گئے گُڑ کی کل قیمت $70 \times 45 = 3150$ روپیے بنتے ہے۔ اسی طرح، ایسٹو کا وزن 50 کلو گرام اور 1 کلو گرام گندم کی قیمت 50 روپے فرض کرتے ہوئے، عطیہ کی گئی گندم کی کل قیمت $50 \times 50 = 2500$ روپیے بنتے ہے۔

کسی شخص کے وزن کے برابر اشیاء کا نذرانہ پیش کرنے کی یہ رسم، جسے تولا بھارم یا تولا بھارا کہا جاتا ہے، کافی پرانی ہے اور اب بھی جنوبی بھارت کے کئی مقامات پر اس پر عمل کیا جاتا ہے۔ یہ بھکتی (خود کو سپرد کرنے) کی ایک علامت اور تشکر کا ایک اظہار ہے؛ اس سے کمیونٹی (معاشرے) کی مدد بھی ہوتی ہے۔

ریکھا حیرت سے سوچتی ہے، "اگر ہم گُڑ کے بجائے 1 روپے کے سکے استعمال کریں، تو میرے وزن کے برابر کتنے سکوں کی ضرورت ہو گی؟"۔ ہم یہ کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

اس طرح کے سوالات کے لیے، آپ نیچے دیے گئے مراحل پر عمل کرنے پر غور کر سکتے ہیں۔

1. اندازہ لگانا : بغیر کسی حساب کتاب کے ایک فطری (فوری) اندازہ لگائیں کہ جواب کیا ہو سکتا ہے۔
2. تخمینہ اور قریب ترین قدر کا استعمال کرتے ہوئے حساب لگانا۔
   i. جواب معلوم کرنے کے لیے درکار مقداروں کے درمیان تعلق کو بیان کریں۔
   ii. اگر مطلوبہ معلومات دستیاب نہ ہوں، تو معقول مفروضات اور تخمینے قائم کریں۔
   iii. حساب لگا کر جواب معلوم کریں (اور چیک کریں کہ آپ کا ابتدائی اندازہ جواب کے کتنا قریب تھا)۔

کیا سکوں کی تعداد سینکڑوں، ہزاروں، لاکھوں، کروڑوں، یا اس سے بھی زیادہ ہو گی؟ ایک فطری اندازہ لگائیں۔

کیوں نہ 1 روپے کے ایک سکے کا وزن معلوم کرنے کے لیے اسے ناپ کر دیکھا جائے؟

نامعلوم معلومات کے لیے ضروری اور معقول مفروضات اور تخمینے قائم کر کے جواب تلاش کریں۔ یاد رکھیں، ہم کسی بالکل درست جواب کی تلاش میں نہیں ہیں بلکہ ایک معقول حد تک قریبی تخمینے کی تلاش میں ہیں۔

شروع میں، آپ کے اندازے اصل جواب سے بہت دور ہو سکتے ہیں اور یہ بالکل ٹھیک ہے! جیسے جیسے آپ اکثر اور مختلف حالات میں ایسا کریں گے، آپ اس میں بہتر ہوتے جائیں گے۔ اندازہ لگانے اور تخمینہ لگانے کی مشق سے اعداد اور مختلف مقداروں کے بارے میں ایک فہم پیدا ہو سکتی ہے۔

Raju asks, "What if we use 5-rupee coins or 10-rupee notes instead? How much money could it be?"

Make an instinctive guess first. Then find out (make necessary and reasonable assumptions about the unknown details and find the answers). Raju says, "When I become an adult, I would like to donate notebooks worth my weight every year". Rekha says, "When I grow up, I would like to do *annadana* (offering grains or meals) worth my weight every year".

How many people might benefit from each of these offerings in a year? Again, guess first before finding out.



Rekha andRaju overheard someone saying - "We did padayatra for about 400 km to reach this place! We arrived early this morning."

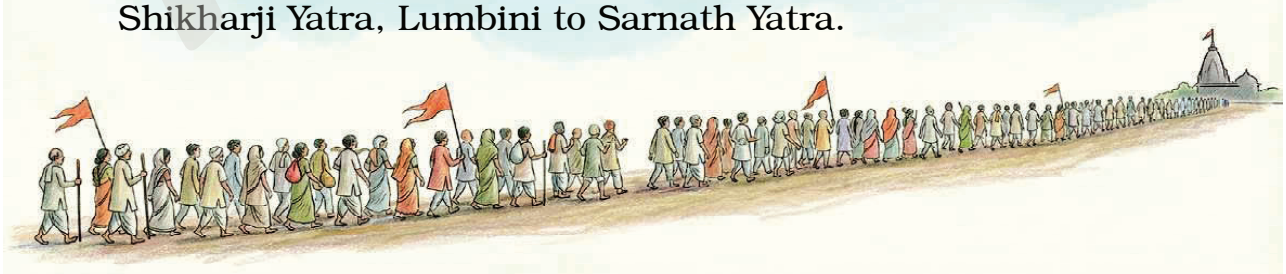
How long ago would they have started their journey?

Find answers by making necessary assumptions and approximations. Do guess first before calculating to check how close your guess was!

Note to the Teacher: Assumptions can vary greatly at times, and as a result the answers computed using these you can also vary. This is perfectly alright. Modelling the situation properly is crucial, which can also be done in different ways sometimes. The accuracy of the assumed numbers or quantities can get better with exposure and practice.

Padayatra, is the traditional practice of walking long distances as part of a religious or spiritual pursuit. People across religions in our country observe similar forms of pilgrimage or spiritual walking, although they may have different names or purposes.

Some of the pilgrimages are Ajmer Sharif Dargah Ziyarat, Pandharpur Wari, Kanwar Yatra, Sabarimala Yatra, Sammed Shikharji Yatra, Lumbini to Sarnath Yatra.



راجو پوچھتا ہے: "اگر ہم 5 روپے کے سکے یا 10 روپے کے نوٹ استعمال کریں تو کیا ہو گا؟ تب کل رقم کتنی ہو سکتی ہے؟"

پہلے اندازہ لگائیں۔ پھر نامعلوم تفصیلات کے بارے میں مناسب اور معقول مفروضے قائم کر کے جواب معلوم کریں۔

راجو کہتا ہے: "جب میں بڑا ہو جاؤں گا تو ہر سال اپنے وزن کے برابر مالیت کی کاپیاں عطیہ کرنا چاہوں گا۔"

ریکھا کہتی ہے: "جب میں بڑی ہو جاؤں گی تو ہر سال اپنے وزن کے برابر مالیت کا اَنّ دان (اناج یا کھانا عطیہ کرنا) کرنا چاہوں گی۔"

ایک سال میں ان عطیات سے کتنے لوگ فائدہ اٹھا سکتے ہیں؟

دوبارہ، پہلے اندازہ لگائیں اور پھر معلوم کریں۔



ریکھا اور راجو نے کسی کو یہ کہتے ہوئے سنا:

"ہم نے اس جگہ تک پہنچنے کے لیے تقریباً 400 کلو میٹر کی پدیاترا کی۔ ہم آج صبح سویرے پہنچے ہیں۔"

انہوں نے اپنا سفر کتنے عرصہ پہلے شروع کیا ہو گا؟

ضروری مفروضے اور تخمینے قائم کر کے جواب معلوم کریں۔

حساب کرنے سے پہلے ضرور اندازہ لگائیں تا کہ یہ دیکھا جا سکے کہ آپ کا اندازہ حقیقی جواب کے کتنا قریب تھا۔

استاد کے لیے نوٹ: مفروضات بعض اوقات کافی مختلف ہو سکتے ہیں، اور اس کے نتیجے میں ان کی بنیاد پر حاصل ہونے والے جوابات بھی مختلف ہو سکتے ہیں۔ یہ بالکل درست ہے۔ صورتحال کی مناسب نمونہ سازی بنیادی اہمیت رکھتی ہے، اور بعض اوقات یہ مختلف طریقوں سے بھی کی جا سکتی ہے۔ مفروضہ اعداد یا مقداروں کی درستی مشق اور تجربے کے ساتھ بہتر ہوتی جاتی ہے۔

پادیاترا طویل فاصلے تک پیدل چلنے کی ایک روایتی رسم ہے جو مذہبی یا روحانی مقاصد کے تحت انجام دی جاتی ہے۔ ہمارے ملک میں مختلف مذاہب کے لوگ اسی نوعیت کی زیارتوں یا روحانی پیدل سفروں کا اہتمام کرتے ہیں، اگرچہ ان کے نام اور مقاصد مختلف ہو سکتے ہیں۔

ان میں سے بعض زیارتیں یہ ہیں: اجمیر شریف درگاہ کی زیارت، پنڈھرپور واری، کانور یاترا، سبرمالا یاترا، حمید شی کھرجی یاترا، لمبنی تا سارناتھ یاترا



Before the rise of modern transport, people moved from one place to another by walking - sometimes merchants, sages, and scholars walked thousands of kilometres to different parts of the world across deserts, mountains, and rivers.

? How many times can a person circumnavigate (go around the world) the Earth in their lifetime if they walk non-stop? Consider the distance around the Earth as 40,000 km.

Linear Growth vs. Exponential Growth

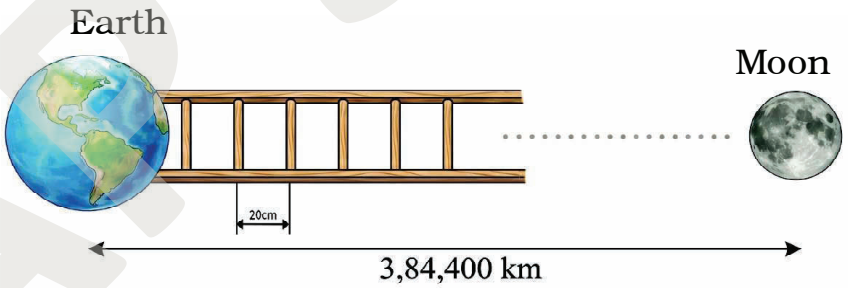
Rekha tellsRaju about a science-fiction novel she is reading where they build a ladder to reach the moon, "... I wonder if we actually had a ladder like that, how many steps would it have?".



? What do you think? Make an instinctive guess first.

? Would the number of steps be in thousands, lakhs, crores, or even more?

To find out, we would need to know the gap between consecutive steps of the ladder. Let's assume a reasonable distance of 20 cm. Visualising the problem as shown,



? We have to find out how many 20 cm make 3,84,400 km.

If we calculate the value, we get the result as 1,92,20,00,000 steps, which is 192 crore and 20 lakh steps or 1 billion 922 million steps. The fixed increase in the distance from the earth with each step (a 20 cm gain after each step) is called linear growth.

© NCERT not to be republished

جدید ذرائع آمد و رفت (ٹرانسپورٹ) کے عروج سے پہلے، لوگ ایک جگہ سے دوسری جگہ پیدل سفر کرتے تھے۔ بعض اوقات تاجر، صوفی بزرگ (سادھو) اور علماء دنیا کے مختلف حصوں میں صحراؤں، پہاڑوں اور دریاؤں کو پار کرتے ہوئے ہزاروں کلومیٹر پیدل چلتے تھے۔

ایک شخص اپنی زندگی میں نان اسٹاپ (بغیر رکے) پیدل چل کر کتنی بار زمین کا چکر لگا سکتا ہے (circumnavigate)؟ زمین کے گرد کا کل فاصلہ 40,000 کلومیٹر فرض کریں۔

خطی اضافہ بمقابلہ قوت نمائی اضافہ

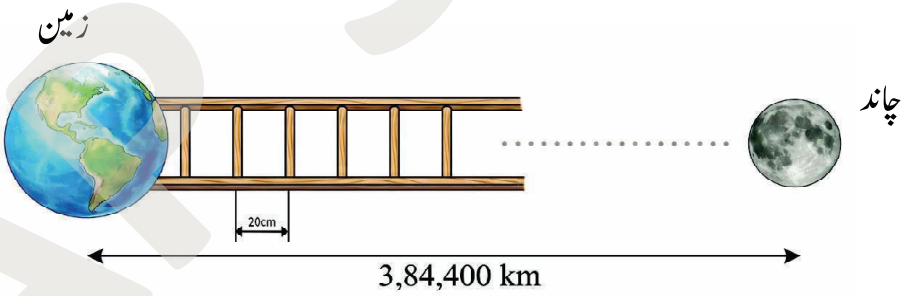
ریکھا، راجو کو ایک سائنس فکشن (سائنسی افسانہ) ناول کے بارے میں بتاتی ہے جو وہ پڑھ رہی ہے، جس میں چاند تک پہنچنے کے لیے ایک سیڑھی بنائی جاتی ہے، "... میں سوچ رہی ہوں کہ اگر واقعی ہمارے پاس ایسی سیڑھی ہوتی، تو اس میں کتنے ڈنڈے ہوتے؟"۔



آپ کا کیا خیال ہے؟ پہلے ایک فطری اندازہ لگائیں۔

کیا ڈنڈوں کی تعداد ہزاروں، لاکھوں، کروڑوں میں ہوگی یا اس سے بھی زیادہ؟

یہ معلوم کرنے کے لیے، ہمیں سیڑھی کے دو مسلسل ڈنڈوں کے درمیان کا درمیانی فاصلہ معلوم ہونا چاہیے۔ آیئے ایک معقول فاصلہ 20 سینٹی میٹر فرض کرتے ہیں، جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ 3,84,400 کلومیٹر میں 20 سینٹی میٹر کتنے مرتبہ آتے ہیں۔

اگر ہم اس کی قیمت کا حساب لگائیں، تو ہمیں جواب 1,92,20,00,000 ڈنڈے حاصل ہوتا ہے، جو کہ 192 کروڑ اور 20 لاکھ ڈنڈے بنتے ہیں

یا 1 بلین 922 ملین ڈنڈے۔ ہر قدم کے ساتھ زمین سے فاصلے میں ہونے والے اس مقررہ یا طے شدہ اضافے کو (جہاں ہر قدم کے بعد 20 سینٹی میٹر کا اضافہ ہوتا ہے) خطی اضافہ کہا جاتا ہے

To cover the distance between the Earth and the Moon, it takes 1,92,20,00,000 steps with linear growth whereas it takes just 46 folds of a piece of paper with exponential growth! Linear growth is additive, whereas exponential growth is multiplicative.

$\underbrace{20+20+20+\ldots\ldots\ldots}_{1,92,20,00,000 \text{ times}}$ $\underbrace{0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots\ldots}_{46 \text{ times}}$

Some examples of exponential growth we have seen earlier in this chapter are 'The Stones that Shine', 'Magical Pond', 'How Many Combinations'. We shall explore more such interesting examples in a later chapter and also in the next grade.

? Can you come up with some examples of linear growth and of exponential growth?

Getting a Sense for Large Numbers

Last year, we learnt about lakhs and crores, as well as millions and billions. A lakh is 10^5 (1,00,000), a crore is 10^7 (1,00,00,000), and an arab is 10^9 (1,00,00,00,000), whereas a million is 10^6 (1,000,000) and a billion is 10^9 (1,000,000,000).

You might know the size of the world's human population. Have you ever wondered how many ants there might be in the world or how long ago humans emerged? In this section, we shall explore numbers significantly larger than arabs and billions. We shall use powers of 10 to represent and compare these numbers in each case.

10^0 As of mid - 2025, there are only two northern white rhinos remaining in the world, both females, and they reside at the Ol Pejeta Conservancy in Kenya ($= 2 \times 10^0$).

10^1 As of early 2024, the total population of Hainan gibbons is a meagre 42 ($\approx 4 \times 10^1$).

10^2 There are just 242 Kakapo alive as of mid - 2025 ($\approx 2 \times 10^2$).

10^3 There are fewer than 3000 Komodo dragons in the world, all based in Indonesia ($\approx 3 \times 10^3$).

APSCERT

زمین اور چاند کے درمیان فاصلہ طے کرنے کے لیے خطی اضافے کے ساتھ 1,92,20,00,000 ڈنڈوں (قدموں) کی ضرورت ہوتی ہے، جبکہ قوت نمائی اضافے کے ساتھ کاغذ کے ایک ٹکڑے کو محض 46 بار موڑنے کی ضرورت ہوتی ہے!

خطی اضافہ جمع والا ہوتا ہے، جبکہ قوت نمائی اضافہ ضرب والا ہوتا ہے۔

$0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots$ (46 مرتبہ)

$20 + 20 + 20 + \ldots\ldots$ (1,92,20,00,000 مرتبہ)

قوت نمائی اضافے کی کچھ مثالیں جو ہم نے اس باب میں پہلے دیکھی ہیں، وہ یہ ہیں: 'وہ پتھر جو چمکتے ہیں'، 'جادوئی تالاب'، 'کتنے امتزاج'۔ ہم اگلی جماعت میں اور بعد کے ایک باب میں ایسی ہی مزید دلچسپ مثالیں دریافت کریں گے۔

کیا آپ خطی اضافے اور قوت نمائی اضافے کی کچھ مثالیں پیش کر سکتے ہیں؟

بڑے اعداد کا فہم حاصل کرنا

پچھلے سال، ہم نے لاکھ اور کروڑ کے ساتھ ساتھ ملین اور بلین کے بارے میں بھی سیکھا تھا۔ ایک لاکھ 10^5 (1,00,000) ہوتا ہے، ایک کروڑ 10^7 (1,00,00,000) ہوتا ہے، اور ایک ارب 10^9 (1,00,00,00,000) ہوتا ہے، جبکہ ایک ملین 10^6 (1,000,000) اور ایک بلین 10^9 (1,000,000,000) ہوتا ہے۔

آپ شاید دنیا کی انسانی آبادی کے حجم (تعداد) سے واقف ہوں گے۔ کیا آپ نے کبھی سوچا ہے کہ دنیا میں کتنی چیونٹیاں ہو سکتی ہیں یا انسان کتنے عرصے پہلے وجود میں آئے؟ اس حصے میں، ہم اربوں اور بلین سے نمایاں طور پر بڑے اعداد کو دریافت کریں گے۔ ہم ہر معاملے میں ان اعداد کو ظاہر کرنے اور ان کا موازنہ کرنے کے لیے 10 کی قوتوں کا استعمال کریں گے۔

10^0: وسط 2025 تک، دنیا میں صرف دو ہی شمالی سفید گینڈے باقی رہ گئے ہیں، دونوں مادہ ہیں، اور وہ کینیا کی اول چیچیٹا کنزرو مسی میں رہتے ہیں $(2 \times 10^0 =)$

10^1: اوائل 2024 تک، ہینان گبنز بندر کی ایک نسل کی کل آبادی محض 42 ہے $(4 \times 10^1 \approx)$

10^2: وسط 2025 تک صرف 242 کاکاپو طوطے کی ایک نسل زندہ ہیں $(2 \times 10^2 \approx)$

10^3: دنیا میں 3000 سے بھی کم کوموڈو ڈریگن موجود ہیں، جو کہ سب انڈونیشیا میں پائے جاتے ہیں $(3 \times 10^3 \approx)$

10^4 A 2005 estimate of the maned wolf population showed that there are more than 17000 of them; most are located in Brazil (1.7×10^4).



10^5 As of 2018, there are around 4.15 lakh African elephants ($\approx 4 \times 10^5$).

10^6 There are an estimated 50 lakh / 5 million American alligators as of 2025 (5×10^6).

10^7 The global camel population is estimated to be over 3.5 crore/ 35 million (3.5×10^7). India has only about 2.5 lakhs of them. The global horse population is around 5.8 crore / 58 million (5.8×10^7), with about half of them in America.

10^8 More than 20 crore / 200 million (2×10^8) water buffaloes are estimated worldwide, with a vast majority of them in Asia.

10^9 The estimated global population of starlings is around 1.3 arab/1.3 billion (1.3×10^9). The global human population as of 2025 is 8.2 arab/ 8.2 billion (8.2×10^9).



A picture of a starling murmuration over a farm in the UK. Starling murmuration is a mesmerising aerial display of thousands of starlings flying in synchronised, swirling patterns. It is often described as a 'choreographed dance'.

? With a global human population of about 8×10^9 and about 4×10^5 African elephants, can we say that there are nearly 20,000 people for every African elephant?

10^{10} The global chicken population living at any time is estimated at $\approx$ 33 billion (3.3×10^{10}).

© NCERT

10^4 : 2005 کے ایک تخمینے کے مطابق ایاغ دار بھیڑیوں کی آبادی 17,000 سے زیادہ تھی؛ جن میں سے زیادہ تر برازیل میں پائے جاتے ہیں (1.7×10^4)۔



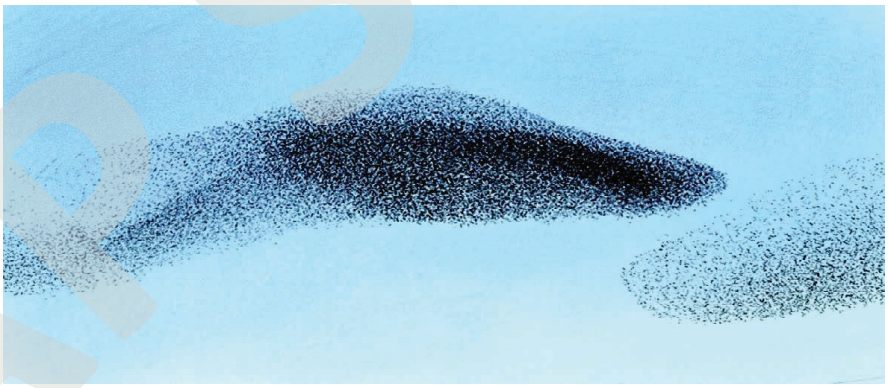
10^5 : 2018 تک، افریقی ہاتھیوں کی تعداد تقریباً 4.15 لاکھ ہے $(\approx 4 \times 10^5)$

10^6: 2025 تک امریکی مگرمچھوں کی متوقع تعداد تقریباً 50 لاکھ / 5 ملین ہے (5×10^6)

10^7 : دنیا بھر میں اونٹوں کی کل آبادی کا تخمینہ 3.5 کروڑ / 35 ملین سے زیادہ ہے (3.5×10^7)۔ بھارت میں ان کی تعداد صرف تقریباً 2.5 لاکھ ہے۔ دنیا بھر میں گھوڑوں کی آبادی تقریباً 5.8 کروڑ / 58 ملین ہے (5.8×10^7)، جن میں سے تقریباً آدھے امریکہ میں ہیں۔

10^8 : دنیا بھر میں نیل گائے / پانی والی بھینسوں کی متوقع تعداد 20 کروڑ / 200 ملین (2×10^8) سے زیادہ ہے، جن کی بہت بڑی اکثریت ایشیا میں ہے۔

10^9 : ابابیل نما پرندوں کی عالمی آبادی کا تخمینہ تقریباً 1.3 ارب / 1.3 بلین ہے (1.3×10^9)۔ 2025 تک دنیا کی کل انسانی آبادی 8.2 ارب / 8.2 بلین ہے (8.2×10^9)



برطانیہ میں ایک فارم کے اوپر اسٹارلنگ پرندوں کے جھنڈ مرمریشن کی تصویر۔ اسٹارلنگ مرمریشن ہزاروں پرندوں کا فضا میں ایک سحر انگیز فضائی مظاہرہ ہوتا ہے جو ہم آہنگ اور لہراتے ہوئے انداز میں اڑتے ہیں۔ اسے اکثر ایک 'منظم رقص' سے تشبیہ دی جاتی ہے۔

تقریباً 8×10^9 کی عالمی انسانی آبادی اور تقریباً 4×10^5 افریقی ہاتھیوں کی موجودگی کے ساتھ، کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک افریقی ہاتھی کے مقابلے میں تقریباً 20,000 انسان موجود ہیں؟

10^{10} : کسی بھی وقت زندہ موجود مرغیوں کی عالمی آبادی کا تخمینہ تقریباً 33 بلین ہے (3.3×10^{10})

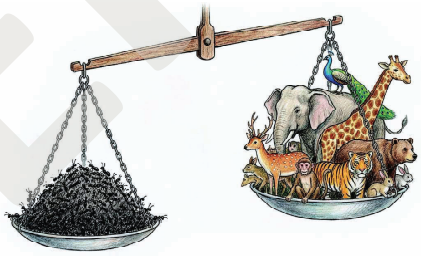
10^{12} The estimated number of trees (2023) globally stands at 30 kharab/3 trillion (3×10^{12}). One kharab is 100 arab, and one trillion is 1000 billion.

10^{14} The estimated mosquito population worldwide (2023) is 11 neel/110 trillion (1.10×10^{14}). A derived estimate of the population of the Antarctic krill stands at 50 neel/500 trillion (5×10^{14}).



10^{15} An estimate of the beetle population stands at 1 padma/1 quadrillion (1×10^{15}). The estimate of the earthworm population is also at 1 padma/1 quadrillion.

10^{16} The estimated population of ants globally is 20 padma/20 quadrillion (2×10^{16}). Ants alone outweigh all wild birds and wild mammals combined.



10^{21} is supposed to be the number of grains of sand on all beaches and deserts on Earth. This is enough sand to give every ant 10 little sand castles to live in.



10^{23} The estimated number of stars in the observable universe is 2×10^{23}.

10^{25} There are an estimated 2×10^{25} drops of water on Earth (assuming 16 drops per millilitre).

? Calculate and write the answer using scientific notation:

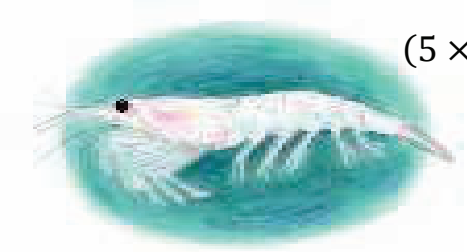
(i) How many ants are there for every human in the world?

(ii) If a flock of starlings contains 10,000 birds, how many flocks could there be in the world?

(iii) If each tree had about 10^4 leaves, find the total number of leaves on all the trees in the world.

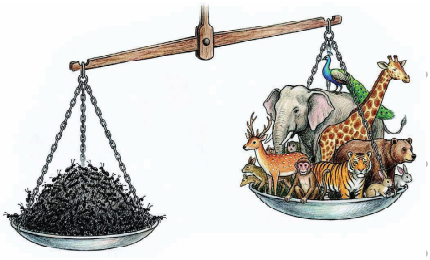
10^{12} : دنیا بھر میں درختوں کی متوقع تعداد (2023) 30 کھرب / 3 ٹریلین ہے (3×10^{12})۔ ایک کھرب، 100 ارب کے برابر ہوتا ہے، اور ایک ٹریلین، 1000 بلین کے برابر ہوتا ہے۔

10^{14} : دنیا بھر میں مچھروں کی متوقع تعداد (2023) 11 نیل / 110 ٹریلین ہے (1.10×10^{14})۔ انٹارکٹک کرل جھینگے کی ایک قسم کی آبادی کا اخذ کردہ تخمینہ 50 نیل / 500 ٹریلین ہے (5×10^{14})



10^{15} : بھونروں (beetles) کی آبادی کا تخمینہ 1 پدم / 1 کواڈریلین ہے (1×10^{15})۔ کینچوؤں کی متوقع آبادی بھی 1 پدم / 1 کواڈریلین ہے۔

10^{16} : دنیا بھر میں چیونٹیوں کی متوقع آبادی 20 پدم / 20 کواڈریلین ہے (2×10^{16})۔ صرف چیونٹیوں کا وزن تمام جنگلی پرندوں اور جنگلی پستانیے جانوروں کے مجموعی وزن سے زیادہ ہے۔



10^{21} : یہ زمین کے تمام ساحلوں اور صحراؤں میں موجود ریت کے ذرات کی متوقع تعداد مانی جاتی ہے۔ یہ ریت اتنی ہے کہ ہر چیونٹی کو رہنے کے لیے ریت کے 10 چھوٹے قلعے مل سکتے ہیں۔



10^{23} : قابلِ مشاہدہ کائنات میں ستاروں کی متوقع تعداد 2×10^{23} ہے۔

10^{25} : زمین پر پانی کے قطروں کی متوقع تعداد 2×10^{25} ہے (یہ فرض کرتے ہوئے کہ ایک ملی لیٹر میں 16 قطرے ہوتے ہیں)۔

سائنسی ترقیم کا استعمال کرتے ہوئے حساب لگائیں اور جواب لکھیں:

I. دنیا میں ہر ایک انسان کے مقابلے میں کتنی چیونٹیاں موجود ہیں؟

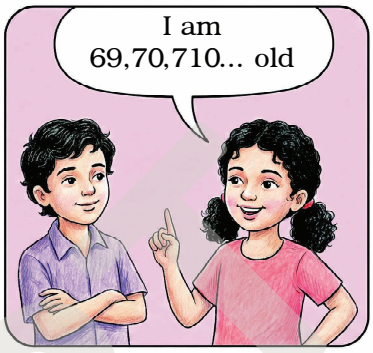
II. اگر ابابیل نما پرندوں کے ایک جھنڈ میں 10,000 پرندے ہوں، تو دنیا میں ایسے کتنے جھنڈ ہو سکتے ہیں؟

III. اگر ہر درخت پر تقریباً 10^4 پتے ہوں، تو دنیا کے تمام درختوں پر پتوں کی کل تعداد معلوم کریں۔

(iv) If you stacked sheets of paper on top of each other, how many would you need to reach the Moon?

A different way to say your age!

"How old are you?" asked Raju.
"I completed 13 years a few weeks ago!" said Rekha.
"How old are you?" asked Raju again.
"I'm 4840 days old today!" said Rekha.
"How old are you?" asked Raju again.
"I'm _____ hours old!" said Rekha.
Make an estimate before finding this number.



What could this number mean? Find out!

Raju: "I am 4070 days old today. Can you find out my date of birth?"

? If you have lived for a million seconds, how old would you be?

We shall look at approximate times and timelines of some events and phenomena, and use powers of 10 to represent and compare these quantities.

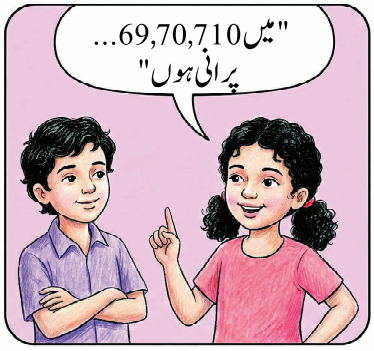
Time in seconds		Comparison to real-world events/phenomena
10^0 = 1 second	-	Time taken for a ball thrown up to fall back on the ground (typically a few seconds).
10^1 = 10 seconds	-	Time blood takes to complete one full circulation through the body: 10 - 20 seconds (1×10^1 - 2×10^1 seconds).
	-	Typical waiting time at a traffic signal.

Isn't it quite amazing how someone is able to estimate things like the number of ants in the world or the time blood takes to fully circulate? You may carry this wonder whenever you encounter such facts. You will come across such facts in subjects like Science and Social Science, where such estimates are made frequently.

10^2 seconds $\approx$ 1.6 minutes	-	Time needed to make a cup of tea: 5 - 10 minutes ($\approx 4 \times 10^2$ - 8×10^2 seconds).
	-	Time for light to reach the Earth from the Sun: about 8 minutes ($\approx 5 \times 10^2$ seconds).

اگر آپ کاغذ کے دستوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھیں، تو چاند تک پہنچنے کے لیے آپ کو کتنے کاغذوں کی ضرورت ہو گی؟

اپنی عمر بتانے کا ایک الگ طریقہ!



راجو: "تمہاری عمر کتنی ہے؟"

ریکھا: "میں نے چند ہفتے پہلے ہی 13 سال مکمل کیے ہیں"!

راجو نے دوبارہ پوچھا" :تمہاری عمر کتنی ہے؟"

ریکھا" :میں آج 4840 دن کی ہو گئی ہوں"!

راجو نے پھر پوچھا" :تمہاری عمر کتنی ہے؟"

ریکھا" :میں _____ گھنٹے پرانی ہوں"!

اس عدد کا کیا مطلب ہو سکتا ہے؟ معلوم کریں!

اس عدد کو معلوم کرنے سے پہلے ایک تخمینہ لگائیں۔

راجو" :میں آج 4070 دن کا ہو گیا ہوں۔ کیا تم میری تاریخ پیدائش معلوم کر سکتی ہو؟"

اگر آپ بیس لاکھ (a million) سیکنڈ جی چکے ہوں، تو آپ کی عمر کتنی ہو گی؟ ہم کچھ واقعات اور مظاہر کے قریبی اوقات اور ٹائم لائنز کو دیکھیں گے، اور ان مقداروں کو ظاہر کرنے اور ان کا موازنہ کرنے کے لیے 10 کی قوتوں کا استعمال کریں گے۔

سیکنڈ میں وقت	حقیقی دنیا کے واقعات / مظاہر سے موازنہ
$1 = 10^0$ سیکنڈ	- اوپر پھینکی گئی گیند کو واپس زمین پر گرنے میں لگنے والا وقت (عام طور پر چند سیکنڈ)۔
$10 = 10^1$ سیکنڈ	- خون کو پورے جسم میں گردش کا ایک چکر مکمل کرنے میں لگنے والا وقت: $10 - 20$ سیکنڈ $(2 \times 10^1 - 1 \times 10^1$ سیکنڈ$)$۔ ٹریفک سگنل پر انتظار کا عام وقت۔
	کیا یہ بات حیرت انگیز نہیں ہے کہ کوئی شخص دنیا میں چیونٹیوں کی تعداد یا خون کو جسم میں گردش کرنے میں لگنے والے وقت جیسی چیزوں کا تخمینہ لگانے کے قابل کیسے ہو جاتا ہے؟ جب بھی آپ کو ایسے حقائق کا سامنا ہو، آپ اس حیرت کو اپنے ساتھ رکھ سکتے ہیں۔ آپ سائنس اور سوشل سائنس جیسے مضامین میں ایسے حقائق سے روشناس ہوں گے، جہاں اکثر اس طرح کے تخمینے لگائے جاتے ہیں۔
10^2 سیکنڈ	- ایک کپ چائے بنانے کے لیے درکار وقت: $5 - 10$ منٹ
≈ 1.6 منٹ	$(\approx 8 \times 10^2 - 4 \times 10^2$ سیکنڈ$)$
	- سورج سے روشنی کو زمین تک پہنچنے میں لگنے والا وقت: تقریباً
	8 منٹ $(\approx 5 \times 10^2$ سیکنڈ$)$





10^3 seconds ≈ 16.6 minutes - Satellites in low Earth orbits take between 90 minutes (≈ 5.5×10^3 seconds) to 2 hours to complete one full revolution around the Earth.

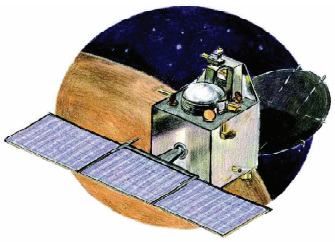
10^4 seconds ≈ 2.7 hours - The time needed to digest a meal: about 2 - 4 hours to pass through the stomach.



- Lifespan of an adult mayfly: about a day (≈ 9×10^4 seconds).

? 10^5 seconds ≈ 1.16 days and 106 seconds ≈ 11.57 days. Think of some events or phenomena whose time is of the order of (i) 10^5 seconds and (ii) 10^6 seconds. Write them in scientific notation.

10^7 seconds ≈ 115.7 days / ≈ 3.8 months - Time spent sleeping in a year: about 4 months.



- Time taken by Mangalyaan mission to reach Mars: 298 days (≈ 2.65×10^7 seconds).
- Time taken by Mars for one full revolution around the Sun: 687 Earth-days/1.88 Earth-years (≈ 6×10^7 seconds).

10^8 seconds ≈ 3.17 years - The typical lifespan of most dogs is 3 to 15 years.

APSCERT





10^3 سیکنڈ - کم بلندی والے زمینی مداروں میں موجود سیٹلائٹ زمین کے گرد ایک چکر مکمل کرنے

≈ 16.6 منٹ کے لیے 90 منٹ $(\approx 5.5 \times 10^3$ سیکنڈ) سے لے کر 2 گھنٹے کا وقت لیتے ہیں۔

10^4 سیکنڈ - کھانا ہضم کرنے کے لیے درکار وقت: معدے سے گزرنے کے لیے تقریباً 2 سے 4 گھنٹے لگتے

≈ 2.7 گھنٹے



ایک بالغ مے فلائی (ایک دن کا کیڑا) کی عمر:
تقریباً ایک دن $(\approx 9 \times 10^4$ سیکنڈ)۔

10^5 سیکنڈ ≈ 1.16 دن اور 10^6 سیکنڈ ≈ 11.57 دن ہوتے ہیں۔

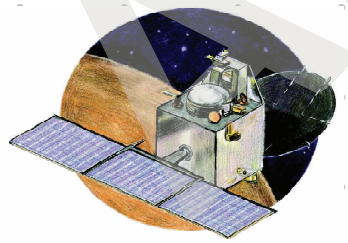
کچھ ایسے واقعات یا مظاہر کے بارے میں سوچیے جن کا وقت (i) 10^5 سیکنڈ اور (ii) 10^6 سیکنڈ کی ترتیب کا ہو۔ انہیں سائنسی ترقیم میں لکھی۔

10^7 سیکنڈ - ایک سال میں سونے (نیند) میں گزارا جانے والا وقت: تقریباً 4 ماہ۔

≈ 115.7 دن/

≈ 3.8 مہینے مریخ تک پہنچنے کے لیے منگلیان مشن کا لیا گیا وقت: 298 دن $(\approx 2.65 \times 10^7$ سیکنڈ)۔

مریخ کی طرف سے سورج کے گرد ایک مکمل چکر لگانے میں لگنے والا وقت: 687 زمینی دن/1.88 زمینی سال $(\approx 6 \times 10^7$ سیکنڈ)۔



10^8 سیکنڈ - زیادہ تر کتوں کی عام عمر 3 سے 15 سال ہوتی ہے۔

≈ 3.17 سال

APSCERT

10^9 seconds
≈ 31.7 years

- The orbital period of Halley's comet is 75 - 79 years; the next expected return is in the year 2061 (≈2.4 × 10^9 seconds).
- Duration of one full revolution of Neptune around the Sun: 60,190 Earth-days/~165 Earth-years or 89,666 Neptunian days/1 Neptunian-year (≈ 5.2 × 10^9 seconds). A day on Neptune is about 16.1 hours

Notice how rapid exponential growth is - 10^6 seconds is less than a fortnight, but 10^9 seconds is a whopping 31 years (about half the life expectancy of a human)!

10^{10} seconds
≈317 years

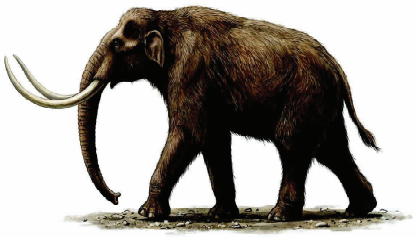
- The Chola dynasty ruled for more than 900 years (≈ 3 × 10^{10} seconds) between the 3rd Century BCE and 12th Century CE.

10^{11} seconds
≈3,170 years

- Age of the oldest known living tree: about 5000 years (≈ 1.57 × 10^{11} seconds).
- Time since the last peak ice age: 19,000 - 26,000 years ago (≈ 6 × 10^{11} seconds - 8.2 × 10^{11} seconds).

10^{12} seconds
≈ 31,700

- Early Homo sapiens first appeared 2 - 3 lakh years ago (≈7 × 10^{12} - 9 × 10^{12} seconds). The entire population around that time could fit in a large cricket stadium.



10^{13} seconds
≈ 3.17 lakh years

- The Steppe Mammoth is estimated to have appeared around 8 - 18 lakh years ago.



10^{14} seconds
≈3.17 million years

- A fossil of Kelenken Guillermoi, a type of terror bird, is dated to 15 million years ago (≈ _____seconds).

APSCERT

10^9 سیکنڈ - ہیلی کے دم دار ستارے کا مداری دورانیہ 75 - 79 سال ہے؛

≈ 31.7 سال اس کی اگلی متوقع واپسی سال 2061 میں ہوگی $(\approx 2.4 \times 10^9$ سیکنڈ)۔

- نیپچون کی طرف سے سورج کے گرد ایک مکمل چکر لگانے کا دورانیہ:

190,60 زمینی دن / ~165 زمینی سال یا 89,666 نیپچون کے دن / 1 نیپچون سال

$(\approx 5.2 \times 10^9$ سیکنڈ)۔ نیپچون پر ایک دن تقریباً 16.1 گھنٹے کا ہوتا ہے۔

غور کریں کہ قوت نمائی اضافہ کتنا تیز ہوتا ہے؛ 10^6 سیکنڈ دو ہفتوں سے بھی کم ہوتا ہے، لیکن 10^9 سیکنڈ پورے 31 سال بنتے ہیں (جو ایک انسان کی اوسط متوقع عمر کا تقریباً آدھا حصہ ہے)

10^{10} سیکنڈ - چولا خاندان نے تیسری صدی قبل مسیح اور بارہویں صدی عیسوی کے درمیان

900 سال $\approx$ 317 سال سے زیادہ عرصے تک حکومت کی $(\approx 3 \times 10^{10}$ سیکنڈ)۔

10^{11} سیکنڈ - سب سے پرانے معلوم زندہ درخت کی عمر: تقریباً 5000 سال

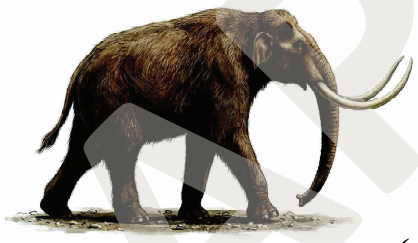
$\approx 3,170$ سال $(\approx 1.57 \times 10^{11}$ سیکنڈ)۔

- آخری عروج پر پہنچنے والے برفانی دور سے اب تک کا وقت: 19,000- 26,000 سال پہلے

$(\approx 6 \times 10^{11}$ سیکنڈ $- 8.2 \times 10^{11}$ سیکنڈ)۔

10^{12} سیکنڈ - ابتدائی ہوموسیپینز پہلی بار 2 سے 3 لاکھ سال پہلے ظاہر ہوئے تھے

$\approx 31,700$ $(\approx 7 \times 10^{12} - 9 \times 10^{12}$ سیکنڈ)۔ اس وقت کی تمام (انسانی) آبادی کرکٹ کے ایک بڑے اسٹیڈیم میں سما سکتی تھی۔



10^{13} سیکنڈ - تخمینہ ہے کہ اسٹیپ میمتھ تقریباً 8 سے 18 لاکھ سال پہلے نمودار ہوا تھا۔

≈ 3.17 لاکھ سال

10^{14} سیکنڈ - دہشت گرد پرندے کی ایک قسم، کلین کن (Kelenken) گلیر موئی کے ایک فوسل (حیاتیاتی باقیات) کی عمر ≈ 3.17 ملین سال کا تخمینہ 15 ملین (ڈیڑھ کروڑ) سال پرانا لگایا گیا ہے

$(\approx$ _____ سیکنڈ)۔



10^{15} seconds $\approx$ 3.17 crore years	-	Age of Himalayas: 5.5 crore years/55 million years ($\approx 1.7 \times 10^{15}$ seconds); they continue to grow a few mm every year.
	-	Dinosaurs went extinct 6.6 crore years ago/66 million years ago ($\approx 2 \times 10^{15}$ seconds).
	-	Dinosaurs first appeared more than 20 crore/200 million years ago ($\approx 6 \times 10^{15}$ seconds).
	-	It takes about 23 crore years for the Sun to make one complete trip around the Milky Way ($\approx 7 \times 10^{15}$ seconds).
10^{16} seconds $\approx$ 31.7 crore years	-	Plants on land started 47 crore/470 million years ago ($\approx$ _____seconds).
10^{17} seconds $\approx$ 3.17 billion years	-	The oldest fossil evidence suggests that bacteria first appeared about 3.7 billion years ago.
	-	The Earth is 4.5 billion years old.
	-	The Milky Way galaxy was formed 13.6 billion years ago, and the Universe was formed 13.8 billion years ago.

Notice that 10^9 seconds is of the order of the lifespan of a human, whereas 10^{18} seconds ago the universe did not exist according to modern physics!! The exponential notation can capture very large quantities in a concise manner.

? Calculate and write the answer using scientific notation:

(i) If one star is counted every second, how long would it take to count all the stars in the universe? Answer in terms of the number of seconds using scientific notation.

(ii) If one could drink a glass of water (200 ml) every 10 seconds, how long would it take to finish the entire volume of water on Earth?

Very large quantities are often beyond our experience and comprehension. To put them into perspective, we can relate and compare them with quantities we are familiar with. This can give an essence of how large a number or a measure is!

APSCERT

10^{15} سیکنڈ - ہمالیہ (Himalayas) کی عمر: 5.5 کروڑ سال / 55 ملین سال۔

≈ 3.17 کروڑ سال $\left(\approx 1.7 \times 10^{15} \text{ سیکنڈ}\right)$؛ وہ اب بھی ہر سال چند ملی میٹر بڑھتے جا رہے ہیں۔

- ڈایناسور 6.6 کروڑ سال پہلے / 66 ملین سال پہلے صاف ہو گئے تھے $(\approx 2 \times 10^{15})$۔
- ڈایناسور سب سے پہلے 20 کروڑ / 200 ملین سال سے بھی پہلے نمودار ہوئے تھے $\left(\approx 6 \times 10^{15} \text{ سیکنڈ}\right)$۔
- سورج کو ملکی وے (کہکشاں) کے گرد ایک مکمل چکر لگانے میں تقریباً 23 کروڑ سال لگتے ہیں $\left(\approx 7 \times 10^{15} \text{ سیکنڈ}\right)$۔

10^{16} سیکنڈ - زمین پر پودوں کی شروعات 47 کروڑ / 470 ملین سال پہلے ہوئی تھی

≈ 31.7 کروڑ سال $\left(\approx$ _____ سیکنڈ$\right)$۔

10^{17} سیکنڈ - سب سے پرانے فوسل (باقیات) کے شواہد بتاتے ہیں کہ بیکٹیریا سب سے پہلے تقریباً $3.7 \approx 3.17$ بلین سال پہلے ظاہر ہوئے تھے۔

- زمین کی عمر 4.5 بلین سال ہے۔
- ملکی وے کہکشاں 13.6 بلین سال پہلے بنی تھی، اور کائنات 13.8 بلین سال پہلے وجود میں آئی تھی۔

غور کریں کہ 10^9 سیکنڈ ایک انسان کی عمر کی حد کے برابر ہے، جبکہ جدید فزکس کے مطابق 10^{18} سیکنڈ پہلے کائنات کا کوئی وجود ہی نہیں تھا!! قوت نمائی ترقیم بہت بڑی مقداروں کو مختصر انداز میں محفوظ کر سکتی ہے۔

؟ سائنسی ترقیم کا استعمال کرتے ہوئے حساب لگائیں اور جواب لکھیں:

(i) اگر ہر سیکنڈ میں ایک ستارہ گنا جائے، تو کائنات کے تمام ستاروں کو گننے میں کتنا وقت لگے گا؟ سائنسی ترقیم کا استعمال کرتے ہوئے سیکنڈوں کی تعداد میں جواب دیں۔

(ii) اگر کوئی شخص ہر 10 سیکنڈ میں پانی کا ایک گلاس (200 ملی لیٹر) پی سکے، تو زمین پر موجود پانی کے کل حجم کو ختم کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

بہت بڑی مقداریں اکثر ہمارے تجربے اور فہم سے باہر ہوتی ہیں۔ انہیں سمجھنے کے لیے، ہم ان کا موازنہ ان مقداروں سے کر سکتے ہیں جن سے ہم واقف ہیں۔ یہ طریقہ کسی عدد یا پیمائش کی وسعت کا حقیقی اندازہ فراہم کر سکتا ہے!

2.5 A Pinch of History

In the Lalitavistara, a Buddhist treatise from the first century BCE, we see number - names for odd powers of ten up to 10^{53}. The following occurs as part of the dialogue between the mathematician Arjuna and Prince Gautama, the Bodhisattva.

"Hundred kotis are called an ayuta (10^9), hundred ayutas a niyuta (10^{11}), hundred niyutas a kankara (10^{13}), ..., hundred sarva-balas a visamjna- gati (10^{47}), hundred visamjna-gatis a sarvajna (10^{49}), hundred sarvajnas a vibhutangama (10^{51}), a hundred vibhutangamas is a tallakshana (10^{53})."

Mahaviracharya gives a list of 24 terms (i.e., up to 10^{23}) in his treatise Ganita-sara-sangraha. An anonymous Jaina treatise Amalasiddhi gives a list with a name for each power of ten up to 10^{96} (dasha-ananta). A Pali grammar treatise of Kaccayana lists number-names up to 10^{140}, named asankhyeya.

For expressing high powers of ten, Jaina and Buddhist texts use bases like sahassa (thousand) and ko?i (ten million); for instance, prayuta (10^6) would be dasa sata sahassa (ten hundred thousand).

The modern naming is similar to this, where we say,

A hundred thousand is a lakh	$100 \times 1000 = 1,00,000$	$10^2 \times 10^3 = 10^5$
A hundred lakhs is a crore	$100 \times 1,00,000 = 1,00,00,000$	$10^2 \times 10^5 = 10^7$
A hundred crores is an arab	$100 \times 1,00,00,000 = 1,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^7 = 10^9$
A hundred arab is a kharab	$100 \times 1,00,00,00,000 = 1,00,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^9 = 10^{11}$

Continuing this, a hundred kharab is a neel (10^{13}), a hundred neel is a padma (10^{15}), a hundred padma is a shankh (10^{17}) and a hundred shankh is a maha shankh (10^{19}).

In the American/International system, we say

A thousand thousand	$1000 \times 1000 = 1,000,000$	$10^3 \times 10^3 = 10^6$

2.5 تاریخ کی ایک جھلک

پہلی صدی قبل مسیح کی ایک بدھ مت کی تصنیف للیتاوستارا میں ہمیں 10^{53} تک دس کی طاق قوتوں کے لیے اعداد کے نام ملتے ہیں۔ ریاضی داں ارجنا اور شہزادے گوتم (بودھی ستوا) کے درمیان ہونے والی گفتگو کا ایک حصہ درج ذیل ہے۔

"سو کوٹی کو ایک ایوتا (10^9) کہا جاتا ہے، سو ایوتا کو ایک نیوتا (10^{11})، سو نیوتا کو ایک کنکارا (10^{13})، ...، سو سروبالا کو ایک وسمجنا-گتی (10^{47})، سو وسمجنا گتی کو ایک سروجنا (10^{49})، سو سروجنا کو ایک وبھوتنگما (10^{51})، اور سو وبھوتنگما مل کر ایک تالکشانا (10^{53}) بنتے ہیں۔"

مہاویر اچاریہ نے اپنی تصنیف گنیتا سار سنگرہا میں 24 اصطلاحات (یعنی 10^{23} تک) کی ایک فہرست دی ہے۔ ایک گمنام جین تصنیف املاسد ھیمیں دس کی ہر قوت کے لیے 10^{96} (دشا-انن تا) تک ناموں کی ایک فہرست ملتی ہے۔ کاچیانا کی پالی زبان کی قواعد (گرائمر) کی ایک کتاب میں 10^{140} تک اعداد کے نام درج ہیں، جسے اسنکھییا کا نام دیا گیا ہے۔

دس کی بڑی قوتوں کو ظاہر کرنے کے لیے، جین اور بدھ مت کی کتب میں سہسا – (ہزار) اور کوٹی – (دس ملین / کروڑ) جیسی بنیادوں کا استعمال کیا گیا ہے؛ مثال کے طور پر، پرایوتا (10^6) کو دساستاسہسا (دس سو ہزار) کہا جائے گا۔ موجودہ دور میں نام رکھنے کا طریقہ بھی اسی سے ملتا جلتا ہے، جہاں ہم کہتے ہیں،

سو ہزار ایک لاکھ ہوتا ہے $1,00,000 = 1000 \times 100$ $10^5 = 10^3 \times 10^2$

سو لاکھ ایک کروڑ ہوتا ہے $1,00,00,000 = 1,00,000 \times 100$ $10^7 = 10^5 \times 10^2$

سو کروڑ ایک ارب ہوتا ہے $1,00,00,00,000 = 1,00,00,000 \times 100$ $10^9 = 10^7 \times 10^2$

سو ارب ایک کھرب ہوتا ہے $1,00,00,00,00,000 = 1,00,00,00,000 \times 100$ $10^{11} = 10^9 \times 10^2$

اسی سلسلے کو جاری رکھتے ہوئے، سو کھرب ایک نیل (10^{13})، سو نیل ایک پدما (10^{15})، سو پدما ایک سنکھ (10^{17}) اور سو سنکھ ایک مہاسنکھ (10^{19}) ہوتا ہے۔

امریکی / بین الاقوامی نظام میں، ہم کہتے ہیں

ایک ہزار ہزار ایک ملین ہوتا ہے $1,000,000 = 1000 \times 1000$ $10^6 = 10^3 \times 10^3$

is a million		
A thousand million	$1000 \times 1{,}000{,}000 = 1{,}000{,}000{,}000$	
is a billion		$10^3 \times 10^6 = 10^9$
A thousand billion	$1000 \times 1{,}000{,}000{,}000$	$10^3 \times 10^9 = 10^{12}$
is an trillion	$= 1{,}00{,}000{,}000{,}000$	

Continuing this, a thousand trillion is a quadrillion (10^{15}). This pattern continues. Observe the names million (10^6), billion (10^9), trillion (10^{12}), quadrillion (10^{15}), quintillion (10^{18}), sextillion (10^{21}), septillion (10^{24}), octillion (10^{27}), nonillion (10^{30}), decillion (10^{33}).

? What does the first part of each name denote?

The number 10^{100} is also called a googol. The estimated number of atoms in the universe is 10^{78} to 10^{82}. The number 10^{googol} is called a googolplex. It is hard to imagine how large this number is!

The currency note with the highest denomination in India currently is 2000 rupees. Guess what is the highest denomination of a currency note ever, across the world. The highest numerical value banknote ever printed was a special note valued 1 sextillion pengo (10^{21} or 1 milliard bilpengo) printed in Hungary in 1946, but it was never issued. In 2009, Zimbabwe printed a 100 trillion (10^{14}) Zimbabwean dollar note, which at the time of printing was worth about $30.







Figure it Out - 2.2

1. Find out the units digit in the value of $2^{224} \div 4^{32}$? [Hint: $4 = 2^2$]
2. There are 5 bottles in a container. Every day, a new container is brought in. How many bottles would be there after 40 days?
3. Write the given number as the product of two or more powers in three different ways. The powers can be any integers.
   (i) 64^3 (ii) 192^8 (iii) 32^{-5}

ایک ہزار ملین کو ایک بلین کہا جاتا ہے $1,000,000,000 = 1,000,000 \times 1000$ $10^9 = 10^6 \times 10^3$

ایک ہزار بلین کو ایک ٹریلین کہا جاتا ہے $1,000,000,000,000 = 1,000,000,000 \times 1000$ $10^{12} = 10^9 \times 10^3$

اسی سلسلے کو آگے بڑھاتے ہوئے، ایک ہزار ٹریلین مل کر ایک کواڈریلین (10^{15} - quadrillion) بناتے ہیں۔ یہ سلسلہ اسی طرح چلتا رہتا ہے۔ ان ناموں پر غور کریں: ملین (10^6)، بلین (10^9)، ٹریلین (10^{12})، کواڈریلین (10^{15})، کوئن ٹی لین (10^{18} - quintillion)، سیکس ٹی لین (10^{21} - sextillion)، سیپ ٹی لین (10^{24} - septillion)، آکٹی لین (10^{27} - octillion)، نونی لین (10^{30} - nonillion)، ڈیسی لین (10^{33} - decillion)

ہر نام کا پہلا حصہ (پری فکس) کس چیز کو ظاہر کرتا ہے؟

عدد 10^{100} کو گوگول (googol) بھی کہا جاتا ہے۔ کائنات میں ایٹموں کی متوقع تعداد 10^{78} سے لے کر 10^{82} تک ہے۔

عدد 10^{googol} کو گوگول پلیکس (googolplex) کہا جاتا ہے۔ یہ تصور کرنا بھی مشکل ہے کہ یہ عدد کتنا بڑا ہے!

موجودہ دور میں ہندوستان میں سب سے بڑی مالیت کا کرنسی نوٹ 2000 روپے کا ہے۔ اندازہ لگائیں کہ دنیا بھر میں اب تک کا سب سے بڑی مالیت کا کرنسی نوٹ کون سا رہا ہے؟ دنیا میں چھاپا گیا سب سے بڑی عددی مالیت کا بینک نوٹ ایک خاص نوٹ تھا جس کی مالیت 1 سیکس ٹی لین پینگو (1 sextillion pengo - 10^{21} یا 1 ملی یارڈ بل پینگو) تھی، جو 1946 میں ہنگری میں چھاپا گیا تھا، لیکن اسے کبھی جاری نہیں کیا گیا۔ سال 2009 میں، زمبابوے نے 100 ٹریلین (10^{14}) زمبابوین ڈالر کا نوٹ چھاپا تھا، جو چھپائی کے وقت تقریباً 30 امریکی ڈالر کے برابر تھا۔







حل کیجیے۔2.2

1. $2^{224} \div 4^{32}$ کی قیمت میں اکائی کا ہندسہ معلوم کیجیے؟ [اشارہ: $2^2 = 4$]
2. ایک کنٹینر میں 5 بوتلیں ہیں۔ ہر روز ایک نیا کنٹینر لایا جاتا ہے۔ 40 دن کے بعد وہاں کل کتنی بوتلیں ہوں گی؟
3. دیے گئے عدد کو تین الگ الگ طریقوں سے دو یا دو سے زیادہ قوتوں کے حاصلِ ضرب کے طور پر لکھیے۔ قوتیں کوئی بھی صحیح اعداد ہو سکتی ہیں۔

(i) 64^3 (ii) 192^8 (iii) 32^{-5}

4. Examine each statement below and find out if it is 'Always True', 'Only Sometimes True', or 'Never True'. Explain your reasoning.

(i) Cube numbers are also square numbers.

(ii) Fourth powers are also square numbers.

(iii) The fifth power of a number is divisible by the cube of that number.

(iv) The product of two cube numbers is a cube number.

(v) q^{46} is both a 4th power and a 6th power (q is a prime number).

5. Simplify and write these in the exponential form.

(i) $10^{-2} \times 10^{-5}$ (ii) $5^7 \div 5^4$ (iii) $9^{-7} \div 9^4$

(iv) $(13^{-2})^{-3}$ (v) $m^5n^{12}(mn)^9$

6. If $12^2 = 144$ what is

(i) $(1.2)^2$ (ii) $(0.12)^2$

(iii) $(0.012)^2$ (iv) 120^2

7. Circle the numbers that are the same -

$2^4 \times 3^6$ $6^4 \times 3^2$ 6^{10} $18^2 \times 6^2$ 6^{24}

8. Identify the greater number in each of the following -

(i) 4^3 or 3^4 (ii) 2^8 or 8^2 (iii) 100^2 or 2^{100}

9. A dairy plans to produce 8.5 billion packets of milk in a year. They want a unique ID (identifier) code for each packet. If they choose to use the digits 0-9, how many digits should the code consist of?

10. 64 is a square number (8^2) and a cube number (4^3). Are there other numbers that are both squares and cubes?
Is there a way to describe such numbers in general?



11. A digital locker has an alpha-numeric (it can have both digits and letters) passcode of length 5. Some example codes are G89P0, 38098, BRJKW, and 003AZ. How many such codes are possible?

12. The worldwide population of sheep (2024) is about 10^9, and that of goats is also about the same. What is the total population of sheep and goats?

(i) 20^9 (ii) 10^{11} (iii) 10^{10}

(iv) 10^{18} (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. Calculate and write the answer in scientific notation:

© NCERT

4. نیچے دیے گئے ہر بیان کا جائزہ لیجیے اور معلوم کیجیے کہ آیا یہ 'ہمیشہ سچ ہے'، 'صرف کبھی کبھی سچ ہے'، یا 'کبھی سچ نہیں ہے'۔ اپنی وجہ دلیل بھی واضح کیجیے۔

(i) مکعب اعداد مربع اعداد بھی ہوتے ہیں۔

(ii) چوتھی قوت والے اعداد مربع اعداد بھی ہوتے ہیں۔

(iii) کسی عدد کی پانچویں قوت، اسی عدد کے مکعب سے تقسیم پذیر ہوتی ہے۔

(iv) دو مکعب اعداد کا حاصلِ ضرب بھی ایک مکعب عدد ہوتا ہے۔

(v) q^{46} ایک چوتھی قوت بھی ہے اور چھٹی قوت بھی ہے (جہاں q ایک مفرد عدد ہے)۔

5. مختصر کیجیے اور انہیں قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

(i) $10^{-2} \times 10^{-5}$ (ii) $5^7 \div 5^4$ (iii) $9^{-7} \div 9^4$

(iv) $(13^{-2})^{-3}$ (v) $m^5 n^{12} (mn^9)$

6. اگر $144 = 12^2$ ہو، تو درج ذیل کی قیمت کیا ہو گی؟

(i) $(1.2)^2$ (ii) $(0.12)^2$

(iii) $(0.012)^2$ (iv) 120^2

7. ان اعداد کے گرد دائرہ بنائیے جو آپس میں برابر ہیں۔

$2^4 \times 3^6$ $6^4 \times 3^2$ 6^{10} $18^2 \times 6^2$ 6^{24}

8. درج ذیل میں سے ہر ایک میں بڑے عدد کی نشان دہی کیجیے۔

(i) 4^3 یا 3^4 (ii) 2^8 یا 8^2 (iii) 100^2 یا 2^{100}

9. ایک ڈیری فارم ایک سال میں 8.5 بلین دودھ کے پیکٹ تیار کرنے کا منصوبہ رکھتا ہے۔ وہ ہر پیکٹ کے لیے ایک منفرد شناختی کوڈ رکھنا چاہتے ہیں۔ اگر وہ کوڈ کے لیے ہندسے 0 سے 9 استعمال کرنے کا فیصلہ کرتے ہیں، تو کوڈ کتنے ہندسوں پر مشتمل ہونا چاہیے؟



10. عدد 64 ایک مربع عدد بھی ہے (8^2) اور ایک مکعب عدد بھی (4^3)۔ کیا کچھ دوسرے اعداد بھی ایسے ہیں جو مربع اور مکعب دونوں ہوں؟ کیا عام طور پر ایسے اعداد کی وضاحت کرنے کا کوئی طریقہ موجود ہے؟

11. ایک ڈیجیٹل لاکر کا الفانیومیرک (جس میں ہندسے اور حروف دونوں ہو سکتے ہیں) پاس کوڈ ہے جس کی لمبائی 5 ہے۔ کوڈ کی کچھ مثالیں یہ ہیں G89P0، 38098، BRJKW، اور 003AZ۔ ایسے کل کتنے ممکنہ کوڈز بنائے جا سکتے ہیں؟

12. دنیا بھر میں بھیڑوں کی آبادی (2024) تقریباً 10^9 ہے، اور بکریوں کی آبادی بھی تقریباً اتنی ہی ہے۔ بھیڑوں اور بکریوں کی کل ملا کر آبادی کتنی ہو گی؟

(i) 20^9 (ii) 10^{11} (iii) 10^{10}

(iv) 10^{18} (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. حساب لگائیے اور جواب کو سائنسی ترقیم میں لکھیے:

APSCERT

(i) If each person in the world had 30 pieces of clothing, find the total number of pieces of clothing.

(ii) There are about 100 million bee colonies in the world. Find the number of honeybees if each colony has about 50,000 bees.

(iii) The human body has about 38 trillion bacterial cells. Find the bacterial population residing in all humans in the world.

(iv) Total time spent eating in a lifetime in seconds.

14. What was the date 1 arab/1 billion seconds ago

Try This

SUMMARY

- We analysed some situations, asked questions, and found answers by first guessing, then modelling the problem statement, followed by making assumptions and approximations to carry out the calculations.
- We experienced how rapid exponential growth, also called multiplicative growth, can be compared to additive growth.
- n^a is $n \times n \times n \times n \times \ldots \times n$ (n multiplied by itself a times) and $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$
- Operations with exponents satisfy
  - $n^a \times n^b = n^{a+b}$
  - $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$
  - $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $(n \neq 0)$
  - $n^a \times m^a = (n \times m)^a$
  - $n^a \div m^a = (n \div m)^a$ $(m \neq 0)$
  - $n^0 = 1$ $(n \neq 0)$
- The scientific notation for the number 308100000 is 3.081×10^8. The standard form of the scientific notation of any number is $x \times 10^y$, where $x \geq 1$ and $x < 10$, and y is an integer.
- Engaging in interesting thought experiments can be used as means to understand how large a number or a quantity is.

APSCERT

(i) اگر دنیا کے ہر شخص کے پاس کپڑوں کے 30 جوڑے (ٹکڑے) ہوں، تو کپڑوں کی کل تعداد معلوم کیجیے۔

(ii) دنیا میں مکھیوں کی تقریباً 100 ملین نو آبادیاں ہیں۔ مکھیوں کی کل تعداد معلوم کیجیے اگر ہر نو آبادی میں تقریباً 50,000 مکھیاں ہوں۔

(iii) انسانی جسم میں تقریباً 38 ٹریلین بیکٹیریل سیل (خلیات) ہوتے ہیں۔ دنیا کے تمام انسانوں کے جسموں میں موجود کل بیکٹیریا کی آبادی معلوم کیجیے۔

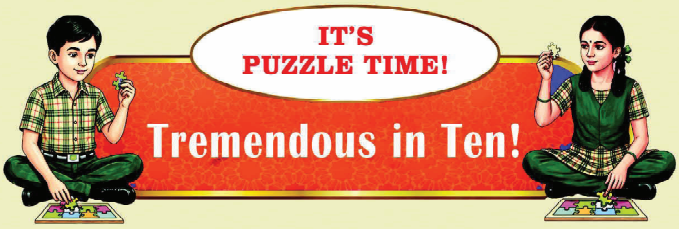
(iv) زندگی بھر میں کھانا کھانے پر گزارا جانے والا کل وقت سیکنڈوں میں معلوم کیجیے۔

یہ بھی کیجیے

1. آج سے 1 ارب / 1 بلین سیکنڈ پہلے کون سی تاریخ تھی؟

خلاصہ

- ہم نے کچھ صورتحال کا تجزیہ کیا، سوالات پوچھے، اور سب سے پہلے تخمینہ لگا کر، پھر مسئلہ کے بیان کا ماڈل تیار کر کے، اور اس کے بعد حساب کتاب کرنے کے لیے کچھ مفروضے اور اندازے قائم کر کے جوابات معلوم کیے۔
- ہم نے تجربہ کیا کہ کس طرح تیز قوت نمائی اضافہ، جسے ضربی اضافہ بھی کہا جاتا ہے، کا موازنہ جمعی اضافے سے کیا جا سکتا ہے۔
- n^a سے مراد $n \times n \times n \times n \times ... \times n$ ہے (n کو اپنے آپ سے a مرتبہ ضرب دیا گیا ہے) اور $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$ ہوتا ہے۔
- قوت نما کے ساتھ کیے جانے والے عمل درج ذیل قوانین پر پورا اترتے ہیں
  - $n^a \times n^b = n^{a+b}$
  - $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$
  - $n^a \div n^b = n^{a-b}$ جہاں $(n \neq 0)$
  - $n^a \times m^a = (n \times m)^a$
  - $n^a \div m^a = (n \div m)^a$ جہاں $(m \neq 0)$
  - $n^0 = 1$ جہاں $(n \neq 0)$
- عدد 308100000 کے لیے سائنسی ترقیم 3.081×10^8 ہے۔ کسی بھی عدد کی سائنسی ترقیم کی معیاری شکل $x \times 10^y$ ہوتی ہے، جہاں $1 \leq x < 10$ ہو، اور y کوئی صحیح عدد ہو۔
- دلچسپ فکری تجربات میں شامل ہونا اس بات کو سمجھنے کا ایک ذریعہ بن سکتا ہے کہ کوئی عدد یا مقدار کتنی بڑی ہے۔ (اس کا عمومی مفہوم یہ ہے کہ بہت بڑی مقداریں جو ہماری عام فہم سے باہر ہوتی ہیں، انہیں معلوم اور مانوس چیزوں کے موازنے سے بہتر طور پر سمجھا جا سکتا ہے۔)



Find a partner to play this game with. In 10 seconds, the person who writes a number or an expression, using only the digits 0 - 9 and arithmetic operations, that gives a number that is the larger between the two wins the round.

10000000000000 999999×999999

In Round 1, Rekha wrote 10000000000000 and Raju wrote 999999×999999. Between these two, Rekha's number is greater. Can you see why? Rekha's number is 10^{13}, whereas Raju's number is less than $(10^6)^2$.

In Round 2, Rekha wrote $10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ and Raju wrote $(10^{1000000}) \times 9000$. Can you say which is greater?

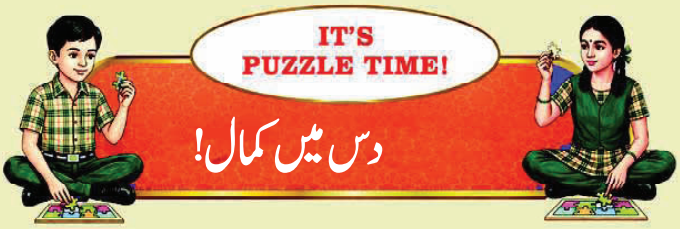
$10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ $10^{1000000} \times 9000$

Below are some conditions that you may consider for different rounds.

(i) Exponents are not allowed. Only addition is allowed.
(ii) Exponents are not allowed. Only addition and multiplication are allowed.
(iii) Exponents are allowed. Only addition is allowed.
(iv) Exponents are allowed. Any arithmetic operation is allowed.

You can create your own conditions and/or involve more people to play together.





اس کھیل کو کھیلنے کے لیے اپنے ساتھ ایک ساتھی (پارٹنر) تلاش کیجیے۔ 10 سیکنڈ کے اندر، جو شخص صرف ہندسوں 0 سے 9 اور ریاضیاتی اعمال کا استعمال کرتے ہوئے ایسا عدد یا ریاضیاتی عبارت لکھے گا جس کی قیمت دونوں میں بڑی ہو، وہ اس راؤنڈ کا فاتح ہو گا۔

10000000000000 999999×999999

راؤنڈ 1 میں، ریکھا نے 10000000000000 لکھا اور راجو نے 999999×999999 لکھا۔ ان دونوں میں سے ریکھا کا عدد بڑا ہے۔ کیا آپ سمجھ سکتے ہیں کہ کیوں؟ ریکھا کا عدد 10^{13} ہے، جبکہ راجو کا عدد $(10^6)^2$ سے کم ہے۔

راؤنڈ 2 میں، ریکھا نے $10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ لکھا اور راجو نے $9000 \times (10^{1000000})$ لکھا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان میں سے کون سا بڑا ہے؟

$10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ $10^{1000000} \times 9000$

نیچے کچھ شرائط دی گئی ہیں جن پر آپ مختلف راؤنڈز کے لیے غور کر سکتے ہیں۔

(i) قوت نما کی اجازت نہیں ہے۔ صرف جمع کرنے کی اجازت ہے۔

(ii) قوت نما کی اجازت نہیں ہے۔ صرف جمع اور ضرب کی اجازت ہے۔

(iii) قوت نما کی اجازت ہے۔ صرف جمع کرنے کی اجازت ہے۔

(iv) قوت نما کی اجازت ہے۔ کسی بھی ریاضیاتی اعمال کی اجازت ہے۔

آپ کھیل کے لیے اپنی خود کی شرائط بھی بنا سکتے ہیں اور / یا ایک ساتھ کھیلنے کے لیے مزید لوگوں کو بھی شامل کر سکتے ہیں۔



3 A STORY OF NUMBERS

Learning outcomes

Learners will be able to

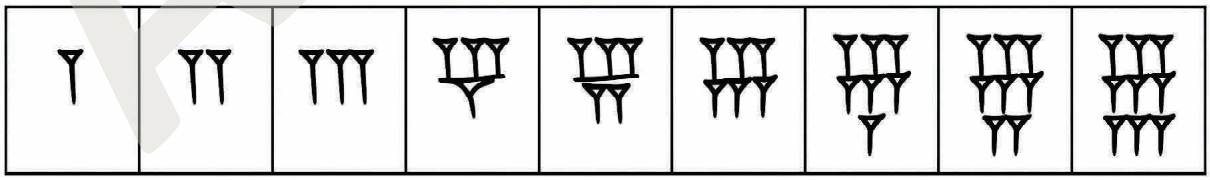
- Read, write, and compare sets of numbers and large numbers up to 10 digits. (CG-1)
- Understand the different number systems. (CG-1)
- Identify and Appreciate relationships between numbers. (CG-1)
- Recognise and create patterns in numbers and operations. (CG-1)
- Apply scientific notation using exponents and powers. (CG-1)

H4Q8F5

3.1 Hasantika's Curiosity

One lazy afternoon, Hasantika was flipping through an old book when - whoosh! - a piece of paper slipped out and floated to the floor. She picked it up and stared at the strange symbols all over it. "What is this?" she wondered.

She ran to her father, holding the paper as if it were a secret treasure. He looked at it and smiled. "Around 4000 years ago, there flourished a civilisation in a region called Mesopotamia, in the western part of Asia, containing a major part of the present-day Iraq and a few other neighbouring countries. This is one of the ways they wrote their numbers!"



Hasantika's eyes lit up, "Seriously? These strange symbols were numbers?" Her curiosity was sparked, and questions started swirling in her head.

3 اعداد کی کہانی

C3H7R2

اکتسابی نتائج :

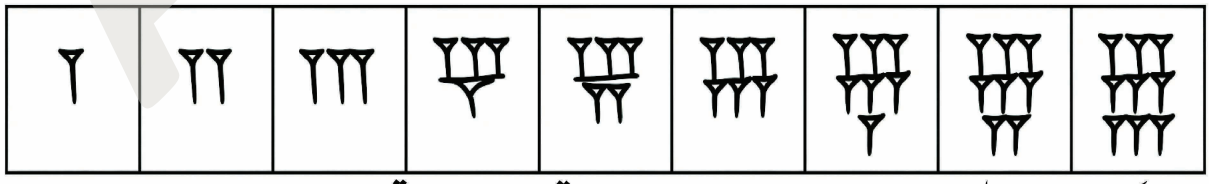
طلبہ اس قابل بنیں گے

- 10 ہندسوں تک کے اعداد کے مجموعوں اور بڑے اعداد کو پڑھیں گے، لکھیں گے اور موازنہ کریں گے۔(CG-1)
- مختلف عددی نظاموں کو سمجھیں گے۔(CG-1)
- اعداد کے درمیان تعلقات کو شناخت کریں گے اور ان کی قدر کریں گے۔(CG-1)
- اعداد اور عملیات میں نمونوں کو پہچانیں گے اور بنائیں گے۔(CG-1)
- قوت اور قوت نما کو استعمال کرتے ہوئے سائنسی طرز لا گو کریں گے۔(CG-1)

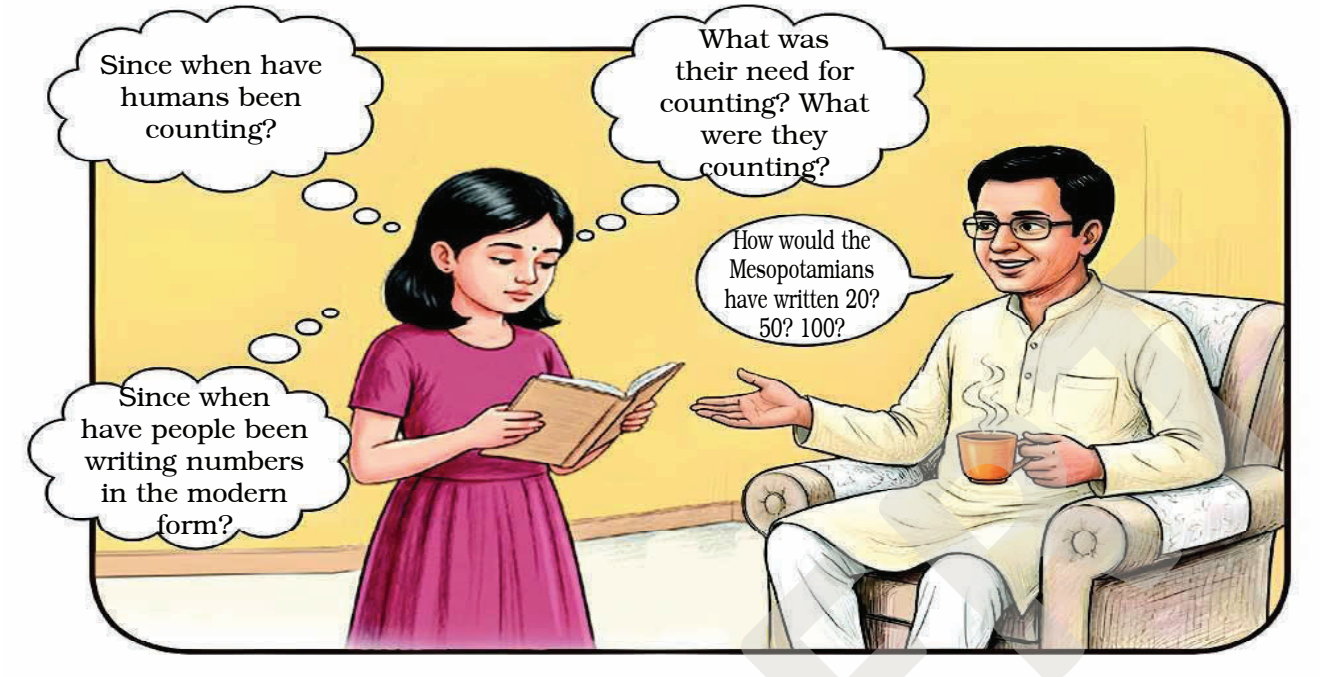
3.1 ہسنتکا کا تجسس

ایک سست دوپہر، ہسنتکا ایک پرانی کتاب کے اوراق پلٹ رہی تھی کہ اچانک — سرسراہٹ کے ساتھ — ایک کاغذ کا ٹکڑا پھسل کر فرش پر آگرا۔ اس نے اسے اٹھایا اور اس پر بنی عجیب علامتوں کو غور سے دیکھنے لگی۔ "یہ کیا ہے؟" اس نے سوچا۔

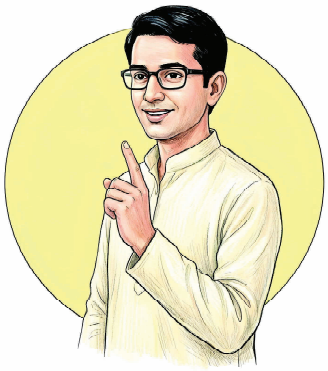
وہ اس کاغذ کو ایسے تھامے اپنے والد کے پاس بھاگی جیسے یہ کوئی خفیہ خزانہ ہو۔ انہوں نے اسے دیکھا اور مسکرائے۔ "تقریباً 4000 سال پہلے، ایشیا کے مغربی حصے میں میسوپوٹیمیا نامی ایک علاقے میں ایک تہذیب پھلی پھولی، جس میں آج کے عراق کا بڑا حصہ اور چند دیگر پڑوسی ممالک شامل ہیں۔ یہ ان کے اعداد لکھنے کے طریقوں میں سے ایک ہے"!



ہسنتکا کی آنکھیں چمک اٹھیں، "سچ میں؟ یہ عجیب علامتیں اعداد تھیں؟" اس کا تجسس جاگ اٹھا اور اس کے ذہن میں سوالوں کا طوفان اٹھنے لگا۔

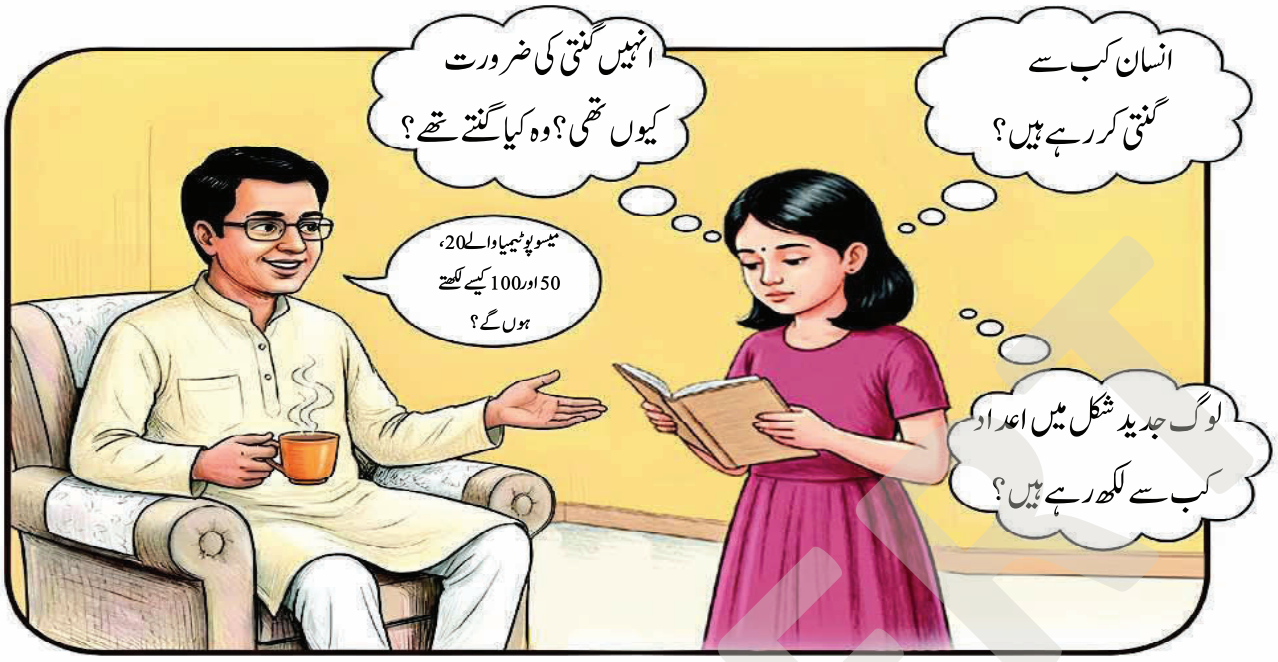


Sensing her curiosity, her father started telling her how the idea of number and number representation evolved over the course of time, across geographies, to finally reach its modern efficient form.
Get ready to travel back in time with them!



Humans had the need to count even as early as the Stone Age. They were counting to determine the quantity of food they had, the number of animals in their livestock, details regarding trades of goods, the number of offerings given in rituals, etc. They also wanted to keep track of the passing days, e.g., to know and predict when important events such as the new moon, full moon, or onset of a season would occur. However, when they said or wrote down such numbers, they didn't make use of the numbers that we use today.

The structure of the modern oral and written numbers that we use today had its origin thousands of years ago in India. Ancient Indian texts, such as the Yajurveda Samhita, mentioned names of numbers based on powers of 10, almost as we say them orally today. For example, they listed names for the numbers one (eka), ten (dasha), hundred (shata), thousand (sahasra), ten thousand (ayuta), etc., all the way up to 10^{12} and beyond.



اس کے تجسس کو بھانپ کر اس کے والد نے اسے بتانا شروع کیا کہ کس طرح عدد اور اعداد کی نمائندگی کا تصور وقت کے ساتھ ساتھ مختلف جغرافیائی علاقوں میں ارتقاء پاتے ہوئے آخر کار اپنی جدید اور موثر شکل تک پہنچا۔

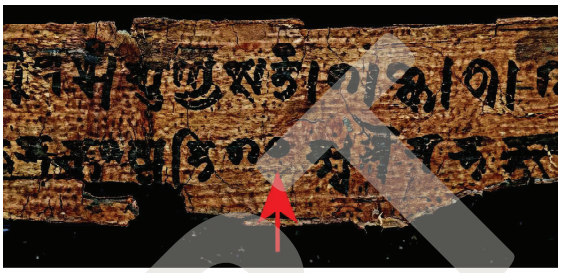
ان کے ساتھ وقت میں پیچھے سفر کرنے کے لیے تیار ہو جایئے!



انسانوں کو گنتی کی ضرورت پتھر کے دور جتنی پرانی ہے۔ وہ اپنے پاس موجود خوراک کی مقدار، مویشیوں کی تعداد، سامان کی خرید و فروخت کی تفصیلات، رسومات میں دی جانے والی نذرانوں کی تعداد وغیرہ جاننے کے لیے گنتی کرتے تھے۔ وہ گزرتے دنوں کا حساب بھی رکھنا چاہتے تھے، مثلاً یہ جاننے اور پیش گوئی کرنے کے لیے کہ اہم واقعات جیسے نیا چاند، پورا چاند یا کسی موسم کا آغاز کب ہو گا۔ تاہم جب وہ ایسے اعداد بولتے یا لکھتے تھے تو وہ آج ہمارے استعمال کردہ اعداد استعمال نہیں کرتے تھے۔

جدید بولے اور لکھے جانے والے اعداد کی ساخت جو ہم آج استعمال کرتے ہیں، ہزاروں سال پہلے ہندوستان میں وجود میں آئی۔ قدیم ہندوستانی متون جیسے یجروید سنہتا میں 10 کی قوتوں پر مبنی اعداد کے نام ذکر کیے گئے ہیں، تقریباً اسی طرح جیسے ہم آج انہیں بولتے ہیں۔ مثال کے طور پر انہوں نے ایک (ایک)، دس (دشا)، سو (شتا)، ہزار (سہسرا)، دس ہزار (ایوت) وغیرہ کے نام درج کیے، یہاں تک کہ 10^{12} اور اس سے آگے تک۔

The way we write our numbers today - using the digits 0 through 9 - also originated and were developed in India, around 2000 years ago. The first known instance of numbers being written using ten digits, including the digit 0 (which was then notated as a dot), occurs in the Bakhshali manuscript (c. 3rd century CE). Aryabhata (c. 499 CE) was the first mathematician to fully explain, and do elaborate scientific computations with the Indian system of 10 symbols.



Zero in the Bakhshali manuscript

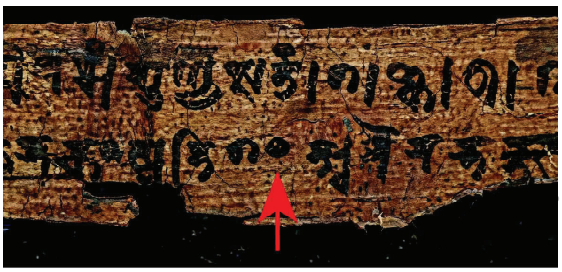
The Indian number system was transmitted to the Arab world by around 800 CE. It was popularised in the Arab world by the great Persian mathematician Al-Khwarizm? (after whom the word 'algorithm' is named) through his book On the Calculation with Hindu Numerals (c. 825) and by the noted philosopher Al-Kindi through his work On the Use of the Hindu Numerals (c. 830).

From the Arab world, the Hindu numerals were transmitted to Europe and to parts of Africa by around 1100 CE. Though Al-Khwarizm?'s work on calculation with Hindu numerals was translated into Latin, it was the Italian mathematician Fibonacci who around the year 1200 really made the case to Europe to adopt the Indian numerals. However, the Roman numerals were so ingrained in European thinking and writing at the time that the Indian numerals did not gain widespread use for several more centuries. But eventually, during the European Renaissance and by the 17th century, not adopting them became impossible or it would impede scientific progress.

"The ingenious method of expressing every possible number using a set of ten symbols (each symbol having a place value and an absolute value) emerged in India. The idea seems so simple nowadays that its significance and profound importance is no longer appreciated. Its simplicity lies in the way it facilitated calculations and placed arithmetic foremost among useful inventions."

- Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

جس طرح ہم آج اعداد لکھتے ہیں — 0 سے 9 تک کے ہندسے استعمال کر کے — یہ بھی تقریباً 2000 سال پہلے ہندوستان میں وجود میں آیا اور ترقی پایا۔ دس ہندسوں، بشمول ہندسہ 0 (جسے اس وقت نقطے کی صورت میں لکھا جاتا تھا)، کے ذریعے اعداد لکھے جانے کی پہلی معلوم مثال بخشالی مخطوطے (تقریباً تیسری صدی عیسوی) میں ملتی ہے۔



آریہ بھٹ (تقریباً 499 عیسوی) پہلے ریاضی دان تھے جنہوں نے 10 علامتوں کے ہندوستانی نظام کو مکمل طور پر وضاحت کی اور اس سے پیچیدہ سائنسی حسابات کیے۔

ہندوستانی عددی نظام تقریباً 800 عیسوی تک عرب دنیا میں پہنچا۔ عظیم فارسی ریاضی دان الخوارزمی (جن کے نام پر لفظ 'الگورتھم' رکھا گیا) نے اپنی کتاب "ہندسی اعداد سے حساب پر" (تقریباً 825) اور نامور فلسفی الکندی نے اپنی تصنیف "ہندسی اعداد کے استعمال پر" (تقریباً 830) کے ذریعے اسے عرب دنیا میں مقبول کیا۔

عرب دنیا سے ہندسی اعداد تقریباً 1100 عیسوی تک یورپ اور افریقہ کے کچھ حصوں میں پہنچے۔ اگرچہ الخوارزمی کی ہندسی اعداد سے حساب کی تصنیف کا لاطینی میں ترجمہ ہو چکا تھا، لیکن اطالوی ریاضی دان فیبوناچی نے تقریباً 1200 عیسوی میں یورپ کو ہندوستانی اعداد اپنانے پر قائل کرنے میں اہم کردار ادا کیا۔ تاہم اس وقت رومن اعداد یورپی سوچ اور تحریر میں اس قدر رچے بسے تھے کہ ہندوستانی اعداد کئی مزید صدیوں تک عام استعمال میں نہ آ سکے۔ لیکن بالآخر یورپی نشاۃ الثانیہ کے دوران اور 17 ویں صدی تک انہیں نہ اپنانا ناممکن ہو گیا ورنہ سائنسی ترقی رک جاتی۔

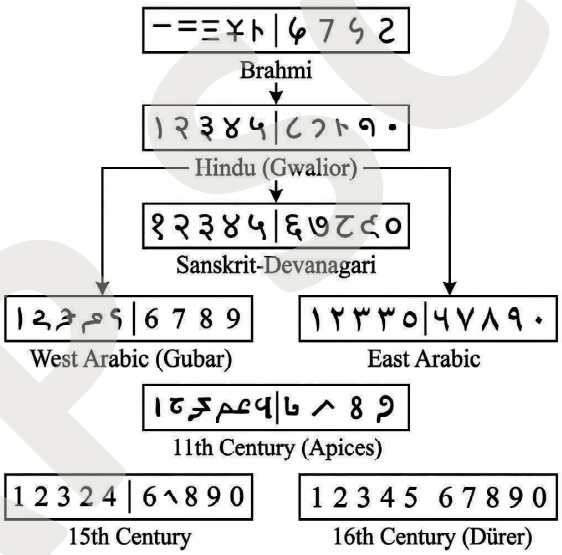
"ہر ممکن عدد کو دس علامتوں کے ایک مجموعے سے ظاہر کرنے کا ذہین طریقہ (جہاں ہر علامت کی ایک مقامی قدر اور ایک مطلق قدر ہو) ہندوستان میں ابھرا۔ آج یہ خیال اتنا سادہ لگتا ہے کہ اس کی اہمیت اور گہرے معنی کو اب سراہا نہیں جاتا۔ اس کی سادگی اس طریقے میں ہے جس سے اس نے حسابات کو آسان بنایا اور ریاضی کو مفید ایجادات میں سرفہرست کر دیا۔"

— پیئر سیمون لاپلاس (1749 - 1827)

Their use then spread to every continent, and are now used in every corner of the world.

Because European scholars learned the Indian numerals from the Arab world, they called them 'Arabic numerals' to reflect their European perspective. On the other hand, as noted above, Arab scholars, such as Al-Khwarizmi and Al-Kindi, called them 'Hindu numerals'. During the period of European colonisation, the European term Arabic numbers became widely used. However, in recent years, this mistake is being corrected in many textbooks and documents around the world, including in Europe. The most commonly used terminologies for the numbers we use today are ?Hindu numerals', ?Indian numerals', and the transitional Hindu-Arabic numerals'. It is worth noting that the word ?Hindu' here does not refer to a religion, but rather a geography/people from whom these numbers came.

The shape of the digits 0, 1, 2, ..., 9 used to write numbers in the Indian number system today evolved over a period of time, as shown below:



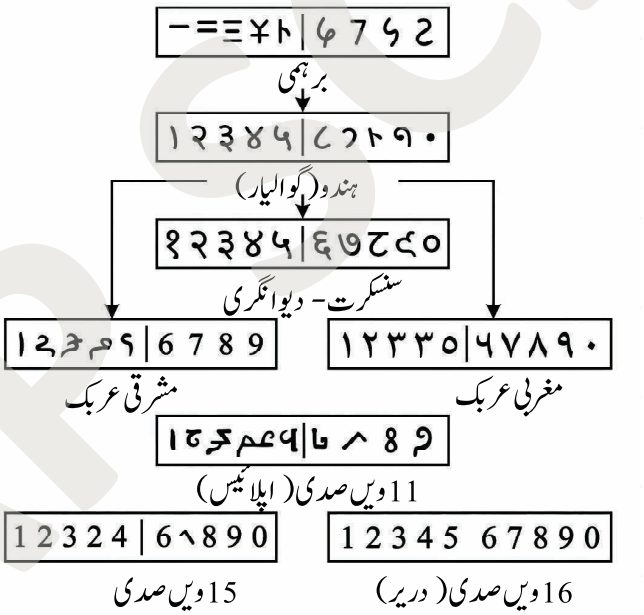
Evolution of the digits used in the Indian number system

Prior to the global adoption of the Indian system of numerals, different groups of people used different methods of representing numbers. We shall take a glimpse of some of them. We will not be looking at different systems in a chronological order, but rather an order that shows us the main stages in the development of the idea of number representation.

اس کے بعد ان کا استعمال ہر براعظم میں پھیل گیا اور اب یہ دنیا کے ہر کونے میں استعمال ہوتے ہیں۔

چونکہ یورپی علماء نے ہندوستانی اعداد عرب دنیا سے سیکھے اس لیے انہوں نے اپنے یورپی نقطہ نظر کو ظاہر کرتے ہوئے انہیں "عربی اعداد" کہا۔ دوسری طرف جیسا کہ اوپر ذکر ہوا، الخوارزمی اور الکندی جیسے عرب علماء انہیں "ہندسی اعداد" کہتے تھے۔ یورپی نو آبادیاتی دور میں یورپی اصطلاح "عربی اعداد" وسیع پیمانے پر استعمال ہونے لگی۔ تاہم حالیہ برسوں میں یورپ سمیت دنیا بھر کی بہت سی درسی کتابوں اور دستاویزات میں اس غلطی کو درست کیا جا رہا ہے۔ آج ہم جو اعداد استعمال کرتے ہیں ان کے لیے سب سے زیادہ استعمال ہونے والی اصطلاحات "ہندسی اعداد"، "ہندوستانی اعداد" اور عبوری "ہندو-عربی اعداد" ہیں۔ یہ بات قابلِ ذکر ہے کہ یہاں "ہندو" کا لفظ کسی مذہب کی طرف نہیں بلکہ اس جغرافیائی علاقے اور لوگوں کی طرف اشارہ کرتا ہے جہاں سے یہ اعداد آئے۔

آج ہندوستانی عددی نظام میں اعداد لکھنے کے لیے استعمال ہونے والے ہندسوں 0، 1، 2، ...، 9 کی شکل وقت کے ساتھ ساتھ ارتقاء پاتی رہی، جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے



ہندوستانی عددی نظام میں استعمال ہونے والے ہندسوں کا ارتقا

ہندی نظام اعداد کو عالمی سطح پر اختیار کیے جانے سے پہلے مختلف اقوام اور گروہ اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے مختلف طریقے استعمال کرتے تھے۔ ہم ان میں سے بعض طریقوں کا مختصر جائزہ لیں گے۔ ہم مختلف نظاموں کا مطالعہ تاریخی ترتیب کے مطابق نہیں کریں گے، بلکہ ایسی ترتیب سے کریں گے جو ہمیں اعداد کی نمائندگی کے تصور کی ترقی کے اہم مراحل کو سمجھنے میں مدد دے۔

But first, let us explore some of the foundational ideas needed to count and to determine the number of objects in a given collection.

The Mechanism of Counting

Imagine that we are living in the Stone Age, say, around ten thousand years ago. Suppose we have a herd of cows. Here are some natural questions that we might ask about our herd -

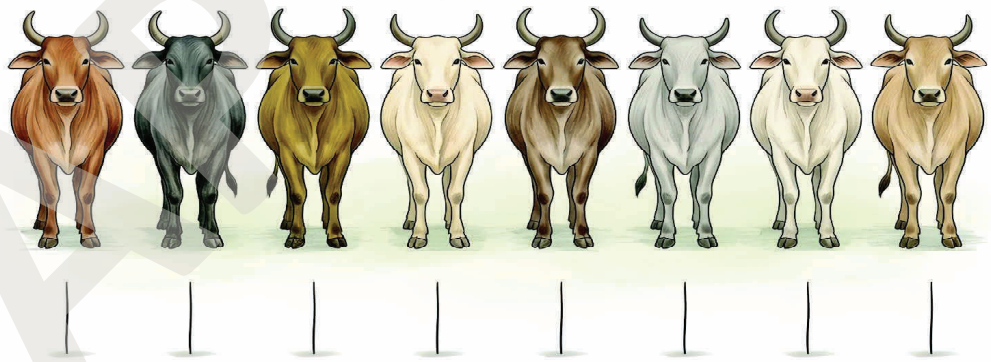


- Q 1. How do we ensure that all cows have returned safely after grazing?
- Q 2. Do we have fewer cows than our neighbour?
- Q 3. If there are fewer, how many more cows would we need so that we have the same number of cows as our neighbour?

We need to tackle these questions without the use of the number names or written numbers of the Hindu number system. How do we do it?

Here are some possible methods.

Method 1: We could tackle the questions by using pebbles, sticks or any object that is available in abundance. Let us choose sticks. For every cow in the herd, we could keep a stick. The final collection of sticks tells us the number of cows, which can be used to check if any cows have gone missing.



This way of associating each cow with a stick, such that no two cows are associated or mapped to the same stick is called a one-to-one mapping. This mapping can then be used to come up with a way to represent numbers, as shown in the table.

لیکن پہلے آیئے ان بنیادی تصورات کو دریافت کرتے ہیں جو گنتی کرنے اور کسی مجموعے میں اشیاء کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ضروری ہیں۔

گنتی کا طریقہ کار

تصور کیجیے کہ ہم پتھر کے دور میں رہ رہے ہیں، تقریباً دس ہزار سال پہلے۔

فرض کیجیے کہ ہمارے پاس گائیوں کا ایک ریوڑ ہے۔

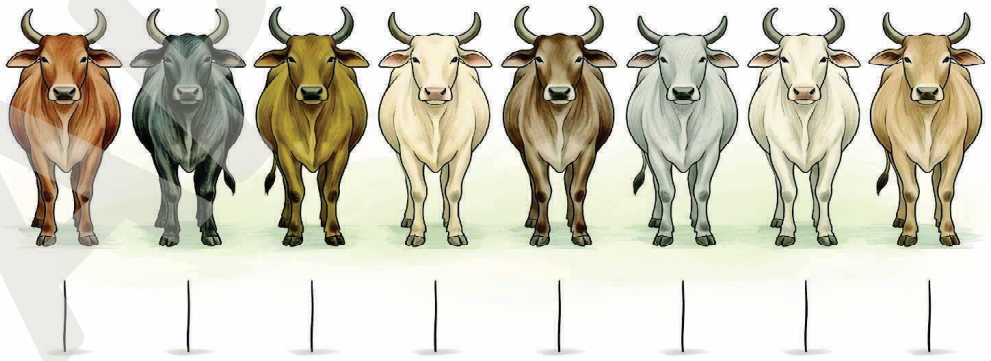
ریاضی بحث

یہاں کچھ فطری سوالات ہیں جو ہم اپنے ریوڑ کے بارے میں پوچھ سکتے ہیں:

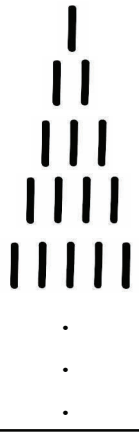
- **سوال 1 :** ہم کیسے یقین کریں کہ چرنے کے بعد تمام گائیں محفوظ واپس آگئی ہیں؟
- **سوال 2 :** کیا ہمارے پاس اپنے پڑوسی سے کم گائیں ہیں؟
- **سوال 3 :** اگر کم ہیں تو ہمیں کتنی مزید گائیں چاہیے تاکہ ہمارے پاس پڑوسی کے برابر گائیں ہو جائیں؟

ہمیں یہ سوالات ہندوستانی عددی نظام کے ناموں یا لکھے ہوئے اعداد استعمال کیے بغیر حل کرنے ہیں۔ ہم یہ کیسے کریں؟ یہ رہے کچھ ممکنہ طریقے۔

طریقہ 1 : ہم کنکر، لکڑیاں یا کوئی بھی ایسی چیز استعمال کر کے ان سوالات کو حل کر سکتے ہیں جو کثرت سے دستیاب ہو۔ آیئے لکڑیاں منتخب کرتے ہیں۔ ریوڑ کی ہر گائے کے لیے ہم ایک لکڑی رکھ سکتے ہیں۔ لکڑیوں کا آخری مجموعہ ہمیں گائیوں کی تعداد بتاتا ہے جسے یہ جانچنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے کہ کوئی گائے گم تو نہیں ہوئی۔



ہر گائے کو ایک لکڑی سے اس طرح جوڑنے کا یہ طریقہ کہ کوئی دو گائیں ایک ہی لکڑی سے نہ جڑی ہوں، یک بہ یک نگاشت کہلاتا ہے۔ اس نگاشت کو پھر اعداد ظاہر کرنے کے طریقے کے طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے، جیسا کہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔

Number	Its representation (using sticks)
1	
2	
3	
4	
5	
.	.
.	.
.	.

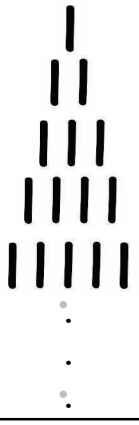
How will you use such sticks to answer the other two questions (Q2 and Q3)?

Method 2: Instead of objects, we could use a standard sequence of sounds or names. For example, we could use the sounds of the letters of any language. While counting, we could make a one-to-one mapping between the objects and the letters: that is, associate each object to be counted with a letter, following the letter-order. This mapping can then be used to come up with a way of verbally representing numbers.

For example, we get the following number representation if we use English letters 'a' to 'z'.

Number	Its representation (using sounds or names)
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
.	.
.	.
.	.
26	z

APSCERT

یہ ظاہر کرتا ہے (کاڑیاں کا استعمال سے)	عدد
	1 2 3 4 5 . . .

آپ ان لکڑیوں کو باقی دو سوالات (سوال 2 اور سوال 3) کے جوابات دینے کے لیے کیسے استعمال کریں گے ؟

طریقہ 2 : اشیاء کی بجائے ہم آوازوں یا ناموں کی ایک معیاری ترتیب استعمال کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کسی بھی زبان کے حروف کی آوازیں استعمال کر سکتے ہیں۔ گنتی کرتے وقت ہم اشیاء اور حروف کے درمیان یک بہ یک نگاشت بنا سکتے ہیں: یعنی گنی جانے والی ہر شے کو حروف کی ترتیب کے مطابق ایک حرف سے جوڑیں۔ اس نگاشت کو پھر اعداد کو زبانی ظاہر کرنے کے طریقے کے طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر ہم انگریزی حروف 'a' سے 'z' تک استعمال کریں تو ہمیں اعداد کی درج ذیل نمائندگی ملتی ہے۔

یہ ظاہر کرتا ہے (آوازوں یا حروف کا استعمال سے)	عدد
a	1
b	2
c	3
d	4
e	5
.	.
.	.
.	.
z	26

An obvious limitation of using only the letters of the English alphabet in this form is that it cannot be used to count collections having more than 26 objects.



? How many numbers can you represent in this way using the sounds of the letters of your language?

Method 3: We could use a sequence of written symbols as follows.

Table 1

Number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Representation using symbols	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Number	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Representation using symbols	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

? Do you see a way of extending this method to represent bigger numbers as well? How?

From the discussion above, we see that for counting and finding the size of a collection, we need a standard sequence of objects, or names, or written symbols, that has a fixed order. Let us call this standard sequence a **number system**. A collection of objects can be counted by making a one-to-one mapping between them and the standard sequence, following the sequence order.

Since there is no end to numbers, the challenge is to come up with an unending standard sequence/number system that is easy to count with. Using sticks gives an unending standard sequence/number system. However, it is not convenient to count larger collections, as we will need as many sticks as the number of objects being counted. Using the sounds of the letters of a language, as in Method 2, is convenient for the counting process but is not an unending standard sequence/number system. The standard sequence/number system given in Method 3 was actually the system used in Europe before it got replaced by the Hindu number system. It is called the **Roman number system**.

APSCERT

صرف انگریزی حرفِ تہجی کو اس شکل میں استعمال کرنے کی ایک واضح حد یہ ہے کہ اسے 26 سے زیادہ اشیاء والے مجموعوں کی گنتی کے لیے استعمال نہیں کیا جا سکتا۔



? اپنی زبان کے حروف کی آوازوں کو اس طرح استعمال کر کے آپ کتنے اعداد ظاہر کر سکتے ہیں؟

طریقہ 3 : ہم لکھی ہوئی علامتوں کی ایک ترتیب اس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

جدول–1

عدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
علامتوں کے ذریعے اظہار	I	I I	I I I	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
عدد	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
علامتوں کے ذریعے اظہار	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

? کیا آپ اس طریقے کو بڑے اعداد ظاہر کرنے کے لیے بھی بڑھانے کا کوئی طریقہ دیکھتے ہیں؟ کیسے ؟

اوپر کی بحث سے ہم دیکھتے ہیں کہ گنتی کرنے اور کسی مجموعے کا حجم معلوم کرنے کے لیے ہمیں اشیاء، ناموں یا لکھی ہوئی علامتوں کی ایک ایسی معیاری ترتیب کی ضرورت ہے جس کی ایک مقررہ ترتیب ہو۔ آیئے اس معیاری ترتیب کو **عددی نظام** کہتے ہیں۔ اشیاء کے ایک مجموعے کو اس معیاری ترتیب کے ساتھ یک بہ یک نگاشت بنا کر، ترتیب کی پیروی کرتے ہوئے، گنا جا سکتا ہے۔

چونکہ اعداد کا کوئی انت نہیں، اس لیے چیلنج یہ ہے کہ ایک ایسی لامتناہی معیاری ترتیب یا عددی نظام تیار کیا جائے جس سے گنتی کرنا آسان ہو۔ لکڑیاں استعمال کرنا ایک لامتناہی معیاری ترتیب یا عددی نظام فراہم کرتا ہے۔ تاہم بڑے مجموعوں کی گنتی کے لیے یہ آسان نہیں کیونکہ ہمیں اتنی ہی لکڑیاں چاہیے جتنی گنی جانے والی اشیاء کی تعداد ہو۔ طریقہ 2 کی طرح کسی زبان کے حروف کی آوازیں استعمال کرنا گنتی کے عمل کے لیے تو آسان ہے لیکن یہ لامتناہی معیاری ترتیب یا عددی نظام نہیں ہے۔ طریقہ 3 میں دی گئی معیاری ترتیب یا عددی نظام در حقیقت وہی نظام تھا جو یورپ میں ہندوستانی عددی نظام سے بدلے جانے سے پہلے استعمال ہوتا تھا۔ اسے **رومن عددی نظام** کہتے ہیں۔

It was widely used in Europe for centuries, and was convenient for many purposes, but had the similar drawback that one cannot write arbitrarily large numbers without introducing more and more symbols. We will learn more about this system of writing numbers later on.



As illustrated by the three methods, history gives us examples of number systems formed using physical objects (such as sticks, pebbles, body parts, etc.), names, and written symbols. Some groups of people had numbers represented both by physical objects as well as by names, while others like the Chinese had all three forms of representation. The symbols occurring in a written number system are called **numerals**. For example, 0, 1, 5, 36, 193, etc., are some of the numerals occurring in the Hindu number system. Numerals representing 'smaller' numbers always had names, and so a number system composed of written symbols always went hand in hand with a number system composed of names, as is the case with the modern-day Hindu system.



Figure it Out - 3.1

1. Suppose you are using the number system that uses sticks to represent numbers, as in Method 1. Without using either the number names or the numerals of the Hindu number system, give a method for adding, subtracting, multiplying and dividing two numbers or two collections of sticks.
2. One way of extending the number system in Method 2 is by using strings with more than one letter - for example, we could use 'aa' for 27. How can you extend this system to represent all the numbers?

یہ صدیوں تک یورپ میں بڑے پیمانے پر استعمال ہوتا رہا اور بہت سے مقاصد کے لیے آسان تھا، لیکن اس میں بھی یہی خامی تھی کہ نئی علامتیں متعارف کرائے بغیر بے حد بڑے اعداد نہیں لکھے جاسکتے۔ اس اعداد لکھنے کے نظام کے بارے میں ہم بعد میں مزید جانیں گے۔



جیسا کہ تین طریقوں سے واضح ہوا، تاریخ ہمیں مادی اشیاء (جیسے لکڑیاں، کنکر، جسم کے اعضاء وغیرہ)، ناموں اور لکھی ہوئی علامتوں سے بنے عددی نظاموں کی مثالیں دیتی ہے۔ کچھ گروہوں کے پاس اعداد مادی اشیاء اور ناموں دونوں سے ظاہر کیے جاتے تھے، جبکہ چینیوں جیسے کچھ لوگوں کے پاس تینوں قسم کی نمائندگی موجود تھی۔ کسی لکھے ہوئے عددی نظام میں آنے والی علامتیں ہندسے کہلاتی ہیں۔ مثال کے طور پر 0، 1، 5، 36، 193 وغیرہ ہندوستانی عددی نظام میں آنے والے کچھ ہندسے ہیں۔ "چھوٹے" اعداد کو ظاہر کرنے والے ہندسوں کے ہمیشہ نام ہوتے تھے، اس لیے لکھی ہوئی علامتوں پر مشتمل عددی نظام ہمیشہ ناموں پر مشتمل عددی نظام کے ساتھ ساتھ چلتا تھا، جیسا کہ جدید ہندوستانی نظام کا معاملہ ہے۔



حل کیجیے – 3.1

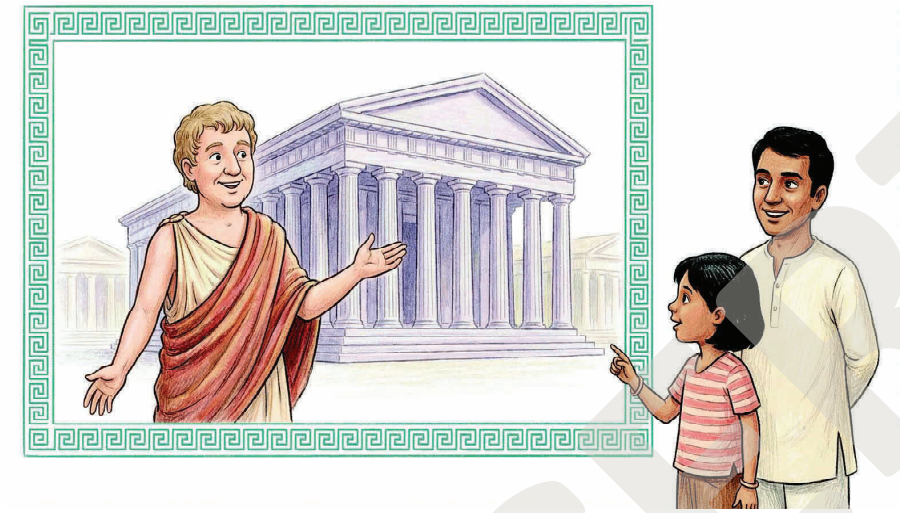
1۔ فرض کیجیے کہ آپ وہ عددی نظام استعمال کر رہے ہیں جو طریقہ 1 کی طرح اعداد ظاہر کرنے کے لیے لکڑیاں استعمال کرتا ہے۔ ہندوستانی عددی نظام کے نہ تو نام اور نہ ہی ہندسے استعمال کرتے ہوئے، لکڑیوں کے دو اعداد یا دو مجموعوں کو جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کرنے کا طریقہ بتائیے۔

2۔ طریقہ 2 میں عددی نظام کو بڑھانے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ایک سے زیادہ حروف والے مجموعے استعمال کیے جائیں — مثال کے طور پر ہم 27 کے لیے 'aa' استعمال کرسکتے ہیں۔ آپ اس نظام کو تمام اعداد ظاہر کرنے کے لیے کیسے بڑھائیں گے؟

There are many ways of doing it!

3. Try making your own number system.

3.2 The Roman Numerals



We have already seen the Roman number system till 20 (Table 1). We have seen that it uses I for 1, V for 5, X for 10.

To get the Roman numeral for any number till 39, it is first grouped into as many 10s as possible, the remaining is grouped into as many 5s as possible, and finally the remaining is grouped into 1s.

Example: Let us take the number 27.

27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1

So, 27 in Roman numerals is XXVII.

Instead of representing 50 as XXXXX, a new symbol is given to it: L. Following the way the number 4 is represented as 1 less than 5 - that is, as IV - 40 is represented as 10 less than 50 - that is, as XL. However, people using this system were not always consistent with this practice. Sometimes, 40 was also represented as XXXX.

The Roman number system introduces newer symbols to represent certain bigger numbers. Let us call all these numbers that have a new basic symbol as landmark numbers. Here are some of the **landmark numbers** of the Roman system and their associated numerals.

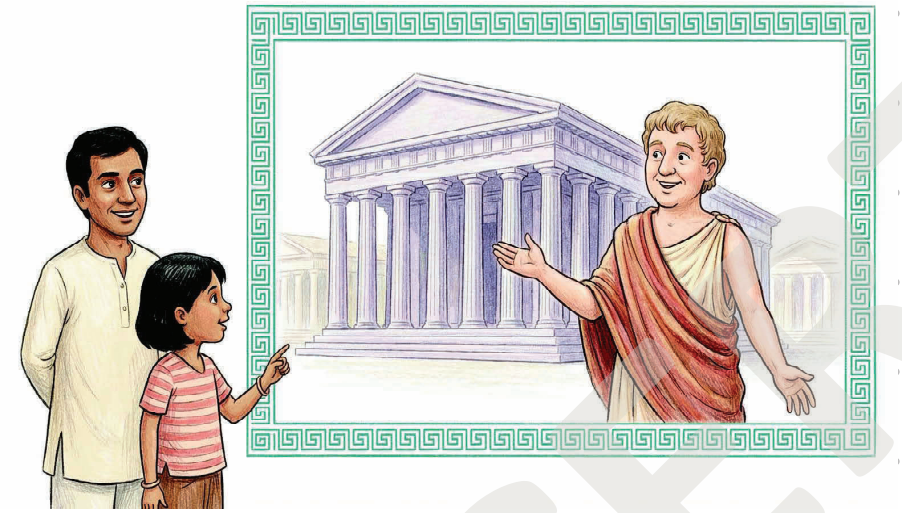
I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1,000

APSCERT

اسے کرنے کے بہت سے طریقے ہیں!

3۔ اپنا عددی نظام بنانے کی کوشش کیجیے۔

3.2 رومن ہندسے



ہم رومن عددی نظام کو 20 تک (جدول 1 میں) پہلے ہی دیکھ چکے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ یہ 1 کے لیے I، 5 کے لیے V اور 10 کے لیے X استعمال کرتا ہے۔

39 تک کسی بھی عدد کا رومن ہندسہ حاصل کرنے کے لیے پہلے اسے جتنے ممکن ہو سکے 10 کے گروہوں میں تقسیم کریں، باقی کو جتنے ممکن ہو سکے 5 کے گروہوں میں تقسیم کریں، اور آخر میں باقی کو 1 کے گروہوں میں تقسیم کریں۔

مثال : عدد 27 لیتے ہیں۔

$$27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1$$

پس 27 کا رومن ہندسہ XXVII ہے۔

50 کو XXXXX لکھنے کی بجائے اسے ایک نئی علامت دی گئی: L ۔ جس طرح 4 کو 5 سے 1 کم یعنی IV لکھا جاتا ہے، اسی طرح 40 کو 50 سے 10 کم یعنی XL لکھا جاتا ہے۔ تاہم اس نظام کے استعمال کنندگان ہمیشہ اس طریقے میں یکساں نہیں رہے۔ کبھی کبھی 40 کو XXXX بھی لکھا جاتا تھا۔

رومن عددی نظام کچھ بڑے اعداد ظاہر کرنے کے لیے نئی علامتیں متعارف کراتا ہے۔ آیئے ان تمام اعداد کو جن کی ایک نئی بنیادی علامت ہو اہم اعداد کہتے ہیں۔ یہاں رومن نظام کے کچھ اہم اعداد اور ان کی متعلقہ علامتیں ہیں۔

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1,000

These symbols are used to denote other numbers as well. For example, consider the number 2367. Writing it as a sum of landmark numbers starting from 1000 such that we take as many 1000s as possible, 500s as possible, and so on, we get

2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1

So in Roman numerals, this number is MMCCCLXVII.



Figure it Out - 3.2

1. Represent the following numbers in the Roman system.
   (i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715

We see how vastly efficient this system is compared to some of the previous number systems that we have seen. This system seems to have evolved out of the ancient Greek number system in around the 8th century BCE in Rome, and evolved over time. It spread throughout Europe with the expansion of the Roman empire.

The efficiency of this system is due to the grouping of a given number by not just one group size, but a sequence of group sizes that we call landmark numbers, and then using these landmark numbers to represent the given number. This idea is the next important breakthrough in the history of the evolution of number systems.

Despite the relative efficiency of the Roman system, it doesn't lend itself to an easy performance of arithmetic operations, particularly multiplication and division.



Example : Try adding the following numbers without converting them to Hindu numerals:

(a) CCXXXII + CCCCXIII

Let us find the total number of Is, Xs, and Cs, and group them starting from the largest landmark number.

Apparently, it looks like the largest landmark number is C, but note that 5 Cs (100s) make a D (500). So the sum is

یہ علامتیں دوسرے اعداد ظاہر کرنے کے لیے بھی استعمال ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر عدد 2367 پر غور کیجیے۔
اسے 1000 سے شروع ہونے والے اہم اعداد کے مجموعے کے طور پر اس طرح لکھیں کہ جتنے ممکن ہو سکے 1000، پھر 500 اور اسی طرح آگے لیں تو ہمیں ملتا ہے:

$$2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1$$

پس رومن ہندسوں میں یہ عدد MMCCCLXVII ہے۔



حل کیجیے–3.2

1۔ درج ذیل اعداد کو رومن نظام میں ظاہر کیجیے۔

(i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ نظام پہلے دیکھے گئے کچھ عددی نظاموں کے مقابلے میں کتنا زیادہ موثر ہے۔ یہ نظام تقریباً آٹھویں صدی قبل مسیح میں روم میں قدیم یونانی عددی نظام سے ارتقاء پاتا معلوم ہوتا ہے اور وقت کے ساتھ ساتھ ترقی پاتا رہا۔ رومن سلطنت کی توسیع کے ساتھ یہ پورے یورپ میں پھیل گیا۔

اس نظام کی کارکردگی اس بات سے ہے کہ کسی عدد کو صرف ایک گروہ کے حجم سے نہیں بلکہ گروہ کے حجموں کی ایک ترتیب سے گروہ بندی کی جاتی ہے جسے ہم اہم اعداد کہتے ہیں، اور پھر ان اہم اعداد کو دیے گئے عدد کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ خیال عددی نظاموں کے ارتقاء کی تاریخ میں اگلی اہم پیش رفت ہے۔

رومن نظام کی نسبتاً کارکردگی کے باوجود، یہ ریاضی کے عملیات خاص طور پر ضرب اور تقسیم کو آسانی سے انجام دینے میں مددگار نہیں ہے۔

مثال : درج ذیل اعداد کو ہندوستانی ہندسوں میں بدلے بغیر جوڑنے کی کوشش کیجیے:



(a) CCXXXII + CCCCXIII

آیئے I ، X اور C کی کل تعداد معلوم کریں اور انہیں سب سے بڑے اہم عدد سے شروع کرتے ہوئے گروہ بندی کریں۔

بظاہر لگتا ہے کہ سب سے بڑا اہم عدد C ہے، لیکن غور کیجیے کہ 5 C (100 کے) مل کر D (500) بناتے ہیں۔ پس مجموعہ یہ ہے:

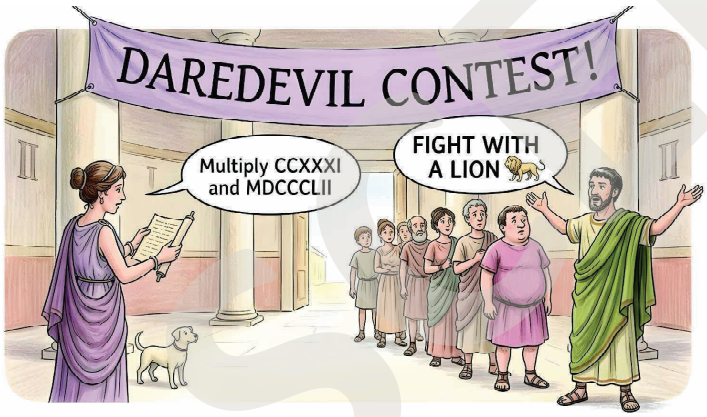
D
C C XXXII
C C C CXIII

XL V
DC XXX II = DCXLV
X III

Do it yourself now: (b) LXXXVII + LXXVIII

? How will you multiply two numbers given in Roman numerals, without converting them to Hindu numerals? Try to find the product of the following pairs of landmark numbers:
V × L, L × D, V × D, VII × IX.

Try This



People using the Roman system made use of a calculating tool called the **abacus** to perform their arithmetic operations. We will see what it is in a later section. However, only specially trained people used this tool for calculation. While going through the number systems discussed above, it should not be understood that, historically, one system developed as an improvement over the previous system. This point should be kept in mind when studying the upcoming number systems too. The actual story of how each of the number systems developed is much more complex, and many times not clearly known, and so we will not try to trace this in the chapter.



Figure it Out - 3.3

1. Identify the features of the Hindu number system that make it efficient when compared to the Roman number system.

Math Talk

© NCERT not to be republished

D
CCXXXII
CCC CXIII

XL V
DC XXX II = DCXLV
X III

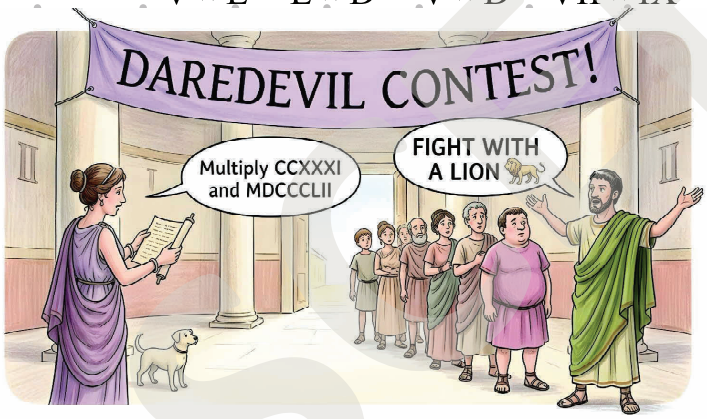
اب یہ خود کیجیے۔ LXXXVII + LXXVIII(b)

یہ بھی کیجیے

؟ رومن ہندسوں میں دو اعداد کو ہندوستانی ہندسوں میں بدلے بغیر کیسے ضرب دیں گے؟

درج ذیل اہم اعداد کے جوڑوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کی کوشش کیجیے:

V × L ، L × D ، V × D ، VII × IX



رومن نظام استعمال کرنے والے لوگ اپنے ریاضی کے عملیات انجام دینے کے لیے **ابا کس** نامی حسابی آلہ استعمال کرتے تھے۔ ہم اسے ایک بعد کے حصے میں دیکھیں گے۔ تاہم صرف خاص طور پر تربیت یافتہ لوگ ہی اس آلے کو حساب کے لیے استعمال کرتے تھے۔ اوپر بیان کردہ عددی نظاموں کا مطالعہ کرتے ہوئے یہ نہیں سمجھنا چاہیے کہ تاریخی طور پر ایک نظام پچھلے نظام کی بہتری کے طور پر تیار ہوا۔ آنے والے عددی نظاموں کا مطالعہ کرتے وقت بھی اس بات کو ذہن میں رکھنا چاہیے۔ ہر عددی نظام کے ارتقاء کی اصل کہانی بہت زیادہ پیچیدہ ہے اور اکثر اوقات واضح طور پر معلوم نہیں ہے، اس لیے ہم اس باب میں اسے تلاش کرنے کی کوشش نہیں کریں گے۔

حل کیجیے–3.3

ریاضی بحث

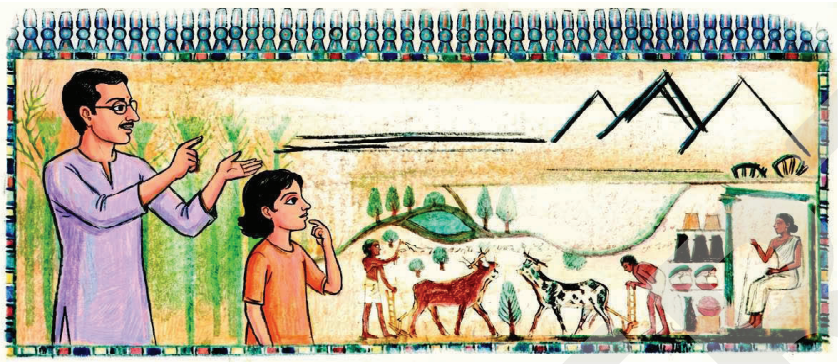
1۔ ہندوستانی عددی نظام کی وہ خصوصیات شناخت کیجیے جو اسے رومن عددی نظام کے مقابلے میں زیادہ موثر بناتی ہیں۔

2. Using the ideas discussed in this section, try refining the number system you might have made earlier.

Try This

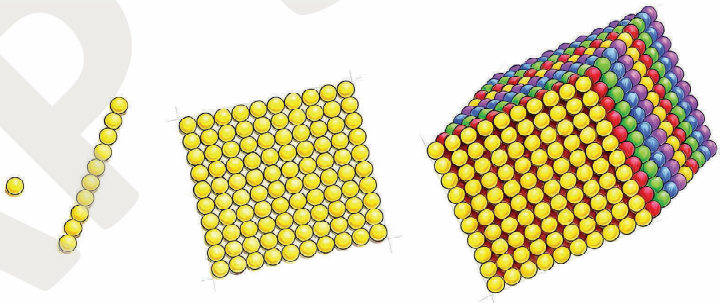
3.3 The Idea of a Base

I. The Egyptian Number System

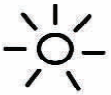


We are now going to see a written number system that the Egyptians developed around 3000 BCE. In this system, we see the use of landmark numbers to group and represent a given number. However, what makes this system special is its sequence of landmark numbers.

Imagine making collections of pebbles. The first landmark number is 1. Group together 10 collections of the previous landmark number (1). Its size is the second landmark number which is 10. Group together 10 collections of the previous landmark number (10). Its size is the third landmark number which is $10 \times 10 = 100$, and so on.



Each landmark number is 10 times the previous one. Since 1 is the first landmark number, they are all powers of 10. The following are the symbols given to these numbers -

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
							

یہ بھی کیجیے

2۔ اس حصے میں بیان کردہ خیالات کو استعمال کرتے ہوئے اپنے پہلے بنائے ہوئے عددی نظام کو بہتر بنانے کی کوشش کیجیے۔

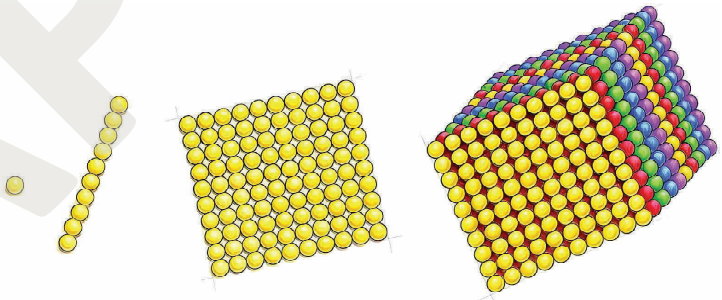
3.3 اساس کا تصور

I. مصری عددی نظام

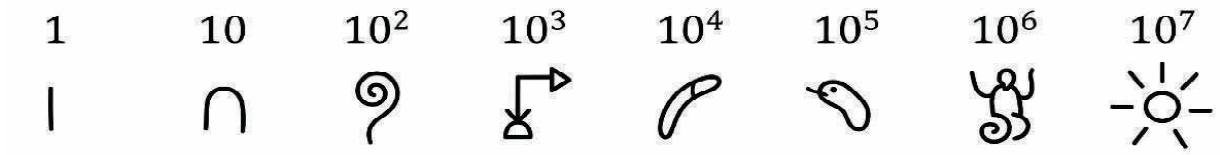


ہم اب ایک ایسا لکھا ہوا عددی نظام دیکھنے جا رہے ہیں جو مصریوں نے تقریباً 3000 قبل مسیح میں تیار کیا تھا۔ اس نظام میں ہم کسی دیے گئے عدد کو گروہ بندی کر کے ظاہر کرنے کے لیے اہم اعداد کا استعمال دیکھتے ہیں۔ تاہم جو چیز اس نظام کو خاص بناتی ہے وہ اس کے اہم اعداد کی ترتیب ہے۔

تصور کیجیے کہ کنکروں کے مجموعے بنائے جا رہے ہیں۔ پہلا اہم عدد 1 ہے۔ پچھلے اہم عدد (1) کے 10 مجموعے اکٹھے کریں۔ اس کا سائز دوسرا اہم عدد ہے جو 10 ہے۔ پچھلے اہم عدد (10) کے 10 مجموعے اکٹھے کریں۔ اس کا سائز تیسرا اہم عدد ہے جو $10 \times 10 = 100$ ہے، اور اسی طرح آگے۔



ہر اہم عدد پچھلے سے 10 گنا ہے۔ چونکہ 1 پہلا اہم عدد ہے اس لیے یہ سب 10 کی قوتیں ہیں۔ ان اعداد کو دی گئی علامتیں یہ ہیں:



As in the case of Roman numbers, a given number is counted in groups of the landmark numbers, starting from the largest landmark number less than the given number. This is then used to assign the numeral.

For example 324 which equals 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4 is written as.

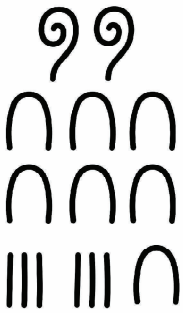




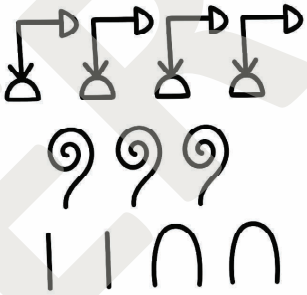
Figure it Out - 3.4

1. Represent the following numbers in the Egyptian system: 10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707.
2. What numbers do these numerals stand for?

(i)



(ii)



II. Variations on the Egyptian System and the Notion of Base

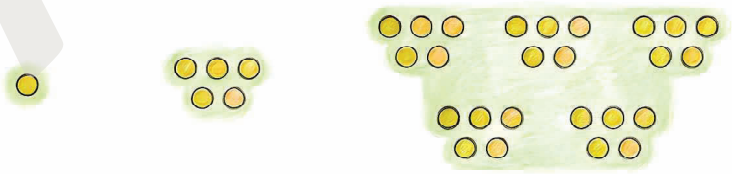
? Instead of grouping together 10 collections of size equal to the previous landmark number (as in the case of the Egyptian system), can we get a number system by grouping together 5 collections of size equal to the previous landmark number? Can this 5 be replaced by any positive integer?

Let us examine this possibility. Let 1 be the first landmark number.

Group together 5 collections of size equal to the previous landmark number (1). Its size is the second landmark number which is 5.

Group together 5 collections of size equal to the previous landmark number (5). Its size is the third landmark number which is $5 \times 5 = 25$.

Group together 5 collections of size equal to the previous landmark number (5). Its size is the fourth landmark number which is $5 \times 25 = 125$.



Thus, we have a new number system where each landmark number is 5 times the previous one. Since 1 is the first landmark number, they are all powers of 5.

رومن اعداد کی طرح کسی دیے گئے عدد کو اہم اعداد کے گروہوں میں گنا جاتا ہے، دیے گئے عدد سے چھوٹے سب سے بڑے اہم عدد سے شروع کرتے ہوئے۔ پھر اسے ہندسہ تفویض کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

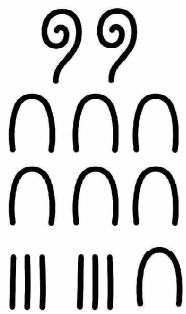
مثال کے طور پر 324 جو 4+10+10+100+100+100 کے برابر ہے، اس طرح لکھا جاتا ہے۔ 

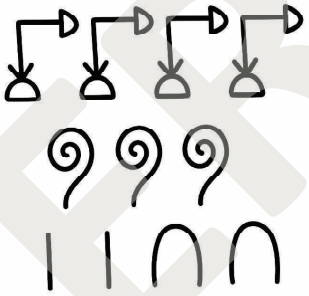
حل کیجیے–3.4



1۔ درج ذیل اعداد کو مصری نظام میں ظاہر کیجیے: 10458، 1023، 2660، 784، 1111، 70707۔

2۔ یہ ہندسے کون سے اعداد ظاہر کرتے ہیں؟

(i) 

(ii) 

II. مصری نظام کی تبدیلیاں اور اساس کا تصور

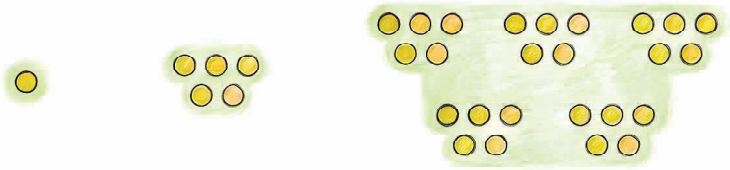
پچھلے اہم عدد کے حجم کے برابر 10 مجموعے اکٹھے کرنے (جیسا کہ مصری نظام میں) کی بجائے، کیا ہم پچھلے اہم عدد کے حجم کے برابر 5 مجموعے اکٹھے کر کے ایک عددی نظام حاصل کر سکتے ہیں؟ کیا اس 5 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد صحیح رکھا جا سکتا ہے؟

آیئے اس امکان کا جائزہ لیتے ہیں۔ مانتے ہیں کہ 1 پہلا اہم عدد ہے۔

پچھلے اہم عدد (1) کے حجم کے برابر 5 مجموعے اکٹھے کریں۔ اس کا حجم دوسرا اہم عدد ہے جو 5 ہے۔

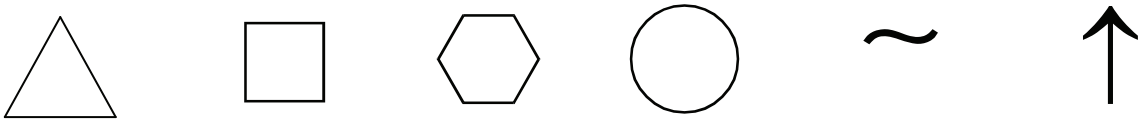
پچھلے اہم عدد (5) کے حجم کے برابر 5 مجموعے اکٹھے کریں۔ اس کا حجم تیسرا اہم عدد ہے جو $5 \times 5 = 25$ ہے۔

پچھلے اہم عدد (5) کے حجم کے برابر 5 مجموعے اکٹھے کریں۔ اس کا حجم چوتھا اہم عدد ہے جو $5 \times 25 = 125$ ہے۔



اس طرح ہمارے پاس ایک نیا عددی نظام ہے جہاں ہر اہم عدد پچھلے سے 5 گنا ہے۔ چونکہ 1 پہلا اہم عدد ہے اس لیے یہ سب 5 کی قوتیں ہیں۔

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$



Express the number 143 in this new system.

Let us start grouping, starting with the size $53 = 125$, as this is the largest landmark number smaller than 143. We get-

$$143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1.$$

So the number 143 in the new system is ○ □ □ □ △ △ △

Number systems having landmark numbers in which the

(a) first landmark number is 1, and

(b) every next landmark number is obtained by multiplying the current landmark number by some fixed number n is said to be a base-n number system.

The Egyptian number system is a base-10 system, and the number system that we created is a base-5 system. A base-10 number system is also called a decimal number system.



Figure it Out - 3.5

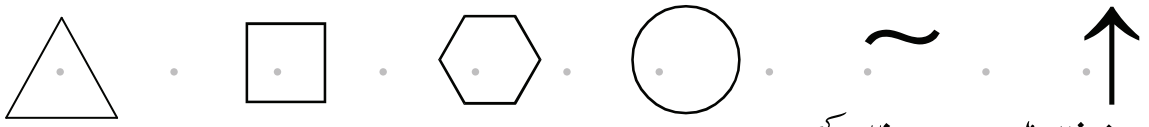
1. Write the following numbers in the above base-5 system using the symbols in Table 2: 15, 50, 137, 293, 651.
2. Is there a number that cannot be represented in our base-5 system above? Why or why not?
3. Compute the landmark numbers of a base-7 system. In general, what are the landmark numbers of a base-n system?

   The landmark numbers of a base-n number system are the powers of n starting from $n^0 = 1, n, n^2, n^3, \ldots$

Abacus that Makes Use of the Decimal System

In around the 11th century, even the people still using the Roman numerals started using a calculating device - the abacus - constructed using a decimal system. It was a board with lines, as shown in the Fig. 3.1. Starting

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$



اس نئے نظام میں عدد 143 ظاہر کیجیے۔

آیئے گروہ بندی شروع کرتے ہیں، حجم $5^3 = 125$ سے، کیونکہ یہ 143 سے چھوٹا سب سے بڑا اہم عدد ہے۔ ہمیں ملتا ہے:

$$143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1$$

پس نئے نظام میں عدد 143 یہ ہے۔ ○□□□△△△

وہ عددی نظام جن کے اہم اعداد میں:

(a) پہلا اہم عدد 1 ہو، اور

(b) ہر اگلا اہم عدد موجودہ اہم عدد کو کسی مقررہ عدد n سے ضرب دے کر حاصل کیا جائے

انہیں بنیاد n کا عددی نظام کہا جاتا ہے۔

مصری عددی نظام بنیاد 10 کا نظام ہے اور ہمارا بنایا ہوا عددی نظام بنیاد 5 کا نظام ہے۔ بنیاد 10 کے عددی نظام کو اعشاری عددی نظام بھی کہتے ہیں۔



حل کیجیے–3.5

1۔ درج ذیل اعداد کو اوپر بیان کردہ بنیاد 5 کے نظام میں جدول 2 کی علامتیں استعمال کر کے لکھیے:

15، 50، 137، 293، 651۔

2۔ کیا کوئی ایسا عدد ہے جو ہمارے بنیاد 5 کے نظام میں ظاہر نہ کیا جا سکے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

3۔ بنیاد 7 کے نظام کے اہم اعداد معلوم کیجیے۔ عام طور پر بنیاد n کے نظام کے اہم اعداد کیا ہوتے ہیں؟

بنیاد n کے عددی نظام کے اہم اعداد n کی وہ قوتیں ہیں جو $n^0 = 1$، n، n^2، n^3، ... سے شروع ہوتی ہیں۔

اعشاری نظام استعمال کرنے والا اباکس

تقریباً 11 ویں صدی میں رومن ہندسے استعمال کرنے والے لوگوں نے بھی اعشاری نظام پر بنا ایک حسابی آلہ — اباکس — استعمال کرنا شروع کیا۔ یہ لکیروں والا ایک تختہ تھا جیسا کہ شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔

APSCERT

from the line that stood for 1, each successive line stood for a successive power of 10.

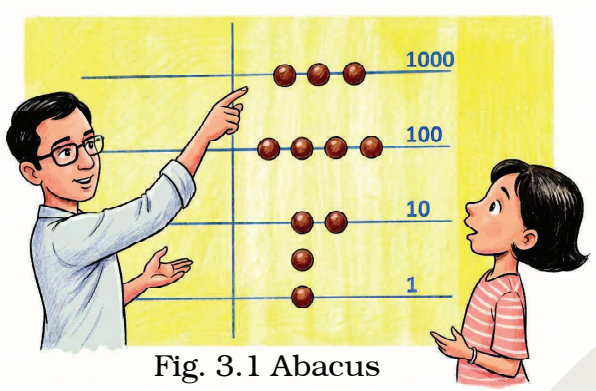


Fig. 3.1 Abacus

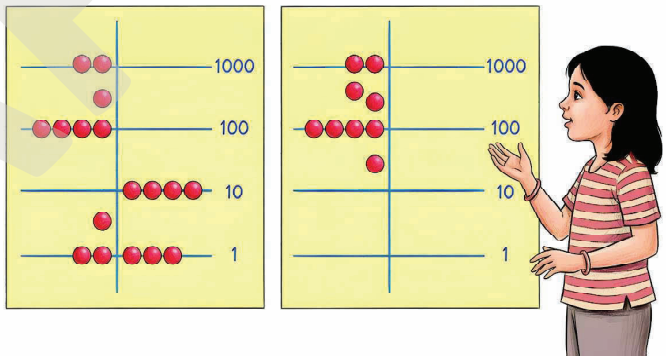
Numbers were represented in it as follows: the given number was first grouped into the landmark numbers (powers of 10), in exactly the same way we have been grouping them so far. For each power of 10, as many counters were placed on its line as the number of times it occurred in the grouping. The presence of a counter above a line contributed a value of 5.

For example let us take the number 3426. It can be grouped as

3426 = 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

This number was represented as shown in Fig. 3.1. Notice how the 6 ones are represented.

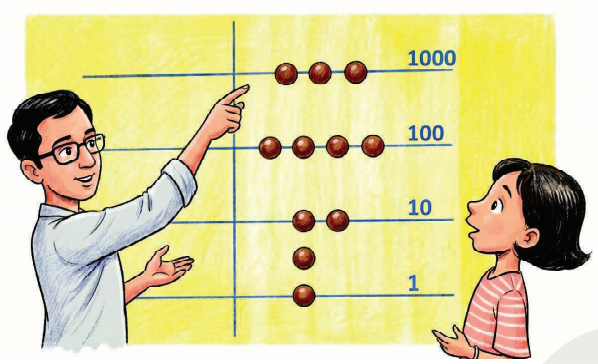
To get an idea of how the abacus was used for calculations, let us consider a simple addition problem: 2907 + 43. The two numbers were taken on either side of the vertical partition.



How would you use this to find the sum?

The counters along each line were brought together. What is to be done if the total in a line exceeded 10?

1 کو ظاہر کرنے والی لکیر سے شروع کرتے ہوئے، ہر اگلی لکیر 10 کی اگلی قوت کو ظاہر کرتی تھی۔



اس میں اعداد اس طرح ظاہر کیے جاتے تھے: دیے گئے عدد کو پہلے اہم اعداد (10 کی قوتوں) میں اسی طرح گروہ بندی کی جاتی تھی جیسے ہم ابھی تک کرتے آئے ہیں۔ 10 کی ہر قوت کے لیے اس کی لکیر پر اتنے ہی کاونٹر رکھے جاتے تھے جتنی بار وہ گروہ بندی میں آتی تھی۔ کسی لکیر کے اوپر کاونٹر کی موجودگی 5 کی قدر ظاہر کرتی تھی۔

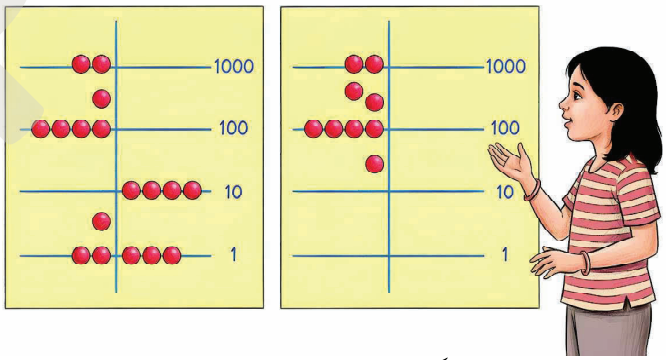
مثال کے طور پر عدد 3426 لیتے ہیں۔ اسے اس طرح گروہ بندی کی جاسکتی ہے:

3426 = 1000+1000+1000+100+100+100+100+10+10+1+1+1+1+1+1

یہ عدد شکل 3.1 میں دکھائے گئے طریقے سے ظاہر کیا گیا تھا۔ غور کیجیے کہ 6 اکائیاں کیسے ظاہر کی گئی ہیں۔

ابا کس کو حسابات کے لیے کیسے استعمال کیا جاتا تھا اس کا اندازہ لگانے کے لیے آیئے ایک سادہ جمع کا مسئلہ لیتے ہیں:

2907 +43۔ دونوں اعداد عمودی تقسیم کے دونوں طرف رکھے گئے تھے۔



آپ مجموعہ معلوم کرنے کے لیے اسے کیسے استعمال کریں گے؟

ہر لکیر کے کاونٹر اکٹھے کیے گئے۔ اگر کسی لکیر کا کل 10 سے زیادہ ہو جائے تو کیا کرنا ہو گا؟

© NCERT

Hint: In this problem, the 7 ones and the 3 ones together make 10 ones which contributes a counter to the line representing 10s.

III. Shortcomings of the Egyptian System

Despite being a number system that enabled relatively efficient number representations for numbers till a crore (10^7), and relatively easy computations, the Egyptian system had a drawback.

If larger and larger numbers needed to be represented, then there was a need for inventing an unending sequence of symbols for higher and higher powers of 10. Here we see the original challenge of number representation resurfacing in a different form!

The next and the final idea in the history of the evolution of number systems not only solves this problem but also remarkably simplifies number representation and computations!



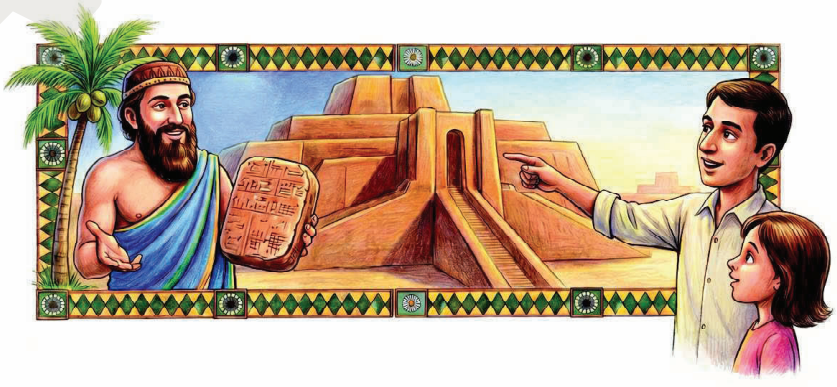
Figure it Out - 3.6



1. Can there be a number whose representation in Egyptian numerals has one of the symbols occurring 10 or more times? Why not?
2. Create your own number system of base 4, and represent numbers from 1 to 16.
3. Give a simple rule to multiply a given number by 5 in the base-5 system that we created.

3.4. Place Value Representation

I. The Mesopotamian Number System



© NCERT not to be republished

اشارہ : اس مسئلے میں 7 اکائیاں اور 3 اکائیاں مل کر 10 اکائیاں بناتی ہیں جو 10 کی نمائندگی کرنے والی لکیر میں ایک کاونٹر کا اضافہ کرتی ہیں۔

III. مصری نظام کی خامیاں

ایک کروڑ (10^7) تک کے اعداد کی نسبتاً موثر نمائندگی اور نسبتاً آسان حسابات کے قابل ہونے کے باوجود مصری نظام میں ایک خامی تھی۔

اگر بڑے سے بڑے اعداد ظاہر کرنے کی ضرورت ہو تو 10 کی بڑی سے بڑی قوتوں کے لیے علامتوں کی ایک لامتناہی ترتیب ایجاد کرنے کی ضرورت پڑتی۔ یہاں ہم عدد کی نمائندگی کا وہی اصل چیلنج ایک مختلف شکل میں دوبارہ ابھرتا دیکھتے ہیں!

عددی نظاموں کے ارتقاء کی تاریخ میں اگلا اور آخری تصور نہ صرف اس مسئلے کو حل کرتا ہے بلکہ اعداد کی نمائندگی اور حسابات کو بھی قابل ذکر حد تک آسان بنا دیتا ہے!



حل کیجیے– 3.6



1۔ کیا کوئی ایسا عدد ہو سکتا ہے جس کی مصری ہندسوں میں نمائندگی میں کوئی علامت 10 یا اس سے زیادہ بار آئے؟ کیوں نہیں؟

2۔ بنیاد 4 کا اپنا عددی نظام بنائیے اور 1 سے 16 تک اعداد ظاہر کیجیے۔

3۔ بنیاد 5 کے بنائے ہوئے نظام میں کسی دیے گئے عدد کو 5 سے ضرب دینے کا ایک سادہ قاعدہ بتائیے۔

3.4 مقامی قدر کی نمائندگی

I. میسوپوٹیمیا کا عددی نظام



In the beginning, the number system used in ancient Mesopotamia had different symbols for different landmark numbers. In later times, it became a base-60 system, also called the sexagesimal system, with a very efficient number representation.

It has puzzled many why they chose base 60. Different theories exist to explain this, ranging from the connection between 60 and the periods of some important events (like the length of their lunar month which had 30 days, or the time taken for the Sun to complete one revolution around the Earth when Earth is taken to be stationary), the ease of representing fractions (we will not go into this here), their earlier sequence of landmark numbers - 1, 10, 60, 600, 3600, 36000,... - getting reduced to only the powers of 60, and so on.

The influence of the Mesopotamian sexagesimal system, also known as the **Babylonian number system**, can be seen even now in our units of time measurements - 1 hour = 60 minutes and 1 minute = 60 seconds.

This system used the symbol  for 1 and  for 10.

Let us now briefly pause on the study of their number system, and ideate on how one can build an efficient number system using the Mesopotamian features seen so far.

Let us give our own symbols to their landmark numbers -

1	60	$60^2 = 3600$	$60^3 = 216000$	
	1	2	3	.....

Note that we have actually used Indian numerals in creating these symbols. We could have invented our own symbols but for the sake of easy recall and use, we have chosen to take help of the familiar numerals 1, 2, 3, ...

Using and , numbers from 1 to 59 can be represented -

1	2	3	4	5	6	7	8	9
								

APSCERT

ابتداء میں قدیم میسوپوٹیمیا میں استعمال ہونے والے عددی نظام میں مختلف اہم اعداد کے لیے مختلف علامتیں تھیں۔ بعد کے زمانے میں یہ اساس 60 کا نظام بن گیا جسے ساٹھواں نظام بھی کہتے ہیں، اور اس میں اعداد کی نمائندگی انتہائی موثر تھی۔

بہت سے لوگوں کو حیرانی رہی کہ انہوں نے اساس 60 کیوں منتخب کی۔ اس کی وضاحت کے لیے مختلف نظریات موجود ہیں، جن میں 60 اور کچھ اہم واقعات کے ادوار کے درمیان تعلق (جیسے ان کے قمری مہینے کی لمبائی جو 30 دن کی تھی، یا زمین کو ساکن مان کر سورج کو زمین کے گرد ایک چکر مکمل کرنے میں لگنے والا وقت)، کسور ظاہر کرنے میں آسانی (ہم اس میں نہیں جائیں گے)، ان کے اہم اعداد کی پہلے کی ترتیب — 1، 10، 60، 600، 3600، 36000، ... — کا صرف 60 کی قوتوں تک محدود ہو جانا وغیرہ شامل ہیں۔

میسوپوٹیمیا کے ساٹھواں نظام کا اثر، جسے بابیلونین عددی نظام بھی کہتے ہیں، آج بھی ہمارے وقت کی پیمائش کی اکائیوں میں نظر آتا ہے — 1 گھنٹہ = 60 منٹ اور 1 منٹ = 60 سیکنڈ۔

اس نظام میں 1 کے لیے 𒁹 اور 10 کے لیے 𒌋 کی علامت استعمال ہوتی تھی۔

آیئے ابھی ان کے عددی نظام کے مطالعے سے مختصراً رک کر سوچتے ہیں کہ میسوپوٹیمیا کی ابھی تک دیکھی گئی خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے ایک موثر عددی نظام کیسے بنایا جا سکتا ہے۔

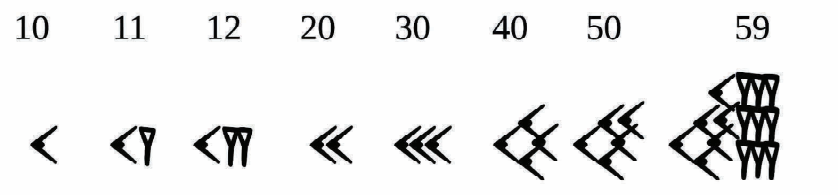
آیئے اپنے اہم اعداد کو اپنی علامتیں دیتے ہیں:

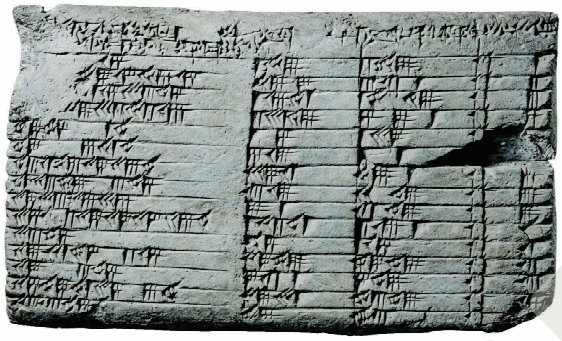
1	60	$60^2 = 3600$	$60^3 = 216000$	.....
𒁹	1	2	3	

غور کیجیے کہ ہم نے ان علامتوں کو بنانے میں دراصل ہندوستانی ہندسے استعمال کیے ہیں۔ ہم اپنی علامتیں ایجاد کر سکتے تھے لیکن آسانی سے یاد رکھنے اور استعمال کرنے کے لیے ہم نے مانوس ہندسوں 1، 2، 3، ... کی مدد لینے کا انتخاب کیا۔

𒁹 اور 𒌋 کو استعمال کرتے ہوئے 1 سے 59 تک اعداد ظاہر کیے جا سکتے ہیں:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𒁹	𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹





Reproduction of a Mesopotamian Tablet

Example : Let us represent the number 640 in this system.

Grouping it into landmark numbers, we see that

$$640 = (10) \times 60 + 40.$$

If we use the Egyptian idea, this number would be represented using 10  s, and 40 would be represented using 4 s.

Can we represent this more compactly?

We can simply represent this number as

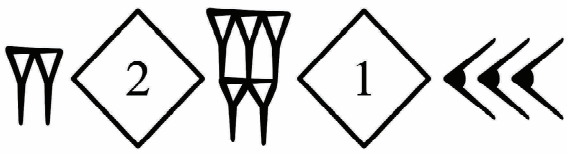


which can be read as ten 60s and one 40, just as we have written in the equation.

Example: Let us try another number - 7530.

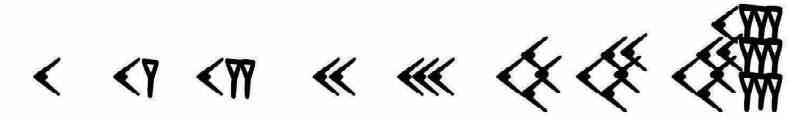
$$7530 = (2) \times 3600 + (5) \times 60 + 30$$

So, its representation would be



APSCERT

10 11 12 20 30 40 50 59





میسوپوٹیمیا کی تختی کی نقل

مثال : آیئے اس نظام میں عدد 640 ظاہر کرتے ہیں۔

اسے اہم اعداد میں گروہ بندی کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$640 = (10) \times 60 + 40$$

اگر ہم مصری طریقہ استعمال کریں تو یہ عدد 10 علامتوں سے ظاہر ہو گا اور 40 چار علامتوں سے ظاہر ہو گا۔

کیا ہم اسے زیادہ مختصر طور پر ظاہر کر سکتے ہیں؟

ہم اس عدد کو سادہ طور پر اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں

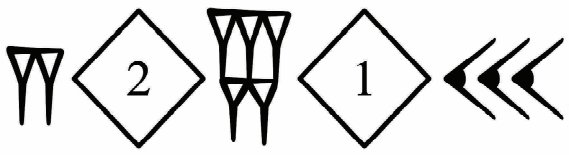


جسے دس 60 اور ایک 40 پڑھا جا سکتا ہے، بالکل ویسے جیسے ہم نے مساوات میں لکھا ہے۔

مثال : آیئے ایک اور عدد آزماتے ہیں — 7530۔

$$7530 = (2) \times 3600 + (5) \times 60 + 30$$

پس اس کی نمائندگی یہ ہو گی:



APSCERT

Note that when a number is grouped into powers of 60 for its representation, no power of 60 can occur 60 or more times. If this happens, then 60 of them can be grouped to form the next power of 60. For example, consider the expression -

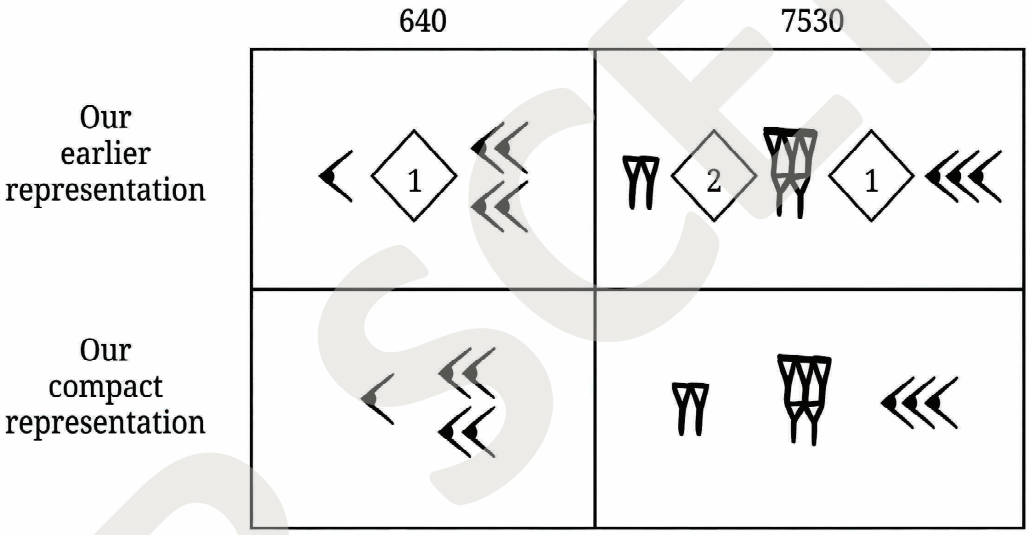
$(1) \times 3600 + (70) \times 60 + 2 = (1) \times 60^2 + (60 + 10) \times 60 + 2$

$= (1) \times 60^2 + 60^2 + (10) \times 60 + 2$

$= (2) \times 60^2 + (10) \times 60 + 2$

Therefore, any number can be represented using the numerals from 1 - 59, along with the numerals for landmark numbers.

Now, what if we make the representation even more compact by dropping the symbols for the different powers of 60 altogether?



This is exactly what the Mesopotamians did! In their numeral, the rightmost set of symbols showed the number of 1s, the set of symbols to its left showed the number of 60s, the next showed the number of 3600s and so on. Whenever there was no occurrence of a power of 60, a blank space was given in that position.

It does not seem that the Mesopotamians arrived at this idea in the same way we did. Some scholars suggest that the similarity of symbols given to the landmark numbers 1 and 60 in their earlier number system, and an accidental usage of them, might have made them stumble upon this idea.

غور کیجیے کہ جب کسی عدد کو اس کی نمائندگی کے لیے 60 کی قوتوں میں گروہ بندی کی جاتی ہے تو 60 کی کوئی بھی قوت 60 یا اس سے زیادہ بار نہیں آسکتی۔ اگر ایسا ہو تو ان میں سے 60 کو اگلی قوت 60 بنانے کے لیے گروہ بندی کی جاسکتی ہے۔

مثال کے طور پر یہ عبارت دیکھیے:

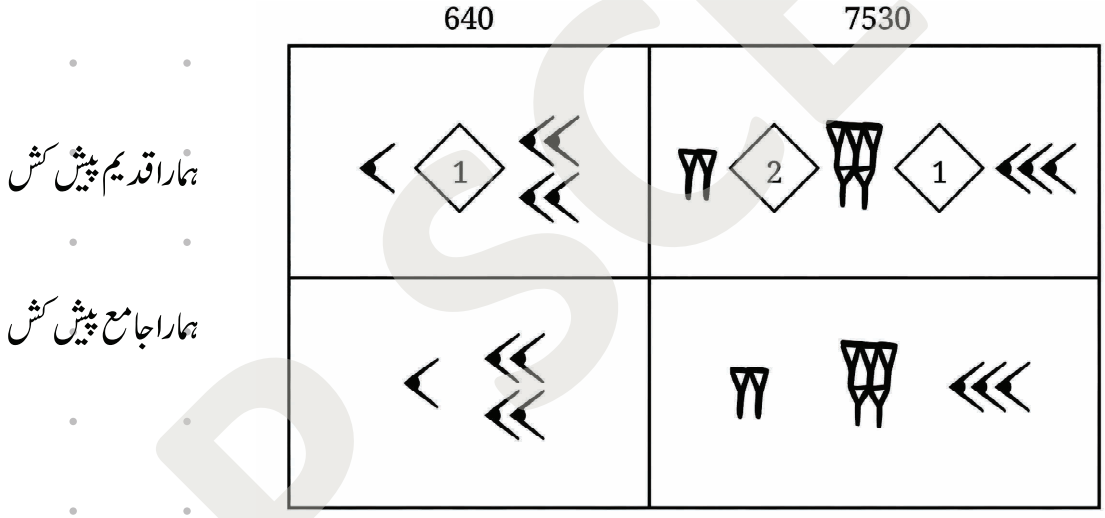
$$(1) \times 3600 + (70) \times 60 + 2 = (1) \times 60^2 + (60+10) \times 60 + 2$$

$$= (1) \times 60^2 + 60^2 + (10) \times 60 + 2$$

$$= (2) \times 60^2 + (10) \times 60 + 2$$

اس لیے کوئی بھی عدد 1 سے 59 تک کے ہندسوں کے ساتھ ساتھ اہم اعداد کے ہندسوں کو استعمال کر کے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

اب اگر ہم 60 کی مختلف قوتوں کی علامتوں کو بالکل ہٹا کر نمائندگی کو اور بھی مختصر بنا دیں تو کیا ہوگا؟



میسوپوٹیمیا والوں نے بالکل یہی کیا! ان کے ہندسے میں سب سے دائیں طرف کی علامتوں کا مجموعہ 1 کی تعداد ظاہر کرتا تھا، اس کے بائیں طرف کی علامتوں کا مجموعہ 60 کی تعداد ظاہر کرتا تھا، اگلا مجموعہ 3600 کی تعداد ظاہر کرتا تھا اور اسی طرح آگے۔ جب بھی 60 کی کوئی قوت نہ آتی تو اس جگہ خالی جگہ چھوڑ دی جاتی تھی۔

ایسا نہیں لگتا کہ میسوپوٹیمیا والے اسی طریقے سے اس تصور تک پہنچے جیسے ہم پہنچے۔ کچھ علماء کا خیال ہے کہ ان کے پہلے عددی نظام میں اہم اعداد 1 اور 60 کو دی گئی علامتوں کی مماثلت اور ان کا اتفاقی استعمال انہیں اس تصور تک لے آیا ہوگا۔



Figure it Out - 3.7

1. Represent the following numbers in the Mesopotamian system -
   (i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605

Thus, we can see how the Mesopotamian system removes the need for generating an unending sequence of symbols for the landmark numbers by making use of the positions where the symbols are written. Such a number system (having a base) that makes use of the position of each symbol in determining the landmark number that it is associated with is called a **positional number system a place value system.**

This idea of place value marks the highest point in the history of evolution of number systems, and gives a very elegant solution to the problem of representing the unending sequence of numbers using only a finite number of different symbols!

The Mesopotamian system however cannot be considered a fully developed place value system. It has certain defects that lead to confusion while reading a number.

? Look at the representation of 60. What will be the representation for 3,600?

While writing the numerals, the spacing between symbols was not given the way we are giving it here. It was also difficult to maintain a consistent spacing for blanks across different manuscripts written by different people. These created ambiguities. For example, consider the representations of the following numbers -

Numbers	1	60	3600	12	602	36002
Our representation	𒁹	𒁹	𒁹	𒐗𒁹	𒐗𒁹	𒐗𒁹
Mesopotamian representation	𒁹	𒁹	𒁹	𒐗𒁹	𒐗𒁹	𒐗𒁹

APSCERT



حل کیجیے–3.7

1۔ درج ذیل اعداد کو میسوپوٹیمیا کے نظام میں ظاہر کیجیے:

(i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605

پس ہم دیکھ سکتے ہیں کہ میسوپوٹیمیا کا نظام علامتیں لکھنے کی جگہوں کو استعمال کر کے اہم اعداد کے لیے لامتناہی علامتیں بنانے کی ضرورت کو ختم کر دیتا ہے۔ **ایسا عددی نظام (جس کی ایک اساس ہو) جو ہر علامت کی جگہ کو اس سے متعلق اہم عدد معلوم کرنے میں استعمال کرتا ہو، مقامی قدر کا نظام** کہلاتا ہے۔

مقامی قدر کا یہ تصور عددی نظاموں کے ارتقاء کی تاریخ کا اعلیٰ ترین مقام ہے اور صرف محدود تعداد میں مختلف علامتیں استعمال کر کے لامتناہی اعداد کی ترتیب ظاہر کرنے کے مسئلے کا ایک انتہائی خوبصورت حل فراہم کرتا ہے!

تاہم میسوپوٹیمیا کے نظام کو مکمل طور پر ترقی یافتہ مقامی قدر کا نظام نہیں کہا جا سکتا۔ اس میں کچھ خامیاں ہیں جو عدد پڑھتے وقت ابہام پیدا کرتی ہیں۔

? 60 کی نمائندگی دیکھیے۔ 3,600 کی نمائندگی کیا ہو گی؟

ہندسے لکھتے وقت علامتوں کے درمیان فاصلہ اس طرح نہیں دیا جاتا تھا جیسے ہم یہاں دے رہے ہیں۔ مختلف لوگوں کے لکھے مختلف مخطوطات میں خالی جگہوں کے لیے یکساں فاصلہ برقرار رکھنا بھی مشکل تھا۔ اس سے ابہام پیدا ہوتے تھے۔

مثال کے طور پر درج ذیل اعداد کی نمائندگی پر غور کیجیے۔ چونکہ یہ معلوم کرنے میں ابہام تھا کہ کون سی علامتیں کس کی ہیں

عدد	1	60	3600	12	602	36002
ہمارا پیش کش	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹
میسوپوٹیمیا والوں کی پیش کش	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹

APSCERT

Because of the ambiguity in finding which symbols correspond to which powers of 60, the same numeral can be read in different ways. Even in our representation which uses uniform spacing between symbols for different powers of 60, it is difficult to know the number of blanks between two sets of symbols, as in the representation of 36002.

To address the issue arising out of blank spaces, the later Mesopotamians used a brilliant idea of assigning a 'placeholder' symbol 𒌋𒌋 to denote a blank space. This is like the 0 (zero) we use in our system. Thus, zero - the symbol that shows nothingness - is indispensable as a placeholder in a place value system in which numbers are written in an unambiguous manner.

Even with the problem arising out of blank spaces solved, other ambiguities still remained in the system. For example, the placeholder symbol was primarily used in the middle of numbers and not at the end; so they would not use it to represent a number like (what we would write as) 3600.

II. The Mayan Number System



In Central America, there flourished a civilisation known as the Mayan civilisation that made great intellectual and cultural progress between the 3rd and 10th centuries CE. Among their intellectual achievements stands their place value system designed independently of those in Asia. They also made use of a placeholder symbol, for the modern-day '0', that looked like a seashell.

60 کی قوتوں سے متعلق علامتوں کی شناخت میں ابہام کی وجہ سے ایک ہی ہندسہ مختلف طریقوں سے پڑھا جا سکتا تھا۔ یہاں تک کہ ہماری نمائندگی میں جو 60 کی مختلف قوتوں کی علامتوں کے درمیان یکساں فاصلہ استعمال کرتی ہے، علامتوں کے دو مجموعوں کے درمیان خالی جگہوں کی تعداد جاننا مشکل ہے، جیسا کہ 36002 کی نمائندگی میں۔

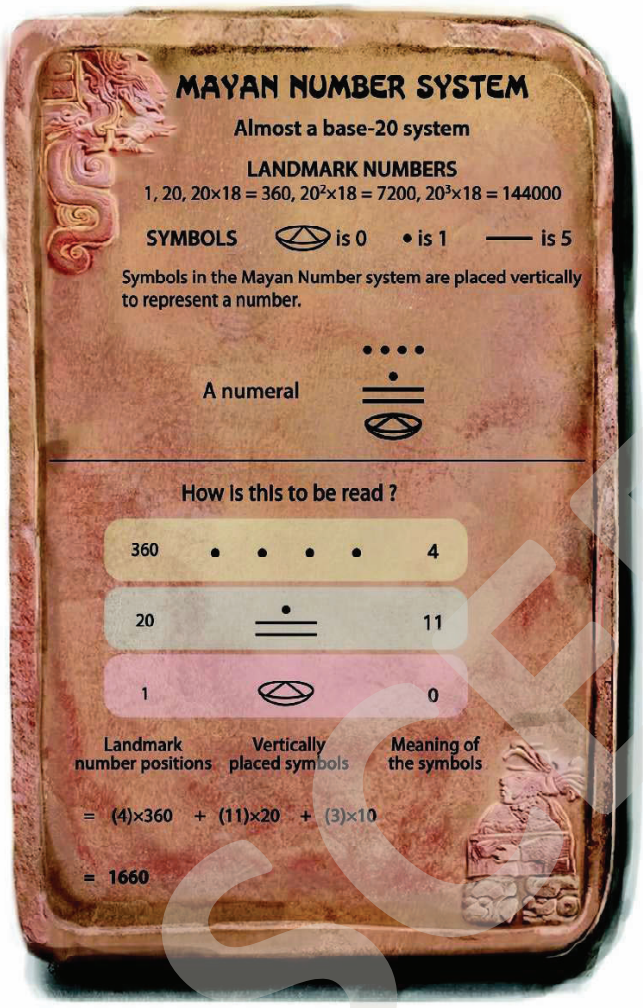
خالی جگہوں سے پیدا ہونے والے مسئلے کو حل کرنے کے لیے بعد کے میسوپوٹیمیا والوں نے خالی جگہ ظاہر کرنے کے لیے ایک 'جگہ نشان' علامت ۲۲ مقرر کرنے کا شاندار خیال استعمال کیا۔ یہ ہمارے نظام میں استعمال ہونے والے 0 (صفر) کی طرح ہے۔ پس صفر — وہ علامت جو کچھ نہ ہونے کو ظاہر کرتی ہے — ایک مقامی قدر کے نظام میں جگہ نشان کے طور پر ناگزیر ہے جس میں اعداد غیر مبہم طریقے سے لکھے جاتے ہیں۔

خالی جگہوں سے پیدا ہونے والے مسئلے کے حل کے بعد بھی نظام میں دیگر ابہام باقی رہے۔ مثال کے طور پر جگہ نشان کی علامت بنیادی طور پر اعداد کے درمیان استعمال ہوتی تھی آخر میں نہیں؛ اس لیے وہ اسے (جسے ہم) 3600 (لکھتے) جیسا عدد ظاہر کرنے کے لیے استعمال نہ کرتے۔

II. مایان کا عددی نظام



وسطی امریکہ میں مایان تہذیب نامی ایک تہذیب پھلی پھولی جس نے تیسری اور دسویں صدی عیسوی کے درمیان عظیم علمی اور ثقافتی ترقی کی۔ ان کی علمی کامیابیوں میں ان کا مقامی قدر کا نظام شامل ہے جو ایشیا کے نظاموں سے آزادانہ طور پر تیار کیا گیا تھا۔ انہوں نے جدید دور کے '0' کے لیے ایک جگہ نشان علامت بھی استعمال کی جو سمندری سیپی جیسی تھی۔



Here we find a puzzling phenomenon. Why was their third landmark number 360 rather than 400? Some scholars feel that this might have something to do with their calendars.

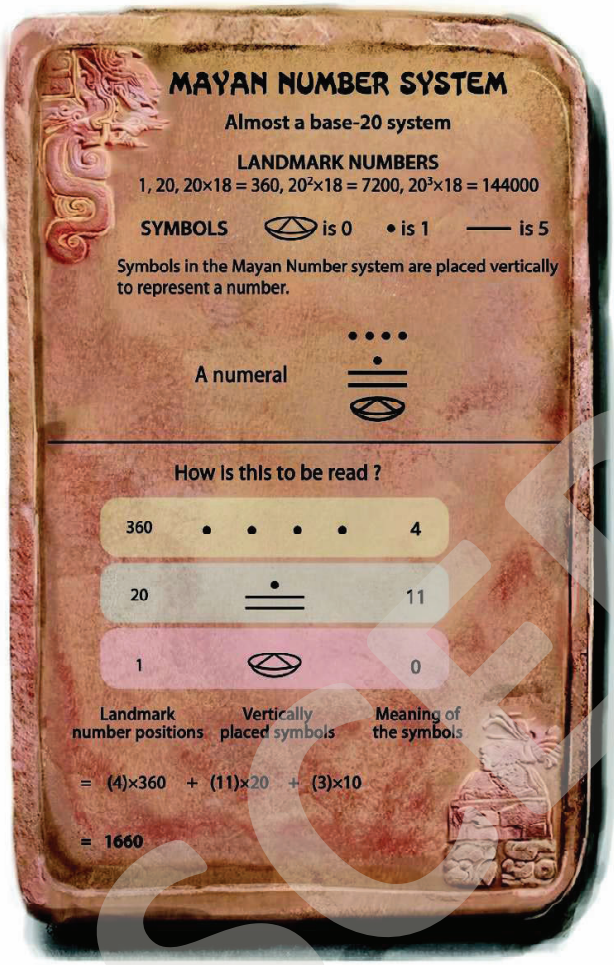
They used a dot for 1, and a bar — for 5. These were used to denote numbers from 1 to 19.

The symbols associated with different landmark numbers were written one below the other with the lowermost set of symbols corresponding to the number of 1s, the set above corresponding to the number of 20s, the set above to the number of 360s and so on.

? Represent the following numbers using the Mayan system:

(i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721

Because the Mayan system is not an actual base-20 system, it lacks the advantages that a system with a base has for computations. Nevertheless,



یہاں ہمیں ایک حیران کن مظہر ملتا ہے۔ ان کا تیسرا اہم عدد 400 کی بجائے 360 کیوں تھا؟ کچھ علماء کا خیال ہے کہ اس کا تعلق ان کے تقویموں سے ہو سکتا ہے۔

انہوں نے 1 کے لیے نقطہ  اور 5 کے لیے لکیر — استعمال کی۔ یہ 1 سے 19 تک اعداد ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتی تھیں۔

مختلف اہم اعداد سے متعلق علامتیں ایک کے نیچے ایک لکھی جاتی تھیں جس میں سب سے نیچے والا مجموعہ 1 کی تعداد، اس کے اوپر والا مجموعہ 20 کی تعداد، اس کے اوپر والا مجموعہ 360 کی تعداد اور اسی طرح آگے ظاہر کرتا تھا۔

? درج ذیل اعداد کو مایا کے نظام میں ظاہر کیجیے:

(i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721

چونکہ مایا کا نظام ایک حقیقی بنیاد 20 کا نظام نہیں ہے اس لیے اس میں حسابات کے لیے بنیاد والے نظام کے فوائد کا فقدان ہے۔

بہر حال،

their place value notation and their use of a placeholder symbol for zero is considered an important advance in the history of number systems.

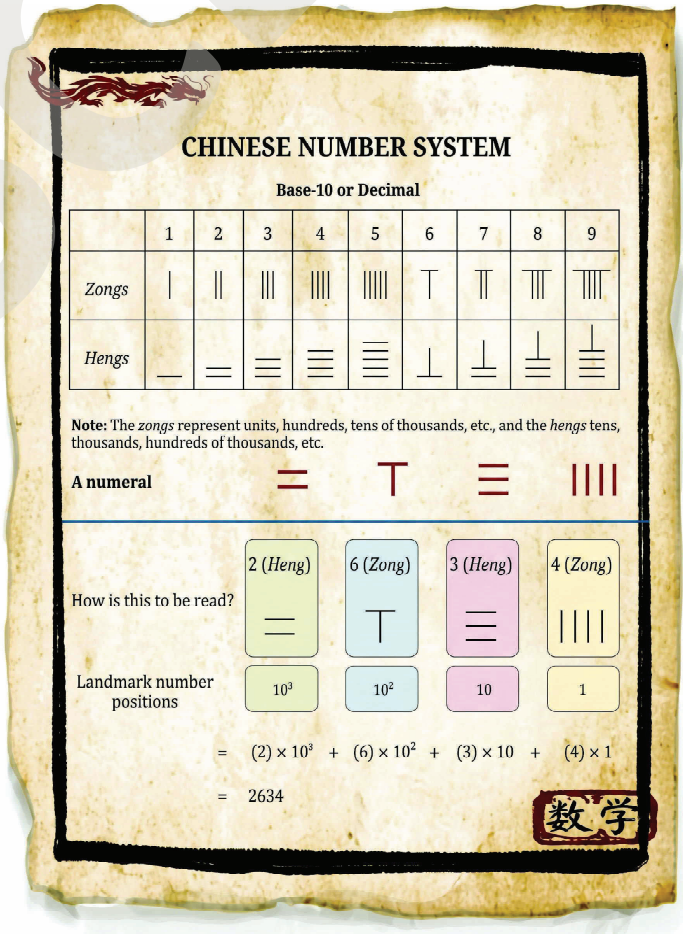
A curious fact is that we can still find the use of base-20 in the number names of some European languages.

III. The Chinese Number System



The Chinese used two number systems - a written system for recording quantities, and a system making use of rods for performing computations. The numerals in the rod-based number system are called **rod numerals**. Here we discuss the rod numerals, which are more efficient in writing and computing with numbers than the written system of the Chinese.

The rod numerals developed in China by at least by 3rd century AD and were used till the 17th century. It was a decimal system (base-10). The symbols for 1 to 9 were as follows :

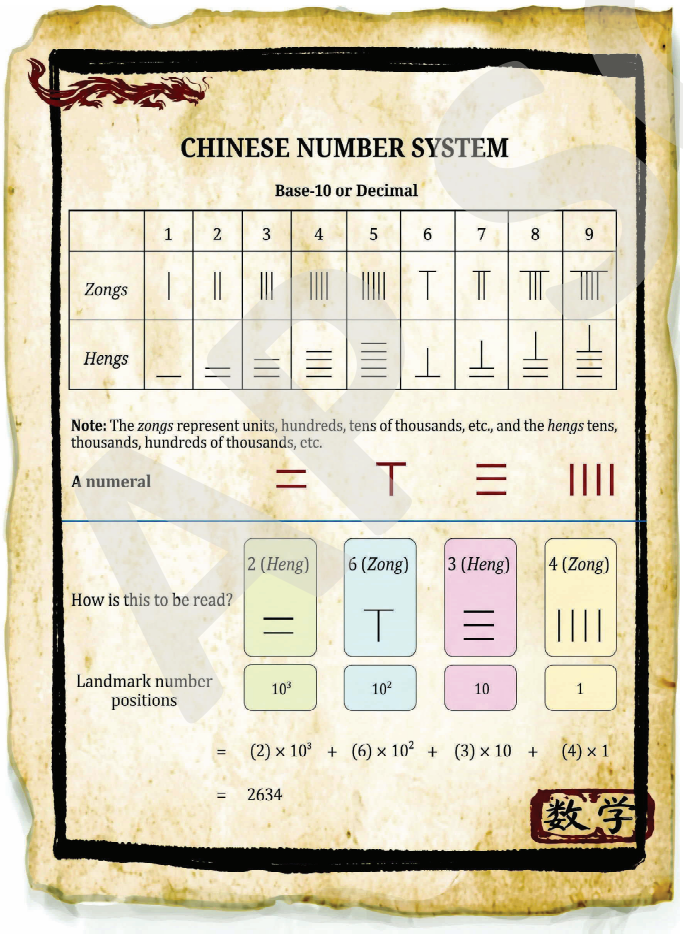


ان کی مقامی قدر کی اشاریہ نگاری اور صفر کے لیے جگہ نشان کی علامت کا استعمال عددی نظاموں کی تاریخ میں ایک اہم پیش رفت سمجھی جاتی ہے۔

ایک دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ ہم ابھی بھی کچھ یورپی زبانوں کے اعداد کے ناموں میں بنیاد 20 کا استعمال پاسکتے ہیں۔

III. چینی عددی نظام





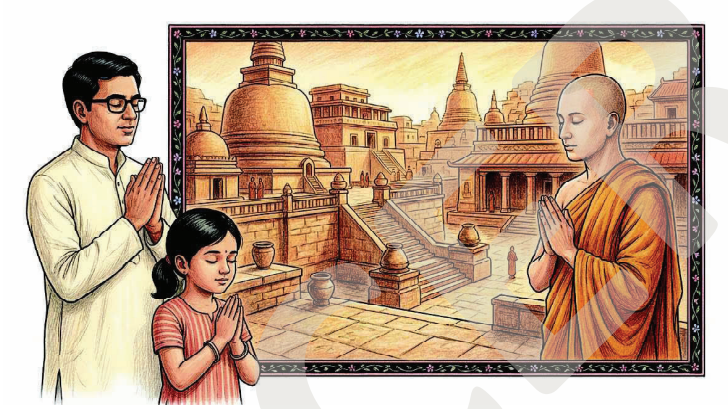
چینیوں نے دو عددی نظام استعمال کیے — مقداروں کو درج کرنے کے لیے ایک لکھا ہوا نظام، اور حسابات انجام دینے کے لیے چھڑیوں پر مبنی ایک نظام۔ چھڑی پر مبنی عددی نظام کے ہندسوں کو چھڑی ہندسے کہتے ہیں۔ یہاں ہم چھڑی ہندسوں پر بحث کریں گے جو اعداد لکھنے اور ان سے حساب کرنے میں چینیوں کے لکھے ہوئے نظام سے زیادہ موثر ہیں۔

چھڑی ہندسے چین میں کم از کم تیسری صدی عیسوی تک ترقی پا چکے تھے اور 17 ویں صدی تک استعمال ہوتے رہے۔ یہ ایک اعشاری نظام (بنیاد 10) تھا۔ 1 سے 9 تک کی علامتیں یہ تھیں:

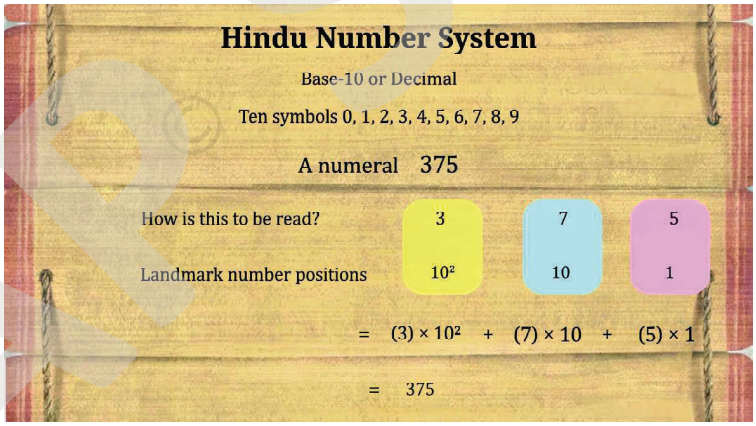
Like the Mesopotamians, the rod numerals used a blank space to indicate the skipping of a place value. However, because of the slightly more uniform sizes of the symbols for one through nine, the blank spaces were easier to locate than in the Mesopotamian system.

Notice how similar the rod numerals are to the Hindu system. The Chinese system, with a symbol for zero, would be a fully developed place value system.

IV. The Hindu Number System



? Where does the Hindu/Indian number system figure in the evolution of ideas of number representation? What are its landmark numbers? And does it use a place value system?



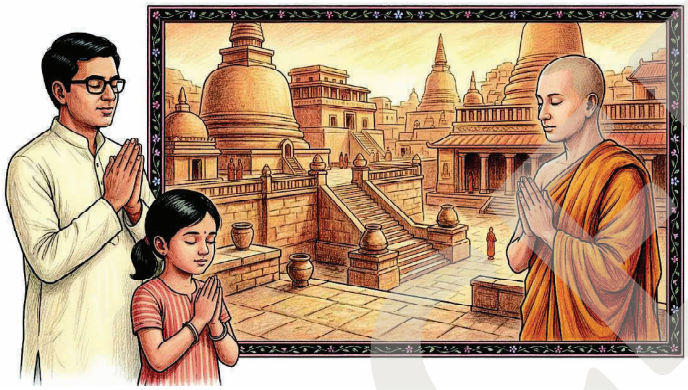
As can be seen, the Hindu number system is a place value system. The Hindu number system has had a symbol for 0 at least as early as 200 BCE. Because of the use of 0 as a digit, and the use of a single digit in each position, this system does not lead to any kind of ambiguity when reading or writing numerals. It is for this reason that the Hindu number system is now used throughout the world.

The use of 0 as a digit, and indeed as a number, was a breakthrough

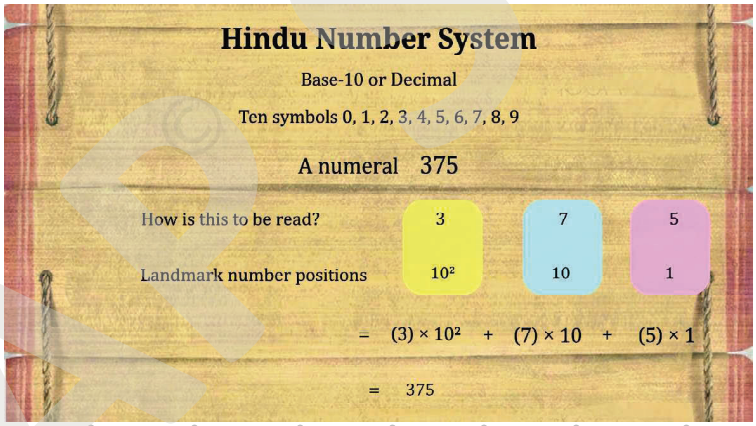
میسوپوٹیمیاوالوں کی طرح چھڑی ہندسوں میں مقامی قدر کی جگہ کو چھوڑنے کے لیے خالی جگہ استعمال کی جاتی تھی۔ تاہم 1 سے 9 تک کی علامتوں کے قدرے زیادہ یکساں سائز کی وجہ سے میسوپوٹیمیا کے نظام کے مقابلے میں خالی جگہیں تلاش کرنا آسان تھا۔

غور کیجیے کہ چھڑی ہندسے ہندوستانی نظام سے کتنے ملتے جلتے ہیں۔ صفر کی علامت کے ساتھ چینی نظام ایک مکمل طور پر ترقی یافتہ مقامی قدر کا نظام ہوتا۔

IV. ہندوستانی عددی نظام



اعداد کی نمائندگی کے تصورات کے ارتقاء میں ہندوستانی عددی نظام کا کیا مقام ہے؟ اس کے اہم اعداد کیا ہیں؟ اور کیا یہ مقامی قدر کا نظام استعمال کرتا ہے؟



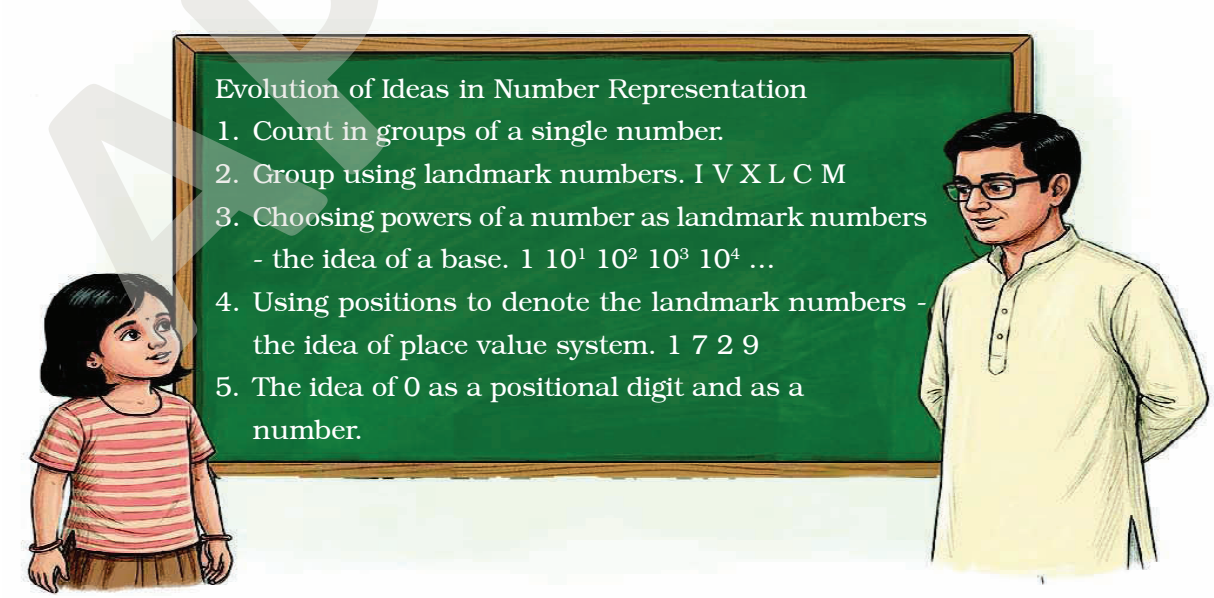
جیسا کہ دیکھا جا سکتا ہے، ہندوستانی عددی نظام ایک مقامی قدر کا نظام ہے۔ ہندوستانی عددی نظام میں کم از کم 200 قبل مسیح سے 0 کی علامت موجود رہی ہے۔ 0 کو ایک ہندسے کے طور پر استعمال کرنے اور ہر جگہ ایک واحد ہندسہ استعمال کرنے کی وجہ سے یہ نظام ہندسے پڑھتے یا لکھتے وقت کسی قسم کا ابہام پیدا نہیں کرتا۔ اسی وجہ سے ہندوستانی عددی نظام اب پوری دنیا میں استعمال ہوتا ہے۔

0 کو ایک ہندسے اور درحقیقت ایک عدد کے طور پر استعمال کرنا ایک پیش رفت تھی۔

that truly changed the world of mathematics and science. In Indian mathematics, indeed, zero was not just used as a placeholder in the place value system, but was also given the status of a number in its own right, on par with other numbers. The arithmetic properties of the number 0 (e.g., that 0 plus any number is the same number, and that 0 times any number is zero) were explicitly used by Aryabhata in his aryabhatiya in 499 CE to compute with and do elaborate scientific computations using Hindu numerals. The use of 0 as a number like any other number, on which one can perform the basic arithmetic operations, was codified by Brahmagupta in his work Brahmasphutasiddhanta in 628 CE, as we learned in an earlier grade.

By introducing 0 as a number, along with the negative numbers, Brahmagupta created what in modern terms is called a ring, i.e., a set of numbers that is closed under addition, subtraction, and multiplication (i.e., any two numbers in the set can be added, subtracted, or multiplied to get another number in that set). These new ideas laid the foundations for modern mathematics, and particularly for the areas of algebra and analysis.

Hopefully, this gives you a sense of all the ideas that went into writing and computing with numbers in the way that we do today. The discovery of 0 and the resulting Indian number system is truly one of the greatest, most creative, and most influential inventions of all time - appearing constantly in our daily lives and forming the basis of much of modern science, technology, computing, accounting, surveying, and more. The next time you are writing numbers, think about the incredible history behind them and all the deep ideas that went into their discovery!



جس نے واقعی ریاضی اور سائنس کی دنیا کو بدل کر رکھ دیا۔ ہندوستانی ریاضی میں صفر کو صرف مقامی قیمت کے نظام میں ایک خالی جگہ پُر کرنے والی علامت کے طور پر استعمال نہیں کیا گیا، بلکہ اسے دوسرے اعداد کی طرح ایک مستقل عدد کا درجہ بھی دیا گیا۔ عدد 0 کی حسابی خصوصیات (مثلاً کسی بھی عدد میں 0 جمع کرنے سے وہی عدد حاصل ہوتا ہے، اور کسی بھی عدد کو 0 سے ضرب دینے کا حاصل ضرب 0 ہوتا ہے) کو آریہ بھٹیہ نے 499 عیسوی میں اپنی کتاب آریہ بھٹیہ میں واضح طور پر استعمال کیا اور ہندی ہندسوں کے ذریعے پیچیدہ سائنسی حسابات انجام دیے۔

صفر کو دوسرے اعداد کی طرح ایک عدد ماننا، جس پر بنیادی حسابی عملیات کی جا سکیں، برہم گپتا نے 628 عیسوی میں اپنی کتاب برہما سپوتھا سدھانت میں باقاعدہ طور پر بیان کیا، جیسا کہ آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ صفر اور منفی اعداد کو متعارف کروا کر برہم گپتا نے وہ تصور قائم کیا جسے جدید ریاضی میں **رِنگ** کہا جاتا ہے، یعنی اعداد کا ایسا مجموعہ جو جمع، تفریق اور ضرب کے تحت بند ہو۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اس مجموعے کے کسی بھی دو اعداد کو جمع، تفریق یا ضرب دینے سے حاصل ہونے والا عدد بھی اسی مجموعے میں شامل ہو گا۔ ان نئے تصورات نے جدید ریاضی، خصوصاً الجبرا اور تجزیہ کی بنیادیں فراہم کیں۔ امید ہے کہ اس سے آپ کو اندازہ ہوا ہو گا کہ اعداد کو آج جس طریقے سے ہم لکھتے اور استعمال کرتے ہیں، اس کے پیچھے کتنے گہرے تصورات اور عظیم دریافتیں کارفرما ہیں۔

صفر کی دریافت اور اس کے نتیجے میں وجود میں آنے والا **ہندی نظامِ اعداد** انسانی تاریخ کی عظیم ترین، تخلیقی ترین اور مؤثر ترین ایجادات میں سے ایک ہے۔ یہ ہماری روزمرہ زندگی میں ہر وقت استعمال ہوتا ہے اور جدید سائنس، ٹیکنالوجی، کمپیوٹنگ، حساب داری، پیمائش اور بے شمار دیگر شعبوں کی بنیاد فراہم کرتا ہے۔ اگلی بار جب آپ کوئی عدد لکھیں تو اس کے پیچھے موجود حیرت انگیز تاریخ اور ان گہرے خیالات کو ضرور یاد کریں جنہوں نے اس دریافت کو ممکن بنایا۔

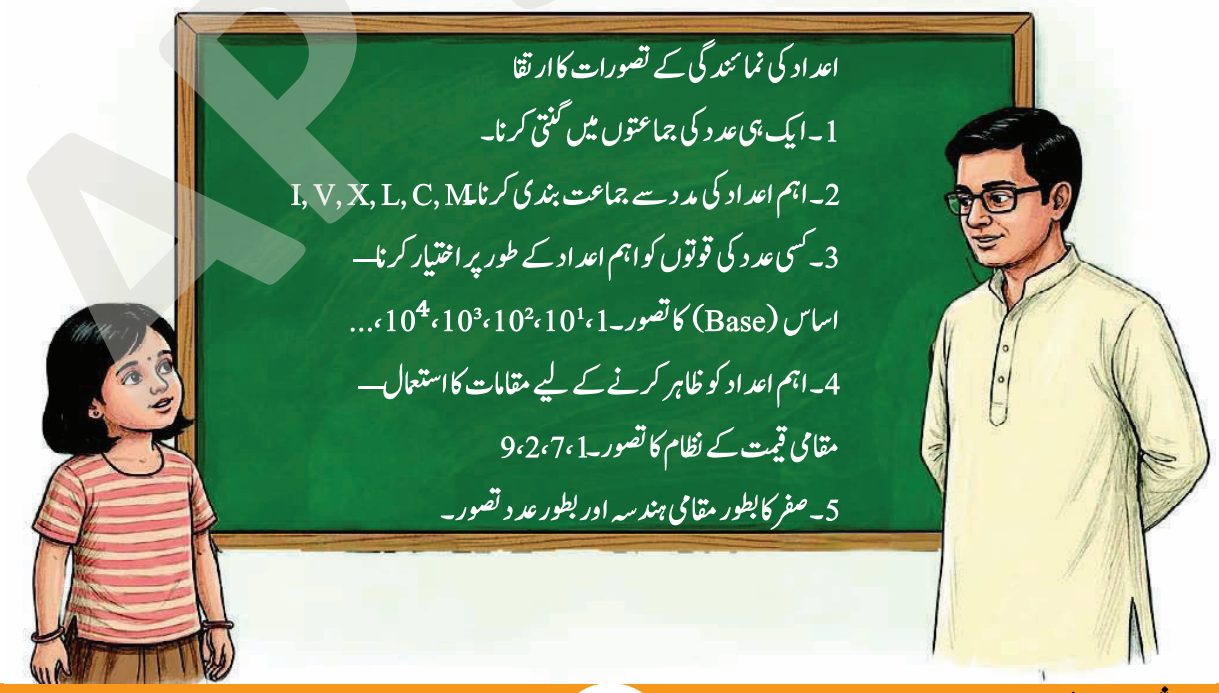




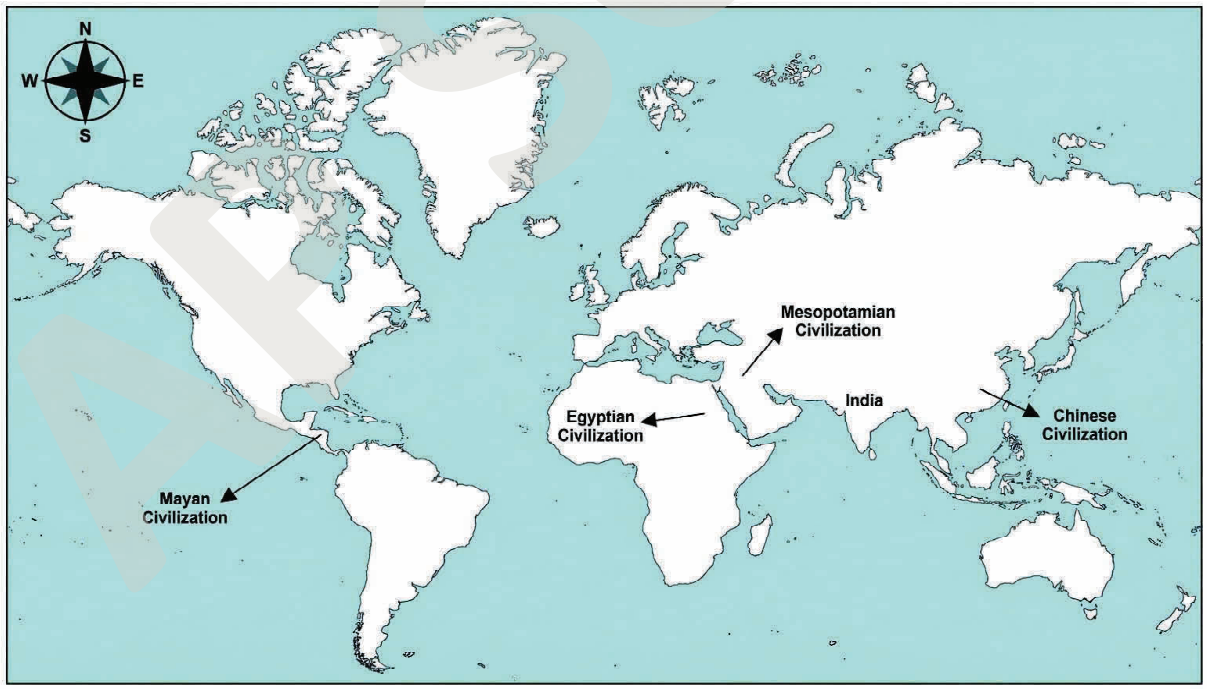
Figure it Out - 3.8



1. Why do you think the Chinese alternated between the Zong and Heng symbols? If only the Zong symbols were to be used, how would 41 be represented? Could this numeral be interpreted in any other way if there is no significant space between two successive positions?
2. Where in your daily lives, and in which professions, do the Hindu numerals, and 0, play an important role? How might our lives have been different if our number system and 0 hadn't been invented or conceived of?



3. The ancient Indians likely used base 10 for the Hindu number system because humans have 10 fingers, and so we can use our fingers to count. But what if we had only 8 fingers? How would we be writing numbers then? What would the Hindu numerals look like if we were using base 8 instead? Base 5? Try writing the base-10 Hindu numeral 25 as base-8 and base-5 Hindu numerals, respectively. Can you write it in base-2?



The map shows the locations of the different civilisations.

They existed in different time periods.

© NCERT

حل کیجیے–3.8

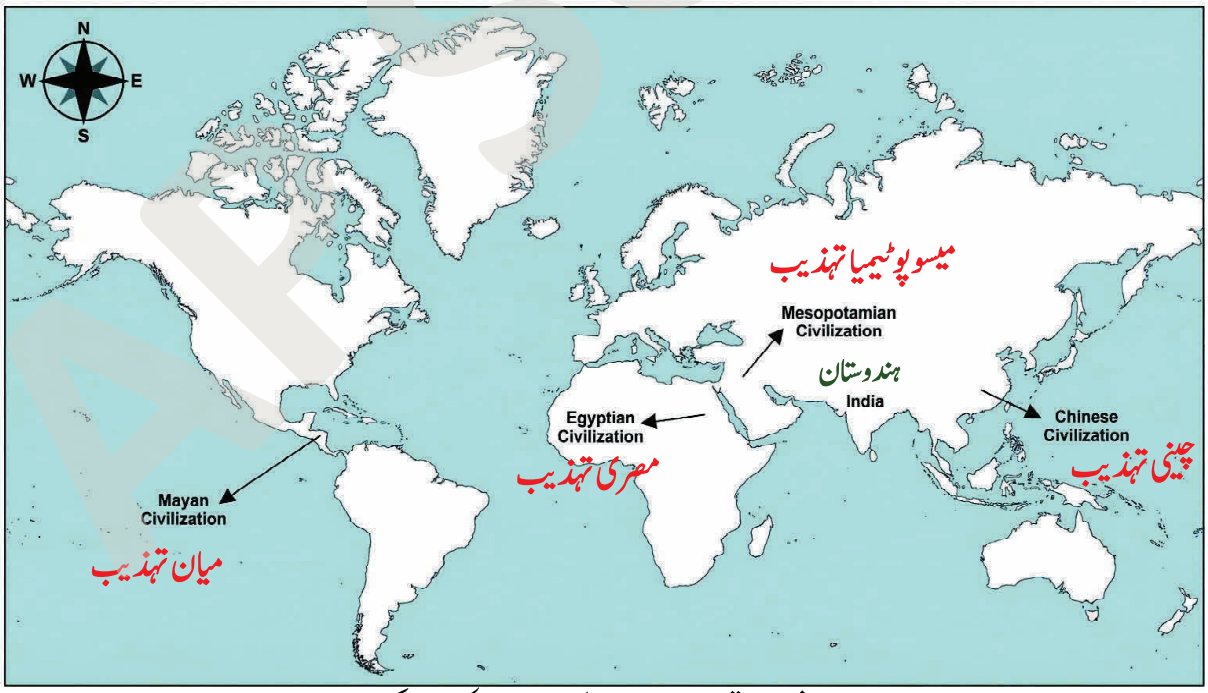
ریاضی بحث

1. آپ کے خیال میں چینی لوگوں نے زونگ (Zong) اور ہینگ (Heng) علامات کو باری باری کیوں استعمال کیا؟ اگر صرف زونگ علامات ہی استعمال کی جاتیں تو 41 کو کیسے ظاہر کیا جاتا؟ اگر دو متواتر مقامات کے درمیان واضح فاصلہ نہ ہو تو کیا اس عددی علامت کی کوئی اور تشریح بھی کی جاسکتی ہے؟

2. آپ کی روزمرہ زندگی میں اور کن پیشوں میں ہندی ہندسے اور صفر اہم کردار ادا کرتے ہیں؟ اگر ہمارا نظامِ اعداد اور صفر ایجاد یا تصور نہ کیا گیا ہوتا تو ہماری زندگی کس طرح مختلف ہوتی؟

ریاضی بحث

3. غالباً قدیم ہندوستانیوں نے ہندی نظامِ اعداد کے لیے اساس 10 اس لیے اختیار کیا کیونکہ انسانوں کی دس انگلیاں ہوتی ہیں اور ہم انگلیوں کی مدد سے گنتی کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر ہماری صرف 8 انگلیاں ہوتیں تو ہم اعداد کو کس طرح لکھتے؟ اگر ہم اساس 8 استعمال کر رہے ہوتے تو ہندی ہندسے کیسے نظر آتے؟ اور اگر اساس 5 استعمال کرتے تو کیسے ہوتے؟ کوشش کریں کہ اساس 10 کے عدد 25 کو بالترتیب اساس 8 اور اساس 5 میں لکھیں۔ کیا آپ اسے اساس 2 میں بھی لکھ سکتے ہیں؟



نقشہ مختلف تہذیبوں کے مقامات کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ مختلف ادوارِ زمانہ میں موجود تھیں۔

SUMMARY

- To represent numbers, we need a standard sequence of objects, names, or written symbols that have a fixed order. This standard sequence is called a **number system**.
- The symbols representing numbers in a written number system are called **numerals**.
- In a number system, **landmark numbers** are numbers that are easily recognisable and used as reference points for understanding and working with other numbers. They serve as anchors within the number system, helping people to orient themselves and make sense of quantities, particularly larger ones.
- A number system whose landmark numbers are the powers of a number n is referred to as a **base-n number system**.
- Number systems having a base that make use of the position of a symbol in determining the landmark number that it is associated with are called **positional number systems** or **place value systems.**
- Place value representations were used in the Mesopotamian (Babylonian), Mayan, Chinese and Indian civilisations.
- The system of numerals that we use throughout the world today is the **Hindu number system** (also sometimes called the **Indian number system**, or the **Hindu-Arabic number system**). It is a place value system with (usually) 10 digits, including the digit 0 which is treated on par with other digits. Due to its use of 0 as a number, the system enables the writing of all numbers unambiguously using just finitely many symbols, and also enables efficient computation. The system originated in India around 2000 years ago, and then spread across the world, and is considered one of human history's greatest inventions.

APSCERT

خلاصہ

- اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے ہمیں اشیا، ناموں یا تحریری علامات کی ایک معیاری ترتیب درکار ہوتی ہے جس کی ایک مقررہ ترتیب ہو۔ اس معیاری ترتیب کو **نظام اعداد** کہا جاتا ہے۔
- تحریری نظامِ اعداد میں اعداد کو ظاہر کرنے والی علامات کو **ہندسے** کہا جاتا ہے۔
- نظامِ اعداد میں **نمایاں اعداد** ایسے اعداد ہوتے ہیں جو آسانی سے پہچانے جاسکتے ہیں اور دوسرے اعداد کو سمجھنے اور ان پر عمل کرنے کے لیے حوالہ جاتی نقطوں کے طور پر استعمال ہوتے ہیں۔ یہ نظامِ اعداد میں رہنما کردار ادا کرتے ہیں اور خصوصاً بڑے اعداد کو سمجھنے میں مدد دیتے ہیں۔
- ایسا نظامِ اعداد جس کے نمایاں اعداد کسی عدد n کی قوتیں ہوں، **اساس n– نظامِ اعداد** کہلاتا ہے۔
- وہ نظامِ اعداد جن میں کسی علامت کی جگہ اس سے وابستہ نمایاں عدد کو متعین کرتی ہے، **مقامی قیمت کے نظام** کہلاتے ہیں۔
- مقامِ قیمت کی نمائندگی میسوپوٹیمیا (بابلی)، مایا، چینی اور ہندوستانی تہذیبوں میں استعمال ہوتی تھی۔
- آج پوری دنیا میں جو نظامِ ہندسہ استعمال ہوتا ہے وہ **ہندی نظامِ اعداد** ہے (جسے بعض اوقات ہندوستانی نظامِ اعداد یا ہندو-عربی نظامِ اعداد بھی کہا جاتا ہے)۔ یہ مقامِ قیمت کا ایک نظام ہے جس میں عموماً 10 ہندسے شامل ہوتے ہیں، جن میں 0 بھی شامل ہے اور اسے دوسرے ہندسوں کے برابر حیثیت دی جاتی ہے۔
- صفر کو بطور عدد استعمال کرنے کی وجہ سے یہ نظام تمام اعداد کو محدود تعداد میں علامات کے ذریعے واضح طور پر لکھنے اور مؤثر حساب کتاب کرنے کی سہولت فراہم کرتا ہے۔
- یہ نظام تقریباً دو ہزار سال قبل ہندوستان میں وجود میں آیا، پھر دنیا بھر میں پھیل گیا، اور انسانی تاریخ کی عظیم ترین ایجادات میں شمار کیا جاتا ہے۔

4 QUADRILATERALS

Learning outcomes

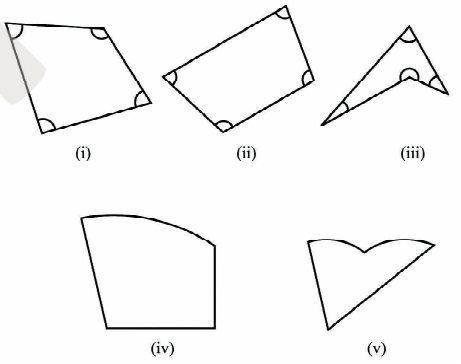
Learners will be able to

- Define and identify quadrilaterals as four-sided closed figures in daily life (CG-10)
- Classify quadrilaterals (parallelogram, rectangle, square, rhombus, trapezium, kite) (CG-3)
- Understand and apply side, angle, and diagonal properties (including angle sum of 360°) (CG-3)
- Analyse relationships among different types of quadrilaterals (CG-3)
- Draw, classify, and justify quadrilaterals based on given properties (CG-3)
- Solve problems involving missing angles using properties (CG-3)
- Apply quadrilateral concepts in real-life contexts (designs, patterns, architecture) (CG-10)

4.0 Introduction

In this chapter, we will study some interesting types of four-sided figures and solve problems based on them. Such figures are commonly known as quadrilaterals. The word 'quadrilateral' is derived from Latin words - quadri meaning four, and latus referring to sides.

? Observe the following figures.



Figs. (i), (ii), and (iii) are quadrilaterals, and the others are not. Why?

The angles of a quadrilateral are the angles between its sides, as marked in Figs. (i), (ii), and (iii).

4 چار ضلعی

R4Z7P7

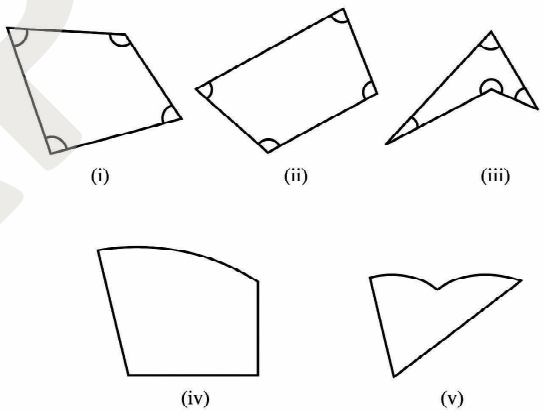
اکتسابی نتائج: طلبہ اس قابل بنیں گے

- چار ضلعی کو چار اضلاع والی بند اشکال کے طور پر متعین اور روز مرہ زندگی میں شناخت کر سکیں گے۔ (CG-10)
- چار ضلعی کی اقسام (متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع، معین، ذوزنقہ، پتنگ نما شکل) کی درجہ بندی کر سکیں گے۔ (CG-3)
- اضلاع، زاویوں اور قطروں کی خصوصیات (بشمول زاویوں کے مجموعے $360°$) کو سمجھ سکیں گے اور استعمال کر سکیں گے۔ (CG-3)
- مختلف اقسام کے چار ضلعی کے درمیان تعلقات کا تجزیہ کر سکیں گے۔ (CG-3)
- دی گئی خصوصیات کی بنیاد پر چار ضلعی کو بنا سکیں گے، درجہ بندی کر سکیں گے اور اپنی درجہ بندی کی توجیہ پیش کر سکیں گے۔ (CG-3)
- خصوصیات کی مدد سے نامعلوم زاویوں سے متعلق مسائل حل کر سکیں گے۔ (CG-3)
- چار ضلعی کے تصورات کو حقیقی زندگی کے سیاق وسباق (ڈیزائن، نمونے اور تعمیرات) میں استعمال کر سکیں گے۔ (CG-10)

4.0 تعارف

اس باب میں ہم چار اضلاع والی اشکال کی چند دلچسپ اقسام کا مطالعہ کریں گے اور ان پر مبنی مسائل حل کریں گے۔ ایسی اشکال کو عام طور پر چار ضلعی کہا جاتا ہے۔ لفظ چار ضلعی لاطینی الفاظ سے ماخوذ ہے، Quadri کے معنی ہیں چار، Latus کے معنی ہیں اضلاع۔

؟ مندرجہ ذیل اشکال کا مشاہدہ کریں۔



اشکال (i)، (ii) اور (iii) چار ضلعی ہیں، جبکہ باقی اشکال چار ضلعی نہیں ہیں۔ کیوں؟

چار ضلعی کے زاویے وہ زاویے ہوتے ہیں جو اس کے اضلاع کے درمیان بنتے ہیں، جیسا کہ اشکال (i)، (ii) اور (iii) میں نشان زد کیا گیا ہے۔

We will start with the most familiar quadrilaterals - rectangles and squares.

4.1 Rectangles and Squares

We know what rectangles are. Let us define them.

Rectangle: A rectangle is a quadrilateral in which -

(i) The angles are all right angles (90°), and

(ii) The opposite sides are of equal length.

The definition precisely states the conditions a quadrilateral has to satisfy to be called a rectangle.

? Are there other ways to define a rectangle?

Let us consider the following problem related to the construction of rectangles.

A Carpenter's Problem

? A carpenter needs to put together B two thin strips of wood, as shown in Fig. 1, so that when a thread is passed through their endpoints, it forms a rectangle.

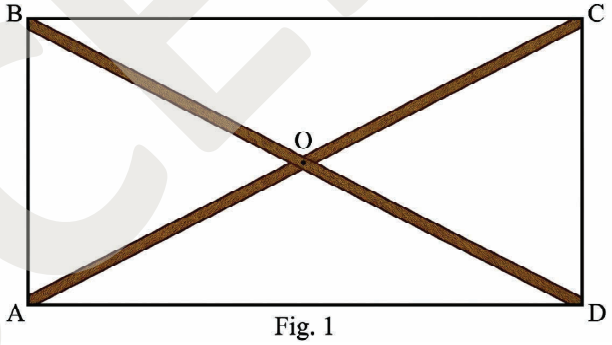


Fig. 1

He already has one 8 cm long strip. What should be the length of the other strip? Where should they both be joined?

Let us first model the structure that the carpenter has to make. The strips can be modelled as line segments. They are the diagonals of the quadrilateral formed by their endpoints. For the quadrilateral to be a rectangle, we need to answer the following questions -

? 1. What is the length of the other diagonal?

? 2. What is the point of intersection of the two diagonals?

? 3. What should the angle be between the diagonals?

? Let us answer these questions using geometric reasoning (deduction). If that is challenging, try to construct/ measure some rectangles.

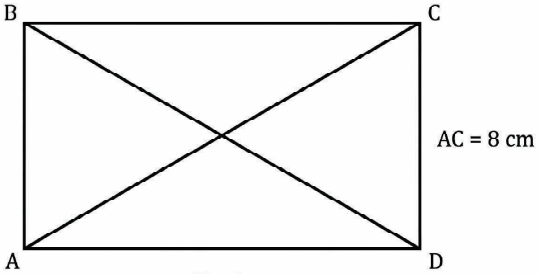


Fig. 2

APSCERT

ہم سب سے پہلے سب سے زیادہ معروف چار ضلعی اشکال یعنی مستطیل اور مربع کا مطالعہ کریں گے۔

4.1 مستطیل اور مربع

ہم مستطیل سے واقف ہیں۔ آیئے اس کی تعریف کرتے ہیں۔

مستطیل : مستطیل ایک چار ضلعی شکل ہے جس میں:

(i) تمام زاویے قائمہ ($90°$) ہوتے ہیں، اور

(ii) بالمقابل اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوتی ہیں۔

یہ تعریف واضح طور پر ان شرائط کو بیان کرتی ہے جنہیں پورا کرنے پر کسی چار ضلعی شکل کو مستطیل کہا جاتا ہے۔

کیا مستطیل کی کوئی اور تعریف بھی ہو سکتی ہے؟

آیئے مستطیل کی تعمیر سے متعلق ایک مسئلے پر غور کریں۔

ایک بڑھئی کا مسئلہ

ایک بڑھئی لکڑی کی دو باریک پٹیاں اس طرح جوڑنا چاہتا ہے کہ جب ان کے سروں سے ایک دھاگا گزارا جائے تو ایک مستطیل بن جائے، جیسا کہ شکل 1 میں دکھایا گیا ہے۔

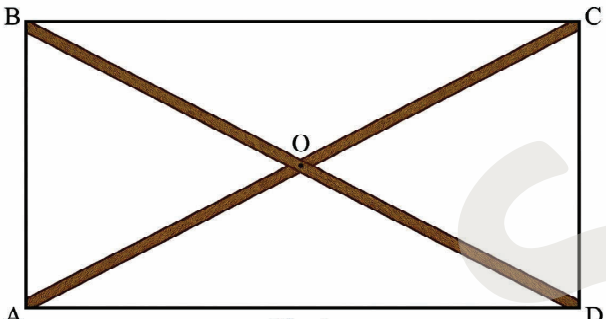


Fig. 1

اس کے پاس پہلے سے 8 سینٹی میٹر لمبی ایک پٹی موجود ہے۔

دوسری پٹی کی لمبائی کتنی ہونی چاہیے؟

اور دونوں پٹیوں کو کس مقام پر جوڑا جانا چاہیے؟

آیئے پہلے اس ساخت کا نمونہ بنائیں جو بڑھئی کو تیار کرنی ہے۔ ان پٹیوں کو خطی قطعات کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

یہ اس چار ضلعی شکل کے وتر ہیں جو ان کے سروں کو ملانے سے بنتی ہے۔

اس چار ضلعی شکل کے مستطیل ہونے کے لیے ہمیں درج ذیل سوالات کے جواب درکار ہیں:

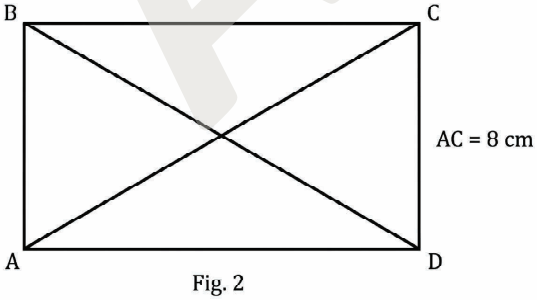


Fig. 2

1. دوسرے وتر کی لمبائی کتنی ہونی چاہیے؟
2. دونوں وتروں کا نقطۂ تقاطع کیا ہونا چاہیے؟
3. وتروں کے درمیان زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

آیئے ہندسی استدلال (Deduction) کی مدد سے ان سوالات کے جواب معلوم کریں۔ اگر یہ مشکل محسوس ہو تو چند مستطیل بنائیں اور ان کی پیائش کریں۔

APSCERT

To find the answers to these questions, let us suppose that we have placed the diagonals such that their endpoints form the vertices of a rectangle, as shown in Fig. 2.

Deduction 1 - What is the length of the other diagonal?

This can be deduced using congruence as follows -

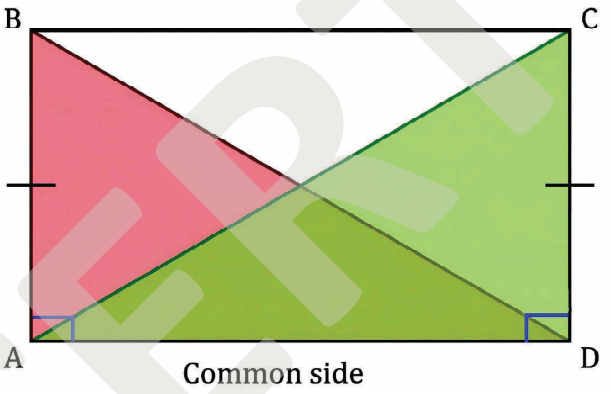
Since ABCD is a rectangle, we have

AB = CD

$\angle BAD = \angle CDA = 90°$

AD is common to both triangles.

So, $\Delta ADC \cong \Delta DAB$ by the SAS congruence condition.

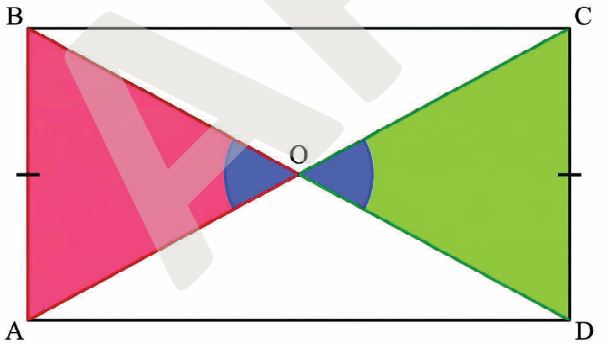


Therefore, AC = BD, since they are corresponding parts of congruent triangles. This shows that the diagonals of a rectangle always have the same length.

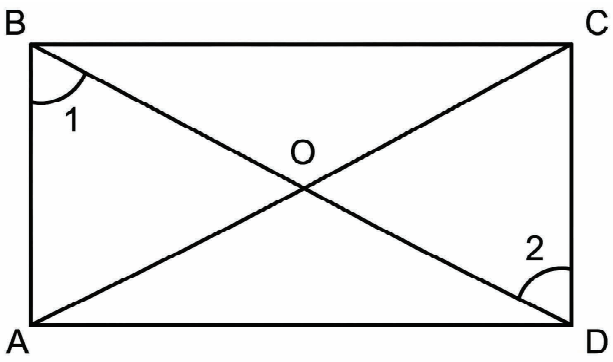
So the other diagonal must also be 8 cm long. You can verify this property by constructing/measuring some rectangles.

Deduction 2 - What is the point of intersection of the two diagonals?

This can also be found using congruence. Since we need to know the relation between OA and OC, and OB and OD, which two triangles of the rectangle ABCD should we consider?



The blue angles are equal since they are vertically opposite angles.

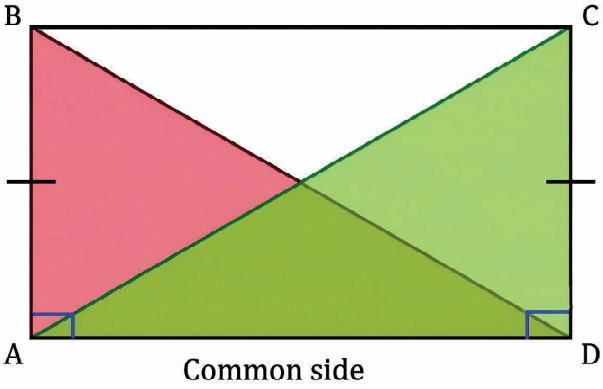


In order to show congruence, consider $\angle 1$ and $\angle 2$. Are they equal?

ان سوالات کے جوابات معلوم کرنے کے لیے فرض کریں کہ ہم نے وتروں کو اس طرح رکھا ہے کہ ان کے سرے ایک مستطیل کے راس بناتے ہیں، جیسا کہ شکل 2 میں دکھایا گیا ہے۔

منطقی قیاس 1: دوسرے وتر کی لمبائی کتنی ہو گی؟

اس کا قیاس مماثلت کی مدد سے درج ذیل طریقے سے کیا جا سکتا ہے:



چونکہ ABCD ایک مستطیل ہے، اس لیے:

$AB = CD$

$\angle BAD = \angle CDA = 90°$

اور AD دونوں مثلثات میں مشترک ہے۔

لہٰذا SAS شرطِ مماثلت کے مطابق، $\triangle ADC \cong \triangle DAB$

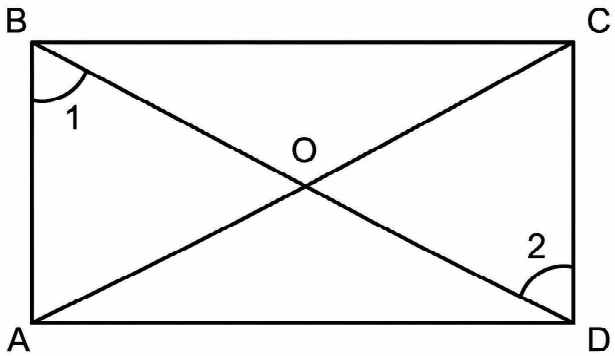
اس لیے، $AC = BD$ کیونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اجزاء ہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مستطیل کے وتر ہمیشہ مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں۔

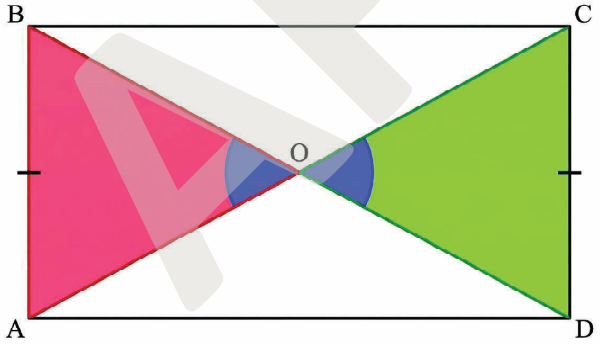
لہٰذا دوسرا وتر بھی 8 سم لمبا ہونا چاہیے۔ آپ چند مستطیل بنا کر یا ان کی پیمائش کر کے اس خاصیت کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

منطقی قیاس 2: دونوں وتروں کا نقطۂ تقاطع کیا ہو گا؟

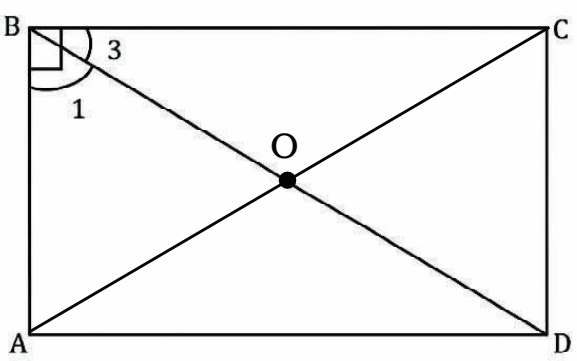
یہ بھی مماثلت کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ ہمیں OA اور OC نیز OB اور OD کے درمیان تعلق معلوم کرنا ہے، اس لیے ہمیں مستطیل ABCD کے کن دو مثلثات پر غور کرنا چاہیے؟

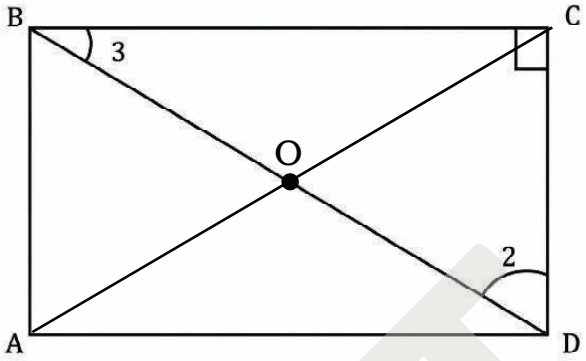


مماثلت ثابت کرنے کے لیے $\angle 1$ اور $\angle 2$ پر غور کریں۔ کیا یہ دونوں برابر ہیں؟



نیلے رنگ سے ظاہر کیے گئے زاویے برابر ہیں کیونکہ وہ متبادل زاویے ہیں۔





Since $\angle B = 90°$,

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$.

In ΔBCD, since

$\angle 3 + \angle 2 + 90 = 180$,

we have $\angle 3 + \angle 2 = 90°$.

So, $\angle 1 = \angle 2$ $(= 90° - \angle 3)$.

Thus, by the AAS condition for congruence, $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

Hence OA = OC and OB = OD, since they are corresponding parts of congruent triangles. So, O is the midpoint of AC and BD.

This shows that the diagonals of a rectangle always intersect at their midpoints.

Therefore, to get a rectangle, the diagonals must be drawn so that they are equal and intersect at their midpoints.

When the diagonals cross at their midpoints, we say that the diagonals bisect each other. Bisecting a quantity means dividing it into two equal parts.

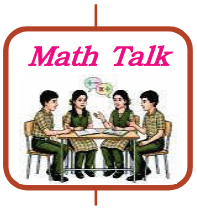
Verify this property by constructing some rectangles and measuring their diagonals and the points of intersection.

? Can the following equalities be used to establish that $\Delta AOD \cong \Delta COB$?

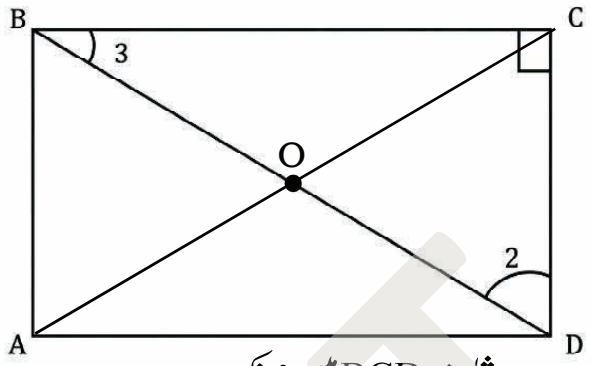
AO = CO (proved above)

$\angle AOB = \angle COD$ (vertically opposite angles)

AD = CB



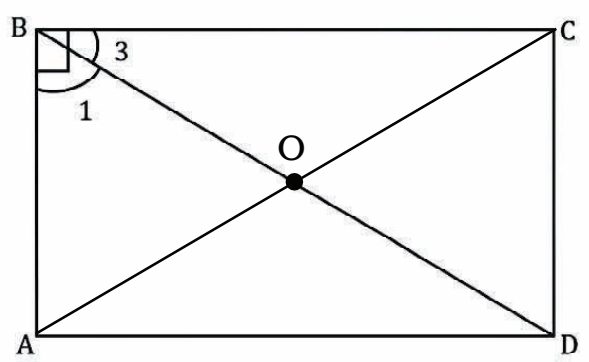
APSCERT



مثلث BCD میں چونکہ:

$\angle 3 + \angle 2 + 90° = 180°$

اس لیے: $\angle 3 + \angle 2 = 90°$۔



چونکہ $\angle B = 90°$,

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$.

لہٰذا تماثل کی AAS شرط کے مطابق، $\triangle AOB \cong \triangle COD$

اس لیے $OA = OC$ اور $OB = OD$، کیونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اجزاء ہیں۔ لہٰذا O، AC اور BD کا وسطی نقطہ ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مستطیل کے وتر ہمیشہ اپنے وسطی نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

لہٰذا مستطیل حاصل کرنے کے لیے ضروری ہے کہ وتر برابر ہوں، اور اپنے وسطی نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع کریں۔

جب وتر اپنے وسطی نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وتر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔

کسی مقدار کو تنصیف کرنا اس کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا ہے۔

اس خاصیت کی تصدیق چند مستطیل بنا کر، ان کے وتروں اور نقاطِ تقاطع کی پیمائش کر کے کریں۔

؟ کیا درج ذیل مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\triangle AOD \cong \triangle COB$ ثابت کیا جا سکتا ہے؟

$AO = CO$ (اوپر ثابت کیا جا چکا ہے)

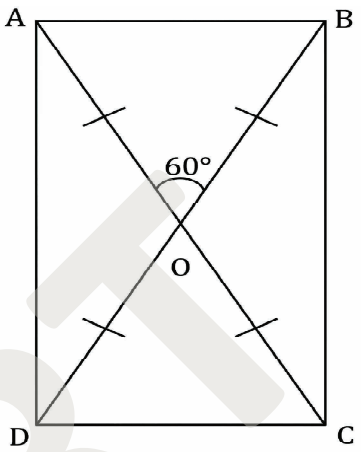
$\angle AOB = \angle COD$ (متبادل زاویے)

$AD = CB$

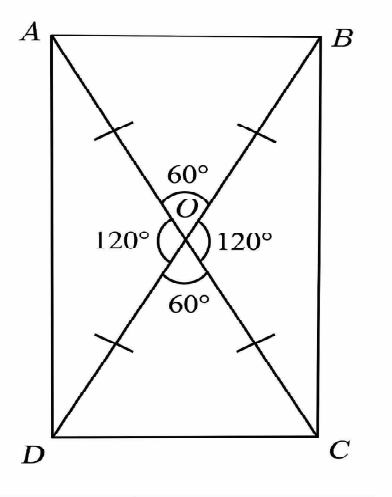


Deduction 3 - What are the angles between the diagonals?

Let us check what quadrilateral we get if we draw the two diagonals such that their lengths are equal, they bisect each other and have an arbitrary angle, say 60°, between them as shown in the figure to the right.



Can you find all the remaining angles?



We can find the remaining angles between the diagonals using our understanding of vertically opposite angles and linear pairs.

In ΔAOB, since OA = OB, the angles opposite them are equal, say a.

Can you find the value of a?

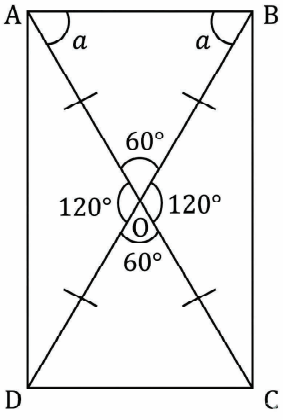
In ΔAOB, we have,

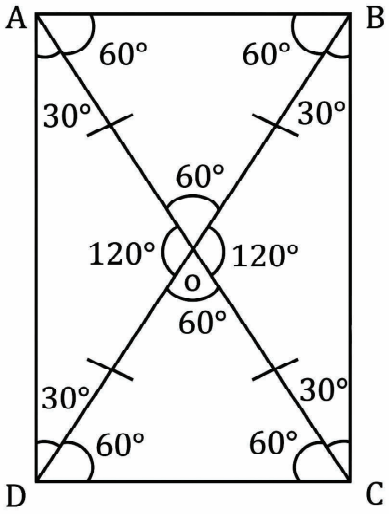
a + a + 60 = 180 (interior angles of a triangle). Therefore

2a = 120.

Thus a = 60.

Similarly, we can find the values of all the other angles.





APSCERT

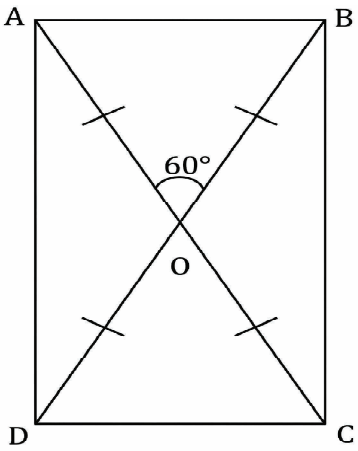
منطقی قیاس 3: وتروں کے درمیان زاویے کتنے ہوں گے؟

آیئے معلوم کریں کہ اگر ہم دو وتر اس طرح کھینچیں کہ:

ان کی لمبائیاں برابر ہوں، وہ ایک دوسرے کو منصف کریں، اور

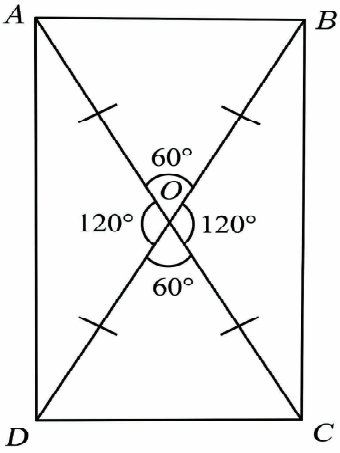
ان کے درمیان کوئی بھی زاویہ، مثلاً $60°$ ہو،

جیسا کہ دائیں جانب شکل میں دکھایا گیا ہے، تو ہمیں کون سی چار ضلعی شکل حاصل ہو گی؟



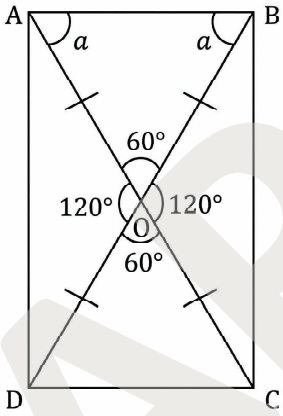
کیا آپ باقی تمام زاویے معلوم کر سکتے ہیں؟

ہم متبادل زاویوں اور خطی جوڑوں کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے وتروں کے درمیان باقی زاویے معلوم کر سکتے ہیں۔



مثلث AOB میں چونکہ $OA = OB$، اس لیے ان کے مقابل زاویے مساوی ہوں گے، فرض کریں ہر ایک a ہے۔

کیا آپ a کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں؟

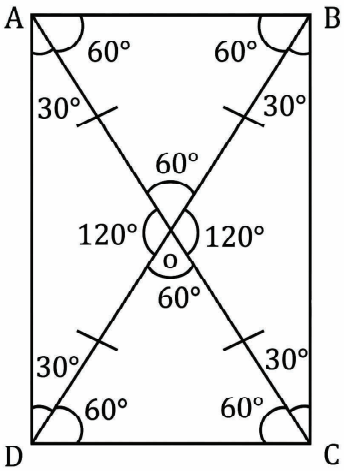


مثلث AOB میں، $a + a + 60° = 180°$

(مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ)

لہٰذا، $2a = 120°$، اس لیے: $a = 60°$

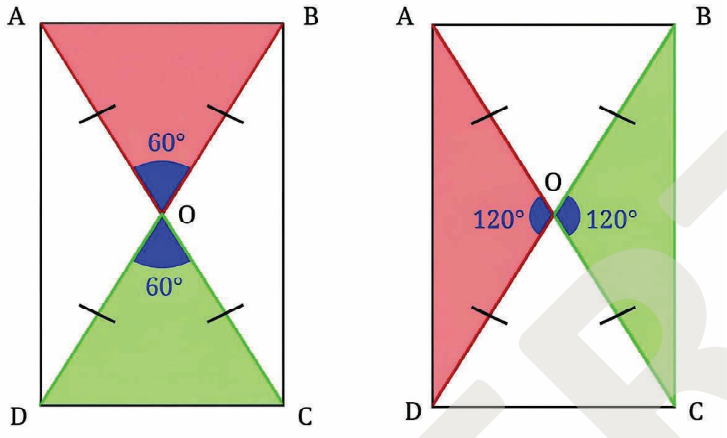
اسی طرح ہم باقی تمام زاویوں کی قدریں بھی معلوم کر سکتے ہیں۔



APSCERT

Can we now identify what type of quadrilateral ABCD is?
Notice that its angles all add up to 90° (30° + 60°).

What can we say about its sides?

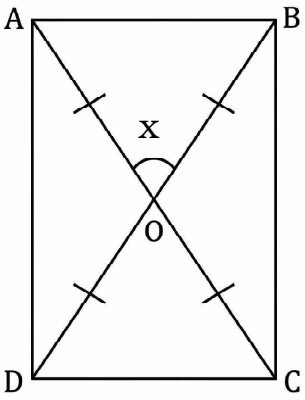


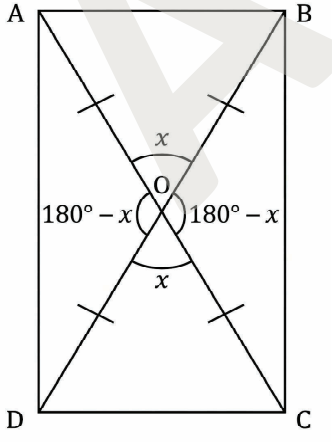
We can see that $\Delta AOB \cong \Delta COD$ and $\Delta AOD \cong \Delta COB$. Hence, AB = CD, and AD = CB, since they are corresponding parts of congruent triangles.

Therefore, ABCD is a rectangle since it satisfies the definition of a rectangle.

Will ABCD remain a rectangle if the angles between the diagonals are changed? Can we generalise this?

Take one of the angles between the diagonals as x.





We can compute the four angles between the diagonals to be x, x, 180 - x, and 180 - x.

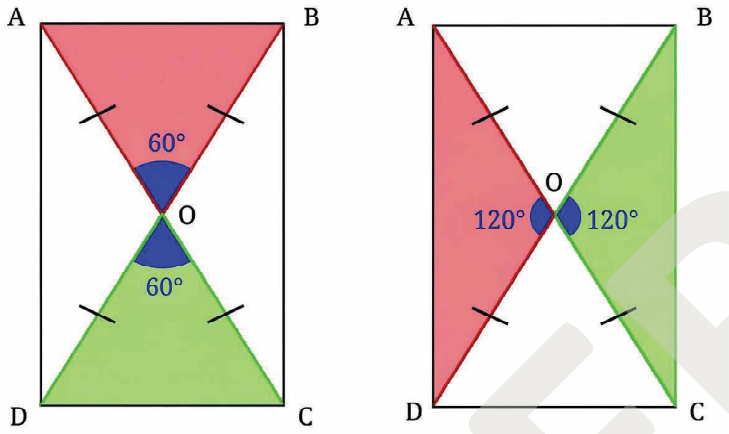
Can you find the other angles?

APSCERT

کیا اب ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ چار ضلعی شکل ABCD کس قسم کی ہے؟

مشاہدہ کریں کہ اس کے تمام زاویے $90°$ بنتے ہیں $(60° + 30°)$۔

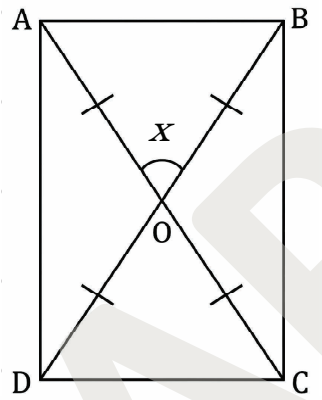
اس کے اضلاع کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟



ہم دیکھ سکتے ہیں کہ، $\triangle AOB \cong \triangle COD$ اور $\triangle AOD \cong \triangle COB$ لہٰذا، $AB = CD$ اور $AD = CB$

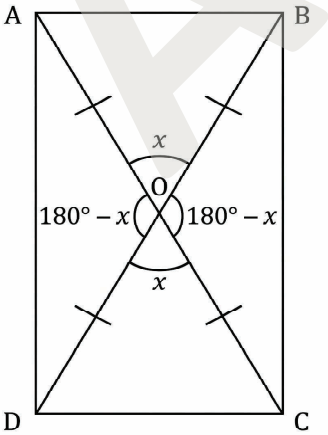
کیونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اجزاء ہیں۔

اس لیے ABCD ایک مستطیل ہے کیونکہ یہ مستطیل کی تعریف پر پورا اترتا ہے۔



کیا اگر وتروں کے درمیان زاویوں کو تبدیل کر دیا جائے تو ABCD پھر بھی مستطیل رہے گا؟ کیا ہم اس بات کو عمومی صورت میں بیان کر سکتے ہیں؟

وتروں کے درمیان ایک زاویہ x فرض کریں۔



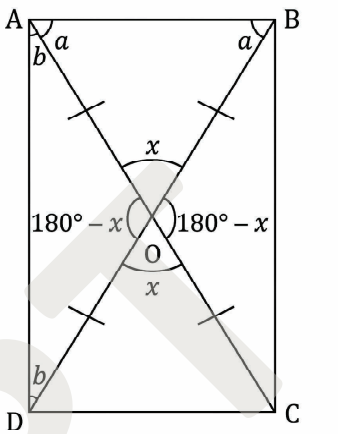
ہم وتروں کے درمیان چار زاویوں کی قدریں یوں معلوم کر سکتے ہیں:

x، x، $(180° - x)$، $(180° - x)$

کیا آپ باقی زاویے معلوم کر سکتے ہیں؟

AP SCERT

Since we know that ΔAOB is isosceles, we can denote the measures of both of its base angles by a.



? What is the value of a (in degrees) in terms of x?

We have,

$$a + a + x = 180$$

(sum of the interior angles of a triangle)

$$2a = 180 - x$$

$$a = \frac{(180 - X)}{2} = 90 - \frac{x}{2}.$$

Similarly, in the isosceles ΔAOD, let the base angles be b.

$$b + b + 180 - x = 180$$

$$2b = 180 - (180 - x)$$

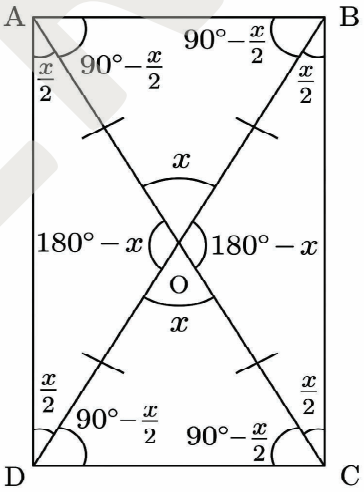
$$2b = 180 - 180 + x$$

$$2b = x$$

$$b = \frac{X}{2}.$$

All the angles of the quadrilateral are a + b, which is

$$90 - \frac{X}{2} + \frac{X}{2} = 90.$$



Thus, all four angles of the quadrilateral ABCD are 90°.

? What can we say about AB and CD, and AD and BC?

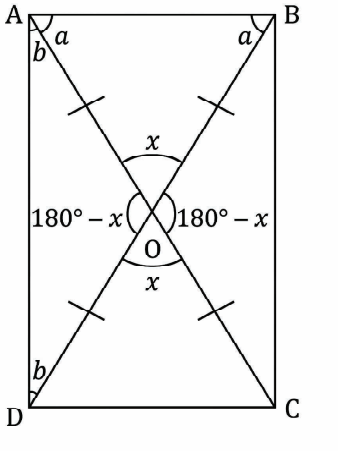
We have $\Delta AOB \cong \Delta COD$ and $\Delta AOD \cong \Delta COB$. Hence, AB = CD, and AD = CB, since they are the corresponding parts of congruent triangles.

Hence, no matter what the angles between the diagonals are, if the diagonals are equal and they bisect each other, then the angles of the quadrilateral formed are 90° each, and the opposite sides are equal. Thus, the quadrilateral is a rectangle.

Now we know how the wooden strips have to be put together to form the vertices of a rectangle! They should be equal and connected at their midpoints.

APSCERT

چونکہ ہم جانتے ہیں کہ $\triangle AOB$ ایک مساوی الساقین مثلث ہے،
اس لیے اس کے دونوں قاعدی زاویوں کی پیمائش کو a سے ظاہر کرتے ہیں۔



؟ x کی صورت میں a کی قیمت (درجوں میں) کیا ہوگی؟

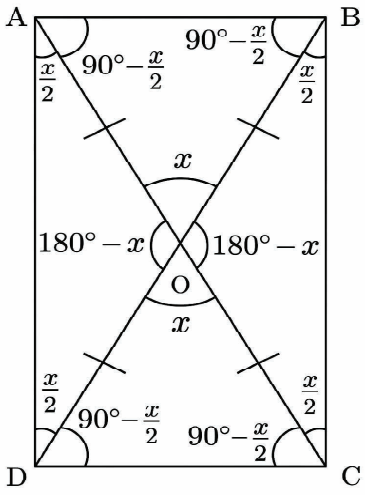
ہمارے پاس، $a + a + x = 180°$

(مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ)

$$2a = 180° - x$$

$$a = \frac{180° - x}{2} = 90° - \frac{x}{2}$$

اسی طرح مساوی الساقین مثلث $\triangle AOD$ میں قاعدی زاویوں کو b فرض کرتے ہیں۔



$$b + b + (180° - x) = 180°$$

$$2b = 180° - (180° - x)$$

$$2b = 180° - 180° + x$$

$$2b = x$$

$$b = \frac{x}{2}$$

چار ضلعی شکل کے تمام زاویے a + b ہیں، یعنی:

$$(90° - \frac{x}{2}) + \frac{x}{2} = 90°$$

لہٰذا چار ضلعی شکل ABCD کے چاروں زاویے $90°$ ہیں۔

؟ AB اور CD نیز AD اور BC کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟

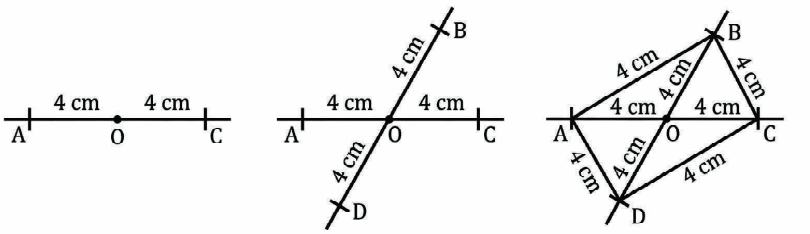
ہمارے پاس، $\triangle AOB \cong \triangle COD$ اور $\triangle AOD \cong \triangle COB$ لہٰذا، $AB = CD$ اور $AD = BC$

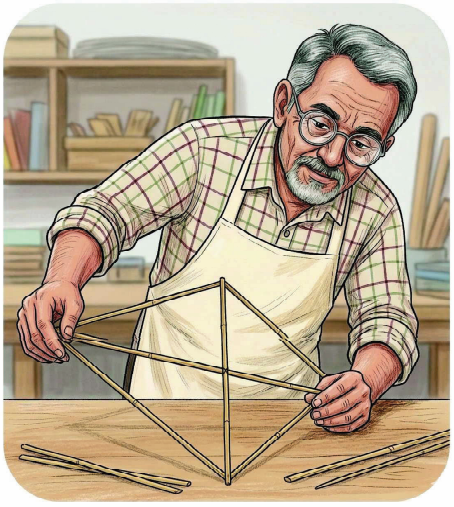
کیونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اجزاء ہیں۔

اس لیے، وتروں کے درمیان زاویے کچھ بھی ہوں، اگر وتر مساوی ہوں اور ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر منصف کریں، تو بننے والی چار ضلعی شکل کے تمام زاویے $90°$ ہوں گے اور بالمقابل اضلاع مساوی ہوں گے۔ لہٰذا وہ چار ضلعی شکل مستطیل ہوگی۔

اب ہمیں معلوم ہو گیا کہ مستطیل کے راس حاصل کرنے کے لیے لکڑی کی پٹیوں کو کیسے جوڑا جائے۔ دونوں پٹیاں مساوی لمبائی کی ہونی چاہئیں اور انہیں ان کے وسطی نقطوں پر جوڑنا چاہیے۔

AP SCERT





This method is actually used in practice to make rectangles. Carpenters in Europe use this method to get a rectangular frame. It is also known that farmers in Mozambique, a country in Africa, use this method while constructing houses to get the base of the house in a rectangular shape.

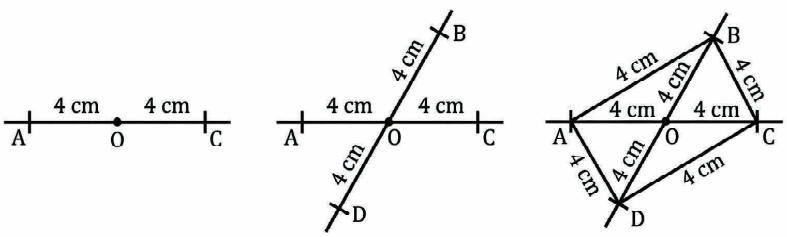
The Process of Finding Properties

As we have been seeing from lower grades, properties of geometric objects such as parallel lines, angles, and triangles can be deduced through geometric reasoning. We will continue to deduce properties of special types of quadrilaterals in this chapter.

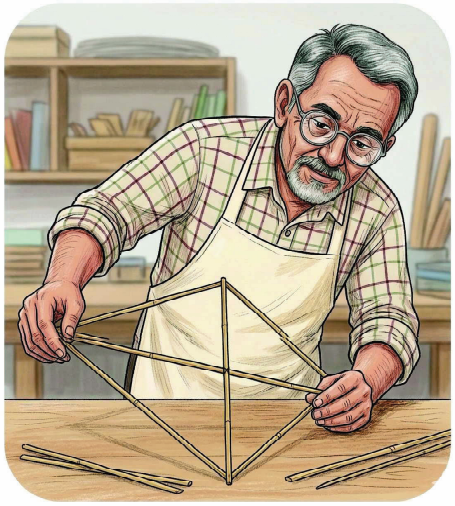
Once you have deduced a property of a quadrilateral, it is good to verify it with a real-world quadrilateral, either the quadrilateral constructed on paper or simply a surface having the shape of the quadrilateral.

If you are not able to figure out the property using deduction, you could experiment by taking real-world quadrilaterals and observing the property through measurement. Note that these observations give useful insights about the property, but with them, we can only form a **conjecture**, that is, a **statement about which we are highly confident, but not yet sure if it always holds true.** For example, constructing a few rectangles and observing through measurement that their diagonals bisect each other does not necessarily mean that this will always be the case - can we be sure that the 1000th rectangle we construct will also have this property? The only way we can be sure of this property is by justifying or proving the statement, just as we did in Deduction 2.

APSCERT



یہ طریقہ عملی طور پر بھی مستطیل بنانے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔



یورپ کے بڑھئی مستطیل فریم بنانے کے لیے یہی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔

اسی طرح یہ بھی معلوم ہے کہ افریقہ کے ملک موزمبیق کے کسان گھروں کی تعمیر کے دوران مکان کی بنیاد کو مستطیل شکل دینے کے لیے یہی طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

خصوصیات معلوم کرنے کا عمل

جیسا کہ ہم نچلی جماعتوں سے دیکھتے آرہے ہیں، متوازی خطوط، زاویوں اور مثلثات جیسی ہندسی اشکال کی خصوصیات کو ہندسی استدلال کے ذریعے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

اس باب میں بھی ہم چار ضلعی اشکال کی خاص اقسام کی خصوصیات کو ہندسی استدلال کے ذریعے اخذ کریں گے۔

جب آپ کسی چار ضلعی شکل کی کوئی خاصیت اخذ کر لیں تو بہتر ہے کہ اسے کسی حقیقی چار ضلعی شکل پر جانچ لیں، خواہ وہ کاغذ پر بنائی گئی شکل ہو یا کوئی ایسی سطح جس کی شکل اس چار ضلعی شکل جیسی ہو۔

اگر آپ استدلال کے ذریعے کسی خاصیت تک نہ پہنچ سکیں تو حقیقی چار ضلعی اشکال کا مشاہدہ اور پیمائش کر کے تجربہ کر سکتے ہیں۔ یاد رکھیں کہ ایسے مشاہدات خاصیت کے بارے میں مفید معلومات فراہم کرتے ہیں، لیکن ان کی بنیاد پر ہم صرف ایک قیاس قائم کر سکتے ہیں، یعنی **ایسا بیان جس کے درست ہونے پر ہمیں کافی اعتماد ہو، مگر ہم ابھی یہ یقین سے نہ کہہ سکیں کہ وہ ہمیشہ درست ہو گا۔** مثال کے طور پر، چند مستطیل بنا کر یہ مشاہدہ کرنا کہ ان کے قطر ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر منصف کرتے ہیں، اس بات کی ضمانت نہیں دیتا کہ ہر مستطیل میں یہی خاصیت موجود ہو گی۔ کیا ہم یقین سے کہہ سکتے ہیں کہ ہزارواں مستطیل بھی یہی خاصیت رکھے گا؟ کسی خاصیت کے ہمیشہ درست ہونے کا یقین حاصل کرنے کا واحد طریقہ اس بیان کی توجیہ یا ثبوت پیش کرنا ہے، جیسا کہ ہم نے **اضافہ ج 2** میں کیا تھا۔

Note to the Teacher: Gently encourage students to deduce or justify properties. Whenever students face challenges in doing it, encourage them to experiment and observe, and use their intuition to figure out the properties.

The Carpenter's Problem shows that rectangles can also be defined as follows -

Rectangle: A rectangle is a quadrilateral whose diagonals are equal and bisect each other.

Observe how different this definition is from the earlier one. Yet, both capture the same class of quadrilaterals. Further, it turns out that the first definition can be simplified.

? In the earlier definition, we stated that a rectangle has (a) opposite sides of equal length, and (b) all angles equal to 90°. Would we be wrong if we just define a rectangle as a quadrilateral in which all the angles are 90°?

? If you think that this definition is incomplete, try constructing a quadrilateral in which the angles are all 90° but the opposite sides are not equal.

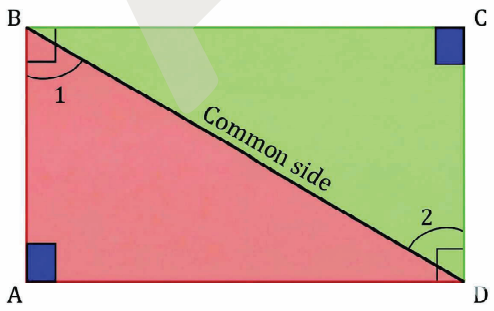
Are you able to construct such a quadrilateral?

Let us prove why this is impossible.

Deduction 4 - What is the shape of a quadrilateral with all the angles equal to 90°?

? Consider a quadrilateral ABCD with all angles measuring 90°. What can we say about the opposite sides of such a quadrilateral?

Join BD. ΔBAD and ΔDCB seem congruent. Can we justify this claim?



Two equalities can be directly seen in the triangles. What can we say about $\angle 1$ and $\angle 2$?

استاد کے لیے نوٹ: طلبہ کو نرمی سے خصوصیات اخذ کرنے یا ان کی توجیہ پیش کرنے کی ترغیب دیں۔ جب طلبہ کو اس میں دشواری پیش آئے تو انہیں تجربہ کرنے، مشاہدہ کرنے اور اپنی فطری بصیرت استعمال کرتے ہوئے خصوصیات معلوم کرنے کی حوصلہ افزائی کریں۔

بڑھئی کا مسئلہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ مستطیل کی تعریف اس طرح بھی کی جاسکتی ہے:

مستطیل: مستطیل ایک ایسی چار ضلعی شکل ہے جس کے قطر برابر ہوں اور ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر منصف کریں۔

غور کریں کہ یہ تعریف پہلی تعریف سے کتنی مختلف ہے، لیکن دونوں ایک ہی قسم کی چار ضلعی اشکال کو بیان کرتی ہیں۔

مزید یہ کہ پہلی تعریف کو مزید سادہ بھی کیا جاسکتا ہے۔

پہلی تعریف میں ہم نے کہا تھا کہ مستطیل میں، (a) بالمقابل اضلاع مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں، اور (b) تمام زاویے $90°$ ہوتے ہیں۔ کیا ہم غلط ہوں گے اگر مستطیل کی تعریف صرف یوں کریں کہ وہ ایک ایسی چار ضلعی شکل ہے جس کے تمام زاویے $90°$ ہوں؟

اگر آپ کو لگتا ہے کہ یہ تعریف نامکمل ہے تو ایسی چار ضلعی شکل بنانے کی کوشش کریں جس کے تمام زاویے $90°$ ہوں لیکن بالمقابل اضلاع برابر نہ ہوں۔

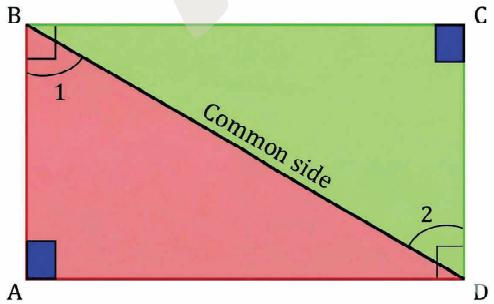
کیا آپ ایسی چار ضلعی شکل بنا سکتے ہیں؟

آیئے ثابت کرتے ہیں کہ ایسا ممکن کیوں نہیں ہے۔

منطقی قیاس 4: ایسی چار ضلعی شکل کی صورت کیا ہوگی جس کے تمام زاویے $90°$ ہوں؟

ایک چار ضلعی شکل ABCD پر غور کریں جس کے تمام زاویوں کی پیمائش $90°$ ہے۔ ایسی چار ضلعی شکل کے بالمقابل اضلاع کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟

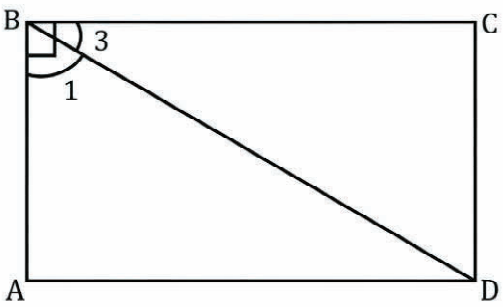
BD کو ملائیں۔ $\triangle BAD$ اور $\triangle DCB$ متماثل معلوم ہوتے ہیں۔ کیا ہم اس دعوے کی توجیہ پیش کرسکتے ہیں؟



مثلثات میں دو مساوات براہِ راست دیکھی جاسکتی ہیں۔

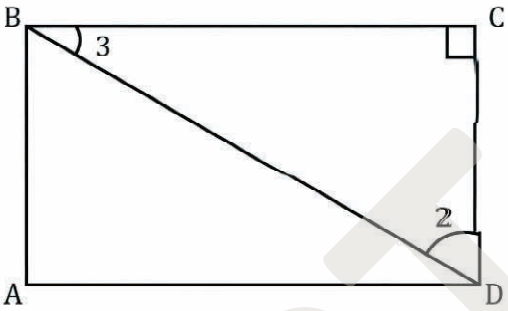
$\angle 1$ اور $\angle 2$ کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟

Recall that we tackled a very similar problem in Deduction 2. We can use the same reasoning here.



Since B = 90°,

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$.



In $\angle BCD$, since

$\angle 3 + \angle 2 + 90° = 180°$,

$\angle 3 + \angle 2 = 90°$.

So, $\angle 1 = \angle 2$.

Thus, by the AAS congruence condition, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$.

Therefore, AD = CB, and DC = BA, since these are corresponding sides of congruent triangles.

? Is it wrong to write $\Delta BAD \cong \Delta CDB$? Why?

Thus, we have established that if all the angles of a quadrilateral are right angles, then the opposite sides have equal lengths. Therefore, the quadrilateral is a rectangle. Thus, a rectangle can simply be defined as follows-

Rectangle: A rectangle is a quadrilateral in which the angles are all 90°. Let us list the properties of a rectangle.

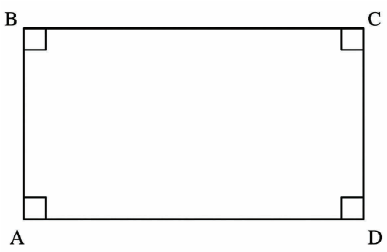
Property 1: All the angles of a rectangle are 90°.

Property 2: The opposite sides of a rectangle are equal.

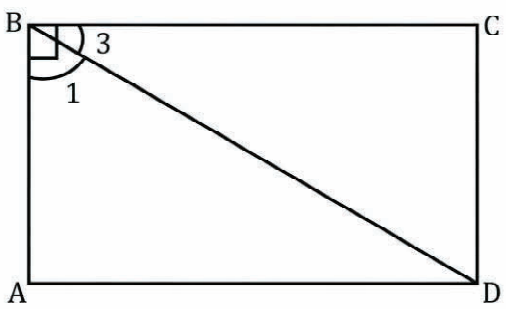
? Are the opposite sides of a rectangle parallel?

They definitely seem so. This fact can be justified using one of the transversal properties.

Notice that AB acts as a transversal to AD and BC, and that $\angle A + \angle B = 90° + 90° = 180°$. When the sum of the internal angles on the same side of the transversal is 180°, the lines are parallel. We can use this fact to conclude that the lines AD and BC are parallel, which we represent as AD || BC.

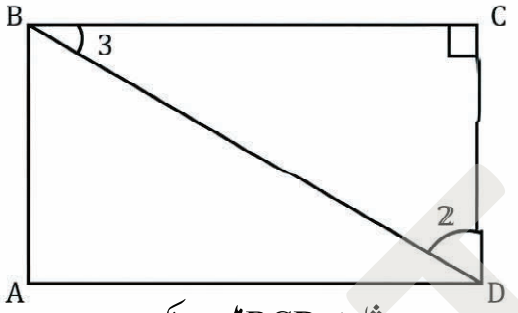


یاد کریں کہ ہم نے استنباط 2 میں بالکل اسی نوعیت کا ایک مسئلہ حل کیا تھا۔ یہاں بھی ہم وہی استدلال استعمال کر سکتے ہیں۔



چونکہ، $\angle B = 90°$

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$.



مثلث BCD میں چونکہ:

$\angle 3 + \angle 2 + 90° = 180°$

اس لیے: $\angle 3 + \angle 2 = 90°$۔

لہٰذا، $\angle 1 = \angle 2$

اس لیے AAS **شرطِ مماثلت** کے مطابق، $\triangle BAD \cong \triangle DCB$

لہٰذا، $AD = CB$ اور $DC = BA$ کیونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اضلاع ہیں۔

کیا $\triangle BAD \cong \triangle CDB$ لکھنا غلط ہو گا؟ کیوں؟

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ اگر کسی چار ضلعی شکل کے تمام زاویے قائمہ ($90°$) ہوں تو اس کے بالمقابل اضلاع مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں۔ لہٰذا وہ چار ضلعی شکل ایک **مستطیل** ہو گی۔ اس لیے مستطیل کی تعریف سادہ طور پر یوں کی جا سکتی ہے۔

مستطیل : مستطیل ایک ایسی چار ضلعی شکل ہے جس کے تمام زاویے $90°$ ہوں۔ آیئے مستطیل کی خصوصیات درج کریں۔

خاصیت 1 : مستطیل کے تمام زاویے $90°$ ہوتے ہیں۔

خاصیت 2 : مستطیل کے بالمقابل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

کیا مستطیل کے بالمقابل اضلاع متوازی بھی ہوتے ہیں؟

بظاہر تو ایسا ہی معلوم ہوتا ہے۔ اس حقیقت کی توجیہ قاطع خط (Transversal) کی ایک خاصیت کی مدد سے کی جا سکتی ہے۔



مشاہدہ کریں کہ AB ، AD اور BC کے لیے ایک قاطع خط کا کام کر رہا ہے اور، $\angle A + \angle B = 90° + 90° = 180°$، جب قاطع خط کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔ لہٰذا ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ، $AD \parallel BC$ یعنی AD اور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

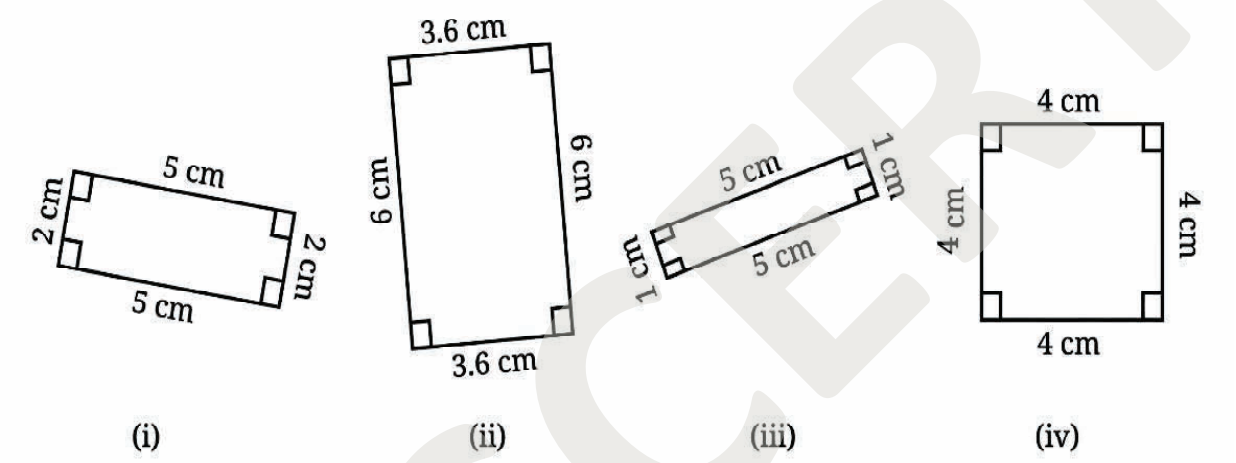
Can you similarly show that AB is parallel to DC (AB | | DC)?

Property 3: The opposite sides of a rectangle are parallel to each other.

Property 4: The diagonals of a rectangle are of equal length and they bisect each other.

A Special Rectangle

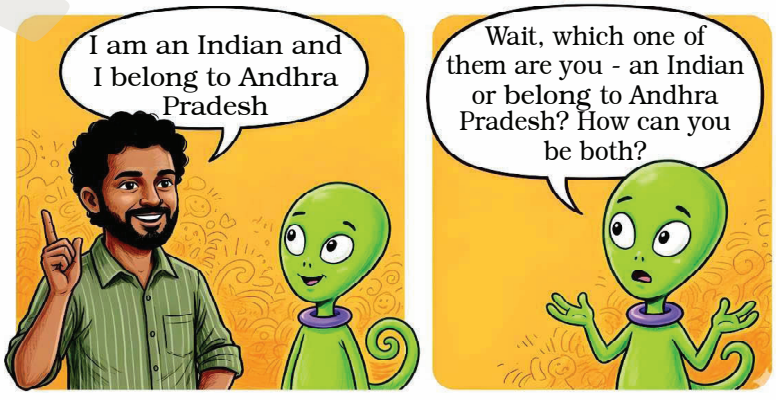
In the quadrilaterals below, are there any non-rectangles?



All these quadrilaterals are rectangles, including (iv). Quadrilateral (iv) is a rectangle because all its angles are 90°. However, it is a special kind of rectangle with all sides of equal length. We know that this quadrilateral is also called a square.

Square: A square is a quadrilateral in which all the angles are equal to 90°, and all the sides are of equal length.

Thus, every square is also a rectangle, but clearly every rectangle is not a square.



© NCERT not to be republished

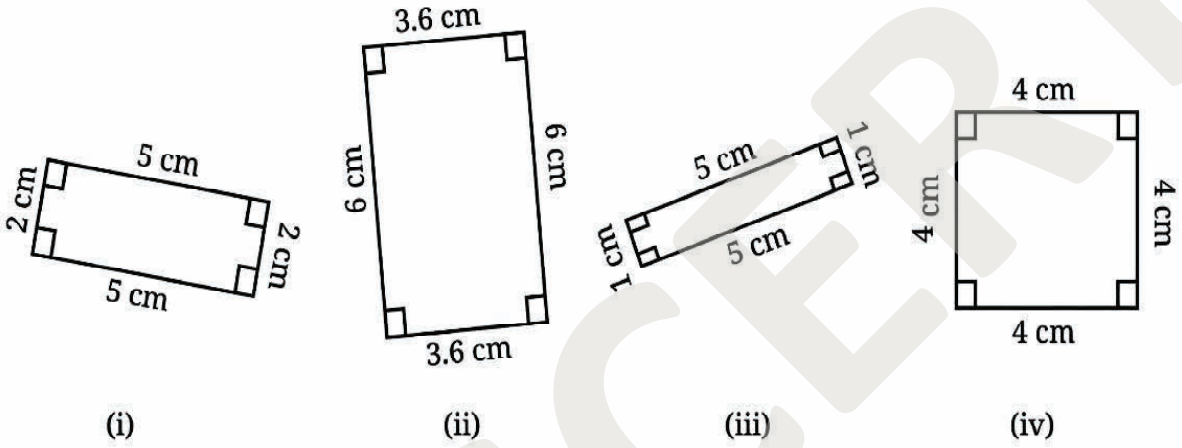
کیا آپ اسی طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ AB ، DC کے متوازی ہے (AB ‖ DC) ؟

خاصیت 3 : مستطیل کے بالمقابل اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

خاصیت 4 : مستطیل کے وتر مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر تنصیف کرتے ہیں۔

ایک خاص مستطیل

مندرجہ ذیل چار ضلعی اشکال میں کیا کوئی ایسی شکل ہے جو مستطیل نہ ہو؟



(i) (ii) (iii) (iv)

یہ تمام چار ضلعی اشکال مستطیل ہیں، بشمول شکل (iv) ۔ چار ضلعی شکل (iv) ایک مستطیل ہے کیونکہ اس کے تمام زاویے $90°$ ہیں۔ البتہ یہ مستطیل کی ایک خاص قسم ہے جس کے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ اس چار ضلعی شکل کو مربع بھی کہا جاتا ہے۔

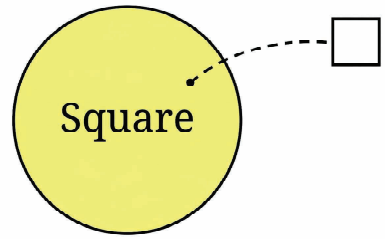
مربع : مربع ایک ایسی چار ضلعی شکل ہے جس کے تمام زاویے $90°$ ہوں اور تمام اضلاع مساوی لمبائی ہوتے ہیں۔

لہٰذا ہر مربع ایک مستطیل ہوتا ہے، لیکن ہر مستطیل مربع نہیں ہوتا۔



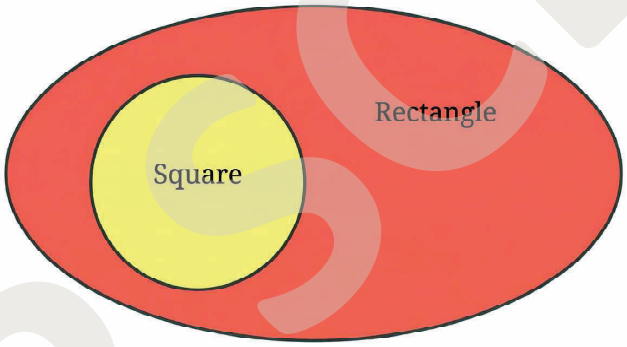
This relation can be pictorially represented using a **Venn diagram**. We have seen these diagrams before. In a Venn diagram, a set of objects is represented as points inside a closed curve. Typically, these closed curves are ovals or circles.

For example, the set of all squares is represented as

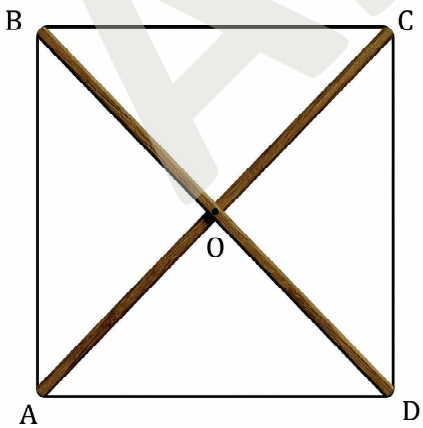


Each point in the region represents a square, thereby covering all the possible squares.

Since every square is a rectangle, the Venn diagram representation of these two sets would be as follows -



? Let us consider the Carpenter's Problem again. If the wooden strips have to be placed such that the thread passing through their endpoints forms a square, what must be done?



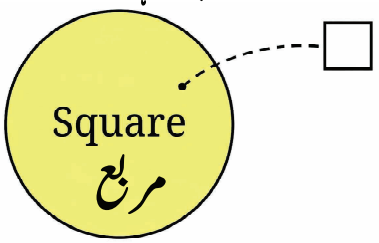
As in the previous case, let us try to construct a square, one of whose diagonals is of length 8 cm. While solving the Carpenter's Problem for the case of a rectangle, we have seen that to get a quadrilateral with all angles 90° (and opposite sides of equal length), the diagonals have to be drawn such that -

(i) they are of equal lengths, and

(ii) they bisect each other.

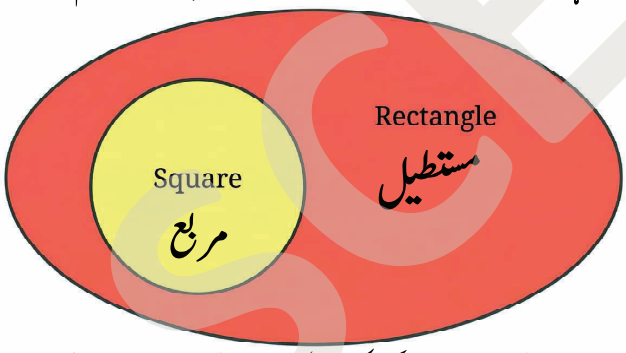
اس تعلق کو تصویری طور پر وین ڈائیگرام کی مدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ہم پہلے بھی ایسے ڈائیگرام دیکھ چکے ہیں۔ وین ڈلز ام میں اشیا کے ایک مجموعے کو ایک بند منحنی لکیر کے اندر نقاط کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ عام طور پر یہ بند منحنی لکیریں بیضوی یا دائرے کی شکل میں ہوتی ہیں۔

مثال کے طور پر، تمام مربعات کے مجموعے کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔



اس خطے کا ہر نقطہ ایک مربع کی نمائندگی کرتا ہے، اس طرح تمام ممکنہ مربعات کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ ہر مربع ایک مستطیل ہوتا ہے، اس لیے ان دونوں مجموعوں کی وین ڈائیگرام میں نمائندگی درج ذیل ہوگی۔



آیئے بڑھئی کے مسئلے پر دوبارہ غور کریں۔ اگر لکڑی کی پٹیوں کو اس طرح رکھنا ہو کہ ان کے سروں سے گزرنے والا دھاگا ایک مربع بنائے، تو کیا کرنا ہوگا؟ پچھلی صورت کی طرح، آیئے ایک ایسا مربع بنانے کی کوشش کریں جس کا ایک وتر 8 سم لمبا ہو۔ مستطیل کے معاملے میں بڑھئی کا مسئلہ حل کرتے ہوئے ہم دیکھ چکے ہیں کہ

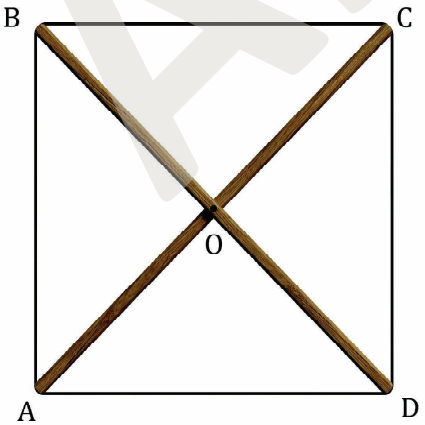
تمام زاویے $90°$ (اور بالمقابل اضلاع مساوی)

رکھنے والی چار ضلعی شکل حاصل کرنے

کے لیے ضروری ہے کہ وتر:

(i) مساوی لمبائی کے ہوں، اور

(ii) ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر تنصیف کریں۔



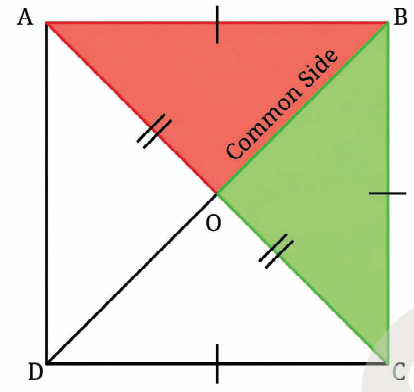
What more needs to be done to get equal sidelengths as well? Can this be achieved by properly choosing the angle between the diagonals?

See if you can reason and/or experiment to figure this out!

Deduction 5 - What should be the angle formed by the diagonals?

The angle between the diagonals can be found using the notion of congruence! Suppose we join the equal diagonals such that they bisect each other and result in a square. Let us label the square ABCD.

To find the angle formed by the diagonals, what are the two triangles we should consider for congruence?



By the SSS condition for congruence, $\Delta BOA \cong \Delta BOC$

Can this be used to find the angles $\angle BOA$ and $\angle BOC$ formed by the diagonals?

Since these angles are corresponding parts of congruent triangles, they are equal. Further, these angles together form a straight angle. So $\angle BOA + \angle BOC = 180°$. Thus, these angles have to be 90° each.

This shows that the diagonals of a square bisect each other at right angles. This means that the diagonals have to be drawn such that they are of equal lengths and bisect each other at right angles. Since the endpoints of the diagonals uniquely determine the vertices of a quadrilateral, we will get a square when the diagonals are joined this way.

Using this fact, construct a square with a diagonal of length 8 cm.

Properties of a Square

Since a square is a special type of rectangle, all the properties of a rectangle hold true for a square.

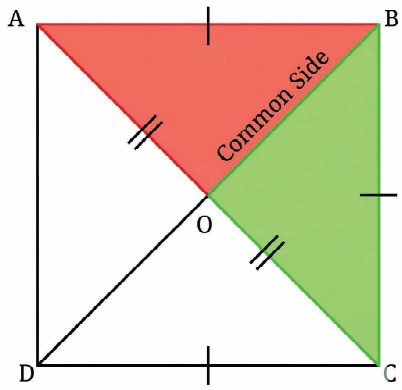
مساوی لمبائی کے اضلاع حاصل کرنے کے لیے مزید کیا کرنا ہو گا؟ کیا یہ وتروں کے درمیان زاویے کا مناسب انتخاب کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے؟

استدلال یا تجربے کے ذریعے یہ معلوم کرنے کی کوشش کریں!

منطقی قیاس 5: وتروں کے درمیان زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

وتروں کے درمیان زاویہ تماثل کے تصور کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں ہم مساوی وتروں کو اس طرح ملاتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر تنصیف کریں اور ایک مربع بنائیں۔ اس مربع کو ABCD نام دیتے ہیں۔

وتروں کے درمیان بننے والا زاویہ معلوم کرنے کے لیے تماثل کے لیے کن دو مثلثات پر غور کرنا چاہیے؟



SSS شرطِ تماثل کے مطابق: $\triangle BOA \cong \triangle BOC$۔

کیا اس کی مدد سے وتروں کے بنائے ہوئے زاویے $\angle BOA$ اور $\angle BOC$ معلوم کیے جا سکتے ہیں؟

چونکہ یہ زاویے متماثل مثلثات کے متناظر اجزاء ہیں، اس لیے یہ مساوی ہیں۔ مزید یہ کہ یہ دونوں زاویے مل کر ایک سیدھا زاویہ بناتے ہیں۔ لہٰذا، $\angle BOA + \angle BOC = 180°$ پس ان میں سے ہر ایک زاویہ $90°$ ہو گا۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کے وتر ایک دوسرے کو قائمہ زاویوں پر منصف کرتے ہیں۔ یعنی وتروں کو اس طرح کھینچنا چاہیے کہ ان کی اضلاع مساوی ہوں، اور وہ ایک دوسرے کو قائمہ زاویوں ($90°$) پر اپنے وسطی نقطے پر منصف کریں۔

چونکہ وتروں کے سرے کسی چار ضلعی شکل کے راس منفرد طور پر متعین کرتے ہیں، اس لیے وتروں کو اس طرح ملانے سے مربع حاصل ہو گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے 8 سینٹی میٹر وتر والا ایک مربع بنائیں۔

مربع کی خصوصیات

چونکہ مربع مستطیل کی ایک خاص قسم ہے، اس لیے مستطیل کی تمام خصوصیات مربع کے لیے بھی درست ہیں۔

? Verify if this is true by going through geometric reasoning in Deduction 1 and Deduction 2, and see if they apply to a square as well.

Property 1: All the sides of a square are equal to each other.

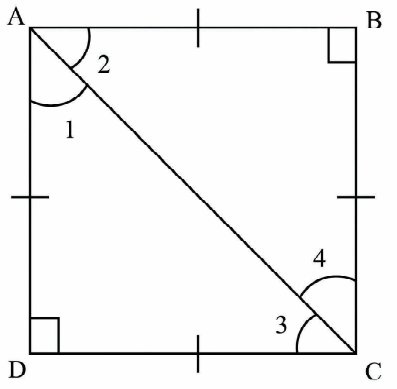
Property 2: The opposite sides of a square are parallel to each other.

Property 3: The angles of a square are all 90°.

Property 4: The diagonals of a square are of equal length and they bisect each other at 90°.

There is one more special property of a square.

? What are the measures of $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, and $\angle 4$? See if you can reason and/or experiment to figure this out!



In ΔADC, we have,

$\angle 1 + \angle 3 + 90 = 180$

Since AD = DC, we have $\angle 1 = \angle 3$.

Thus, $\angle 1 = \angle 3 = 45°$.

Similarly, find $\angle 2$ and $\angle 4$.

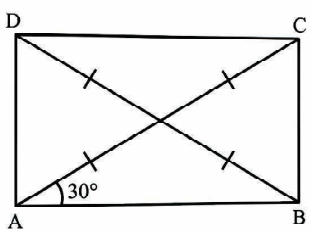
Thus, we have another property of a square -

Property 5 : The diagonals of a square divide the angles of the square into equal halves. This can also be expressed as - The diagonals of a square bisect the angles of the square.

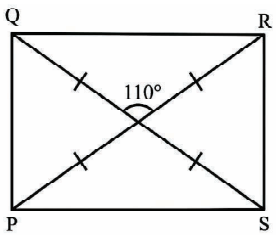


Figure it Out - 4.1

1. Find all the other angles inside the following rectangles.



(i)



(ii)

ہندسی استدلال کی مدد سے منطقی قیاس 1 اور منطقی قیاس 2 کا جائزہ لیں اور معلوم کریں کہ کیا وہ مربع پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔

خاصیت 1 : مربع کے تمام اضلاع ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

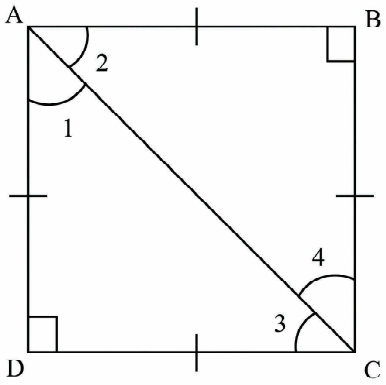
خاصیت 2 : مربع کے بالمقابل اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

خاصیت 3 : مربع کے تمام زاویے $90°$ ہوتے ہیں۔

خاصیت 4 : مربع کے وتر مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کو $90°$ پر اپنے وسطی نقطے پر تنصیف کرتے ہیں۔

مربع کی ایک اور خاص خصوصیت بھی ہے۔

$\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$ اور $\angle 4$ کی پیمائشیں کیا ہیں؟ استدلال یا تجربے کی مدد سے یہ معلوم کرنے کی کوشش کریں!



مثلث ADC میں: $\angle 1 + \angle 3 + 90° = 180°$

چونکہ $AD = DC$، اس لیے $\angle 1 = \angle 3$

لہٰذا $\angle 1 = \angle 3 = 45°$۔

اسی طرح $\angle 2$ اور $\angle 4$ کی قدریں معلوم کریں۔

اس طرح مربع کی ایک اور خاصیت حاصل ہوتی ہے:

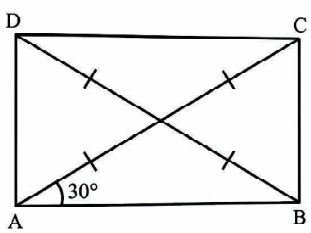
خاصیت 5 : مربع کے وتر، مربع کے زاویوں کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

اسے یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے: مربع کے وتر، مربع کے زاویوں کو منصف کرتے ہیں۔

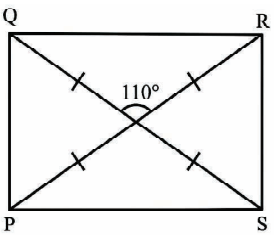


حل کیجیے - 4.1

1۔ درج ذیل مستطیلوں کے اندر موجود باقی تمام زاویے معلوم کریں۔



(i)



(ii)

2. Draw a quadrilateral whose diagonals have equal lengths of 8 cm that bisect each other, and intersect at an angle of
   (i) 30° (ii) 40° (iii) 90° (iv) 140°
3. Consider a circle with centre O. Line segments PL and AM are two perpendicular diameters of the circle. What is the figure APML? Reason and/or experiment to figure this out.
4. We have seen how to get 90° using paper folding. Now, suppose we do not have any paper but two sticks of equal length, and a thread. How do we make an exact 90° using these?



5. We saw that one of the properties of a rectangle is that its opposite sides are parallel. Can this be chosen as a definition of a rectangle? In other words, is every quadrilateral that has opposite sides parallel and equal, a rectangle?

Try This

4.2. Angles in a Quadrilateral

? Is it possible to construct a quadrilateral with three angles equal to 90° and the fourth angle not equal to 90°?

You might have observed through constructions that this may not be possible.

? But why not?

This is due to a general property of quadrilaterals related to their angles.

We have seen that the sum of the angles of a triangle is 180°. There is a similar regularity in the sum of the angles of a quadrilateral.

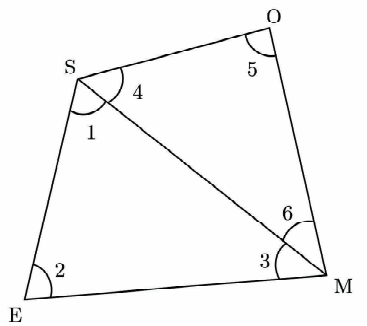
Consider a quadrilateral SOME.

Draw a diagonal SM. We get two triangles ΔSEM and ΔSOM.

In ΔSEM, we have $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

And in ΔSOM, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$.

What do we get when we add all six angles?



We will have

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180° + 180°$

$= 360°$.

Or, $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 2 + \angle 5 = 360°$.

Since $(\angle 1 + \angle 4)$, $(\angle 3 + \angle 6)$, $\angle 2$ and $\angle 5$ are the angles of this quadrilateral, we have the following result -

2۔ ایک ایسی چار ضلعی شکل بنائیں جس کے وتر 8 سم لمبے، مساوی ہوں، ایک دوسرے کو اپنے وسطی نقطے پر منصف کریں، اور درج ذیل زاویوں پر ایک دوسرے کو قطع کریں:

(i) $30°$ (ii) $40°$ (iii) $90°$ (iv) $140°$



3۔ مرکز O والے ایک دائرے پر غور کریں۔ خطی قطعے PL اور AM دائرے کے دو باہم عمودی وتر ہیں۔ شکل APML کون سی شکل ہو گی؟ استدلال یا تجربے کی مدد سے معلوم کریں۔



4۔ ہم نے دیکھا کہ کاغذ کو موڑ کر $90°$ زاویہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اب فرض کریں ہمارے پاس کاغذ نہیں، بلکہ مساوی لمبائی کی دو لکڑیاں اور ایک دھاگا ہے۔ ان کی مدد سے بالکل $90°$ زاویہ کیسے بنایا جا سکتا ہے؟

5۔ ہم نے دیکھا کہ مستطیل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے بالمقابل اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔ کیا اس خاصیت کو مستطیل کی تعریف کے طور پر اختیار کیا جا سکتا ہے؟ دوسرے الفاظ میں، کیا ہر ایسی چار ضلعی شکل جس کے بالمقابل اضلاع متوازی اور مساوی ہوں، مستطیل ہوتی ہے؟

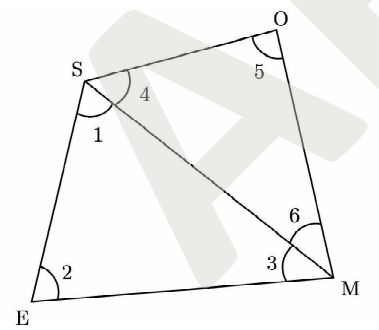
4.2 زاویے ایک چار ضلعی شکل میں

کیا ایسی چار ضلعی شکل بنانا ممکن ہے جس کے تین زاویے $90°$ ہوں اور چوتھا زاویہ $90°$ نہ ہو؟ آپ نے تعمیرات کے ذریعے مشاہدہ کیا ہو گا کہ ایسا ممکن نہیں لگتا۔ لیکن کیوں؟

اس کی وجہ چار ضلعی اشکال کی ایک عمومی خاصیت ہے جو ان کے زاویوں سے متعلق ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔ اسی طرح چار ضلعی شکل کے زاویوں کے مجموعے میں بھی ایک باقاعدگی پائی جاتی ہے۔ چار ضلعی شکل SOME پر غور کریں۔

وتر SM کھینچیں۔ اس طرح ہمیں دو مثلثیں SEM اور SOM حاصل ہوتی ہیں۔



مثلث SEM میں، $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

اور مثلث SOM میں: $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$

جب ہم ان چھ زاویوں کو جمع کرتے ہیں تو کیا حاصل ہوتا ہے؟

ہمارے پاس: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180° + 180°$

$= 360°$

یا $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 2 + \angle 5 = 360°$

چونکہ $(\angle 4 + \angle 1)$، $(\angle 6 + \angle 3)$، $\angle 2$ اور $\angle 5$ اس چار ضلعی شکل کے زاویے ہیں،

اس لیے ہمیں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

The sum of all angles in any quadrilateral is 360°.

This explains why it is impossible for a quadrilateral to have three right angles, with the fourth angle not right angle.

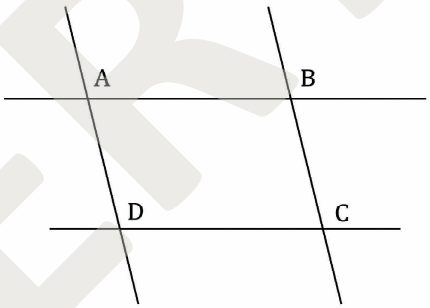
4.3. More Quadrilaterals with Parallel Opposite Sides

Rectangles (and therefore squares) have parallel opposite sides.

? Are there quadrilaterals that have parallel opposite sides that are not rectangles?

Let us try constructing one.

This can be easily done by drawing two pairs of parallel lines, ensuring that they do not meet at right angles.



? Construct such a figure by recalling how parallel lines can be constructed using a ruler and a set-square, or a compass and a ruler.

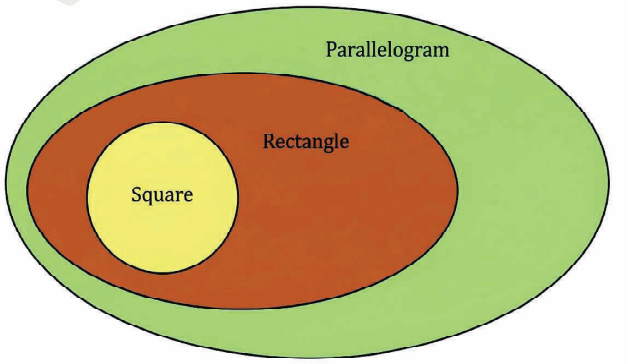
Observe the quadrilateral ABCD. It has parallel opposite sides but is not a rectangle.

Thus, a larger set of quadrilaterals exists in which the opposite sides are parallel. Such quadrilaterals are called **parallelograms.**

? Is a rectangle a parallelogram?

A rectangle has opposite sides parallel. So, it satisfies the parallelogram's definition. Hence, it is indeed a parallelogram. More specifically, a rectangle is a special kind of parallelogram with all its angles equal to 90°.

Let us represent this relation using a Venn diagram.



© NCERT

کسی بھی چار ضلعی کے تمام زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

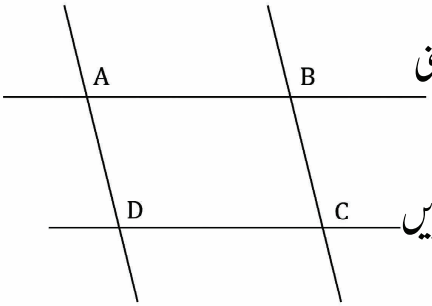
یہی وجہ ہے کہ کسی چار ضلعی کے تین زاویے قائمہ ہوں اور چوتھا زاویہ قائمہ نہ ہو، یہ ناممکن ہے۔

4.3 متوازی مخالف اضلاع والے مزید چار ضلعی

مستطیل (اور اس لیے مربع) کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

کیا ایسے چار ضلعی موجود ہیں جن کے مخالف اضلاع متوازی ہوں لیکن وہ مستطیل نہ ہوں؟

آیئے ایک بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔



یہ دو جوڑے متوازی لکیریں کھینچ کر آسانی سے کیا جا سکتا ہے، اس بات کو یقینی بناتے ہوئے کہ وہ قائمہ زاویے پر نہ ملیں۔

یاد کیجیے کہ پیمانے اور سیٹ اسکوائر، یا پرکار اور پیمانے کی مدد سے متوازی لکیریں کیسے کھینچی جاتی ہیں اور ایسی شکل بنایئے۔

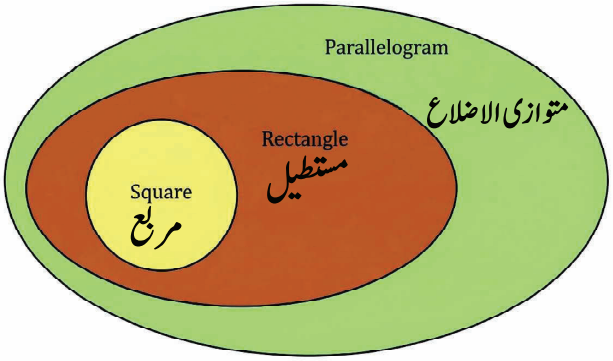
چار ضلعی ABCD کا مشاہدہ کیجیے۔ اس کے مخالف اضلاع متوازی ہیں لیکن یہ مستطیل نہیں ہے۔

پس چار ضلعیوں کا ایک بڑا مجموعہ موجود ہے جن کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔ ایسے چار ضلعی **متوازی الاضلاع** کہلاتے ہیں۔

کیا مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے؟

مستطیل کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔ پس یہ متوازی الاضلاع کی تعریف پر پورا اترتا ہے۔ اس لیے یہ واقعی ایک متوازی الاضلاع ہے۔ مزید مخصوص طور پر، مستطیل ایک خاص قسم کا متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام زاویے 90° کے مساوی ہوتے ہیں۔

آیئے اس تعلق کو وین ڈائیگرام کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔



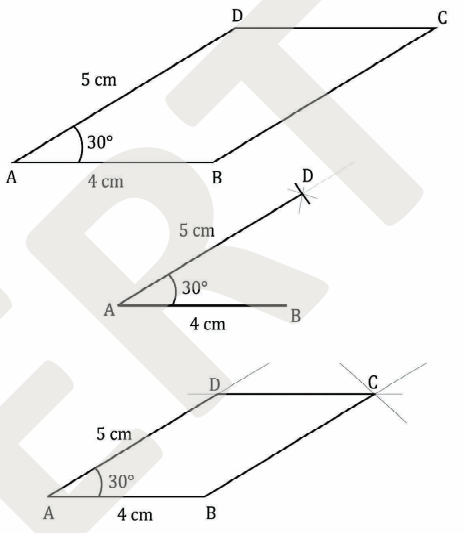
To understand the relations between the sides and the angles of a parallelogram, let us construct the following figure.

? Draw a parallelogram with adjacent sides of lengths 4 cm and 5 cm, and an angle of 30° between them.

Step 1: Draw line segments AB = 4 cm and AD = 5 cm with an angle of 30° between them.

Step 2: Draw a line parallel to AB through the point D, and a line parallel to AD through B. Mark the point at which these lines intersect as C.

ABCD is the required parallelogram.



? What are the remaining angles of the parallelogram? What are the lengths of the remaining sides? See if you can reason out and/or experiment to figure these out.

? Deduction 6 - What can we say about the angles of a parallelogram?

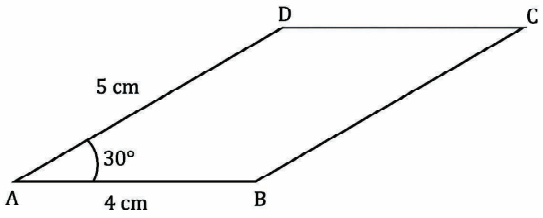
In the parallelogram ABCD, AB||CD, and AD is a transversal to them.

$\angle A + \angle D = 180°$ (sum of the internal angles on the same side of a transversal).

Therefore,

$D = 180 - A = 180 - 30 = 150°$.

Similarly, AD||BC, and AB and CD are transversals to them.



So, $\angle A + \angle B = 180°$.

So, $\angle C + \angle D = 180°$.

Using these equations, we get $\angle B = 150°$ and $\angle C = 30°$.

We see that in this parallelogram, the **adjacent pairs of angles add up to 180° and opposite pairs of angles are equal.**

Thus,

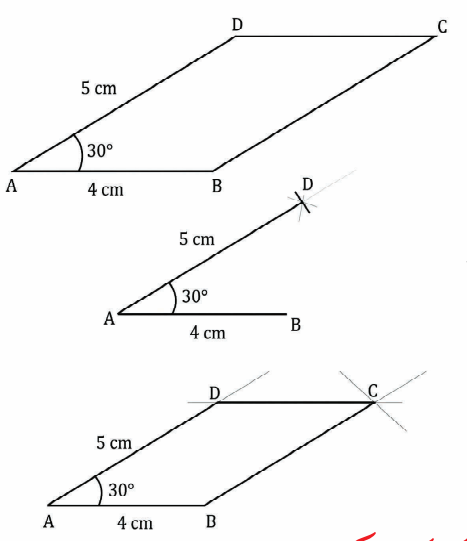
$\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$, and $\angle B + \angle C = 180°$.

And, $\angle A = \angle C$, and $\angle B = \angle D$.

APSCERT

متوازی الاضلاع کے اضلاع اور زاویوں کے درمیان تعلق سمجھنے کے لیے آیئے درج ذیل شکل بناتے ہیں۔

ایک ایسا متوازی الاضلاع کھینچیے جس کے متصلہ اضلاع کی لمبائیاں 4 سم اور 5 سم ہوں اور ان کے درمیان $30°$ کا زاویہ ہو۔



مرحلہ 1 : لکیری حصے $AB = 4$ سم اور $AD = 5$ سم کھینچیے جن کے درمیان $30°$ کا زاویہ ہو۔

مرحلہ 2 : نقطے D سے AB کے متوازی ایک لکیر کھینچیے اور B سے AD کے متوازی ایک لکیر کھینچیے۔ جہاں یہ لکیریں آپس میں ملیں اس نقطے کو C نشان کیجیے۔

ABCD مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

متوازی الاضلاع کے باقی زاویے کیا ہیں؟ باقی اضلاع کی لمبائیاں کیا ہیں؟

دیکھیے کہ کیا آپ استدلال اور / یا تجربے سے یہ معلوم کر سکتے ہیں۔

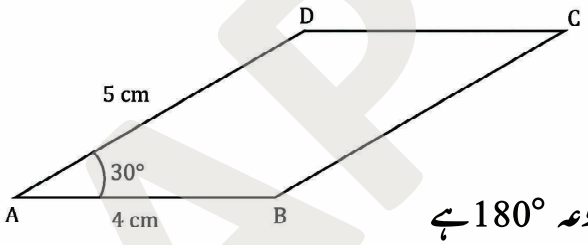
استنباط 6 — متوازی الاضلاع کے زاویوں کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟

متوازی الاضلاع ABCD میں $AB \| CD$ ہے اور AD ان کے لیے قاطع ہے۔

$\angle A + \angle D = 180°$ (قاطع کے ایک ہی طرف اندرونی زاویوں کا مجموعہ)۔

اس لیے: $\angle D = 180° - \angle A = 180° - 30° = 150°$

اسی طرح $AD \| BC$ ہے اور AB اور CD ان کے لیے قاطع ہیں۔



پس $\angle A + \angle B = 180°$ پس $\angle C + \angle D = 180°$

ان مساواتوں سے ہمیں $\angle B = 150°$ اور $\angle C = 30°$ ملتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اس متوازی الاضلاع میں متصلہ زاویوں کے جوڑوں کا مجموعہ $180°$ ہے اور مخالف زاویوں کے جوڑے برابر ہیں۔

پس: $\angle A + \angle B = 180°$، $\angle A + \angle D = 180°$،

$\angle C + \angle D = 180°$، اور $\angle B + \angle C = 180°$

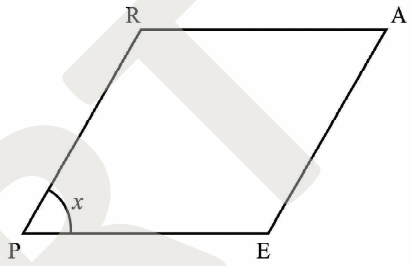
اور $\angle A = \angle C$، اور $\angle B = \angle D$

AP SCERT

Since the adjacent angles are the interior angles on the same side of a transversal to a pair of parallel lines, they must add up to 180°.

What about the opposite angles? Will they be equal in all parallelograms? If yes, how can we be sure?

Let us take one of the angles to be x. What are the other angles?



Since $\angle P + \angle R = 180°$,

$\angle R = 180 - \angle P = 180 - x$.

Similarly, since $\angle A + \angle R = 180°$,

$\angle A = 180 - \angle R = 180 - (180 - x) = 180 - 180 + x = x$.

Thus, $\angle P = \angle A = x$.

Similarly, we can deduce that $\angle R = \angle E = 180 - x$.

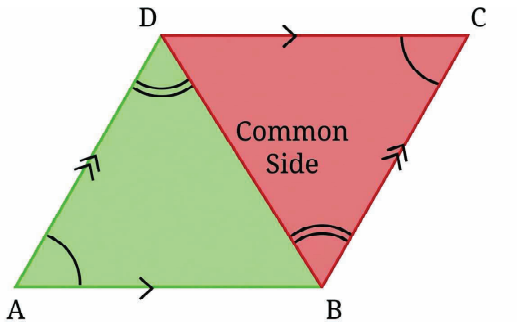
Therefore, this shows that **the opposite angles of a parallelogram are always equal.**

Deduction 7 - What can we say about the sides of a parallelogram?

By looking at a parallelogram, it appears that the opposite sides are equal.

Can we again use congruence to show this? Which two triangles can be considered for this?

In ΔABD and ΔCDB, the angles marked with a single arc are equal as they are the opposite angles of a parallelogram.



Since AD | | BC, and BD is a transversal to it, the angles marked with double arcs are equal as they are alternate angles.

So, by the AAS condition, the triangles are congruent, that is,

$\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

Therefore, AD = CB, and AB = CD.

Thus, **the opposite sides of a parallelogram are equal.**

Is it wrong to write $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? Why?

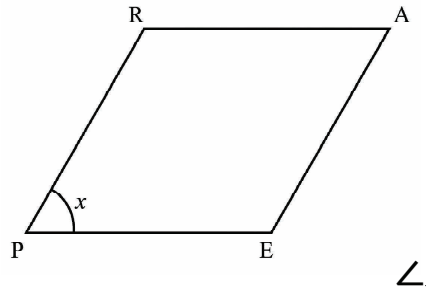
From these deductions we can find the remaining sides and angles of the parallelogram.

APSCERT

چونکہ متصلہ زاویے متوازی لکیروں کے جوڑے پر قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویے ہیں اس لیے ان کا مجموعہ $180°$ ہونا چاہیے۔

مخالف زاویوں کے بارے میں کیا خیال ہے؟ کیا وہ تمام متوازی الاضلاع میں مساوی ہوں گے؟

اگر ہاں تو ہم کیسے یقین کر سکتے ہیں؟ آیئے ایک زاویے کو x مانتے ہیں۔ باقی زاویے کیا ہوں گے؟



چونکہ $\angle P + \angle R = 180°$ ہے:

$\angle R = 180° - \angle P = 180° - x$

اسی طرح چونکہ $\angle A + \angle R = 180°$ ہے:

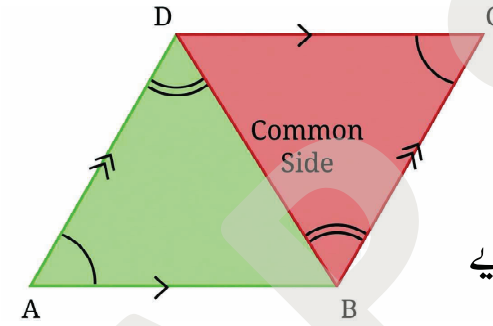
$\angle A = 180° - \angle R = 180° - (180° - x) = 180° - 180° + x = x$

پس $\angle P = \angle A = x$

اسی طرح ہم قیاس کر سکتے ہیں کہ $\angle R = \angle E = 180° - x$

اس طرح یہ ثابت ہوتا ہے کہ **متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔**

منطقی قیاس 7 — متوازی الاضلاع کے اضلاع کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟



متوازی الاضلاع کو دیکھنے سے لگتا ہے کہ مخالف اضلاع مساوی ہیں۔

کیا ہم اسے ثابت کرنے کے لیے پھر مطابقت استعمال کر سکتے ہیں؟

اس کے لیے کون سے دو مثلثوں پر غور کیا جا سکتا ہے؟

مثلث ABD اور مثلث CDB میں، واحد قوس سے نشان زدہ زاویے مساوی ہیں کیونکہ وہ متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے ہیں۔

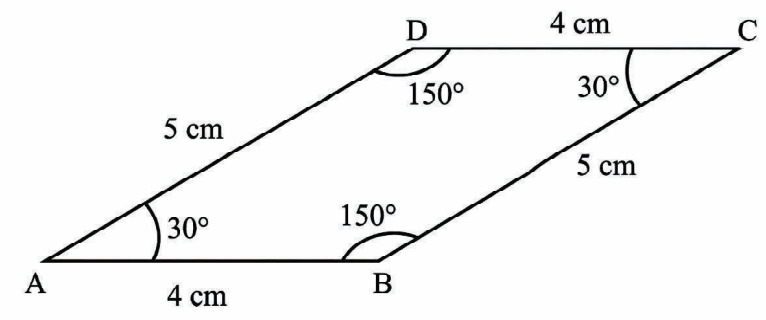
چونکہ $AD \| BC$ ہے اور BD ان کے لیے قاطع ہے، دوہری قوس سے نشان زدہ زاویے مساوی ہیں کیونکہ وہ متبادل زاویے ہیں۔ پس AAS شرط کے مطابق مثلث مطابق ہیں،

یعنی: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ اس لیے $AD = CB$ اور $AB = CD$۔

پس متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

کیا $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ لکھنا غلط ہو گا؟ کیوں؟

ان منطقی قیاس سے ہم متوازی الاضلاع کے باقی اضلاع اور زاویے معلوم کر سکتے ہیں۔



Let us list the properties of a parallelogram.

Property 1: The opposite sides of a parallelogram are equal.

Property 2: The opposite sides of a parallelogram are parallel.

Property 3: In a parallelogram, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

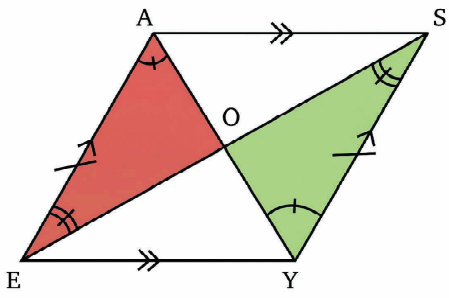
? Are the diagonals of a parallelogram always equal? Check with the parallelogram that you have constructed.

We see that the diagonals of a parallelogram need not be equal.

? Do they bisect each other (do they intersect at their midpoints)? Reason and/or experiment to figure this out.

Deduction 8 - What is the point of intersection of the two diagonals in a parallelogram?

As in the case of a rectangle, we can find out if the diagonals bisect each other by examining the congruence of ΔAOE and ΔYOS in the parallelogram EASY.



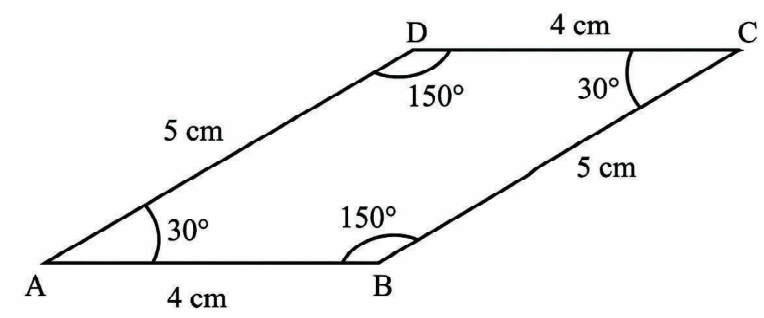
AE = YS (as they are the opposite sides of the parallelogram)

The angles marked using a single arc are equal, and so are the angles marked using a double arc, since they are alternate angles of parallel lines.

Thus, by the ASA condition, the triangles are congruent, that is,

ΔAOE ≅ ΔYOS.

Therefore, OA = OY, and OE = OS, since they are corresponding parts of congruent triangles.



آیئے متوازی الاضلاع کی خصوصیات کی فہرست بنائیں۔

خاصیت 1 : متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

خاصیت 2 : متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

خاصیت 3 : متوازی الاضلاع میں متصلہ زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے اور مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

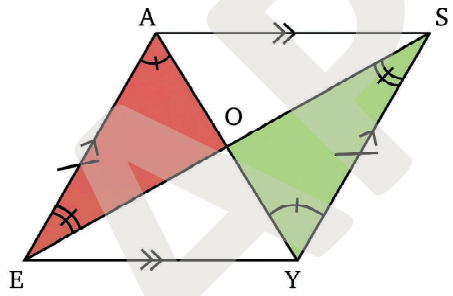
کیا متوازی الاضلاع کے وتر ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں؟ اپنے بنائے ہوئے متوازی الاضلاع سے جانچیے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ضروری نہیں کہ مساوی ہوں۔

کیا وہ ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں (کیا وہ اپنے درمیانی نقاط پر آپس میں ملتے ہیں)؟ استدلال اور / یا تجربے سے معلوم کیجیے۔

منطقی قیاس 8 — متوازی الاضلاع میں دونوں وتروں کا ملنے کا نقطہ کیا ہے؟

مستطیل کی طرح ہم یہ معلوم کرسکتے ہیں کہ وتر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں یا نہیں،



متوازی الاضلاع EASY میں مثلث AOE

اور مثلث YOS کی مطابقت جانچ کر۔

AE = YS (کیونکہ وہ متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع ہیں)

واحد قوس سے نشان زدہ زاویے مساوی ہیں اور دوہری قوس سے

نشان زدہ زاویے بھی مساوی ہیں کیونکہ وہ متوازی لکیروں کے متبادل زاویے ہیں۔

پس ASA شرط کے مطابق مثلث مطابق ہیں، یعنی: $\triangle AOE \cong \triangle YOS$

اس لیے OA = OY اور OE = OS کیونکہ وہ مطابق مثلثوں کے متعلقہ حصے ہیں۔

Thus, O is the midpoint of both diagonals.

Is it wrong to write $\Delta AOE \cong \Delta SOY$? Why?

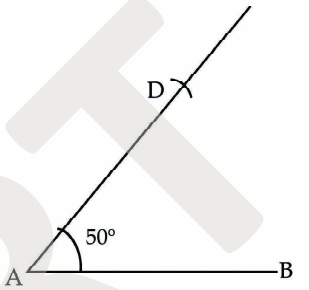
Property 4: The diagonals of a parallelogram bisect each other.

Do the diagonals of a parallelogram intersect at a particular angle?

4.4. Quadrilaterals with Equal Sidelengths

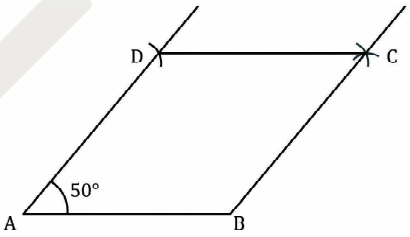
Are squares the only quadrilaterals that have equal sidelengths? Let us explore this question through construction.

Draw two equal sides AD and AB, that are not perpendicular to each other.



Can we complete this quadrilateral so that all its sides are of the same length?

Mark a point C whose distance from B and D is equal to AB (or AD). To do this, measure AB using a compass. Keeping this length as the radius, cut arcs from B and D.



Now we have a quadrilateral with equal sidelengths and one of its angles 50°. Note that we could have constructed such a quadrilateral by taking any angle less than 180° (in place of 50°).

A quadrilateral in which all the sides have the same length is a rhombus.

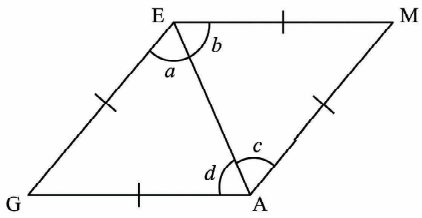
What are the other angles of the rhombus ABCD that we have constructed? Reason and/or experiment to figure this out.

Deduction 9 - What can we say about the angles in a rhombus?

Consider a rhombus GAME.

In ΔGAE, since GE = GA, a = d. Similarly, in ΔMAE, since ME = MA, b = c.

It can be seen that $\Delta GAE \cong \Delta MAE$ (How?)

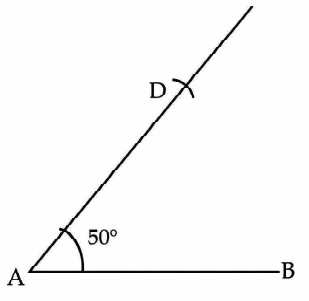


پس O دونوں وتروں کا وسطی نقطہ ہے۔

کیا $\triangle AOE \cong \triangle SOY$ لکھنا غلط ہو گا؟ کیوں؟

خاصیت 4 : متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔

کیا متوازی الاضلاع کے وتر کسی خاص زاویے پر آپس میں ملتے ہیں؟



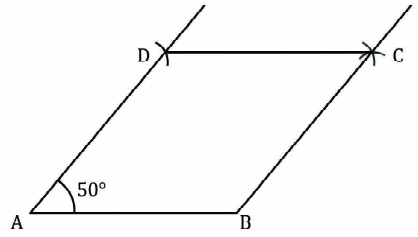
4.4 مساوی اضلاع والے چار ضلعی

کیا مربع ہی واحد چار ضلعی ہے جس کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں؟

آیئے تعمیر کے ذریعے اس سوال کو دریافت کرتے ہیں۔

دو مساوی اضلاع AD اور AB کھینچیے جو ایک دوسرے پر عمود نہ ہوں۔

کیا ہم اس چار ضلعی کو مکمل کر سکتے ہیں تاکہ اس کے تمام اضلاع ایک جیسی لمبائی کے ہوں؟



ایک ایسا نقطہ C نشان کیجیے جس کا B اور D سے فاصلہ AB

(یا AD) کے مساوی ہو۔ اس کے لیے پرکار سے AB ناپیے۔

اسی لمبائی کو نصف وتر رکھتے ہوئے B اور D سے قوسیں کاٹیے

اب ہمارے پاس ایک ایسا چار ضلعی ہے جس کے تمام اضلاع مساوی ہیں

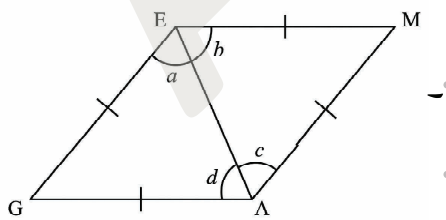
اور اس کا ایک زاویہ $50°$ ہے۔ غور کیجیے کہ ہم $50°$ کی جگہ $180°$ سے کم کوئی بھی زاویہ لے کر ایسا چار ضلعی بنا سکتے تھے۔

وہ چار ضلعی جس کے تمام اضلاع ایک جیسی لمبائی کے ہوں **معین** کہلاتا ہے۔

ہمارے بنائے ہوئے معین ABCD کے باقی زاویے کیا ہیں؟ استدلال اور / یا تجربے سے معلوم کیجیے۔

منطقی قیاس 9 — معین کے زاویوں کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟

معین GAME پر غور کیجیے۔



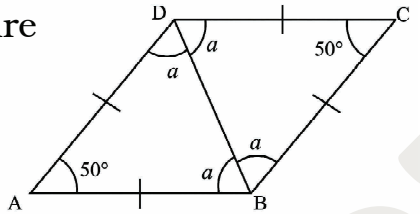
مثلث GAE میں چونکہ GE = GA ہے، اس لیے $a = d$۔

اسی طرح مثلث MAE میں چونکہ ME = MA ہے، اس لیے $b = c$۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ $\triangle GAE \cong \triangle MAE$ (کیسے؟)

So, a = b, c = d and G = M (since they are corresponding parts of congruent triangles). Thus, we have, a = b = c = d.

These facts hold for any rhombus. Let us apply them to the rhombus ABCD that we constructed earlier. Let the four equal angles formed by the diagonal be a, as shown in the figure

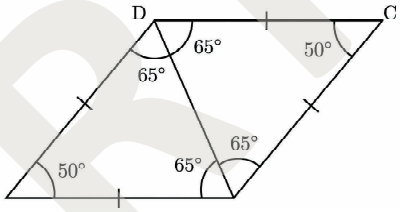


In $\triangle$ADB, we have

a + a + 50 = 180°.

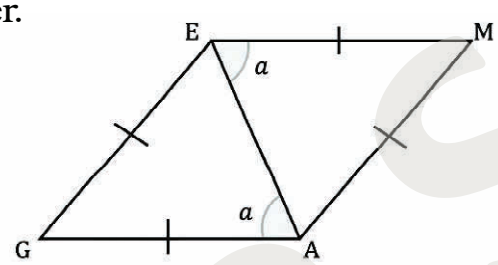
So, a = 65°.

Thus, the angles of the rhombus ABCD are 50°, 130°, 50°, and 130°.

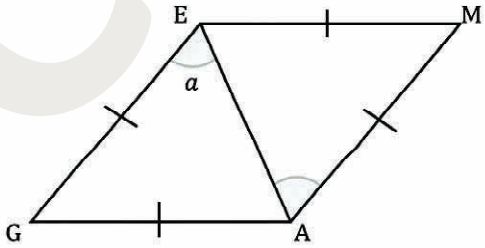


So, in a rhombus opposite angles are equal to each other.

Interestingly, there is one more way by which we could have figured out the other angles of the rhombus ABCD. We have shown that in a general rhombus GAME, the four angles formed by a diagonal are equal to each other.

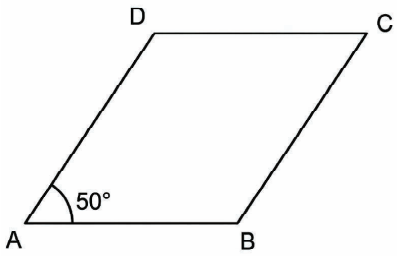


Consider the lines EM and GA and its transversal AE. Since the alternate angles are equal, EM||GA.



Similarly consider the lines GE and AM and its transversal AE. Since the alternate angles are equal, GE||AM.

As opposite sides are parallel, GAME is also a parallelogram. Thus, every rhombus is a parallelogram, and the properties of a parallelogram hold true for a rhombus as well. Thus, the adjacent angles of a rhombus add up to 180°, and the opposite angles are equal (verify that the arguments in Deduction 6 can be applied to a rhombus as well!).



Thus, in rhombus ABCD,

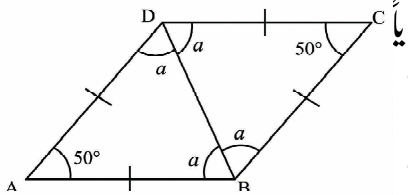
APSCERT

پس $a = b$ ، $c = d$ اور $\angle G = \angle M$ (کیونکہ وہ مطابق مثلثوں کے متعلقہ حصے ہیں)۔

اس طرح ہمارے پاس $a = b = c = d$ ہے۔

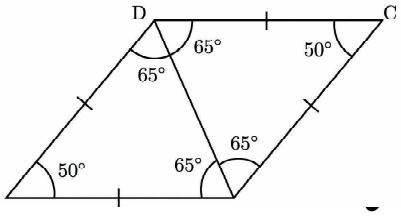
یہ حقائق کسی بھی معین پر استعمال ہوتے ہیں۔ آیئے انہیں پہلے بنائے ہوئے معین ABCD پر استعمال کرتے ہیں۔

قطر سے بننے والے چاروں مساوی زاویوں کو a مانتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا



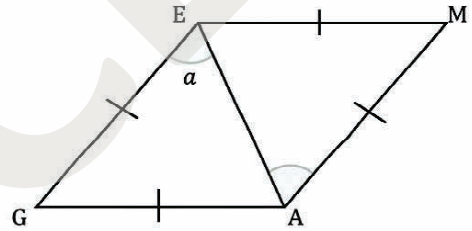
مثلث ADB میں $a + a + 50° = 180°$: پس $a = 65°$

اس طرح معین ABCD کے زاویے $50°$، $130°$، $50°$ اور $130°$ ہیں۔

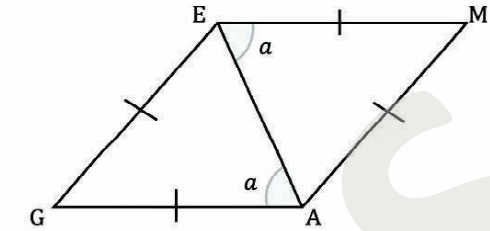


> پس معین میں مخالف زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

دلچسپ بات یہ ہے کہ ایک اور طریقے سے بھی ہم معین ABCD کے باقی زاویے معلوم کر سکتے تھے۔ ہم نے دکھایا ہے کہ عمومی معین GAME میں قطر سے بننے والے چاروں زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔



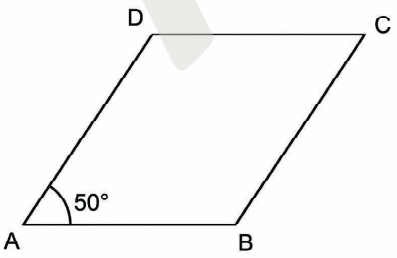
اسی طرح خطوط GE اور AM اور ان کی قاطع AE پر غور کیجیے۔ چونکہ متبادل زاویے مساوی ہیں اس لیے $GE \| AM$ ۔



خطوط EM اور GA اور ان کی قاطع AE پر غور کیجیے۔ چونکہ متبادل زاویے مساوی ہیں اس لیے $EM \| GA$ ۔

چونکہ مخالف اضلاع متوازی ہیں اس لیے GAME ایک متوازی الاضلاع بھی ہے۔ پس ہر معین ایک متوازی الاضلاع ہے اور متوازی الاضلاع کی خصوصیات معین پر بھی استعمال ہوتی ہیں۔ اس طرح معین کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے اور مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں (تصدیق کیجیے کہ منطقی استنباط 6 کے دلائل معین پر بھی استعمال ہو سکتے ہیں!)۔

پس معین ABCD میں،



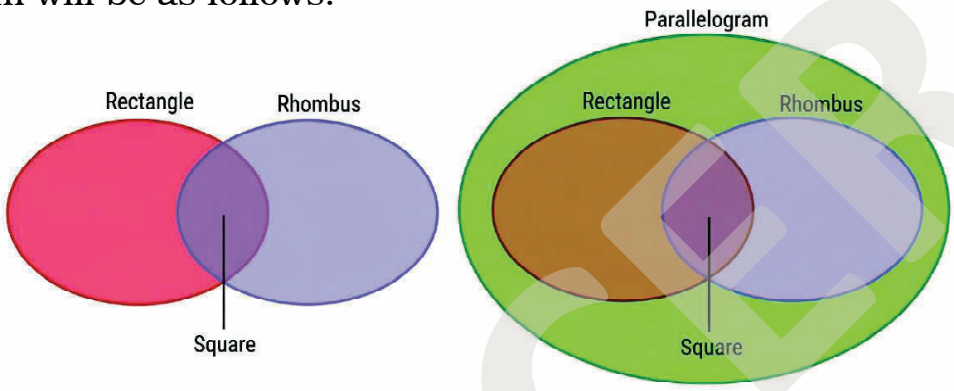
$\angle A = \angle C = 50°$, and

$\angle D = \angle B = 180 - 50 = 130°$.

? So a rhombus is a parallelogram, and a rectangle is also a parallelogram. How can this be represented using a Venn diagram?

? Where will the set of squares occur in this diagram?

We know that a square is a rectangle. Since the opposite sides of a square are parallel, a square is also a parallelogram. Further, since all the sides of a square have the same length, a square is also a rhombus. Thus, the Venn diagram will be as follows.



Let us list the properties of a rhombus.

Property 1: All the sides of a rhombus are equal to each other.

Property 2: The opposite sides of a rhombus are parallel to each other.

Property 3: In a rhombus, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

? Are the diagonals of a rhombus equal?

Property 4: The diagonals of a rhombus bisect each other.

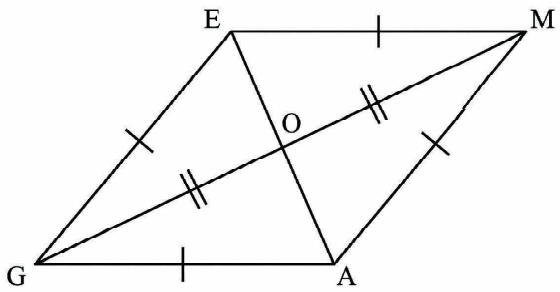
Property 5: The diagonals of a rhombus bisect its angles.

? Do the diagonals of a rhombus intersect at any particular angle? Reason out and/or experiment to figure this out!

Deduction 10 - What can we say about the angles formed by the diagonals of a rhombus at their point of intersection?

? In the rhombus GAME, we have $\Delta GEO \cong \Delta MEO$ (why?).

So, $\angle GOE = \angle MOE$, as they are corresponding parts of congruent triangles.



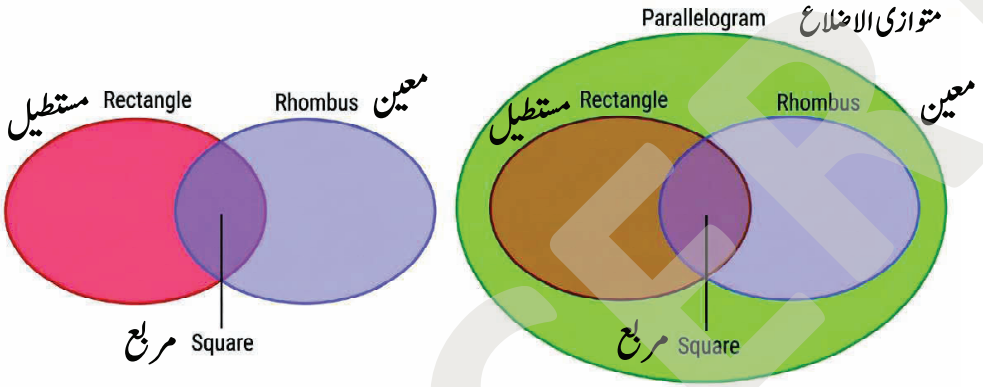
$\angle A = \angle C = 50°$، اور

$\angle D = \angle B = 180° - 50° = 130°$۔

پس معین ایک متوازی الاضلاع ہے اور مستطیل بھی ایک متوازی الاضلاع ہے۔ اسے وین ڈائیگرام سے کیسے ظاہر کیا جا سکتا ہے؟

اس ڈائیگرام میں مربعوں کا مجموعہ کہاں آئے گا؟

ہم جانتے ہیں کہ مربع ایک مستطیل ہے۔ چونکہ مربع کے مخالف اضلاع متوازی ہیں اس لیے مربع ایک متوازی الاضلاع بھی ہے۔ مزید یہ کہ چونکہ مربع کے تمام اضلاع ایک جیسی لمبائی کے ہوتے ہیں اس لیے مربع ایک معین بھی ہے۔ پس وین ڈائیگرام اس طرح ہو گا۔



آیئے معین کی خصوصیات کی فہرست بنائیں۔

خاصیت 1 : معین کے تمام اضلاع ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

خاصیت 2 : معین کے مخالف اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

خاصیت 3 : معین میں متصلہ زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے اور مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

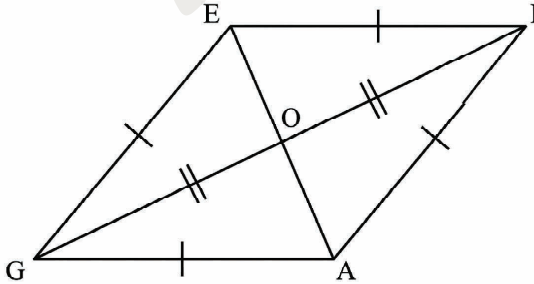
کیا معین کے وتر مساوی ہوتے ہیں؟

خاصیت 4 : معین کے وتر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔

خاصیت 5 : معین کے وتر اس کے زاویوں کو تنصیف کرتے ہیں۔

کیا معین کے وتر کسی خاص زاویے پر آپس میں ملتے ہیں؟ استدلال اور / یا تجربے سے معلوم کیجیے!

منطقی قیاس 10 — معین کے وتروں کے ملنے کے نقطے پر بننے والے زاویوں کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں؟



معین GAME میں : $\triangle GEO \cong \triangle MEO$ (کیوں؟)

پس $\angle GOE = \angle MOE$ کیونکہ وہ مطابق مثلثوں کے متعلقہ حصے ہیں۔

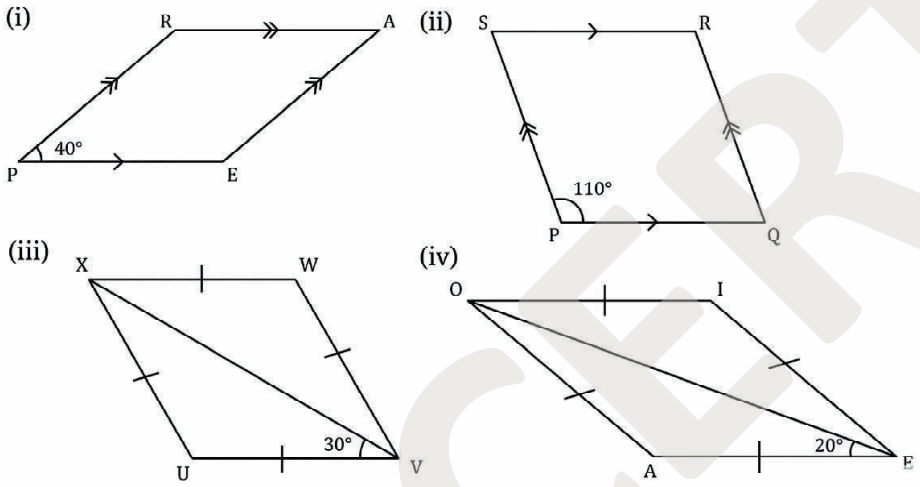
As they add up to 180°, they should be 90° each.

Property 6: Diagonals of a rhombus intersect each other at an angle of 90°.



Figure it Out - 4.2

1. Find the remaining angles in the following quadrilaterals.



2. Using the diagonal properties, construct a parallelogram whose diagonals are of lengths 7 cm and 5 cm, and intersect at an angle of 140°.
3. Using the diagonal properties, construct a rhombus whose diagonals are of lengths 4 cm and 5 cm.

4.5. Playing with Quadrilaterals

Geoboard Activity

Take a geoboard and some rubber bands. If you do not have these, you could just use the dot grid papers for this activity.



© NCERT not to be republished

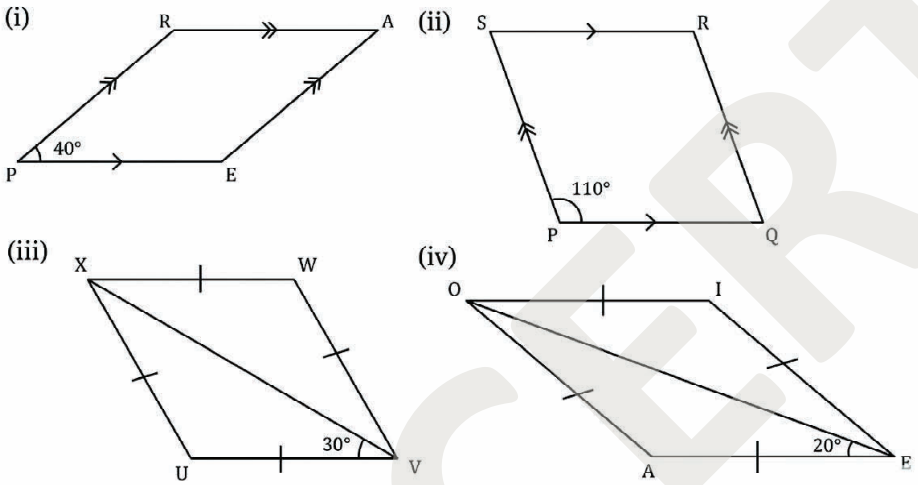
چونکہ ان کا مجموعہ $180°$ ہے اس لیے ہر ایک $90°$ ہونا چاہیے۔

خاصیت 6 : معین کے وتر ایک دوسرے کو $90°$ کے زاویے پر کاٹتے ہیں۔



حل کیجیے–4.2

1۔ درج ذیل چار ضلعیوں میں باقی زاویے معلوم کیجیے۔



2۔ وتر کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے ایک ایسا متوازی الاضلاع بنائیے جس کے وتروں کی لمبائیاں 7 سم اور 5 سم ہوں اور وہ $140°$ کے زاویے پر آپس میں ملتے ہوں۔

3۔ وتر کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے ایک ایسا معین بنائیے جس کے وتروں کی لمبائیاں 4 سم اور 5 سم ہوں۔

4.5 چار ضلعیوں کے ساتھ کھیلنا

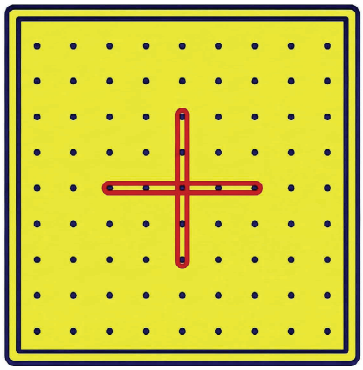
جیو بورڈ سرگرمی



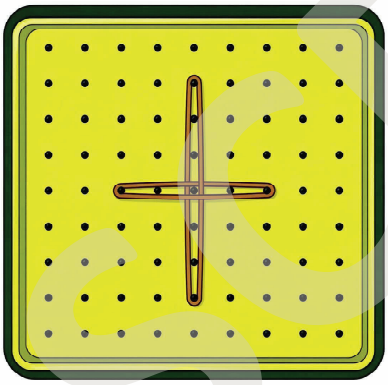
ایک جیو بورڈ اور کچھ ربر بینڈ لیجیے۔ اگر یہ دستیاب نہ ہوں تو اس سرگرمی کے لیے نقطہ دار جالی والے کاغذ بھی استعمال کیے جاسکتے ہیں۔

APSCERT

Place two rubber bands perpendicular to each other, forming diagonals of equal length. Join the ends.



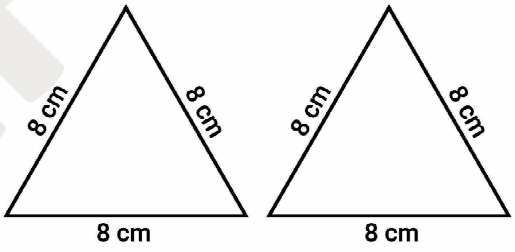
? What is the quadrilateral that you get? Justify your answer.
Extend one of the diagonals on both sides by 2 cm.



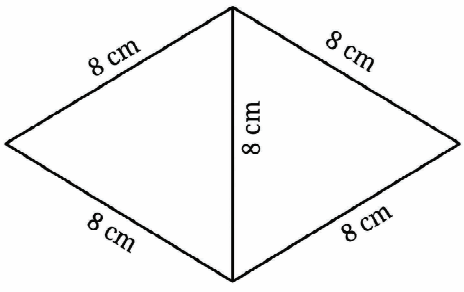
? What quadrilateral will you get now? Justify your answer.

Joining Triangles

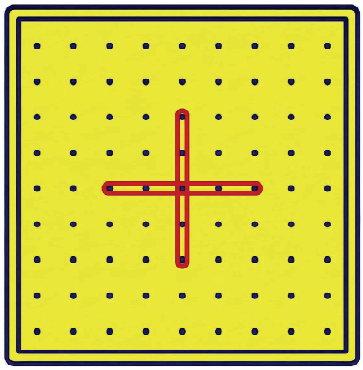
1. Take two cardboard cutouts of an equilateral triangle of sidelength 8 cm.



? Can you join them to get a quadrilateral?

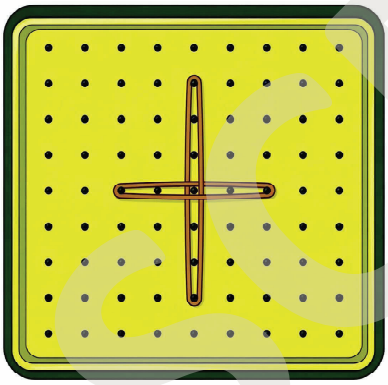


دوربر بینڈ ایک دوسرے پر عمود در کھیے تا کہ برابر لمبائی کے وتر بنیں۔ سروں کو ملائیے۔



آپ کو کون سا چار ضلعی ملتا ہے؟ اپنا جواب درست ثابت کیجیے۔

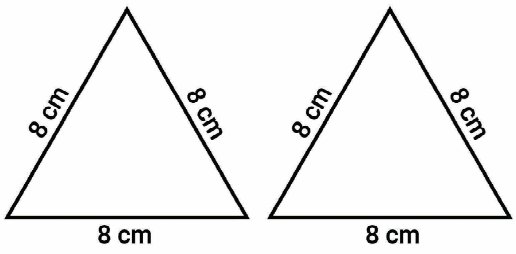
ایک وتر کو دونوں طرف سے 2 سمر بڑھائیے۔

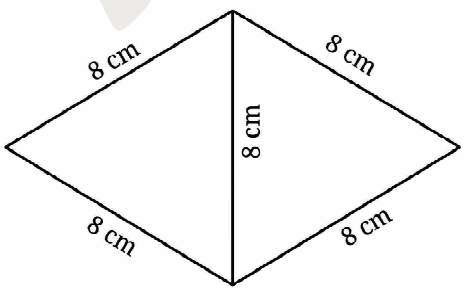


اب آپ کو کون سا چار ضلعی ملے گا؟ اپنا جواب درست ثابت کیجیے۔

مثلث کو جوڑنا

1۔ 8 سمر ضلع والے مساوی الاضلاع مثلث کے گتے کے دو ٹکڑے لیجیے۔



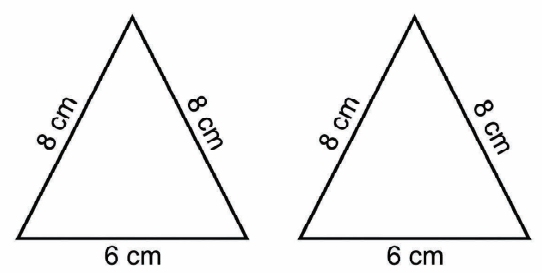


کیا آپ انہیں جوڑ کر چار ضلعی بنا سکتے ہیں؟

APSCERT

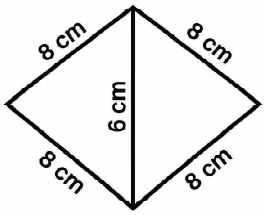
? What type of a quadrilateral is this? Justify your answer.

2. Take two cardboard cutouts of an isosceles triangle with sidelengths 8 cm, 8 cm, and 6 cm.

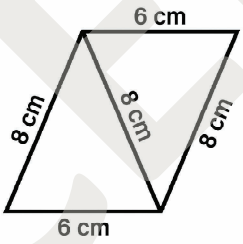


? What are the different ways they can be joined to get a quadrilateral?

Joining them in this way you get

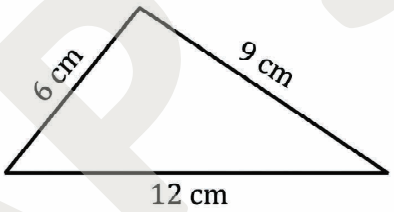


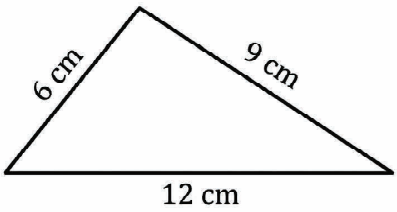
Joining them in this way you get



? What quadrilaterals are these? Justify your answers.

3. Take two cardboard cutouts of a scalene triangle with sides 6 cm, 9 cm, and 12 cm.





? What are the different ways they can be joined to get a quadrilateral?

? Are you able to identify the different quadrilaterals that are obtained by joining the triangles? Justify your answer whenever you identify a quadrilateral.

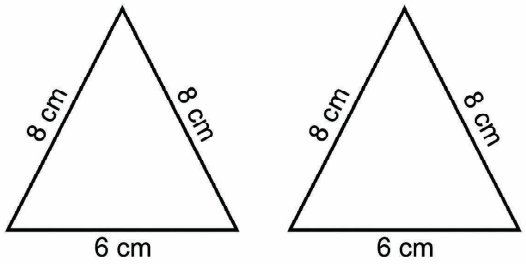
4.6. Kite and Trapezium

Kite

One of the ways the two triangles of sides 6 cm, 9 cm and 12 cm can be joined together is as follows -

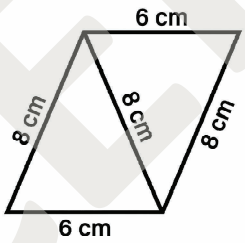
یہ کس قسم کا چار ضلعی ہے؟ اپنے جواب کو ثابت کیجیے۔

2۔ 8 سمر، 8 سمر اور 6 سمر اضلاع والے مساوی الساقین مثلث کے گتے کے دو ٹکڑے لیجیے۔

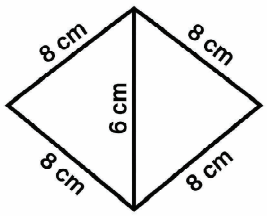


انہیں چار ضلعی بنانے کے لیے کتنے مختلف طریقوں سے جوڑا جا سکتا ہے؟

اس طرح جوڑنے پر آپ کو حاصل ہوتا ہے

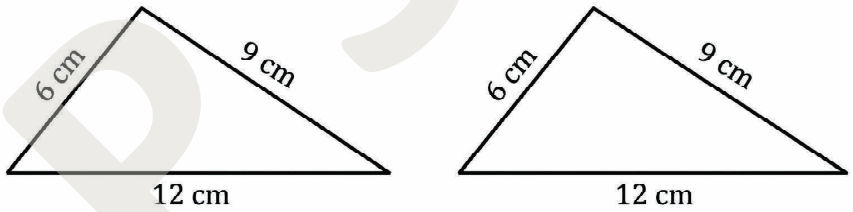


اس طرح جوڑنے پر آپ کو حاصل ہوتا ہے



یہ کون سے چار ضلعی ہیں؟ اپنے جوابات کو ثابت کیجیے۔

3۔ 6 سمر، 9 سمر اور 12 سمر اضلاع والے مختلف الاضلاع مثلث کے گتے کے دو ٹکڑے لیجیے۔



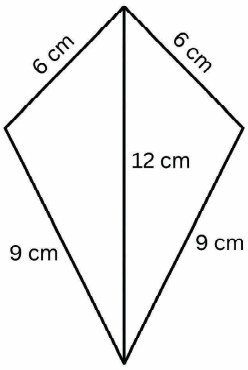
انہیں چار ضلعی بنانے کے لیے کتنے مختلف طریقوں سے جوڑا جا سکتا ہے؟

کیا آپ مثلثوں کو جوڑنے سے حاصل ہونے والے مختلف چار ضلعوں کی شناخت کر پا رہے ہیں؟ جب بھی کوئی چار ضلعی شناخت کریں تو اپنے جواب کو ثابت کیجیے۔

4.6 پتنگ اور منحرف

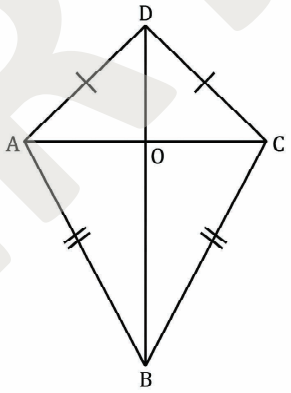
پتنگ

6 سمر، 9 سمر اور 12 سمر اضلاع والے دو مثلثوں کو جوڑنے کا ایک طریقہ یہ ہے:



This quadrilateral looks like a kite. Observe that the adjacent sides are of the same length.

Kite: A kite is a quadrilateral that can be labelled ABCD such that AB = BC, and CD = DA.



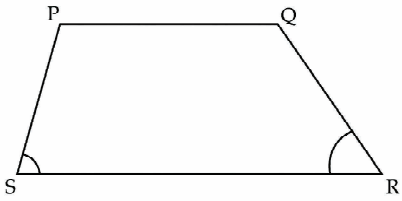
? **Property 1:** In the kite, show that the diagonal BD

(i) bisects $\angle$ABC and $\angle$ADC,

(ii) bisects the diagonal AC, that is, AO = OC, and is perpendicular to it.

Hint: Is $\triangle AOB \cong \triangle COB$?

Trapezium



Parallelograms are quadrilaterals that have parallel opposite sides. We get a new type of quadrilateral if we relax this condition. **Trapezium:** A trapezium is a quadrilateral with at least one pair of parallel opposite sides.

? Construct a trapezium. Measure the base angles (marked in the figure).

? Can you find the remaining angles without measuring them?

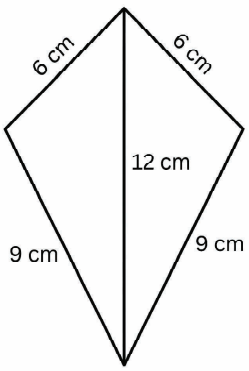
Since PQ || SR, we have

Property 1: $\angle S + \angle P = 180^\circ$ and $\angle R + \angle Q = 180^\circ$.

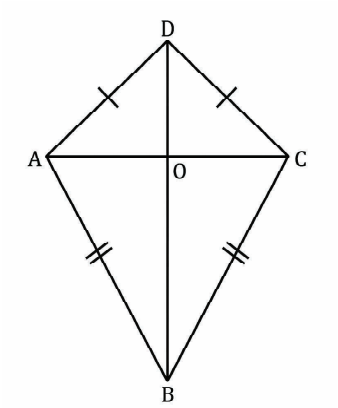
Using these facts, the remaining angles can easily be found. Verify your answer after finding them.

When the non-parallel sides of a trapezium have the same lengths, the trapezium is called an **isosceles trapezium**.

APSCERT



یہ چار ضلعی پتنگ جیسا لگتا ہے۔ غور کیجیے کہ متصلہ اضلاع ایک جیسی لمبائی کے ہیں۔



پتنگ : پتنگ وہ چار ضلعی ہے جسے ABCD اس طرح نشان کیا جاسکے کہ

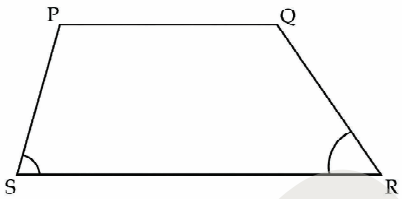
$AB = BC$ اور $CD = DA$ ۔

خاصیت 1 : پتنگ میں ثابت کیجیے کہ وتر BD:

(i) $\angle ABC$ اور $\angle ADC$ کو نصف کرتا ہے۔

(ii) وتر AC کو نصف کرتا ہے، یعنی $AO = OC$ ، اور اس پر عمود ہے۔

اشارہ: کیا $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ہے؟



منحرف

متوازی الاضلاع وہ چار ضلعی ہیں جن کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

اگر ہم اس شرط میں نرمی لائیں تو ہمیں ایک نئی قسم کا چار ضلعی ملتا ہے۔

منحرف : منحرف وہ چار ضلعی ہے جس کے مخالف اضلاع کا کم از کم ایک جوڑا متوازی ہو۔

ایک منحرف بنائیے۔ بنیادی زاویے (شکل میں نشان شدہ) ناپیے۔

کیا آپ باقی زاویے ناپے بغیر معلوم کرسکتے ہیں؟

چونکہ $PQ \| SR$ ہے، ہمارے پاس یہ ہے کہ

خاصیت 1: $\angle S + \angle P = 180°$ اور $\angle R + \angle Q = 180°$ ۔

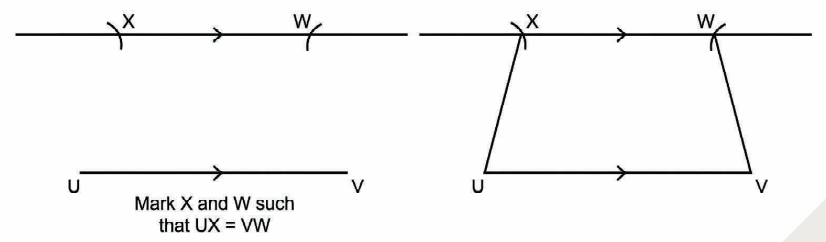
ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے باقی زاویے آسانی سے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ انہیں معلوم کرنے کے بعد اپنا جواب تصدیق کیجیے۔

جب منحرف کے غیر متوازی اضلاع ایک جیسی لمبائی کے ہوں تو منحرف کو **مساوی الساقین منحرف** کہتے ہیں۔

APSCERT

How do we construct an isosceles trapezium?

Construct an isosceles trapezium UVWX, with UV||XW. Measure $\angle U$.



Can you find the remaining angles without measuring them?

Does it appear that the angles opposite to the equal sides - $\angle U$ and $\angle V$ - are also equal? Can we find congruent triangles here? Consider line segments XY and WZ perpendicular to UV.

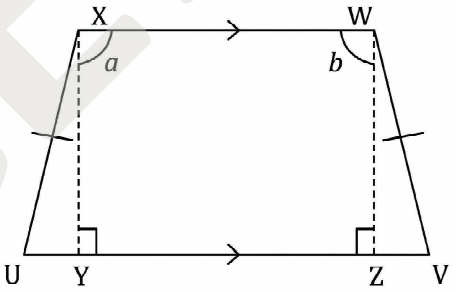
What type of quadrilateral is XWZY?

Since XW||UV,

a = 180° - $\angle XYZ$ = 90°, and

b = 180° - $\angle WZY$ = 90° (since the internal angles on the same side of a transversal add up to 180°)

Hence, XWZY is a rectangle.



Now, it can be shown that $\Delta UXY \cong \Delta VWZ$. (How?)

Thus, $\angle U = \angle V$.

Using this fact, the remaining angles of the isosceles trapezium can be determined. Verify the angles by measurement.

Property 2: In an isosceles trapezium, the angles opposite to the equal sides are equal.



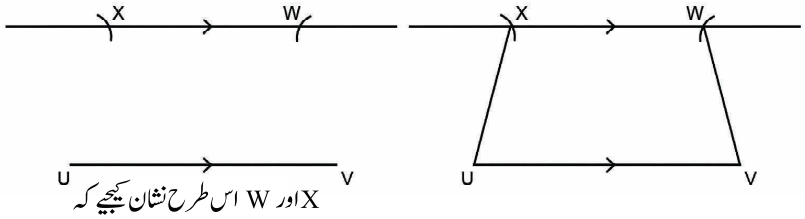
Figure it Out - 4.3

1. Find all the sides and the angles of the quadrilateral obtained by joining two equilateral triangles with sides 4 cm.
2. Construct a kite whose diagonals are of lengths 6 cm and 8 cm.

APSCERT

مساوی الساقین منحرف کیسے بنایا جاتا ہے؟

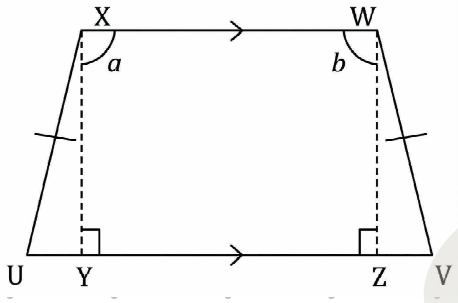
مساوی الساقین منحرف UVWX بنایئے جس میں UV‖XW ہو۔ ∠U ناپیے۔



X اور W اس طرح نشان کیجیے کہ UX = VW ہو۔

کیا آپ باقی زاویے ناپے بغیر معلوم کر سکتے ہیں؟

کیا ایسا لگتا ہے کہ مساوی اضلاع کے مخالف زاویے — ∠U اور ∠V — بھی مساوی ہیں؟ کیا ہم یہاں مطابق مثلث تلاش کر سکتے ہیں؟ UV پر عمود لکیری حصوں XY اور WZ پر غور کیجیے۔



XWZY کس قسم کا چار ضلعی ہے؟

چونکہ XW‖UV ہے: $a = 180° - \angle XYZ = 90°$، اور

$b = 180° - \angle WZY = 90°$

(کیونکہ قاطع کے ایک ہی طرف اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے)

پس XWZY ایک مستطیل ہے۔

اب یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\triangle UXY \cong \triangle VWZ$ (کیسے؟)

پس $\angle U = \angle V$۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مساوی الساقین منحرف کے باقی زاویے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ پیمائش سے زاویوں کی تصدیق کیجیے۔

خاصیت 2 : مساوی الساقین منحرف میں مساوی اضلاع کے مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

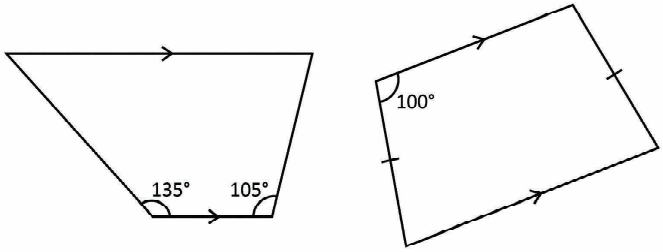


حل کیجیے–4.3

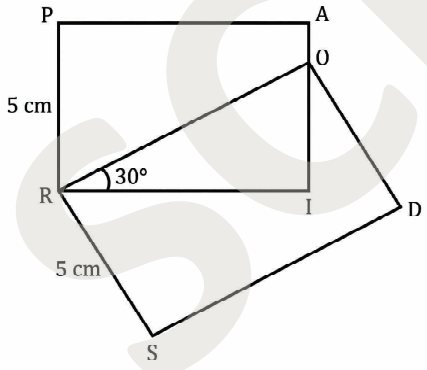
1۔ 4 سم اضلاع والے دو مساوی الاضلاع مثلثوں کو جوڑ کر حاصل ہونے والے چار ضلعی کے تمام اضلاع اور زاویے معلوم کیجیے۔

2۔ ایک ایسی پتنگ بنایئے جس کے قطروں کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سم ہوں۔

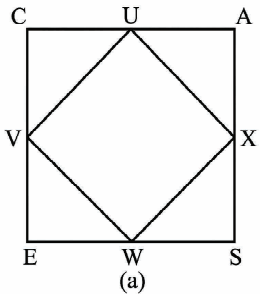
3. Find the remaining angles in the following trapeziums -



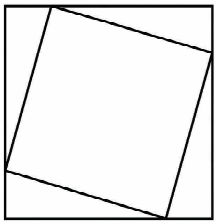
4. Draw a Venn diagram showing the set of parallelograms, kites, rhombuses, rectangles, and squares. Then, answer the following questions -
   (i) What is the quadrilateral that is both a kite and a parallelogram?
   (ii) Can there be a quadrilateral that is both a kite and a rectangle?
   (iii) Is every kite a rhombus? If not, what is the correct relationship between these two types of quadrilaterals?
5. If PAIR and RODS are two rectangles, find $\angle$IOD.



6. Construct a square with diagonal 6 cm without using a protractor.
7. CASE is a square. The points U, V, W and X are the midpoints of the sides of the square. What type of quadrilateral is UVWX? Find this by using geometric reasoning, as well as by construction and measurement. Find other ways of constructing a square within a square such that the vertices of the inner square lie on the sides of the outer square, as shown in Figure (b).

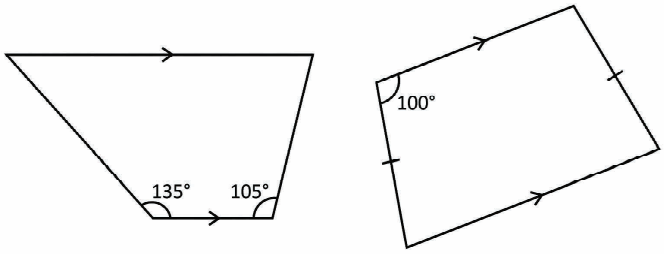


(a)


(b)

APSCERT

3۔ درج ذیل منحرفوں میں باقی زاویے معلوم کیجیے۔



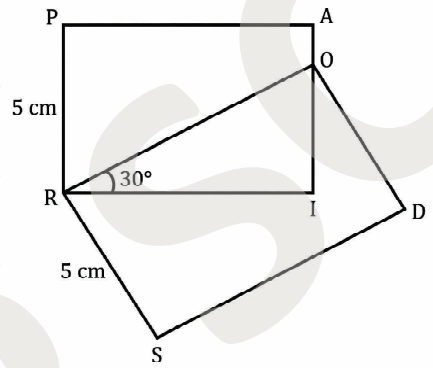
4۔ متوازی الاضلاع، پتنگ، معین، مستطیل اور مربع کے مجموعوں کو ظاہر کرنے والا وین خاکہ بنائیے۔ پھر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے:

(i) وہ کون سا چار ضلعی ہے جو پتنگ بھی ہو اور متوازی الاضلاع بھی؟

(ii) کیا کوئی ایسا چار ضلعی ہو سکتا ہے جو پتنگ بھی ہو اور مستطیل بھی؟

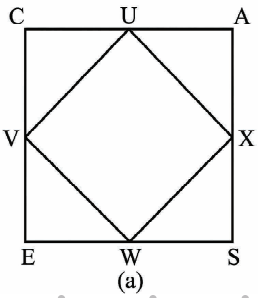
(iii) کیا ہر پتنگ معین ہوتی ہے؟ اگر نہیں تو ان دونوں قسم کے چار ضلعوں کے درمیان درست تعلق کیا ہے؟

5۔ اگر PAIR اور RODS دو مستطیل ہیں تو ∠IOD معلوم کیجیے۔

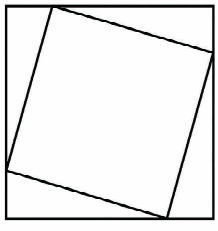


6۔ پیمانہ زاویہ کے بغیر 6 سم وتر والا مربع بنائیے۔

7۔ CASE ایک مربع ہے۔ نقاط U، V، W اور X مربع کے اضلاع کے وسطی نقاط ہیں۔ UVWX کس قسم کا چار ضلعی ہے؟ اسے ہندسی استدلال کے ساتھ ساتھ تعمیر اور پیمائش سے بھی معلوم کیجیے۔ مربع کے اندر مربع بنانے کے دوسرے طریقے تلاش کیجیے جس میں اندرونی مربع کی راسیں بیرونی مربع کے اضلاع پر ہوں، جیسا کہ شکل (b) میں دکھایا گیا ہے۔



(a)


(b)

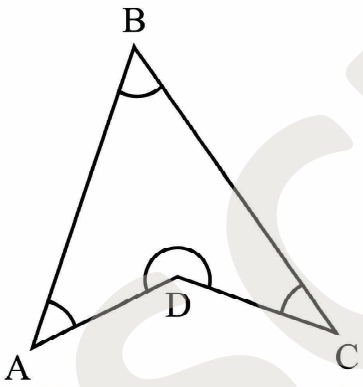
8. If a quadrilateral has four equal sides and one angle of 90°, will it be a square? Find the answer using geometric reasoning as well as by construction and measurement.

9. What type of a quadrilateral is one in which the opposite sides are equal? Justify your answer.

Hint: Draw a diagonal and check for congruent triangles.

10. Will the sum of the angles in a quadrilateral such as the following one also be 360°? Find the answer using geometric reasoning as well as by constructing this figure and measuring.

Try This



11. State whether the following statements are true or false. Justify your answers.

(i) A quadrilateral whose diagonals are equal and bisect each other must be a square.

(ii) A quadrilateral having three right angles must be a rectangle.

(iii) A quadrilateral whose diagonals bisect each other must be a parallelogram.

(iv) A quadrilateral whose diagonals are perpendicular to each other must be a rhombus.

(v) A quadrilateral in which the opposite angles are equal must be a parallelogram.

(vi) A quadrilateral in which all the angles are equal is a rectangle.

(vii) Isosceles trapeziums are parallelograms.

AP SCERT

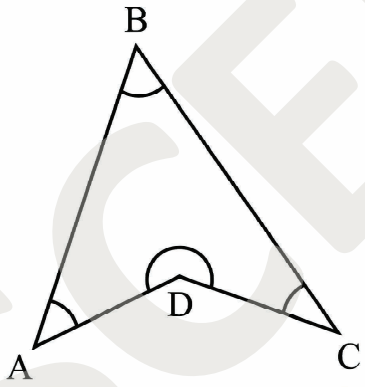
8. اگر کسی چار ضلعی کے چاروں اضلاع مساوی ہوں اور ایک زاویہ $90°$ ہو تو کیا وہ مربع ہو گا؟ اس کا جواب ہندسی استدلال کے ذریعے بھی تلاش کریں اور تعمیر اور پیمائش کے ذریعے بھی۔

9. وہ چار ضلعی کس قسم کا ہو گا جس میں مخالف اضلاع مساوی ہوں؟ اپنے جواب کی توجیہ کریں۔

اشارہ: ایک وتر کھینچیں اور متماثل مثلثات کی جانچ کریں۔

یہ بھی کیجیے

10. کیا ایسے چار ضلعی میں بھی زاویوں کا مجموعہ $360°$ ہو گا جیسا کہ درج ذیل شکل میں ہے؟ اس کا جواب ہندسی استدلال کے ذریعے بھی تلاش کریں اور اس شکل کی تعمیر کر کے پیمائش کے ذریعے بھی تصدیق کریں۔



11. درج ذیل بیانات کے بارے میں بتائیں کہ یہ درست ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

(i) وہ چار ضلعی جس کے وتر مساوی ہوں اور ایک دوسرے کو نصف کریں، لازماً مربع ہو گا۔

(ii) جس چار ضلعی میں تین زاویے قائمہ ہوں، وہ مستطیل ہو گا۔

(iii) وہ چار ضلعی جس کے وتر ایک دوسرے کو نصف کریں، متوازی الاضلاع ہو گا۔

(iv) وہ چار ضلعی جس کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوں، معین ہو گا۔

(v) وہ چار ضلعی جس میں مخالف زاویے مساوی ہوں، متوازی الاضلاع ہو گا۔

(vi) وہ چار ضلعی جس کے تمام زاویے مساوی ہوں، مستطیل ہو گا۔

(vii) مساوی الساقین منحرف متوازی الاضلاع ہوتے ہیں۔

APSCERT

SUMMARY

- A rectangle is a quadrilateral in which the angles are all 90°.

  Properties of a rectangle -

  • Opposite sides of a rectangle are equal.

  • Opposite sides of a rectangle are parallel to each other.

  • Diagonals of a rectangle are of equal length and they bisect each other.

- A square is a quadrilateral in which all the angles are 90°, and all the sides are of equal length.

  Properties of a square -

  • The opposite sides of a square are parallel to each other.

  • The diagonals of a square are of equal lengths and they bisect each other at 90°.

  • The diagonals of a square bisect the angles of the square.

- **A parallelogram** is a quadrilateral in which opposite sides are parallel.

  Properties of a parallelogram -

  • The opposite sides of a parallelogram are equal.

  • In a parallelogram, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

  • The diagonals of a parallelogram bisect each other.

- A **rhombus** is a quadrilateral in which all the sides have the same length.

  Properties of a rhombus -

  • The opposite sides of a rhombus are parallel to each other.

  • In a rhombus, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

  • The diagonals of a rhombus bisect each other at right angles.

  • The diagonals of a rhombus bisect its angles.

APSCERT

خلاصہ

ایک مستطیل (Rectangle) وہ چار ضلعی ہے جس کے تمام زاویے $90°$ ہوتے ہیں۔

مستطیل کی خصوصیات:

- مستطیل کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے مخالف اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے وتر مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔

ایک مربع (Square) وہ چار ضلعی ہے جس کے تمام زاویے $90°$ ہوتے ہیں اور تمام اضلاع مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں۔

مربع کی خصوصیات:

- مربع کے مخالف اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
- مربع کے وتر مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کو $90°$ پر تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع کے وتر اس کے زاویوں کو تنصیف کرتے ہیں۔

ایک متوازی الاضلاع (Parallelogram) وہ چار ضلعی ہے جس کے مخالف اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کی خصوصیات:

- متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع میں متصلہ زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے اور مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔

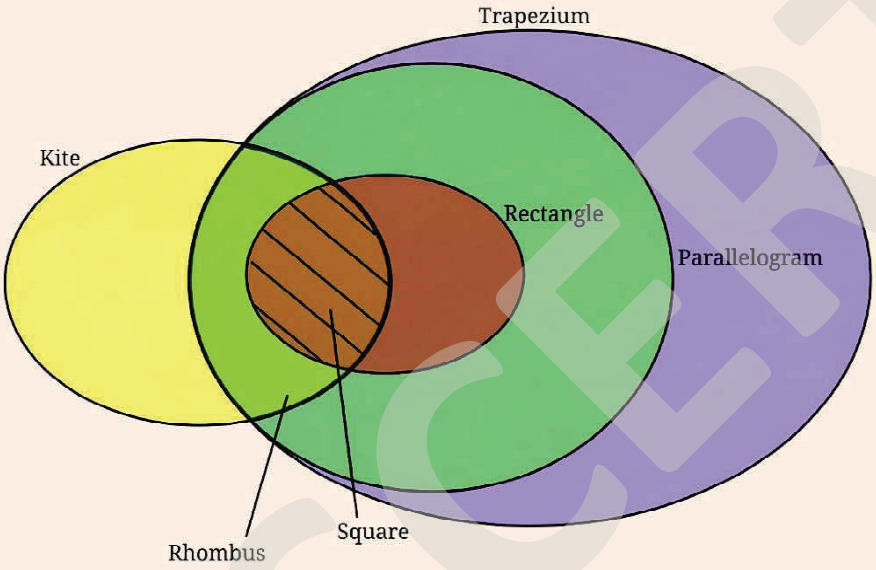
ایک معین (Rhombus) وہ چار ضلعی ہے جس کے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں۔

معین کی خصوصیات:

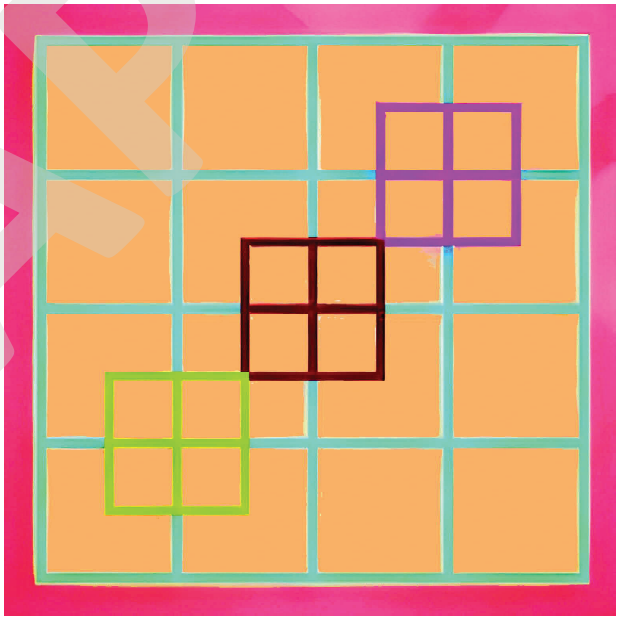
- معین کے مخالف اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
- معین میں متصلہ زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے اور مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر ایک دوسرے کو قائمہ زاویہ $(90°)$ پر تنصیف کرتے ہیں۔
- معین کے وتر اس کے زاویوں کو تنصیف کرتے ہیں۔

APSCERT

- A **kite** is a quadrilateral with two non-overlapping adjacent pairs of sides having the same length.
- A **trapezium** is a quadrilateral having at least one pair of parallel opposite sides.
- The sum of the angle measures in a quadrilateral is 360°.

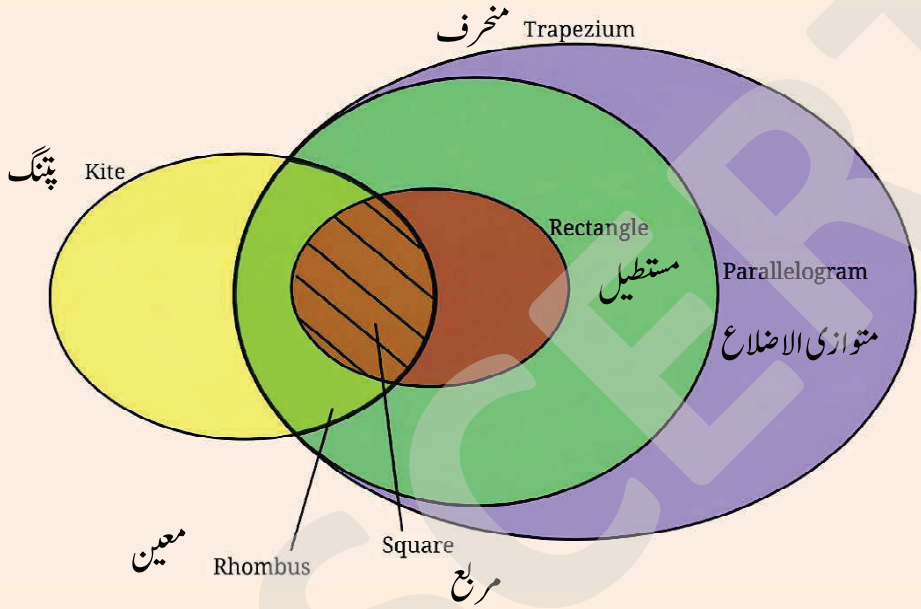


How many squares?

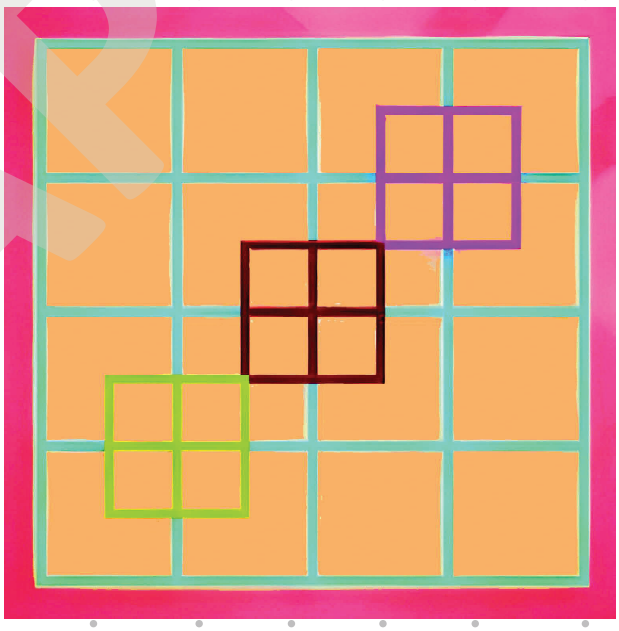




- ایک پتنگ نما شکل (Kite) وہ چار ضلعی ہے جس میں دو غیر متداخل متصلہ اضلاع کی دو جوڑیاں ایسی ہوں جن کی لمبائیاں مساوی ہوں۔
- منحرف (Trapezium) وہ چار ضلعی ہے جس میں مخالف اضلاع کا کم از کم ایک جوڑا متوازی ہو۔
- کسی بھی چار ضلعی کے زاویوں کا مجموعہ $360°$ ہوتا ہے۔



کتنے مربع؟



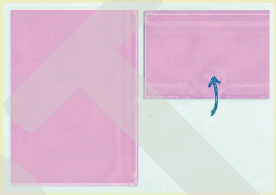


IT'S PUZZLE TIME!

Which Quad ?

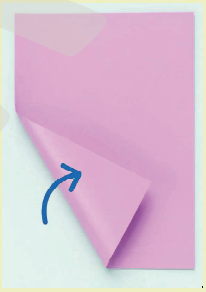
Gameplay

1. Fold a sheet into half.

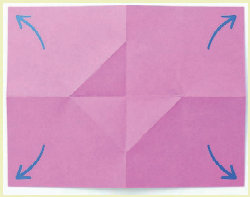




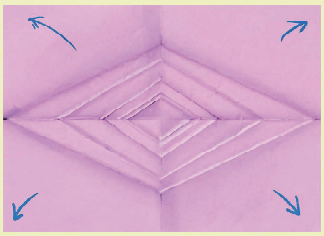
2. Now, fold it once more into a quarter.



3. Make a triangular crease at the corner that is at the middle of the paper.



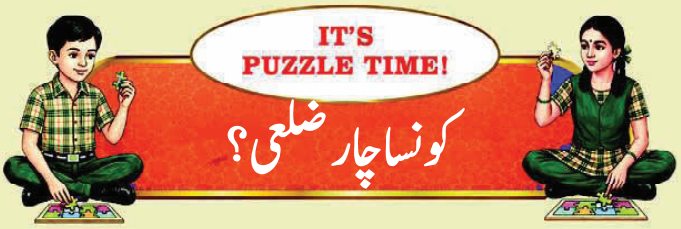
4. Open the sheet. What is the shape formed by the creases?



5. How would you fold the quarter paper to get the kinds of creases shown in the following image.

6. How would you fold the quarter paper such that a square is formed?

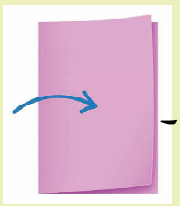




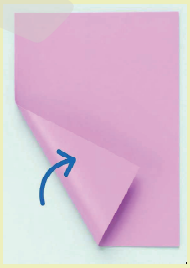
کھیلنے کا طریقہ

1. ایک کاغذ کی شیٹ کو آدھا فولڈ کریں۔

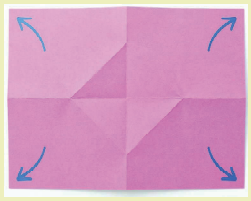




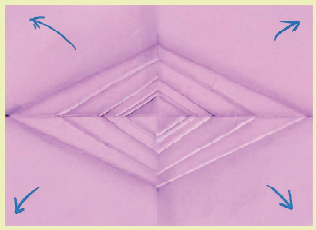
2. اب اسے دوبارہ فولڈ کر کے چوتھائی حصہ بنائیں۔



3. کاغذ کے اس کونے پر ایک **مثلثی** کریز بنائیں جو کاغذ کے درمیان میں ہو۔



4. شیٹ کو کھولیں۔ کریز سے کون سی شکل بنتی ہے؟



5. چوتھائی کاغذ کو اس طرح کیسے فولڈ کریں کہ نیچے دی گئی تصویر میں دکھائی گئی کریز بن جائیں؟

6. چوتھائی کاغذ کو اس طرح کیسے فولڈ کریں کہ ایک مربع (square) بن جائے؟



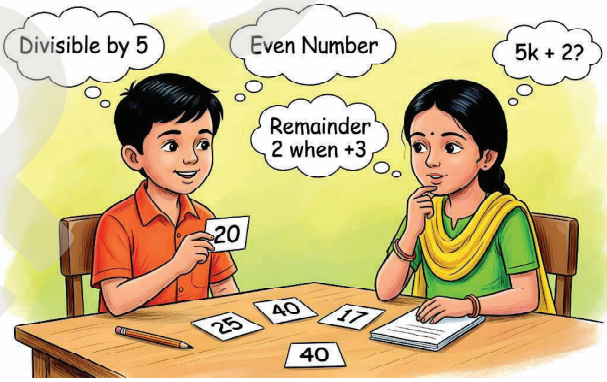
5 NUMBER PLAY

Learning outcomes : Learners will be able to

- Understand properties of numbers (even, odd) and their behaviour under operations (CG-6)
- Recognise and describe patterns related to divisibility and remainders (CG-1)
- Represent numbers using variables and general algebraic expressions (CG-2)
- Apply logical, inductive, and deductive reasoning to analyse statements and solve problems (CG-6)
- Explore relationships among factors, multiples, and divisibility rules to develop number sense (CG-1)
- Communicate mathematical ideas clearly using symbols and expressions (CG-6)
- Engage confidently and creatively in number-based activities and puzzles (CG-7)

Q7E1X2

5.0 Introduction - Number Play



Dheeraj and Dhatri are playing a number game. Dheeraj chooses a number that is even, divisible by 5, and leaves a remainder of 2 when divided by 3. Dhatri tries to guess the number by thinking about the properties of numbers and the patterns they follow. Instead of checking every number one by one, she represents the situation using symbols and simple expressions to narrow down the possibilities.

5 اعداد کے ساتھ کھیل

H8B8B8

اکتسابی نتائج: طلبہ اس قابل بنیں گے

- اعداد کی خصوصیات (جفت، طاق) اور مختلف اعمال کے تحت ان کے رویّے کو سمجھ سکیں گے۔(CG-6)
- تقسیم پذیری اور باقی سے متعلق نمونوں کو پہچان سکیں اور ان کی وضاحت کر سکیں گے۔(CG-1)
- اعداد کو متغیرات اور عمومی الجبری عبارات کی مدد سے ظاہر کر سکیں گے۔(CG-2)
- منطقی، استقرائی اور استخراجی استدلال کا استعمال کرتے ہوئے بیانات کا تجزیہ اور مسائل حل کر سکیں گے۔(CG-6)
- اجزائے ضربی، اضعاف اور تقسیم پذیری کے قواعد کے باہمی تعلقات کو دریافت کر کے عددی فہم پیدا کر سکیں گے۔(CG-1)
- ریاضیاتی خیالات کو علامات اور الجبری عبارات کی مدد سے واضح انداز میں بیان کر سکیں گے۔(CG-6)
- اعداد سے متعلق سرگرمیوں اور پہیلیوں میں اعتماد اور تخلیقی انداز سے حصہ لے سکیں گے۔(CG-7)

5.0 تعارف- اعداد کے ساتھ کھیل



دھیرج اور دھاتری ایک عددی کھیل کھیل رہے ہیں۔ دھیرج ایک ایسا عدد منتخب کرتا ہے جو جفت ہو، 5 سے قابل تقسیم ہو، اور 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 دے۔ دھاتری اعداد کی خصوصیات اور ان کے نمونوں کے بارے میں سوچ کر اس عدد کا اندازہ لگانے کی کوشش کرتی ہے۔ ہر عدد کو ایک ایک کر کے جانچنے کے بجائے، وہ اس صورتِ حال کو علامات اور سادہ الجبری عبارات کی مدد سے ظاہر کرتی ہے تاکہ ممکنہ اعداد کی تعداد کم کی جا سکے۔

This kind of thinking shows how numbers follow certain rules and patterns. In everyday life, we often use such reasoning while arranging objects, sharing items equally, or solving puzzles. Some numbers behave in predictable ways when added, multiplied, or divided, and these behaviours can be explained using general forms and algebraic expressions.

In this chapter, Number Play, we explore interesting patterns in numbers, study divisibility and remainders, and use variables to describe general rules. We learn to decide whether certain statements are always true, sometimes true, or never true, and justify our answers logically. Through puzzles and playful activities, this chapter helps develop number sense, logical reasoning, and algebraic thinking, making mathematics both meaningful and enjoyable.

5.1. Is This a Multiple Of?

Sum of Consecutive Numbers

Aravind is exploring sums of consecutive numbers. He has written the following -

$7 = 3 + 4$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$12 = 3 + 4 + 5$
$15 = 7 + 8$
$= 4 + 5 + 6$
$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Now, he is wondering -

- "Can I write every natural number as a sum of consecutive numbers?"
- "Which numbers can I write as the sum of consecutive numbers in more than one way?"
- "Ohh, I know all odd numbers can be written as a sum of two consecutive numbers. Can we write all even numbers as a sum of consecutive numbers?"
- "Can I write 0 as a sum of consecutive numbers? Maybe I should use negative numbers."



? Explore these questions and any others that may occur to you. Discuss them with the class.

? Take any 4 consecutive numbers. For example, 3, 4, 5, and 6. Place '+' and '-' signs in between the numbers. How many different possibilities exist? Write all of them.

$3 + 4 - 5 + 6$

$3 - 4 - 5 - 6$

APSCERT

اس طرح کی سوچ ظاہر کرتی ہے کہ اعداد کچھ مخصوص قواعد اور نمونوں کی پیروی کرتے ہیں۔ روزمرہ زندگی میں بھی ہم اشیاء کو ترتیب دیتے وقت، چیزوں کو برابر برابر تقسیم کرتے وقت یا پہیلیاں حل کرتے وقت اسی قسم کے استدلال کا استعمال کرتے ہیں۔ کچھ اعداد جمع، ضرب یا تقسیم کے دوران قابلِ پیش گوئی انداز میں برتاؤ کرتے ہیں، اور ان رویّوں کو عمومی صورتوں اور الجبری عبارات کی مدد سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

اس باب "**اعداد کا کھیل**" میں ہم اعداد کے دلچسپ نمونوں کا مطالعہ کریں گے، تقسیم پذیری اور باقیات کو سمجھیں گے، اور عمومی قواعد کو بیان کرنے کے لیے متغیرات کا استعمال کریں گے۔ ہم یہ بھی سیکھیں گے کہ کون سے بیانات ہمیشہ درست، کبھی کبھی درست، یا کبھی بھی درست نہیں ہوتے اور اپنے جوابات کو منطقی دلائل کے ساتھ ثابت کریں گے۔ پہیلیوں اور دلچسپ سرگرمیوں کے ذریعے یہ باب عددی فہم، منطقی استدلال اور الجبری سوچ کو فروغ دیتا ہے اور ریاضی کو زیادہ بامعنی اور لطف اندوز بناتا ہے۔

5.1۔ کیا یہ اس کا ضعف ہے؟

متواتر اعداد کا مجموعہ

```
7  = 3 + 4
10 = 1 + 2 + 3 + 4
12 = 3 + 4 + 5
15 = 7 + 8
   = 4 + 5 + 6
   = 1 + 2 + 3 + 4 + 5
```

اروند متواتر اعداد کے مجموعوں کا جائزہ لے رہا ہے۔ اس نے درج ذیل لکھا:

اب وہ سوچ رہا ہے:

"کیا میں ہر طبعی عدد کو متواتر اعداد کے مجموعے کی صورت میں لکھ سکتا ہوں؟"

"کن اعداد کو میں متواتر اعداد کے مجموعے کی صورت میں ایک سے زیادہ طریقوں سے لکھ سکتا ہوں؟"

"اوہ! میں جانتا ہوں کہ تمام طاق اعداد کو دو متواتر اعداد کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کیا تمام جفت اعداد کو بھی متواتر اعداد کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے؟"

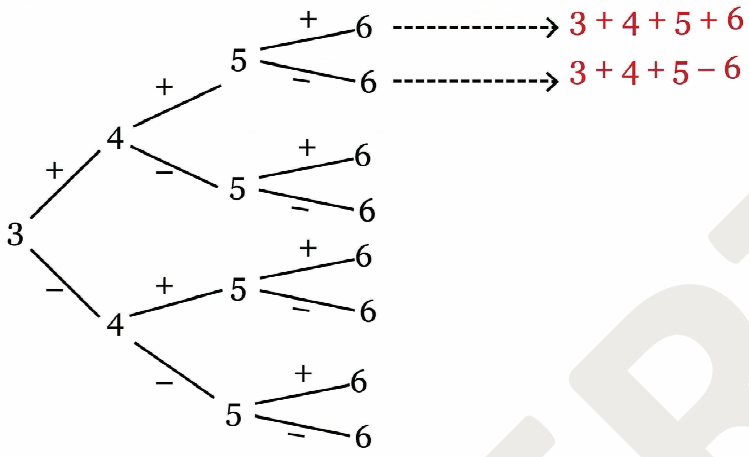
"کیا میں 0 کو متواتر اعداد کے مجموعے کی صورت میں لکھ سکتا ہوں؟ شاید مجھے منفی اعداد استعمال کرنی چاہیے۔"



- ان سوالات اور آپ کے ذہن میں آنے والے دیگر سوالات پر غور کریں۔
  ان پر اپنی جماعت کے ساتھ گفتگو کریں۔
- کسی بھی 4 متواتر اعداد کو لیں۔ مثال کے طور پر: 3، 4، 5 اور 6۔ ان اعداد کے درمیان '+' اور '−' کی علامات لگائیں۔
  کتنی مختلف صورتیں ممکن ہیں؟ ان تمام صورتوں کو لکھیں۔

```
3 + 4 - 5 + 6
3 - 4 - 5 -6
```

Eight such expressions are possible. You can use the diagram below to systematically list all the possibilities.



? Evaluate each expression and write the result next to it. Do you notice anything interesting?

? Now, take four other consecutive numbers. Place the '+' and '-' signs as you have done before. Find out the results of each expression. What do you observe?

? Repeat this for one more set of 4 consecutive numbers. Share your findings.



3 + 4 − 5 + 6 = 8 3 − 4 − 5 − 6 = −12 . . .	5 + 6 − 7 + 8 = 12 5 − 6 − 7 − 8 = −16 . . .	__ + __ − __ + __ = __ __ − __ − __ − __ = __ . . .

Some sums appear always no matter which 4 consecutive numbers are chosen. Isn't that interesting?

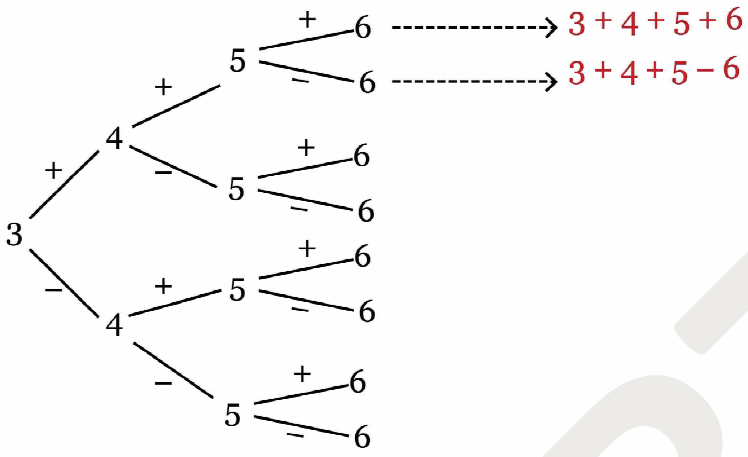
? Do these patterns occur no matter which 4 consecutive numbers are chosen? Is there a way to find out through reasoning?

Hint: Use algebra and describe the 8 expressions in a general form.

You might have noticed that the results of all expressions are even numbers. Even numbers have a factor of 2. Negative numbers having a factor 2 are also even numbers, for example, - 2, - 4, - 6, and so on. Check if anyone in your class got an odd number.

APSCERT

ایسی آٹھ عبارات ممکن ہیں۔ تمام ممکنہ صورتوں کو منظم انداز میں لکھنے کے لیے آپ نیچے دیا گیا خاکہ استعمال کر سکتے ہیں۔



ہر عبارت کی قیمت معلوم کریں اور اس کے سامنے نتیجہ لکھیں۔ کیا آپ کو کوئی دلچسپ بات نظر آتی ہے؟

اب چار دیگر مسلسل اعداد لیں۔ ان کے درمیان '+' اور '−' کی علامات اسی طرح لگائیں جیسے پہلے لگائی تھیں۔

ہر عبارت کا نتیجہ معلوم کریں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟



اسی عمل کو چار مسلسل اعداد کے ایک اور مجموعے کے لیے دہرائیں۔ اپنے مشاہدات اور نتائج جماعت کے ساتھ تبادلہ خیال کریں۔

3 + 4 − 5 + 6 = 8	5 + 6 − 7 + 8 = 12	__ + __ − __ + __ = __
3 − 4 − 5 − 6 = −12	5 − 6 − 7 − 8 = −16	__ − __ − __ − __ = __
.	.	.
.	.	.
.	.	.

کچھ مجموعے ایسے ہیں جو ہمیشہ ظاہر ہوتے ہیں، چاہے کوئی بھی 4 مسلسل اعداد منتخب کیے جائیں۔ کیا یہ دلچسپ نہیں؟

کیا یہ نمونے ہر بار ظاہر ہوتے ہیں، چاہے کوئی بھی 4 مسلسل اعداد منتخب کیے جائیں؟ کیا استدلال کے ذریعے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ ایسا کیوں ہوتا ہے؟

اشارہ: الجبرا کا استعمال کریں اور ان 8 عبارات کو عمومی صورت میں بیان کریں۔

آپ نے شاید مشاہدہ کیا ہوگا کہ تمام عبارات کے نتائج **جفت اعداد** ہوتے ہیں۔ جفت اعداد، 2 کے ضریب ہوتے ہیں۔ منفی اعداد جو 2 کے ضریب ہوں، وہ بھی جفت اعداد کہلاتے ہیں، مثلاً: −2، −4، −6 وغیرہ۔ دیکھیں کہ کیا آپ کی جماعت میں کسی کو کوئی طاق عدد حاصل ہوا ہے؟

APSCERT

When 4 consecutive numbers are chosen, no matter how the '+' and '-' signs are placed between them, the resulting expressions always have even parity.

Now take any 4 numbers, place '+' and '-' signs in the eight different ways, and evaluate the resulting expression. What do you observe about their parities?



Repeat this with other sets of 4 numbers.

? Is there a way to explain why this happens?

Hint: Think of the rules for parity of the sum or difference of two numbers.

Explanation 1: Let us consider any of the 8 expressions formed by four numbers a, b, c, and d. When one of its signs is switched, its value always increases or decreases by an even number! Let us see why.

Consider one of the expressions: a + b - c - d.

Replacing +b by - b, we get

a - b - c - d.

By how much has the number changed? It has changed by

(a + b - c - d) - (a - b - c - d)

= a + b - c - d - a + b + c + d (notice how the signs changed when we opened the second set of brackets)

= 2b (this is an even number).

If the difference between two numbers is even, can they have different parities? No! So either both are even or both are odd.

Now, let us see what happens when a negative sign is switched to a positive sign.

? Replace any negative sign in the expression a + b - c - d with a positive sign and find the difference between the two numbers.

? What do you conclude from this observation?

Starting from any expression, we can get 7 expressions by switching one or more '+' and '-' signs. Thus, all the expressions have the same parity!

Explanation 2: We know that

odd ± odd = even

even ± even = even

odd ± even = odd.

APSCERT

جب 4 مسلسل اعداد منتخب کیے جائیں تو '+' اور '—' کی علامات کسی بھی ترتیب سے لگائی جائیں،
حاصل ہونے والی تمام عبارات کی Parity ہمیشہ جفت ہوتی ہے۔



اب کوئی بھی 4 اعداد لیں، ان کے درمیان '+' اور '—' کی علامات آٹھ مختلف طریقوں سے لگائیں اور حاصل ہونے والی عبارات کی قیمت معلوم کریں۔ ان کی parity کے بارے میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ اسی عمل کو 4 اعداد کے دوسرے مجموعوں کے ساتھ بھی دہرائیں۔

کیا اس بات کی وضاحت کی جاسکتی ہے کہ ایسا کیوں ہوتا ہے؟

اشارہ: دو اعداد کے مجموعے یا فرق کی زوجیت کے قواعد پر غور کریں۔

وضاحت 1: فرض کریں a، b، c اور d چار اعداد ہیں اور ان سے بننے والی 8 عبارات میں سے ایک عبارت یہ ہے:

$$a + b - c - d$$

اگر $+b$ کو $-b$ سے بدل دیں تو عبارت بن جائے گی: $a - b - c - d$

عدد میں کتنی تبدیلی آئی؟ تبدیلی $= (a + b - c - d) - (a - b - c - d)$

$= a + b - c - d - a + b + c + d$ (دوسری قوس کھولتے وقت علامات تبدیل ہوگی)

$= 2b$ (اور $2b$ ہمیشہ جفت عدد ہوتا ہے۔)

اگر دو اعداد کا فرق جفت ہو تو کیا ان کی زوجیت مختلف ہو سکتی ہے؟ نہیں! اس صورت میں دونوں یا تو جفت ہوں گے یا دونوں طاق ہوں گے۔

اب دیکھتے ہیں کہ جب منفی علامت کو مثبت علامت سے بدلا جائے تو کیا ہوتا ہے۔

عبارت $a + b - c - d$ میں کسی بھی منفی علامت کو مثبت علامت سے بدلیں اور دونوں عبارات کا فرق معلوم کریں۔

اس مشاہدے سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

کسی بھی ایک عبارت سے شروع کرتے ہوئے '+' اور '—' کی ایک یا زیادہ علامات بدل کر باقی 7 عبارات حاصل کی جاسکتی ہیں۔
لہٰذا تمام عبارات کی parity ایک ہی ہوگی۔

وضاحت 2: ہم جانتے ہیں کہ:

طاق ± طاق = جفت

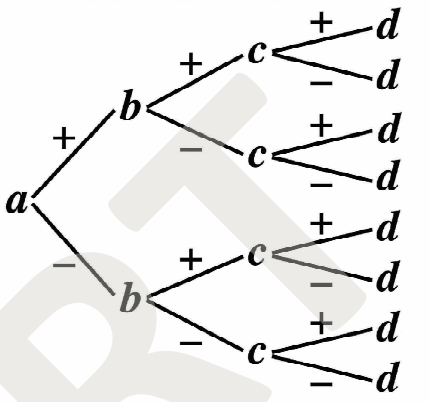
جفت ± جفت = جفت

طاق ± جفت = طاق

We have seen that the parity of a + b and a - b is the same, regardless of the parities of a and b.

In short, a ± b have the same parity. By the same argument, a ± b + c and a ± b - c have the same parity. Extending this further, we can say that all the expressions a ± b ± c ± d have the same parity.

Explanation 3 : This can also be explained using the positive and negative token model you studied in the chapter on Integers. Try to think how.



The number of ways to choose any 4 numbers a, b, c, d and combine them using a '+' and '-' signs is infinite. Mathematical reasoning allows us to prove that all the combinations a ± b ± c ± d always have the same parity, without having to go through them one by one.



Several problems in mathematics can be thought about and solved in different ways. While the method you came up with may be dear to you, it can be amusing and enriching to know how others thought about it. Two tidbits: 'share' and 'listen'.

? Is the phenomenon of all the expressions having the same parity limited to taking 4 numbers? What do you think?



'What if ...?', 'Will it always happen?'- Wondering and posing questions and conjectures is as much a part of mathematics as problem solving.

Breaking Even

We know how to identify even numbers. Without computing them, find out which of the following arithmetic expressions are even.

43 + 37	672 – 348	4 × 347 × 3	708 – 477
809 + 214	119 × 303	543 – 479	513^3

? Using our understanding of how parity behaves under different operations, identify which of the following algebraic expressions give an even number for any integer values for the letter-numbers.

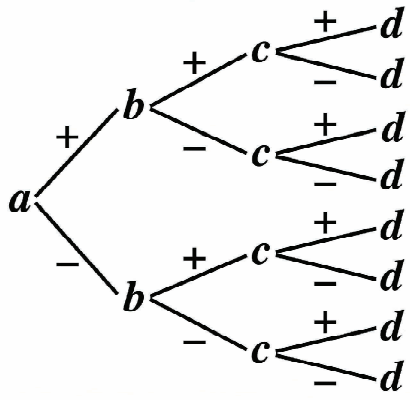
$2a + 2b$	$3g + 5h$	$4m + 2n$	$2u - 4v$	
$13k - 5k$	$6m - 3n$	$x^2 + 2$	$b^2 + 1$	$4k \times 3j$

ہم نے دیکھا ہے کہ a + b اور a − b کی Parity ایک ہی ہوتی ہے، چاہے a اور b کی Parity کچھ بھی ہو۔

مختصراً، a ± b کی Parity ایک جیسی ہوتی ہے۔ اسی استدلال کی بنیاد پر، a ± b + c اور a ± b − c کی Parity بھی ایک جیسی ہو گی۔

اس خیال کو مزید آگے بڑھاتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ a ± b ± c ± d کی تمام عبارات کی Parity ایک ہی ہوتی ہے۔

وضاحت 3: اس بات کی وضاحت مثبت اور منفی ٹوکن کے نمونے کی مدد سے بھی کی جاسکتی ہے، جس کا مطالعہ آپ نے صحیح اعداد کے باب میں کیا تھا۔ سوچیے کہ یہ وضاحت کیسے کی جاسکتی ہے۔



کسی بھی چار اعداد a، b، c اور d کو منتخب کر کے انہیں '+' اور '−' کی علامات کے ساتھ جوڑنے کے طریقوں کی تعداد لامحدود ہے۔ ریاضیاتی استدلال ہمیں یہ ثابت کرنے کی اجازت دیتا ہے کہ a ± b ± c ± d کی تمام ممکنہ عبارات ہمیشہ ایک ہی Parity رکھتی ہیں، بغیر اس کے کہ ہم ہر ایک کو الگ الگ جانچیں۔



ریاضی کے بہت سے مسائل ایسے ہوتے ہیں جن کے بارے میں مختلف انداز سے سوچا جاسکتا ہے اور انہیں مختلف طریقوں سے حل کیا جاسکتا ہے۔ اگرچہ آپ کا اپنا طریقۂ حل آپ کو بہت پسند ہو سکتا ہے، لیکن یہ جاننا بھی دلچسپ اور علم افزا ہوتا ہے کہ دوسروں نے اس مسئلے کے بارے میں کیسے سوچا اور اسے کس طرح حل کیا۔ دو اہم باتیں یاد رکھیں: اپنے خیالات دوسروں کو بتائیں۔ دوسروں کے خیالات غور سے سنیں۔

کیا تمام عبارات کی ایک ہی Parity ہونے کا یہ مظہر صرف 4 اعداد تک محدود ہے؟ آپ کا کیا خیال ہے؟



"اگر ایسا ہو تو کیا ہو گا؟"، "کیا یہ ہمیشہ ایسا ہی ہو گا؟" اس قسم کے سوالات اٹھانا، غور و فکر کرنا اور قیاسات قائم کرنا ریاضی کا اتنا ہی اہم حصہ ہے جتنا مسائل کو حل کرنا۔

جفت کی تحلیل

ہم جانتے ہیں کہ جفت اعداد کو کیسے پہچانا جاتا ہے۔ حساب کیے بغیر معلوم کریں کہ درج ذیل حسابی عبارات میں سے کون سی جفت ہیں۔

$43 + 37$	$672 - 348$	$4 \times 347 \times 3$	$708 - 477$
$809 + 214$	119×303	$543 - 479$	513^3

مختلف اعمال کے تحت Parity کے رویّے کے بارے میں اپنی سمجھ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ درج ذیل جبری عبارات میں سے کون سی عبارات حرفی اعداد کی کسی بھی صحیح عددی قیمت کے لیے ہمیشہ جفت عدد دیتی ہیں۔

$2a + 2b$	$3g + 5h$	$4m + 2n$	$2u - 4v$
$13k - 5k$	$6m - 3n$	$x^2 + 2$	$b^2 + 1$	$4k \times 3j$

The expression 4m + 2q will always evaluate to an even number for any integer values of m and q. We can justify this in two different ways -

- We know 4m is even and 2q is even for any integers m and q. Therefore, their sum will also be even.
- The expression 4m + 2q is equal to the expression 2(2m + q). Here, the expression 2(2m + q) means 2 times 2m + q. In other words, 2 is a factor of this expression. Therefore, this expression will always give an even number for any integers m and q.

  For example, if m = 4 and q = - 9, the expression 4m + 2q becomes $4 \times 4 + 2 \times (-9) = -2$, which is an even number.

In the expression $x^2 + 2$, x^2 is even if x is even, and x^2 is odd if x is odd. Therefore, the expression $x^2 + 2$ will not always give an even number. An example and a non-example for when the expression evaluates to an even number - (i) if x = 6, then $x^2 + 2 = 38$, and (ii) if x = 3, then $x^2 + 2 = 11$.

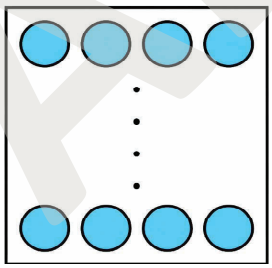
? Similarly, determine and explain which of the other expressions always give even numbers. Write a couple of examples and non-examples, as appropriate, for each expression.

? Write a few algebraic expressions which always give an even number.

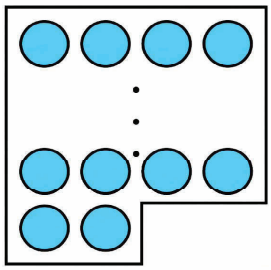
Pairs to Make Fours

? Take a pair of even numbers. Add them. Is the sum divisible by 4? Try this with different pairs of even numbers. When is the sum a multiple of 4, and when is it not? Is there a general rule or a pattern?

Even numbers can be of two types based on the remainders they leave when divided by 4.



Even numbers that are multiples of 4 leave a remainder of 0 when divided by 4.



Even numbers that are not multiples of 4 leave a remainder 2 when divided by 4.

APSCERT

عبارت $4m + 2q$، m اور q کی کسی بھی صحیح عددی قیمت کے لیے ہمیشہ ایک جفت عدد دے گی۔ اس کی وضاحت دو مختلف طریقوں سے کی جاسکتی ہے:

ہم جانتے ہیں کہ m اور q کی کسی بھی صحیح عددی قیمت کے لیے $4m$ جفت اور $2q$ جفت ہوتا ہے۔ لہٰذا ان کا مجموعہ بھی جفت ہوگا۔

عبارت $4m + 2q$ کو $2(2m + q)$ کی صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں $2(2m + q)$ کا مطلب $(2m + q)$ کا دوگنا ہے۔ دوسرے لفظوں میں، 2 اس عبارت کا ایک اضعاف ہے۔ لہٰذا m اور q کی کسی بھی صحیح عددی قیمت کے لیے یہ عبارت ہمیشہ جفت عدد دے گی۔ مثال کے طور پر، اگر $m = 4$ اور $q = -9$ ہوں تو، $4m + 2q$ ہوگا $4 \times 4 + 2 \times (-9) = -2$ ایک جفت عدد ہے۔

عبارت $x^2 + 2$ میں x^2 جفت ہوگا اگر x جفت ہو، اور x^2 طاق ہوگا اگر x طاق ہو۔ لہٰذا عبارت $x^2 + 2$ ہمیشہ جفت عدد نہیں دے گی۔ مثال اور غیر مثال- (i) اگر $x = 6$ ہو، تو $x^2 + 2 = 38$ جو جفت عدد ہے۔

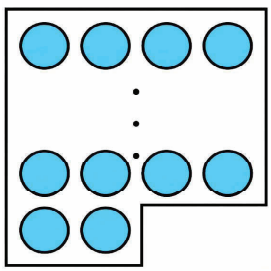
(ii) اگر $x = 3$ ہو، تو $x^2 + 2 = 11$ جو طاق عدد ہے۔

- اسی طرح باقی عبارات کے بارے میں بھی معلوم کریں اور وضاحت کریں کہ کون سی عبارات ہمیشہ جفت عدد دیتی ہیں۔
- ہر عبارت کے لیے مناسب مثالیں اور غیر مثالیں لکھیں۔ ایسی چند جبری عبارات بھی لکھیں جو ہمیشہ جفت عدد دیتی ہوں۔

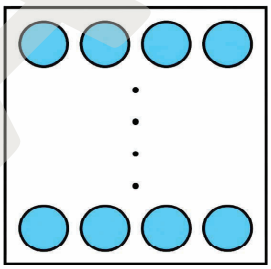
جوڑیاں بنا کر چار حاصل کریں

- دو جفت اعداد منتخب کریں اور انہیں جمع کریں۔ کیا ان کا مجموعہ 4 سے قابلِ تقسیم ہے؟

مختلف جفت اعداد کی جوڑیوں کے ساتھ یہ عمل دہرائیں۔ کن صورتوں میں مجموعہ 4 کا اضعاف بنتا ہے اور کن صورتوں میں نہیں؟ کیا اس میں کوئی عمومی قاعدہ یا نمونہ موجود ہے؟ جفت اعداد کو 4 سے تقسیم کرنے پر حاصل ہونے والی باقیات کی بنیاد پر دو اقسام میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔



وہ جفت اعداد جو 4 کے اضعاف ہوتے ہیں،
4 سے تقسیم کرنے پر باقی 0 دیتے ہیں۔

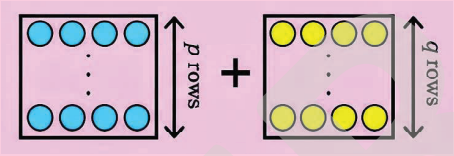
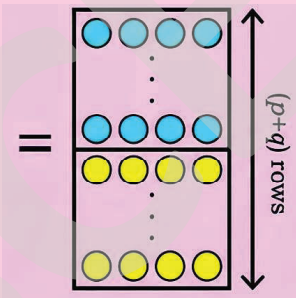
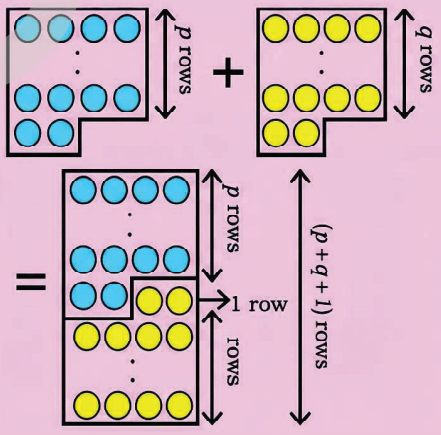


وہ جفت اعداد جو 4 کے اضعاف نہیں ہوتے،
4 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 دیتے ہیں۔

When will two even numbers add up to give a multiple of 4?

This problem is similar to the question of identifying when adding two numbers will result in an even number. Can you see this?

There are three cases to examine:

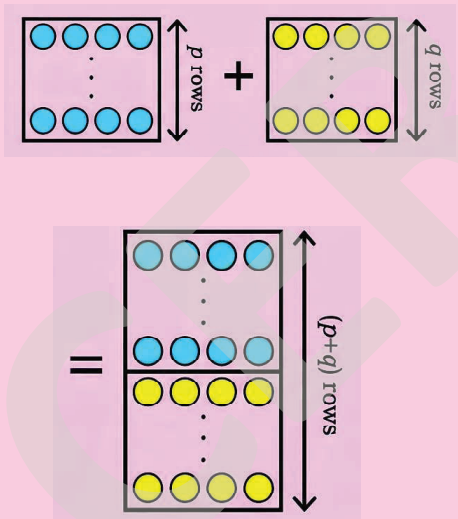
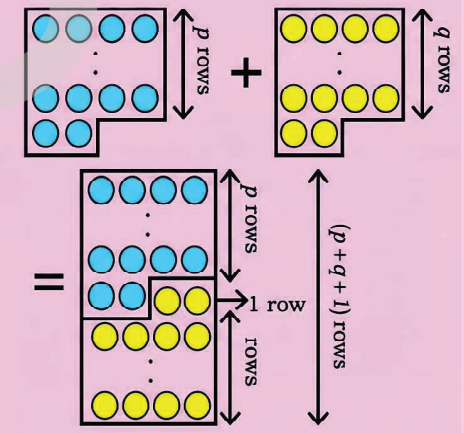
Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
Adding two (even) numbers that are multiples of 4 will always give a multiple of 4	4p and 4q. 4p + 4q = 4 (p + q).	 	4, 12, 16, 24, 36. 12 + 16 = 4 (3 + 4) = 28. 16 + 28 = 4 (4 + 7) = 44.
Adding two even numbers that are not multiples of 4 will always give a multiple of 4 because their remainders of 2 add up to 4.	(4p + 2) and (4q + 2). (4p + 2) + (4q + 2) = 4p + 4q + 4 = 4 (p + q + 1).		2, 6, 10, 18, 22, 42. 2 + 6 = 8. 6 + 10 = 16. 22 + 6 = 28.

What happens when we add a multiple of 4 to an even number that is not a multiple of 4? Is it similar to the case of the parity of the sum of an even and an odd number?

Look at the following expressions and the visualisation. Write the corresponding explanation and examples.

دو جفت اعداد کو جمع کرنے پر حاصل جمع کب 4 کا اضعاف بنتا ہے؟

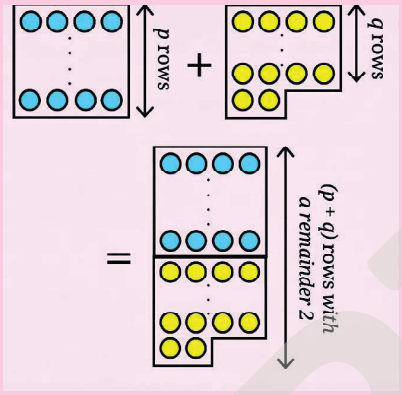
یہ مسئلہ اس سوال سے ملتا جلتا ہے کہ دو اعداد کو جمع کرنے پر حاصل جمع کب جفت عدد بنتا ہے۔ کیا آپ اس مماثلت کو دیکھ سکتے ہیں؟ اس کے لیے تین صورتوں کا جائزہ لینا ہو گا:

مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
4, 12, 16, 24, 36. 12 + 16 = 4 (3 + 4) = 28. 16 + 28 = 4 (4 + 7) = 44.		4p اور 4q. 4p + 4q = 4 (p + q).	4 کے دو اضعاف (جفت اعداد) کو جمع کرنے سے ہمیشہ 4 کا ایک اضعاف حاصل ہوتا ہے۔
2, 6, 10, 18, 22, 42. 2 + 6 = 8. 6 + 10 = 16. 22 + 6 = 28.		(4p + 2) اور (4q + 2). (4p + 2) + (4q + 2) = 4p + 4q + 4 = 4 (p + q + 1).	دو ایسے جفت اعداد جو 4 کے اضعاف نہیں ہوتے، انہیں جمع کرنے سے ہمیشہ 4 کا ایک اضعاف حاصل ہوتا ہے، کیونکہ ان کے باقیات 2 اور 2 مل کر 4 بن جاتے ہیں۔

جب ہم 4 کے **ایک اضعاف** کو ایسے **جفت عدد** میں جمع کرتے ہیں جو 4 کا **اضعاف نہیں ہوتا**، تو کیا ہوتا ہے؟

کیا یہ صورت اس بات سے مشابہ ہے کہ **ایک جفت اور ایک طاق عدد** کو جمع کرنے پر کیا حاصل ہوتا ہے؟

نیچے دی گئی عبارات اور بصری نمائندگی کا مشاہدہ کریں۔ ان کے مطابق وضاحت اور مثالیں لکھیں۔

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
	4p and (4q + 2) = 4p + (4q + 2) = 4p + 4q + 2 = 4 (p + q) + 2.		

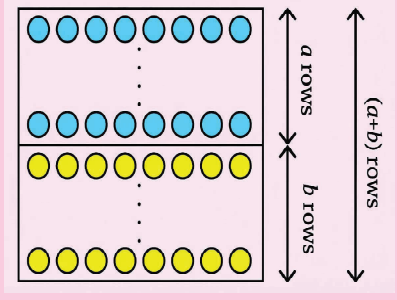
Notice how we are able to generalise and prove properties of arithmetic using algebra and also using visualisation.

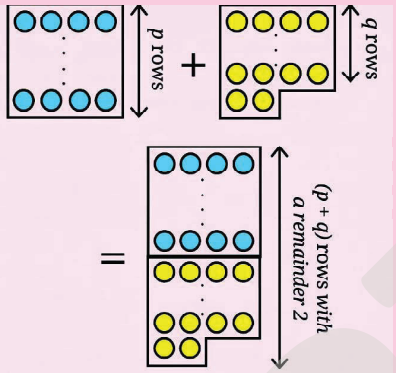
Always, Sometimes, or Never

We examine different statements about factors and multiples and determine whether a statement is 'Always True', 'Sometimes True', or 'Never True'.

We know that the sum of any two multiples of 2 is also a multiple of 2.

1. If 8 exactly divides two numbers separately, it must exactly divide their sum.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
The two numbers have 8 as a factor; in other words, the two numbers are multiples of 8.	8a and 8b.		8 and 16. 16 and 56. 80 and 120.
As multiples of 8 are obtained by repeatedly adding 8, the sum of two multiples of 8 will also be a multiple of 8.	8a + 8b = 8 (a + b).		8 + 16 = 8 (1 + 2) = 24. 16 + 56 = 72. 80 + 120 = 200.

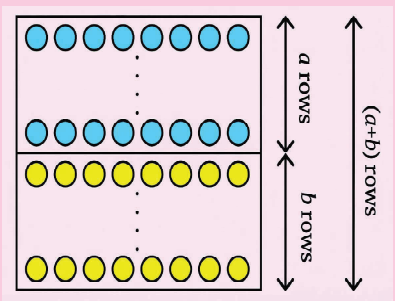
مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
		4p اور (4q + 2) = 4p + (4q + 2) = 4p + 4q + 2 = 4 (p + q) + 2.	

دیکھیں کہ ہم الجبرا اور بصری نمائندگی کی مدد سے حسابی خصوصیات کو کس طرح عمومی صورت میں بیان کرتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں۔

ہمیشہ، کبھی کبھی، یا کبھی نہیں

ہم اجزائے ضربی اور اضعاف سے متعلق مختلف بیانات کا جائزہ لیتے ہیں اور یہ طے کرتے ہیں کہ کوئی بیان، ہمیشہ درست ہے، کبھی کبھی درست ہے، یا کبھی درست نہیں ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ 2 کے کسی بھی دو ضرائب کا مجموعہ بھی 2 کا ضریب ہوتا ہے۔

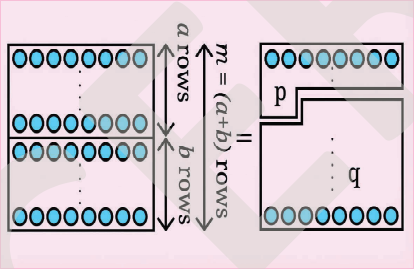
1۔ اگر 8 دو اعداد کو الگ الگ پورا تقسیم کرتا ہو، تو وہ ان کے مجموعے کو بھی پورا تقسیم کرے گا۔

مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
8 اور 16. 16 اور 56. 80 اور 120.		8a اور 8b.	ان دونوں اعداد میں 8 ایک جزوِ ضربی ہے، دوسرے الفاظ میں، یہ دونوں اعداد 8 کے اضعاف ہیں۔
8 + 16 = 8(1+ 2) = 24. 16 + 56 = 72. 80 + 120 = 200.		8a + 8b = 8 (a + b).	چونکہ 8 کے اضعاف، 8 کو بار بار جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، اس لیے 8 کے دو اضعاف کا مجموعہ بھی 8 کا ایک ضعف ہوگا۔

Statement 1 is always true. Determine if it is true with subtraction.

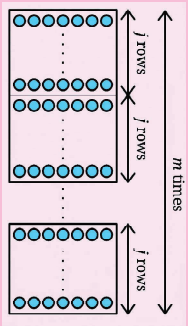
In general, **if a divides M and a divides N, then a divides M + N and a divides M - N. In other words, if M and N are multiples of a, then M + N and**

2. If a number is divisible by 8, then 8 also divides any two numbers (separately) that add up to the number.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
A number divisible by 8 is a multiple of 8.	8m		8, 16, 56, 72
A number divisible by 8 can be expressed as a sum of two multiples of 8 or sum of two non-multiples of 8.	8m = 8a + 8b 8m = p + q (p, q not multiples of 8)		72 = 48 + 24 (8 × 9 = 8×6 + 8×3). 72 = 50 + 22

So, Statement 2 is sometimes true.

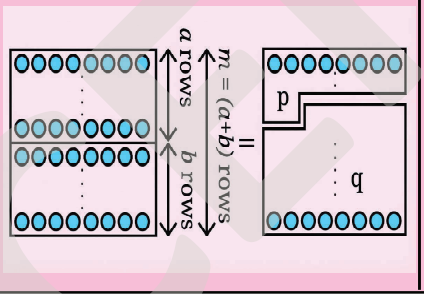
3. If a number is divisible by 7, then all multiples of that number will be divisible by 7.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
Number dvisible by 7 will have 7 as a factor.	7j		14 = 7 × 2 (j = 2) 42 = 7 × 6 (j = 6) 98 = 7 × 14 (j = 14)
This contains a total of mj rows. So this is also a multiple of 7.	(7j) × m		Some multiples of 14: 28 = (7 × 2) × 2. 70 = (7 × 2) × 5. 154 = (7 × 2) × 11.

The number 7jm or (7 × j × m) has a factor of 7. We can see that statement 3 is always true.

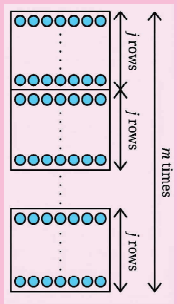
بیان 1 ہمیشہ درست ہے۔ معلوم کریں کہ کیا یہ بات تفریق (منفی کرنے) کی صورت میں بھی درست ہے۔ عمومی طور پر، اگر a، M کو پورا تقسیم کرتا ہو اور a، N کو پورا تقسیم کرتا ہو، تو a، (M + N) کو بھی پورا تقسیم کرے گا اور a، (M – N) کو بھی پورا تقسیم کرے گا۔ دوسرے الفاظ میں، اگر M اور N، a کے **اضعاف** ہوں، تو M + N اور M – N بھی a کے **اضعاف** ہوں گے۔

2۔ اگر کوئی عدد 8 سے قابلِ تقسیم ہو، تو کیا 8 ان دو اعداد کو بھی (الگ الگ) پورا تقسیم کرے گا جن کا مجموعہ اس عدد کے برابر ہو؟

مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
8, 16, 56, 72		8m	جو عدد 8 سے قابلِ تقسیم ہو، وہ 8 کا ایک ضعف ہوتا ہے۔
72 = 48 + 24 (8 × 9 = 8×6 + 8×3). 72 = 50 + 22		8m = 8a + 8b 8m = p + q (p, q 8 کے اضعاف نہیں)	دو ایسے اعداد کے مجموعے کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جو دونوں 8 کے اضعاف ہوں، یا 8 کے اضعاف نہ ہوں۔

لہٰذا بیان 2 کبھی کبھی درست ہے۔

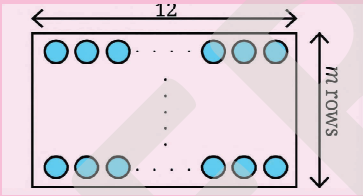
3۔ اگر کوئی عدد 7 سے قابلِ تقسیم ہو، تو اس عدد کے تمام اضعاف بھی 7 سے قابلِ تقسیم ہوں گے۔

مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
14 = 7 × 2 (j = 2) 42 = 7 × 6 (j = 6) 98 = 7 × 14 (j = 14)		7j	جو عدد 7 سے قابلِ تقسیم ہو، اس میں 7 ایک جزضربی ہو گا۔
14 کے چند اضعاف: 28 = (7 × 2) × 2. 70 = (7 × 2) × 5. 154 = (7 × 2) × 11.		(7j) × m	اس میں کل mj صفیں ہوں گی، لہٰذا یہ بھی 7 کا ایک ضعف ہو گا۔

عدد 7jm یا (7 × j × m) میں 7 ایک جزضربی ہے۔ اس سے واضح ہوتا ہے کہ بیان 3 ہمیشہ درست ہے۔

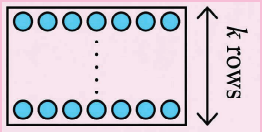
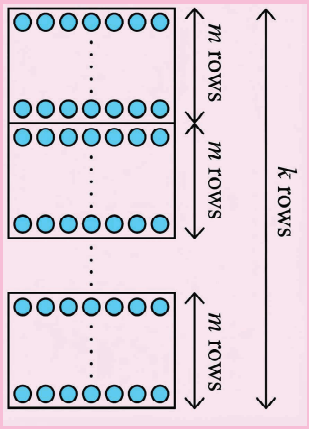
In general, **if A is divisible by k, then all multiples of A are divisible by k.**

4. If a number is divisible by 12, then the number is also divisible by all the factors of 12.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
A number divisible by 12 is a multiple of 12.	12m		12, 24, 36, 48, 108, 132.
Factors of multiples of 12 will include factors of 12.	12m = 2 × 6 × m = 3 × 4 × m	 A factor of 12 covers a row fully. Hence, it covers all multiples of 12 fully.	Factors of 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

In general, **if A is divisible by k, then all multiples of A are divisible by k.** Hence statement 4 is always true.

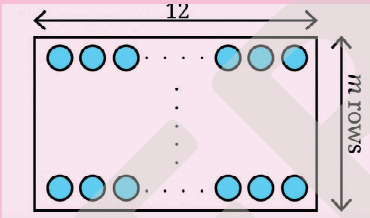
5. If a number is divisible by 7, then it is also divisible by any multiple of 7.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
Numbers divisible by 7 are multiples of 7.	7k		
Multiples of 7. 7k will be divisible by 7m if and only if m is a factor of k.	7m If k = ym then 7k ÷ 7m = 7ym ÷ 7m = y		42 (7 × 6) is divisible by 7 but it is not divisible by 28 (7 × 4). 42 (7 × 6) is divisible by 7 and it is divisible

We can see that this statement is only sometimes true.

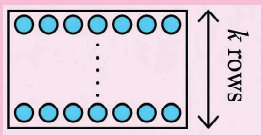
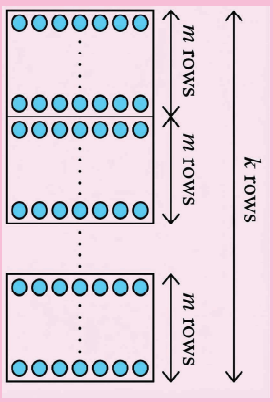
عمومی طور پر، اگر A، k سے قابلِ تقسیم ہو، تو A کے تمام اضعاف بھی k سے قابلِ تقسیم ہوں گے۔

4۔ اگر کوئی عدد 12 سے قابلِ تقسیم ہو، تو کیا وہ عدد 12 کے تمام اجزائے ضربی سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا؟

مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
12, 24, 36, 48, 108, 132.		12m	جو عدد 12 سے قابلِ تقسیم ہو، وہ 12 کا ایک ضعف ہوتا ہے۔
24 کے اضعاف :1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.	 12 کا ایک جزوِ ضربی ایک پوری صف کو مکمل طور پر احاطہ کر لیتا ہے۔ لہٰذا وہ 12 کے تمام اضعاف کو بھی مکمل طور پر احاطہ کر لے گا۔	12 m = 2 × 6 × m = 3 × 4 × m	12 کے اضعاف کے اجزائے ضربی میں، 12 کے تمام اجزائے ضربی بھی شامل ہوں گے۔

عمومی طور پر، اگر A، k سے قابلِ تقسیم ہو، تو A کے تمام اضعاف بھی k سے قابلِ تقسیم ہوں گے۔ لہٰذا بیان 4 ہمیشہ درست ہے۔

5۔ اگر کوئی عدد 7 سے قابلِ تقسیم ہو، تو کیا وہ 7 کے ہر ضعف سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا؟

مثالیں	الجبرا اور بصری نمائندگی کے ساتھ وضاحت		
		7k	7 سے قابلِ تقسیم اعداد، 7 کے اضعاف ہوتے ہیں۔
$7,42 = (7 \times 6)$ سے قابلِ تقسیم ہے لیکن $28 = (4 \times 7)$ سے قابلِ تقسیم نہیں ہے۔ $7,42 = (7 \times 6)$ سے قابلِ تقسیم ہے اور یہ قابلِ تقسیم ہے		7m If k = ym تب 7k ÷ 7m = 7ym ÷ 7m = y	7 کے اضعاف۔ عدد 7k، 7m سے اسی وقت قابلِ تقسیم ہو گا جب m، k کا ایک جزوِ ضربی ہو۔

لہٰذا بیان 5 کبھی کبھی درست ہے۔

Examine each of the following statements, and determine whether it is 'Always true', 'Sometimes true', Never true'.

6. If a number is divisible by both 9 and 4, it must be divisible by 36.

7. If a number is divisible by both 6 and 4, it must be divisible by 24.

In general, if A is divisible by k and A is also divisible by m, then A is divisible by the LCM of k and m. This is because A is a multiple of k and also a multiple of m, so A's prime factorisation should contain the prime factorisation of LCM (k, m).



8. When you add an odd number to an even number we get a multiple of 6.

We know that multiples of 6 are all even numbers.

The sum of an odd number and an even number will be an odd number. Therefore, this statement is never true. We can also explain this algebraically. Suppose,

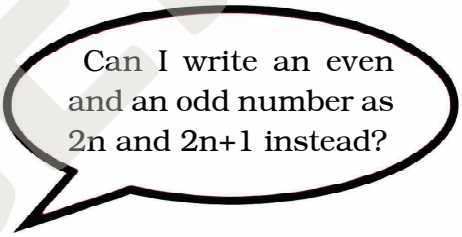
$$(2n) + (2m + 1) = 6j,$$

where 2n is an even number, 2m + 1 is an odd number, and 6j is a multiple of 6. Then

$$2n + 2m = 6j - 1$$

$$2 (n + m) = 6j - 1$$

which means 2(n + m), which is an even number, should be equal to 6j - 1, which is an odd number. This is never true.





What Remains?

Find a number that has a remainder of 3 when divided by 5. Write more such numbers.

Which algebraic expression(s) capture all such numbers?

(i) 3k + 5 (ii) 3k - 5 (iii) $\frac{3k}{5}$ (iv) 5k + 3 (v) 5k - 2 (vi) 5k - 3

APSCERT

درج ذیل بیانات کا جائزہ لیں اور طے کریں کہ یہ "ہمیشہ درست"، "کبھی کبھی درست" یا "کبھی درست نہیں" ہیں۔

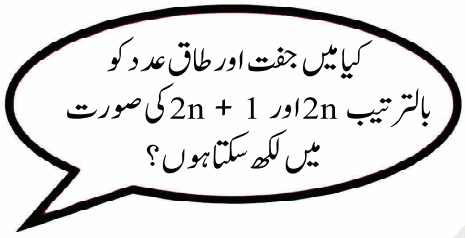
6۔ اگر کوئی عدد 9 اور 4 دونوں سے قابلِ تقسیم ہو، تو کیا وہ لازماً 36 سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا؟

7۔ اگر کوئی عدد 6 اور 4 دونوں سے قابلِ تقسیم ہو، تو کیا وہ لازماً 24 سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا؟



عمومی طور پر، اگر A، k سے قابلِ تقسیم ہو اور A، m سے بھی قابلِ تقسیم ہو، تو A، k اور m کے ذواضعاف اقل مشترک (ذ-ا-م) سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ A، k کا بھی ضعف ہے اور m کا بھی ضعف ہے، لہٰذا A کے امفرد اجزائے ضربی میں ذ-ا-م (k, m) کے تمام اولی عوامل شامل ہوں گے۔

8۔ جب ہم ایک طاق عدد اور ایک جفت عدد کو جمع کرتے ہیں تو حاصل جمع 6 کا ایک ضعف بنتا ہے۔



ہم جانتے ہیں کہ 6 کے تمام اضعاف جفت اعداد ہوتے ہیں۔

جبکہ ایک طاق عدد اور ایک جفت عدد کا مجموعہ ہمیشہ طاق عدد ہوتا ہے۔

لہٰذا یہ بیان **کبھی درست نہیں** ہے۔ ہم اس کی وضاحت الجبرا کی مدد سے بھی کر سکتے ہیں۔ فرض کریں، $(2n) + (2m + 1) = 6j$



جہاں: $2n$ ایک جفت عدد ہے۔ $2m + 1$ ایک طاق عدد ہے۔

اور $6j$، 6 کا ایک ضعف ہے۔ تب،

$$2n + 2m = 6j - 1$$

$$2(n + m) = 6j - 1$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ: $2(n + m)$، جو ایک جفت عدد ہے،

$6j - 1$ کے برابر ہو، جو ایک طاق عدد ہے۔ یہ کبھی ممکن نہیں۔

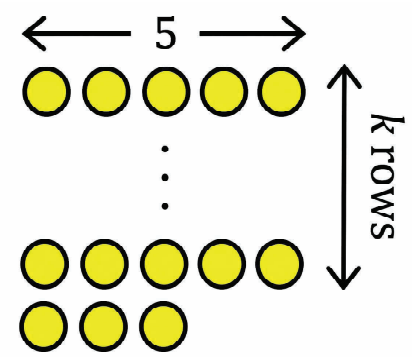
کیا باقی رہتا ہے؟

ایسا کوئی عدد معلوم کریں جسے 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 آئے۔ ایسے مزید اعداد بھی لکھیں۔

کون سی جبری عبارت (یا عبارات) ایسے تمام اعداد کو ظاہر کرتی ہے؟

$3k + 5$(i) $3k - 5$(ii) $\frac{3k}{5}$(iii) $5k + 3$(iv) $5k - 2$(v) $5k - 3$(vi)

The numbers that leave a remainder of 0 when divided by 5 are the multiples of 5. But we want numbers that leave a remainder of 3 when divided by 5. These numbers are 3 more than multiples of 5. Multiples of 5 are of the form 5k. So, numbers that leave a remainder of 3 when divided by 5 are those of the form 5k + 3



k =	0	1	2	3	4
$5k + 3$ =	3	8	13	18	23

? Let us consider another expression, 5k - 2, and see the values it takes for different values of k.

Numbers that leave a remainder of 3 when divided by 5 can also be seen as 2 less than multiples of 5; 5k - 2, where k $\geq$ 1.

k =	1	2	3	4	5
$5k - 2$ =	3	8	13	18	23

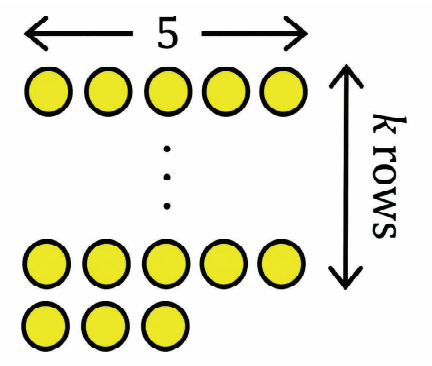
? Are there other expressions that generate numbers that are 3 more than a multiple of 5?



Figure it Out - 5.1

1. The sum of four consecutive numbers is 34. What are these numbers?
2. Suppose p is the greatest of five consecutive numbers. Describe the other four numbers in terms of p.
3. For each statement below, determine whether it is always true, sometimes true, or never true. Explain your answer. Mention examples and non-examples as appropriate. Justify your claim using algebra.
   (i) The sum of two even numbers is a multiple of 3.
   (ii) If a number is not divisible by 18, then it is also not divisible by 9.
   (iii) If two numbers are not divisible by 6, then their sum is not divisible by 6.

وہ اعداد جو 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 0 چھوڑتے ہیں، وہ 5 کے اضعاف کہلاتے ہیں۔ لیکن ہمیں وہ اعداد چاہیے جو 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 بچت ہو۔ یہ اعداد 5 کے اضعاف سے 3 زیادہ ہوتے ہیں۔ 5 کے اضعاف کی عمومی شکل 5k ہوتی ہے۔ لہٰذا وہ اعداد جو 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 چھوڑتے ہیں، ان کی عمومی شکل 5k + 3 ہوتی ہے۔



k =	0	1	2	3	4
$5k + 3$ =	3	8	13	18	23

آیئے ایک اور عبارت 5k – 2 پر غور کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ مختلف k کی قدروں کے لیے یہ کیا اقدار دیتا ہے۔

وہ اعداد جو 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 بچتے ہیں، انہیں 5 کے اضعاف سے 2 کم کے طور پر بھی دیکھا جا سکتا ہے؛

یعنی 5k – 2، جہاں $k \geq 1$ ہے۔

کیا ایسے اور بھی عبارتیں ہیں جو ایسے اعداد پیدا کرتے ہیں جو 5 کے کسی مضاعف سے 3 زیادہ ہوں؟

k =	1	2	3	4	5
$5k - 2$ =	3	8	13	18	23



حل کیجیے–5.1

1. چار متواتر اعداد کا مجموعہ 34 ہے۔ یہ اعداد کون سے ہیں؟
2. فرض کریں کہ p پانچ متواتر اعداد میں سب سے بڑا عدد ہے۔ باقی چار اعداد کو p کی مدد سے بیان کریں۔
3. نیچے دیے گئے ہر بیان کے لیے معلوم کریں کہ یہ ہمیشہ درست ہے، کبھی کبھی درست ہے یا کبھی بھی درست نہیں ہے۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔ مناسب مثالیں اور غیر مثالیں دیں۔ اپنے دعوے کو الجبرا کی مدد سے ثابت کریں۔

(i) دو جفت اعداد کا مجموعہ 3 کا اضعاف ہوتا ہے۔

(ii) اگر کوئی عدد 18 سے قابلِ تقسیم نہیں ہے تو وہ 9 سے بھی قابلِ تقسیم نہیں ہوگا۔

(iii) اگر دو اعداد 6 سے قابلِ تقسیم نہیں ہیں تو ان کا مجموعہ بھی 6 سے قابلِ تقسیم نہیں ہوگا۔

AP SCERT

(iv) The sum of a multiple of 6 and a multiple of 9 is a multiple of 3.

(v) The sum of a multiple of 6 and a multiple of 3 is a multiple of 9.

4. Find a few numbers that leave a remainder of 2 when divided by 3 and a remainder of 2 when divided by 4. Write an algebraic expression to describe all such numbers.

5. "I hold some pebbles, not too many, When I group them in 3's, one stays with me. Try pairing them up - it simply won't do, A stubborn odd pebble remains in my view. Group them by 5, yet one's still around, But grouping by seven, perfection is found. More than one hundred would be far too bold, Can you tell me the number of pebbles I hold?"



6. Tilak has written several numbers that leave a remainder of 2 when divided by 6. He claims, "If you add any three such numbers, the sum will always be a multiple of 6." Is Tilak's claim true?

7. When divided by 7, the number 661 leaves a remainder of 3, and 4779 leaves a remainder of 5. Without calculating, can you say what remainders the following expressions will leave when divided by 7? Show the solution both algebraically and visually.

   (i) 4779 + 661 (ii) 4779 - 661

8. Find a number that leaves a remainder of 2 when divided by 3, a remainder of 3 when divided by 4, and a remainder of 4 when divided by 5. What is the smallest such number? Can you give a simple explanation of why it is the smallest?

5.2 Checking Divisibility Quickly

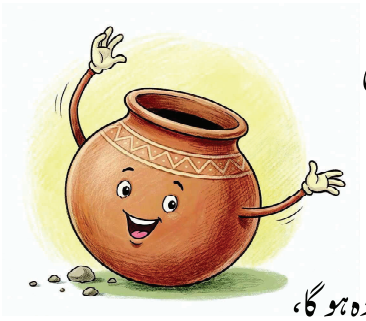
Earlier, you have learnt shortcuts to check whether a given number, written in the Indian number system is divisible by 2, 4, 5, 8, and 10. Let us revisit them.

Divisibility by 10, 5, and 2: If the units digit of a number is '0', then it is divisible by 10. Let us understand why this works through algebra. We can write the general form of a number in the Indian system using a set of letter-numbers. For example, a 5-digit number can be expressed as, edcba denoting $e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a$. The letter-numbers e, d, c, b, and a denote each digit of a 5-digit number.

(iv) 6 کے اضعاف اور 9 کے اضعاف کا مجموعہ 3 کا اضعاف ہوتا ہے۔

(v) 6 کے اضعاف اور 3 کے اضعاف کا مجموعہ 9 کا اضعاف ہوتا ہے۔

4. کچھ ایسے اعداد تلاش کریں جو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 چھوڑیں اور 4 سے تقسیم کرنے پر بھی باقی 2 چھوڑیں۔ ایسے تمام اعداد کو بیان کرنے کے لیے ایک الجبری عبارت لکھیں۔



5. "میرے پاس کچھ کنکر ہیں، نہ بہت زیادہ، جب میں انہیں 3 کے گروپ میں رکھتا ہوں تو ایک میرے پاس رہ جاتا ہے۔ انہیں جوڑنے کی کوشش کرو — یہ ممکن نہیں، ایک ضدی کنکر ہمیشہ باقی رہتا ہے۔ 5 کے گروپ میں رکھنے پر بھی ایک بچ جاتا ہے، لیکن 7 کے گروپ میں رکھنے پر مکمل تقسیم ہو جاتا ہے۔ 100 سے زیادہ ہونا بہت زیادہ ہو گا، کیا تم بتا سکتے ہو میرے پاس کتنے کنکر ہیں؟"

6. تلک نے چند ایسے اعداد لکھے ہیں جو 6 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 چھوڑتے ہیں۔ وہ کہتا ہے: "اگر ایسے کسی بھی تین اعداد کو جمع کیا جائے تو حاصل جمع ہمیشہ 6 کا اضعاف ہو گا۔" کیا تلک کا دعویٰ درست ہے؟

7. جب 661 کو 7 سے تقسیم کیا جائے تو باقی 3 بچتا ہے، اور 4779 کو 7 سے تقسیم کرنے پر باقی 5 بچتا ہے۔ بغیر حساب کیے بتائیں کہ درج ذیل عبارت 7 سے تقسیم ہونے پر کیا باقی چھوڑیں گے؟ حل الجبری اور بصری دونوں طریقوں سے دکھائیں۔

(i) $4779 + 661$ (ii) $4779 - 661$

8. ایک ایسا عدد تلاش کریں جو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 چھوڑے، 4 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 چھوڑے، اور 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 4 چھوڑے۔ ایسا سب سے چھوٹا عدد کون سا ہے؟ اور یہ بھی بتائیں کہ یہ سب سے چھوٹا کیوں ہے؟

5.2 تقسیم پذیری کی تیز جانچ

اس سے پہلے آپ نے ایسے شارٹ کٹس سیکھے ہیں جن کی مدد سے یہ معلوم کیا جاتا ہے کہ کوئی بھی عدد (جو ہندوستانی عددی نظام میں لکھا ہو) 2، 4، 5، 8 اور 10 سے قابلِ تقسیم ہے یا نہیں۔ اب ہم انہیں دوبارہ دیکھتے ہیں۔

10، 5 اور 2 سے تقسیم پذیری: اگر کسی عدد کا اکائی کا ہندسہ '0' ہو تو وہ 10 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔ آیئے اسے الجبرا کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ ہم ہندوستانی نظام میں کسی بھی عدد کو حروفی اعداد کے ذریعے لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ایک 5 ہندسوں والا عدد یوں لکھا جا سکتا ہے، edcba، جس کا مطلب ہے $e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a$ یہاں a اور b، c، d، e اس 5 ہندسوں والے عدد کے ہر ہندسے کو ظاہر کرتے ہیں۔

Any number can be written in general as … dcba, where the letter- numbers a, b, c and d represent the units, tens, hundreds and thousands digit, respectively, and so on. As a sum of place values, this number is - … +1000d + 100c + 10b + a.

(For example, in the number 4075, d = 4, c = 0, b = 7, and a = 5.)

We know that each place value, with the exception of the units place, is a multiple of 10. So, 10b, 100c, … all will be multiples of 10. Hence, the number will be divisible by 10 if and only if the units digit a is 0.

? Similarly, explain using algebra why the divisibility shortcuts for 5, 2, 4, and 8 work.

Let us now examine shortcuts to check divisibility by some other numbers and explain why they work!

A Shortcut for Divisibility by 9

? Can you say, without actually calculating, which of these numbers are divisible by 9: 999, 909, 900, 90, 990?

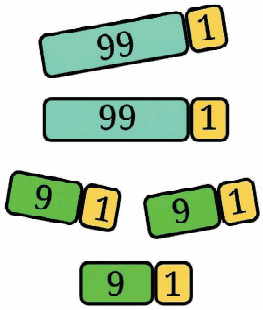
All of them.

? Can we say that any number made up of only the digits '0' and '9', in any order, will always be divisible by 9?

Yes, if each digit is either 0 or 9, then each term in its expanded form will be 9 × □ or 0 × □ (the '□' denotes a place value). This means each term will be a multiple of 9, for example,

$$99009 = 9 \times 10000 + 9 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1.$$

But this shortcut alone cannot identify all the multiples of 9. Unlike the numbers 2, 5, and 10, we cannot identify the multiples of 9 by just looking at the unit's digit. 99 and 109 are two numbers with 9 as the units digit; but 99 is divisible by 9, while 109 is not.



? Is 10 divisible by 9? If not, what is the remainder?

Check the divisibility of other multiples of 10 (10, 20, 30, …) by 9.

You will notice that for any multiple of 10, the remainder is the same as the number of tens.

? Similarly, look at the remainder when the multiples of 100 (100, 200, 300, …) are divided by 9. What do you notice?

The remainder is the same as the number of hundreds for any multiple of 100.

? Using this observation, find the remainder when 427 is divided by 9.

کوئی بھی عدد عمومی طور پر dcba ... کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے، جہاں حروف a، b، c اور d بالترتیب اکائی، دہائی، سو اور ہزار کے ہندسے کو ظاہر کرتے ہیں، وغیرہ۔ مقامی قیمتوں کے مجموعے کی صورت میں یہ عدد یوں ہو گا،

... + 1000d + 100c + 10b + a

(مثال کے طور پر عدد 4075 میں d = 4، c = 0، b = 7 اور a = 5 ہے۔)

ہم جانتے ہیں کہ ہر مقامی قیمت، اکائی کے مقام کے علاوہ، 10 کا اضعاف ہوتی ہے۔ لہٰذا 10b، 100 c، ... سب 10 کے اضعاف ہوں گے۔ اس لیے یہ عدد اگر اور صرف اگر 10 سے قابل تقسیم ہو گا جب اکائی کا ہندسہ a صفر ہو۔

اسی طرح الجبرا کی مدد سے وضاحت کریں کہ 5، 2، 4 اور 8 سے قابلِ تقسیم ہونے کے شارٹ کٹ کیوں درست ہیں۔

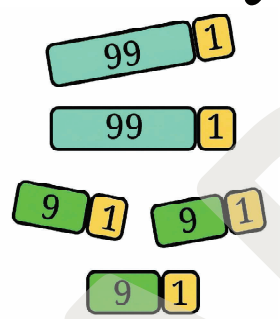
اب ہم کچھ دوسرے اعداد کی قابلِ تقسیم ہونے کی شارٹ کٹس کا جائزہ لیتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ یہ کیوں کام کرتے ہیں!

9 سے قابل تقسیم ہونے کا شارٹ کٹ

کیا آپ بغیر حساب کیے بتا سکتے ہیں کہ درج ذیل اعداد میں سے کون سے 9 سے قابلِ تقسیم ہیں:

999، 909، 900، 90، 990؟ یہ سب۔

کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کوئی بھی عدد جو صرف '0' اور '9' کے ہندسوں پر مشتمل ہو، کسی بھی ترتیب میں، ہمیشہ 9 سے قابلِ تقسیم ہو گا؟ جی ہاں، اگر ہر ہندسہ 0 یا 9 ہو تو اس کی توسیعی شکل میں ہر جزو □ × 9 یا □ × 0 کی صورت میں ہو گا



(یہاں □ سے مراد مقامی قیمت ہے)۔ اس کا مطلب ہے کہ ہر جزو 9 کا اضعاف ہو گا، مثلاً:

99009 = 9 × 10000 + 9 × 1000 + 0 × 100 + 0 × 10 + 9 × 1

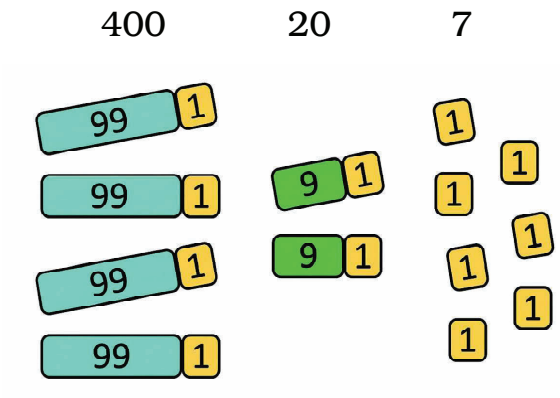
لیکن یہ شارٹ کٹ اکیلا 9 کے تمام اضعاف کو پہچان نہیں سکتا۔ 2، 5 اور 10 کے برعکس، ہم صرف اکائی کے ہندسے سے 9 کے اضعاف معلوم نہیں کر سکتے۔ 99 اور 109 دو ایسے اعداد ہیں جن کا اکائی ہندسہ 9 ہے؛ لیکن 99، 9 سے قابلِ تقسیم ہے جبکہ 109 نہیں۔ کیا 10، 9 سے قابلِ تقسیم ہے؟ اگر نہیں، تو باقی کیا ہو گا؟

دیگر 10 کے اضعاف (10، 20، 30، ...) کی 9 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ کسی بھی 10 کے اضعاف میں باقی ہمیشہ دہائیوں کی تعداد کے برابر ہوتا ہے۔

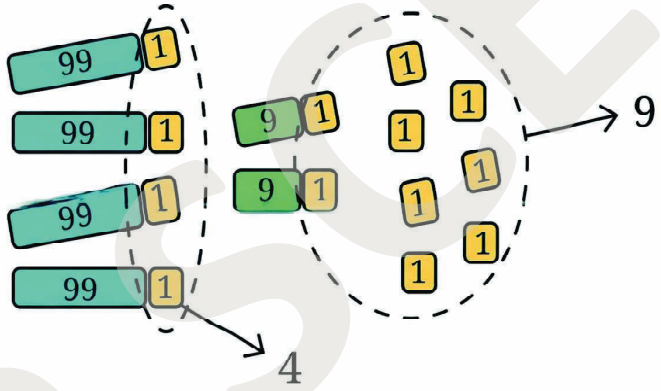
اسی طرح دیکھیں کہ 100 کے اضعاف (100، 200، 300، ...) کو 9 سے تقسیم کرنے پر کیا باقی آتا ہے۔

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

اب اس مشاہدے کی مدد سے 427 کو 9 سے تقسیم کرنے پر باقی معلوم کریں۔

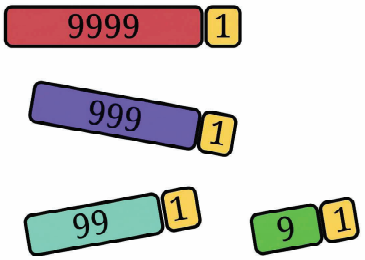


We see that 427 has 4 hundreds; thus, its corresponding remainder (upon division by 9) would be 4. 427 has 2 tens, and its corresponding remainder would be 2. We have 7 units also remaining. Adding all the remainders, we get 4 + 2 + 7 = 13. We can make one more group of 9 with 13, leaving a remainder of 4. Therefore, 427 ÷ 9 gives a remainder of 4.



Will this work with bigger numbers?

You can see that this is true for any place value:



1 = 0 + 1

10 = 9 + 1

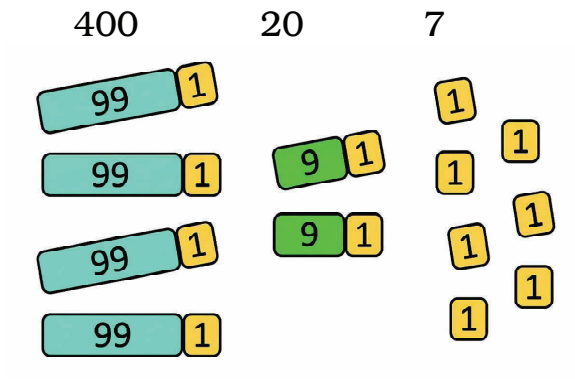
100 = 99 + 1

1000 = 999 + 1

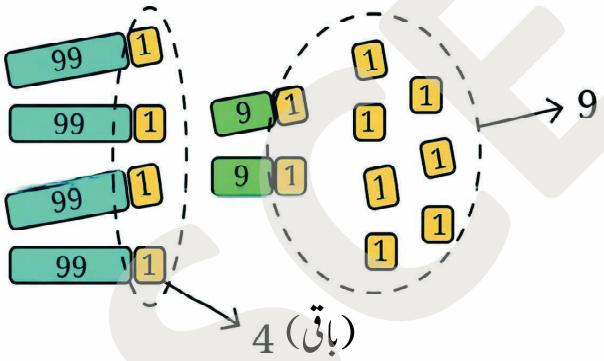
10000 = 9999 + 1, and so on. Each digit thus denotes the remainder when the corresponding place value is divided by 9.

For example, to find the remainder of 7309 when divided by 9, we can just add all the digits - 7 + 3 + 0 + 9 - to get 19. This can be seen as follows:

APSCERT

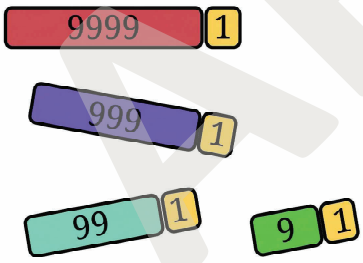


ہم دیکھتے ہیں کہ 427 میں 4 سو ہیں؛ لہٰذا اس کا باقی (9 سے تقسیم کرنے پر) 4 ہو گا۔ 427 میں 2 دہائیاں ہیں، اور اس کا باقی 2 ہو گا۔ ہمارے پاس 7 اکائیاں بھی موجود ہیں۔ ان تمام باقیات کو جمع کرنے سے ہمیں 4 + 2 + 7 = 13 حاصل ہوتا ہے۔ ہم 13 میں سے 9 کا ایک اور گروہ بنا سکتے ہیں، جس سے باقی 4 بچتا ہے۔ لہٰذا 427 کو 9 سے تقسیم کرنے پر باقی 4 حاصل ہوتا ہے۔



کیا یہ بڑے اعداد کے لیے بھی کام کرے گا؟

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ کسی بھی مقامی قیمت کے لیے درست ہے:



1 = 0 + 1

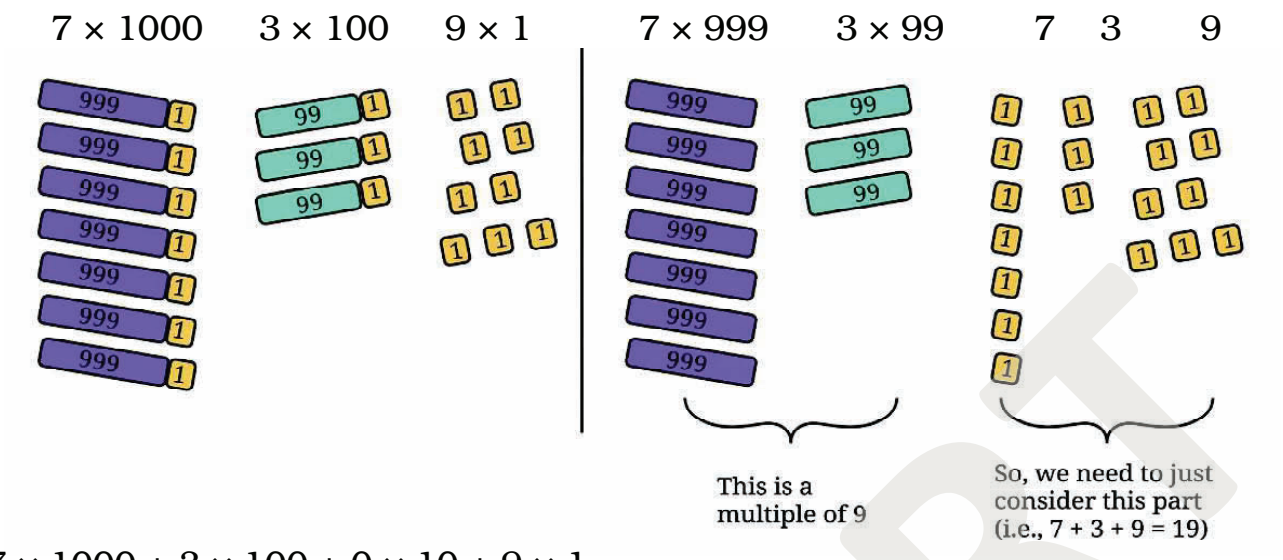
10 = 9 + 1

100 = 99 + 1

1000 = 999 + 1

10000 = 9999 + 1، وغیرہ۔ اس طرح ہر ہندسہ اپنی متعلقہ مقامی قیمت کو 9 سے تقسیم کرنے پر حاصل ہونے والے باقی کی نمائندگی کرتا ہے۔

مثال کے طور پر، 7309 کو 9 سے تقسیم کرنے پر باقی معلوم کرنے کے لیے ہم صرف اس کے تمام ہندسوں کو جمع کر سکتے ہیں — 7 + 3 + 0 + 9 — تاکہ 19 حاصل ہو۔ اسے یوں دیکھا جا سکتا ہے:



$7 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$

$= 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 0 \times (9 + 1) + 9 \times (0+1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 9 \times 1)$

$= \underline{(7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0)} + \underline{(7 + 3 + 0 + 9)}$.

This is a multiple of 9 — So, we need to just consider this part

This means that the number 7309 is 19 more than some multiple of 9. The digits 1 and 9 can further be added to get 1 + 9 = 10. Now, we can say that 7309 is 10 more than a multiple of 9. And repeating this step for the number 10, we get the remainder to be 1 + 0 = 1, meaning 7309 is 1 more than a multiple of 9. Therefore, 7309 ÷ 9 gives a remainder of 1.

A number is divisible by 9 if and only if the sum of its digits is divisible by 9. Also, we can add the digits of a number repeatedly till a single digit is obtained. This single digit is the remainder when the number is divided by 9.

? Look at each of the following statements. Which are correct and why?

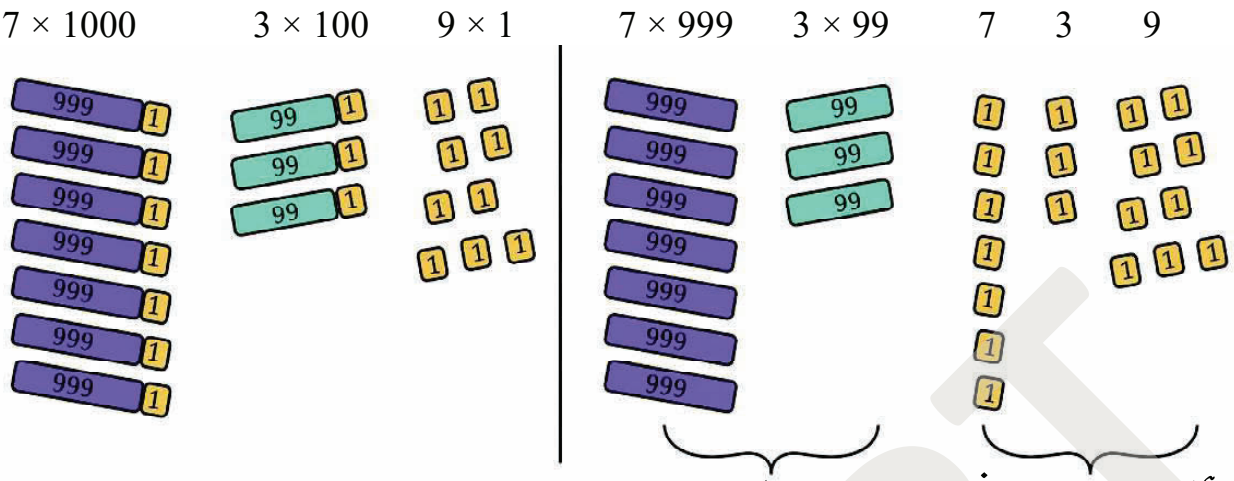
(i) If a number is divisible by 9, then the sum of its digits is divisible by 9.

(ii) If the sum of the digits of a number is divisible by 9, then the number is divisible by 9.

(iii) If a number is not divisible by 9, then the sum of its digits is not divisible by 9.

(iv) If the sum of the digits of a number is not divisible by 9, then the number is not divisible by 9.

Learning maths is not just about knowing some shortcuts and following procedures but about understanding 'why' something works.



$7 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$

$= 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 0 \times (9 + 1) + 9 \times (0+1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 9 \times 1)$

$= \underline{(7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0)} + \underline{(7 + 3 + 0 + 9)}.$

لہٰذا ہمیں صرف اس حصے پر غور کرنے کی ضرورت ہے یہ 9 کے اضعاف ہیں۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ عدد 7309، 9 کے کسی اضعاف سے 19 زیادہ ہے۔ ہندسے 1 اور 9 کو مزید جمع کیا جا سکتا ہے تا کہ $1 + 9 = 10$ حاصل ہو۔ اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ 7309، 9 کے کسی اضعاف سے 10 زیادہ ہے۔ اور اسی قدم کو 10 پر دہراتے ہوئے ہمیں باقی $1 = 0 + 1$ ملتا ہے، یعنی 7309، 9 کے کسی اضعاف سے 1 زیادہ ہے۔ لہٰذا 7309 کو 9 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 حاصل ہوتا ہے۔

کوئی عدد 9 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کے ہندسوں کا مجموعہ 9 سے قابلِ تقسیم ہو۔ مزید یہ کہ ہم کسی عدد کے ہندسوں کو بار بار جمع کر سکتے ہیں یہاں تک کہ ایک واحد ہندسہ حاصل ہو جائے۔ یہ واحد ہندسہ وہ باقی ہے جو اس عدد کو 9 سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

؟ مندرجہ ذیل ہر بیان کو دیکھیں۔ کون سے درست ہیں اور کیوں؟

(i) اگر کوئی عدد 9 سے قابلِ تقسیم ہے تو اس کے ہندسوں کا مجموعہ بھی 9 سے قابلِ تقسیم ہو گا۔

(ii) اگر کسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 9 سے قابلِ تقسیم ہو تو وہ عدد بھی 9 سے قابلِ تقسیم ہو گا۔

(iii) اگر کوئی عدد 9 سے قابلِ تقسیم نہیں ہے تو اس کے ہندسوں کا مجموعہ بھی 9 سے قابلِ تقسیم نہیں ہو گا۔

(iv) اگر کسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 9 سے قابلِ تقسیم نہ ہو تو وہ عدد بھی 9 سے قابلِ تقسیم نہیں ہو گا۔

ریاضی سیکھنا صرف شارٹ کٹس اور طریقے یاد کرنے کا نام نہیں بلکہ یہ سمجھنے کا نام ہے کہ "کیوں" کوئی چیز درست کام کرتی ہے۔



Figure it Out - 5.2

1. Find, without dividing, whether the following numbers are divisible by 9.
   (i) 123 (ii) 405 (iii) 8888 (iv) 93547 (v) 358095
2. Find the smallest multiple of 9 with no odd digits.
3. Find the multiple of 9 that is closest to the number 6000.
4. How many multiples of 9 are there between the numbers 4300 and 4400?

A Shortcut for Divisibility by 3

We know that all the multiples of 9 are also multiples of 3. That is, if a number is divisible by 9, it will also be divisible by 3. However, there are other multiples of 3 that are not multiples of 9 for example - 15, 33, and 87.

? The shortcut to find the divisibility by 3 is similar to the method for 9. A number is divisible by 3 if the sum of its digits is divisible by 3. Explore the remainders when powers of 10 are divided by 3. Explain why this method works.

A Shortcut for Divisibility by 11

Interestingly, the shortcut for 11 is also based on checking the remainders with place value. Let us see how.

Units place (1)	$11 \times 0 = 0$ $1 = 11 \times 0 + 1$	1 is one more than a multiple of 11.	○
Tens place (10)	$11 \times 1 = 11$ $10 = 11 \times 1 - 1$	10 is one less than a multiple of 11.	○○○○○○○○○○ 11
Hundreds place (100)	$11 \times 9 = 99$ $100 = 11 \times 9 + 1$	100 is one more than a multiple of 11.	○○○○○○○○○○ 9 ○ 11
Thousands place (1000)	$11 \times 91 = 1001$ $1000 = 11 \times 91 - 1$	1000 is one less than a multiple of 11.	○○○○○○○○○○ 91 ○ 11
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

© NCERT



حل کیجیے-5.2

1. بغیر تقسیم کیے معلوم کریں کہ درج ذیل اعداد 9 سے قابلِ تقسیم ہیں یا نہیں:

(i) 123 (ii) 405 (iii) 8888 (iv) 93547 (v) 358095

2. 9 کا سب سے چھوٹا ایسا اضعاف تلاش کریں جس میں کوئی طاق ہندسہ نہ ہو۔

3. وہ 9 کا اضعاف تلاش کریں جو عدد 6000 کے سب سے قریب ہو۔

4. 4300 اور 4400 کے درمیان 9 کے کتنے اضعاف ہیں؟

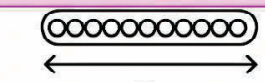
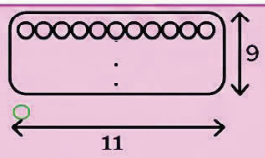
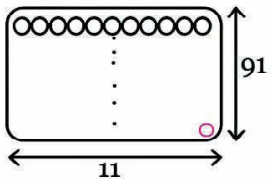
3 سے قابلِ تقسیم ہونے کا مختصر طریقہ

ہم جانتے ہیں کہ 9 کے تمام اضعاف 3 کے بھی اضعاف ہوتے ہیں۔ یعنی اگر کوئی عدد 9 سے قابلِ تقسیم ہو تو وہ 3 سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا۔ لیکن 3 کے کچھ اضعاف ایسے بھی ہیں جو 9 کے اضعاف نہیں ہوتے، مثلاً 15، 33 اور 87۔

3 سے قابلِ تقسیم ہونے کا شارٹ کٹ 9 کے طریقے سے ملتا جلتا ہے۔ کوئی عدد 3 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے اگر اس کے ہندسوں کا مجموعہ 3 سے قابلِ تقسیم ہو۔ 10 کی قوتوں کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی کا جائزہ لیں۔ وضاحت کریں کہ یہ طریقہ کیوں درست ہے۔

11 سے قابلِ تقسیم ہونے کا مختصر طریقہ

دلچسپ بات یہ ہے کہ 11 کے لیے شارٹ کٹ بھی مقامی قیمتوں کی باقیات کو دیکھنے پر مبنی ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ یہ کیسے کام کرتا ہے۔

اکائی کا مقام (1)	$11 \times 0 = 0$ $1 = 11 \times 0 + 1$	11، 1 کے کسی اضعاف سے 1 زیادہ ہے۔	○
دہائی کا مقام (10)	$11 \times 1 = 11$ $10 = 11 \times 1 - 1$	11، 10 کے کسی اضعاف سے 1 کم ہے۔	
سیکڑے کا مقام (100)	$11 \times 9 = 99$ $100 = 11 \times 9 + 1$	11، 100 کے کسی اضعاف سے 1 زیادہ ہے۔	
ہزار کا مقام (1000)	$11 \times 91 = 1001$ $1000 = 11 \times 91 - 1$	11، 1000 کے کسی اضعاف سے 1 کم ہے۔	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

This alternating pattern of one more than 11 and one less than 11 continues for higher place values.

Since 400 contains 4 hundreds, 400 is 4 more than a multiple of 11 (396 + 4). Since 60 contains 6 tens, 60 is 6 less than a multiple of 11 (66 - 6). Since 2 contains 2 units, 2 is 2 more than a multiple of 11,

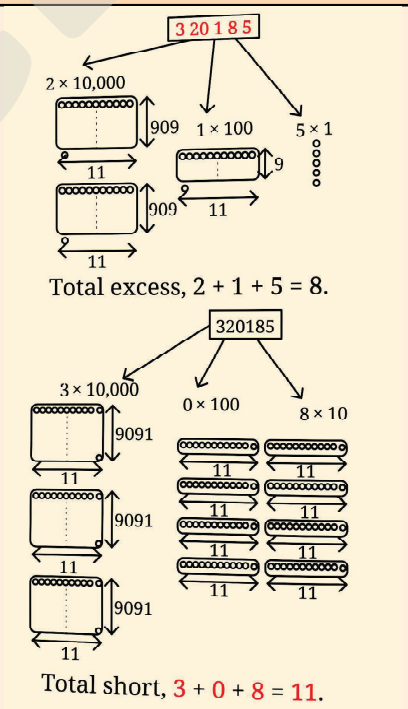
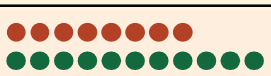
i.e., 2 = (0 + 2).



? Using these observations, can you tell whether the number 462 is divisible 11?

? What could be a general method or shortcut to check divisibility by 11?

We saw that the place values alternate as 1 more and 1 less than a multiple of 11. Using this observation,

Steps	Purpose	Example for the Number 320185
1. Add the digits of place values which are 1 more (than a multiple of 11), i.e., place values corresponding to 1,00,10000, and so on.	To know how much in excess we are with respect to a multiple of 11 for these place values	
2. Add the digits of place values which are 1 less (than a multiple of 11 (, i.e., place values corresponding to 10, 1000, 100000, and so on.	To know how short we are with respect to a multiple of 11 for these palce values.	
3. Compute the difference between these two sums, i.e., (number in excess) - (number short).	To know the remainder obtained when divided by 11.	 8–11 = –3 (3 short of a multiple of 11)

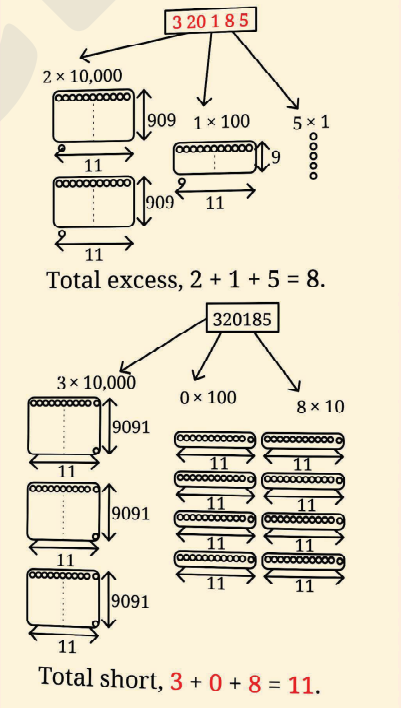
11 سے ایک زیادہ اور 11 سے ایک کم کا یہ باری باری نمونہ زیادہ مقامی قدروں کے لیے بھی جاری رہتا ہے۔
چونکہ 400 میں 4 سیکڑے ہیں، 400، 11 کے اضعاف سے 4 زیادہ ہے (396+4)۔ چونکہ 60 میں 6 دہائیاں ہیں، 60، 11 کے اضعاف سے 6 کم ہے (66-6)۔ چونکہ 2 میں 2 اکائیاں ہیں، 2، 11 کے اضعاف سے 2 زیادہ ہے، یعنی 2 = 0+2)۔



ان مشاہدات کو استعمال کرتے ہوئے کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 462، 11 پر قابلِ تقسیم ہے؟

11 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ کا عمومی طریقہ یا شارٹ کٹ کیا ہو سکتا ہے؟

ہم نے دیکھا کہ مقامی قدریں 11 کے اضعاف سے باری باری 1 زیادہ اور 1 کم ہوتی ہیں۔
اس مشاہدے کو استعمال کرتے ہوئے:

عدد 320185 کی مثال	مقصد	مراحل
	یہ جاننے کے لیے کہ ہم 11 کے اضعاف سے کتنا زیادہ ہیں۔	1۔ ان مقامی قدروں کے ہندسے جوڑیں جو 11 کے اضعاف سے 1 زیادہ ہوں (یعنی 1، 100، 10000 وغیرہ کی مقامی قدریں)۔
	یہ جاننے کے لیے کہ ہم 11 کے اضعاف سے کتنا کم ہیں۔	2۔ ان مقامی قدروں کے ہندسے جوڑیں جو 11 کے اضعاف سے 1 کم ہوں (یعنی 10، 1000، 100000 وغیرہ کی مقامی قدریں)۔
 8-11 = -3 (11 کے اضعاف سے 3 کم)	یہ جاننے کے لیے کہ 11 سے تقسیم کرنے پر باقی کیا ہے۔	3۔ ان دونوں مجموعوں کا فرق نکالیں، یعنی (زیادہ والا عدد) — (کم والا عدد)۔

The difference between these two sums 8 - 11 = - 3, indicating that the number 3,28,105 is 3 short of or 8 more than a multiple of 11.

If this difference is 11 or a multiple of 11, what does that say about the remainder obtained when the number is divisible by 11?

Using this shortcut, find out whether the following numbers are divisible by 11. Further, find the remainder if the number is not divisible by 11.

(i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076

Look at the following procedure -

Steps to follow	Example for the number 328105
1. Place alternating '+' and '-' signs before every digit starting from the unit's digit.	-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5
2. Evaluate the expression.	-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5 = - 3
3. The result denotes the remainder obtained when the number is divided by 11.	328105 is 3 less than or 8 more than a multiple of 11

Is this method similar to or different from the method we saw just before?

Fill in the following table. Find a quick way to do this?



Number	Divisible by								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
128	Yes	No	No	No	No	Yes	No	No	No
990									
1586									
275									
6686									
639210									
429714									
2856									
3060									
406839									

© NCERT

ان دونوں مجموعوں کا فرق $-3 = 11-8$ ہے، جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ عدد 3,28,105، 11 کے اضعاف سے 3 کم یا 8 زیادہ ہے۔

اگر یہ فرق 11 یا 11 کا ضعف ہو تو 11 سے تقسیم کرنے پر باقی کیا ہو گا؟

اس شارٹ کٹ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ درج ذیل اعداد 11 پر قابلِ تقسیم ہیں یا نہیں۔

مزید یہ بھی معلوم کیجیے کہ اگر عدد 11 پر قابلِ تقسیم نہ ہو تو باقی کیا ہو گا۔

(i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076

درج ذیل طریقہ کار دیکھیے:

عدد 328105 کی مثال	مراحل
$-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5$	1۔ اکائی کے ہندسے سے شروع کرتے ہوئے ہر ہندسے سے پہلے باری باری '+' اور '−' کی علامتیں لگائیں۔
$-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5 = -3$	2۔ عبارت کا حساب لگائیں۔
328105، 11 کے اضعاف سے 3 کم یا 8 زیادہ ہے۔	3۔ نتیجہ وہ باقی ظاہر کرتا ہے جو عدد کو 11 سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔

کیا یہ طریقہ پہلے والے طریقے سے ملتا جلتا ہے یا مختلف ہے؟

درج ذیل جدول پُر کیجیے۔ اسے جلدی کرنے کا کوئی طریقہ تلاش کیجیے۔



عدد	11 سے قابل تقسیم								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
128	ہاں	نہیں	نہیں	نہیں	نہیں	ہاں	نہیں	نہیں	نہیں
990									
1586									
275									
6686									
639210									
429714									
2856									
3060									
406839									

APSCERT

More on Divisibility Shortcuts

Divisibility Shortcuts for Other Numbers

- How can we find out if a number is divisible by 6?
- Will checking its divisibility by its factors 2 and 3 work? Use the shortcuts for 2 and 3 on these numbers and divide each number by 6 to verify - 38, 225, 186, 64.
- How about checking divisibility by 24? Will checking the divisibility by its factors, 4 and 6, work? Why or why not?

  Determining divisibility by 24 by checking divisibility by 4 and by 6 does not work. For example, the number 12 is divisible by both 4 and 6, but not by 24.

  To check for the divisibility by 24, we can instead check for the divisibility by 3 and divisibility by 8.

  Explain using prime factorisation why checking divisibility by 3 and 8 works for checking divisibility by 24, but checking divisibility by 4 and 6 is not sufficient for checking divisibility by 24.

  There are such shortcuts to check divisibility by every number until 100, and for some numbers beyond 100. You may try to understand how these work after learning certain concepts in higher grades.

Digital Roots

Take a number. Add its digits repeatedly till you get a single-digit number. This single-digit number is called the digital root of the number. For example, the digital root of the number 489710 will be 2

$$4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29,\ 2 + 9 = 11,\ 1 + 1 = 2$$

- What property do you think this digital root will have? Recall that we did this while finding the divisibility shortcut for 9.
- Between the numbers 600 and 700, which numbers have the digital root: (i) 5, (ii) 7, (iii) 3?
- Write the digital roots of any 12 consecutive numbers. What do you observe?

We saw that the digital root of multiples of 9 is always 9.



APSCERT

تقسیم پذیری کے شارٹ کٹس کی مزید وضاحت

دیگر اعداد کے لیے تقسیم پذیری کے شارٹ کٹس

- ہم کیسے معلوم کر سکتے ہیں کہ کوئی عدد 6 سے قابلِ تقسیم ہے یا نہیں؟
- کیا اس کے عوامل 2 اور 3 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ کرنا درست ہو گا؟ 2 اور 3 کے شارٹ کٹس استعمال کرتے ہوئے ان اعداد کی جانچ کریں اور ہر عدد کو 6 سے تقسیم کر کے تصدیق کریں— 38، 225، 186، 64
- 24 سے قابلِ تقسیم ہونے کے بارے میں کیا خیال ہے؟ کیا اس کے عوامل 4 اور 6 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ کرنا درست ہو گا؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

24 سے قابلِ تقسیم ہونے کے لیے 4 اور 6 دونوں سے قابلِ تقسیم ہونا کافی نہیں ہے۔ مثال کے طور پر عدد 12، 4 اور 6 دونوں سے قابلِ تقسیم ہے لیکن 24 سے نہیں۔

24 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ کے لیے ہم اس کے بجائے 3 اور 8 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ کر سکتے ہیں۔

وضاحت کریں کہ پرائم فیکٹرائزیشن (اول عوامل میں تجزیہ) کی مدد سے کیوں 3 اور 8 سے قابلِ تقسیم ہونے کی جانچ 24 کے لیے درست ہے، لیکن 4 اور 6 سے جانچ کافی نہیں ہے۔

ایسے شارٹ کٹس ہر عدد کے لیے 100 تک اور بعض اعداد کے لیے 100 سے بھی آگے موجود ہیں۔ آپ اعلیٰ درجات میں کچھ تصورات سیکھنے کے بعد ان کو سمجھنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔

ڈیجیٹل روٹس (Digital Roots)

کوئی بھی عدد لیں۔ اس کے ہندسوں کو بار بار جمع کریں یہاں تک کہ ایک واحد ہندسہ حاصل ہو جائے۔ یہ واحد ہندسہ اس عدد کا ڈیجیٹل روٹ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر عدد 489710 کا ڈیجیٹل روٹ 2 ہو گا:

$$1 + 1 = 2، 2 + 9 = 11، 4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29$$

- آپ کے خیال میں اس ڈیجیٹل روٹ کی کیا خاصیت ہو گی؟ یاد کریں کہ ہم نے یہ 9 کی قابلِ تقسیم ہونے کی شارٹ کٹ میں بھی استعمال کیا تھا۔

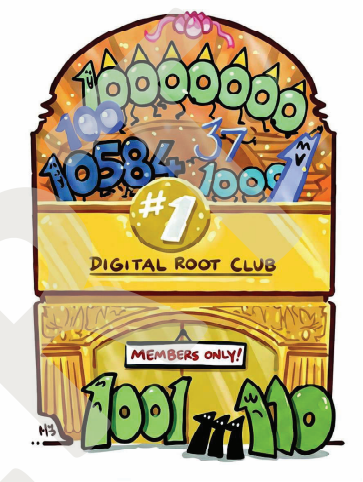


- 600 اور 700 کے درمیان کون سے اعداد کے ڈیجیٹل روٹ یہ ہیں: (i) 5، (ii) 7، (iii) 3؟
- کسی بھی 12 مسلسل اعداد کے ڈیجیٹل روٹ لکھیں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

ہم نے دیکھا کہ 9 کے اضعاف کا ڈیجیٹل روٹ ہمیشہ 9 ہوتا ہے۔

AP SCERT

- Now, find the digital roots of some consecutive multiples of (i) 3, (ii) 4, and (iii) 6.
- What are the digital roots of numbers that are 1 more than a multiple of 6? What do you notice?
  Try to explain the patterns noticed.
- I'm made of digits, each tiniest and odd, No shared ground with root #1 - how odd!
  My digits count, their sum, my root - All point to one bold number's pursuit -
  The largest odd single-digit I proudly claim. What's my number? What's my name?



Aryabhata II's (c. 950 CE) work *Mahasiddhanta,* mentions the method of computing the digital root of a number by repeatedly adding the digits till a single-digit number is obtained. This method is known to have been used to perform checks on calculations of arithmetic operations.



Figure it Out - 5.3

1. The digital root of an 8-digit number is 5. What will be the digital root of 10 more than that number?
2. Write any number. Generate a sequence of numbers by repeatedly adding 11. What would be the digital roots of this sequence of numbers? Share your observations.
3. What will be the digital root of the number 9a + 36b + 13?
4. Make conjectures by examining if there are any patterns or relations between
   (i) the parity of a number and its digital root.
   (ii) the digital root of a number and the remainder obtained when the number is divided by 3 or 9.



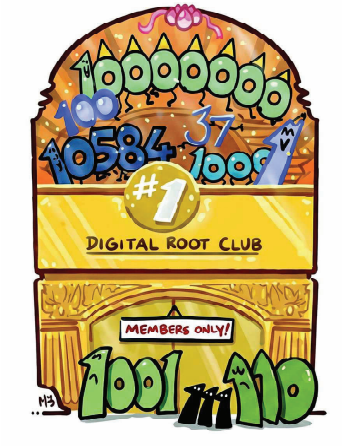
5.3 Digits in Disguise

Last year, we saw cryptarithms - puzzles where each letter stands for a digit, each digit is represented by at most one letter, and the first digit of a number is never 0.

اب لگاتار اضعاف (i) 3 ،(ii)4 ،اور (iii) 6 کے ڈیجیٹل روٹس معلوم کریں۔

وہ اعداد جو 6 کے کسی اضعاف سے 1 زیادہ ہوں، ان کے ڈیجیٹل روٹس کیا ہوتے ہیں؟ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ ان مشاہدات میں نظر آنے والے پیٹرن کی وضاحت کرنے کی کوشش کریں۔

میں اعداد پر مشتمل ہوں، ہر ایک نہایت چھوٹا اور طاق،
ڈیجیٹل روٹ #1 سے میرا کوئی تعلق نہیں — کتنا عجیب!
میرے ہندسے، ان کا مجموعہ، میرا روٹ —
سب ایک ہی بڑے ہدف کی طرف اشارہ کرتے ہیں —
میں سب سے بڑا واحد طاق ہندسہ فخر سے کہتا ہوں۔
میرا عدد کیا ہے؟ میرا نام کیا ہے؟



آریہ بھٹ دوم (تقریباً 950 عیسوی) کی کتاب مہاسدھانت میں اس طریقے کا ذکر ملتا ہے کہ کسی عدد کا ڈیجیٹل روٹ اس کے ہندسوں کو بار بار جمع کر کے ایک واحد ہندسہ حاصل کرنے سے نکالا جاتا ہے۔ اس طریقے کو حسابی عملیات کی جانچ کے لیے استعمال کیا جاتا تھا۔



حل کیجیے–5.3

1. اگر کسی 8 ہندسوں والے عدد کا ڈیجیٹل روٹ 5 ہو تو اس عدد میں 10 کا اضافہ کرنے سے حاصل ہونے والے عدد کا ڈیجیٹل روٹ کیا ہوگا؟
2. کوئی بھی عدد لکھیں۔ اس میں بار بار 11 جمع کر کے اعداد کی ایک ترتیب بنائیں۔ اس سلسلے میں آنے والے اعداد کے ڈیجیٹل روٹس کیا ہوں گے؟ اپنے مشاہدات بیان کریں۔
3. عدد $9a + 36b + 13$ کا ڈیجیٹل روٹ کیا ہوگا؟
4. مشاہدہ کر کے اندازے لگائیں کہ کیا کوئی پیٹرن یا تعلق موجود ہے:
   (i) کسی عدد کی parity اور اس کے ڈیجیٹل روٹ کے درمیان۔
   (ii) کسی عدد کے ڈیجیٹل روٹ اور اس باقی کے درمیان جو اسے 3 یا 9 سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔



5.3 پوشیدہ ہندسے (Digits in Disguise)

گزشتہ سال ہم نے کرپٹ اریتھمز (cryptarithms) پڑھے تھے — ایسے پہیلی نما مسائل جن میں ہر حرف ایک ہندسے کی نمائندگی کرتا ہے، ہر ہندسہ زیادہ سے زیادہ ایک حرف سے ظاہر ہوتا ہے، اور کسی عدد کا پہلا ہندسہ کبھی 0 نہیں ہوتا۔

? Solve the cryptarithms given below.

(i)
$$\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} ON \\ ON \\ +\ ON \\ \hline PO \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} QR \\ QR \\ +\ QR \\ \hline PRR \end{array}$$

Let us now try solving some cryptarithms involving multiplication.

? (v) PQ × 8 = RS.

Guna says, "Oh, this means a 2-digit number multiplied by 8 should give another 2-digit number. I know that 10 × 8 = 80. But the units digits of 10 and 80 are the same, which we don't want. For the same reason PQ cannot be 11 as P and Q correspond to different digits. 12 × 8 = 96 fits all the conditions". Can PQ be 13? Think.



It is not possible because 13 × 8 = 104. For all 2-digit numbers greater than 12, the product with 8 is a 3-digit number.

? (vi) Try this now: GH × H = 9K.

This means a 2-digit number multiplied by a 1-digit number gives another 2-digit number in the 90s. Observe the letters corresponding to the units digits in this cryptarithm. Pick the solution to this question from the options given below:

11 × 9 = 99, 12 × 8 = 96, 46 × 2 = 92, 24 × 4 = 96, 47 × 2 = 94, 31 × 3 = 93, 16 × 6 = 96.

? (vii) Here is one more: BYE × 6 = RAY.

Anu says, "Since the product is a 3-digit number, B can't be 2 or more. If B = 2, i.e., 2 hundreds, the product will be more than 1200. So, B = 1."



? What can you say about 'Y'? What digits are possible/not possible?

"Y cannot be 7 or more because, if Y = 7, then 170 × 6 = 1020; but we want a 3-digit product. Also, Y will be even", Anu explains.

We can solve cryptarithms using patterns, properties, and reasoning related to numbers and operations.

? Solve the following:

(i) UT × 3 = PUT (ii) AB × 5 = BC (iii) L2N × 2 = 2NP

(iv) XY × 4 = ZX (v) PP × QQ = PRP (vi) JK × 6 = KKK

APSCERT

نیچے دیے گئے کرپٹ اریتھمز (cryptarithms) کو حل کریں۔

(i)
$$\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} ON \\ ON \\ +\ ON \\ \hline PO \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} QR \\ QR \\ +\ QR \\ \hline PRR \end{array}$$



اب ہم کچھ ضرب والے کرپٹ اریتھمز (cryptarithms) حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

(v) $PQ \times 8 = RS$

گنا کہتا ہے: "اوہ، اس کا مطلب ہے کہ ایک 2 ہندسوں کا عدد 8 سے ضرب دینے پر ایک اور 2 ہندسوں کا عدد بنے گا۔ میں جانتا ہوں کہ $10 \times 8 = 80$ ہوتا ہے۔ لیکن 10 اور 80 کے اکائی ہندسے ایک جیسے ہیں، جو ہم نہیں چاہتے۔ اسی وجہ سے PQ، 11 بھی نہیں ہو سکتا کیونکہ P اور Q مختلف ہندسوں کی نمائندگی کرتے ہیں۔ $12 \times 8 = 96$ تمام شرائط پوری کرتا ہے۔ "کیا $PQ = 13$ ہو سکتا ہے؟ سوچیں۔ یہ ممکن نہیں کیونکہ $13 \times 8 = 104$۔ 12 سے بڑے تمام 2 ہندسوں کے اعداد کو 8 سے ضرب دینے پر 3 ہندسوں کا عدد حاصل ہوتا ہے۔

(vi) اب یہ آزمائیں: $GH \times H = 9K$

اس کا مطلب ہے کہ ایک 2 ہندسوں کا عدد ایک 1 ہندسی عدد سے ضرب دینے پر ایک اور 2 ہندسوں کا عدد بنتا ہے جو 90 کے درجے میں ہو۔ اس کرپٹ اریتھم میں اکائی کے ہندسے سے متعلق حروف کو غور سے دیکھیں۔ نیچے دیے گئے آپشنز میں سے درست حل منتخب کریں:

$11 \times 9 = 99$، $12 \times 8 = 96$، $46 \times 2 = 92$، $24 \times 4 = 96$، $47 \times 2 = 94$، $31 \times 3 = 93$، $16 \times 6 = 96$

(vii) ایک اور مثال: $BYE \times 6 = RAY$



انو کہتا ہے: "چونکہ حاصل ضرب 3 ہندسوں کا عدد ہے، اس لیے B ، 2 یا اس سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ اگر $B = 2$ یعنی 2 سو، تو حاصل ضرب 1200 سے زیادہ ہو گا۔ اس لیے $B = 1$ ہے۔"

'Y' کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ کون سے ہندسے ممکن ہیں اور کون سے نہیں؟

"Y، 7 یا اس سے بڑا نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر $Y = 7$ ہو تو $6 \times 170 = 1020$ ہو گا، لیکن ہمیں 3 ہندسوں کا عدد چاہیے۔ اس کے علاوہ Y جفت (even) ہو گا"، انو وضاحت کرتا ہے۔

ہم پیٹرنز، خواص اور اعداد و عملیات کی مدد سے کرپٹ اریتھمز حل کر سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل حل کریں:

(i) $UT \times 3 = PUT$

(ii) $AB \times 5 = BC$

(iii) $L2N \times 2 = 2NP$

(iv) $XY \times 4 = ZX$

(v) $PP \times QQ = PRP$

(vi) $JK \times 6 = KKK$

APSCERT



Figure it Out - 5.4

1. If 31z5 is a multiple of 9, where z is a digit, what is the value of z? Explain why there are two answers to this problem.
2. "I take a number that leaves a remainder of 8 when divided by 12. I take another number which is 4 short of a multiple of 12. Their sum will always be a multiple of 8", claims Sonu. Examine his claim and justify your conclusion.
3. When is the sum of two multiples of 3, a multiple of 6 and when is it not? Explain the different possible cases, and generalise the pattern.
4. Sreelatha says, "I have a number that is divisible by 9. If I reverse its digits, it will still be divisible by 9".

(i) Examine if her conjecture is true for any multiple of 9.

(ii) Are any other digit shuffles possible such that the number formed is still a multiple of 9?

5. If 48a23b is a multiple of 18, list all possible pairs of values for a and b.
6. If 3p7q8 is divisible by 44, list all possible pairs of values for p and q.
7. Find three consecutive numbers such that the first number is a multiple of 2, the second number is a multiple of 3, and the third number is a multiple of 4.

   Are there more such numbers? How often do they occur?

Try This



8. Write five multiples of 36 between 45,000 and 47,000. Share your approach with the class.
9. The middle number in the sequence of 5 consecutive even numbers is 5p. Express the other four numbers in sequence in terms of p.
10. Write a 6-digit number that it is divisible by 15, such that when the digits are reversed, it is divisible by 6.
11. Deepak claims, "There are some multiples of 11 which, when doubled, are still multiples of 11. But other multiples of 11 don't remain multiples of 11 when doubled". Examine if his conjecture is true; explain your conclusion.

APSCERT



حل کیجیے–5.4

1. اگر 9،31z5 کا ایک اضعاف ہو، جہاں z ایک ہندسہ ہے، تو z کی قیمت کیا ہو گی؟ وضاحت کریں کہ اس سوال کے دو جواب کیوں ہیں۔
2. سونو کہتا ہے: "میں ایک ایسا عدد لیتا ہوں جو 12 سے تقسیم کرنے پر باقی 8 چھوڑتا ہے۔ پھر میں ایک اور عدد لیتا ہوں جو 12 کے ایک اضعاف سے 4 کم ہوتا ہے۔ ان دونوں کا مجموعہ ہمیشہ 8 کا اضعاف ہو گا۔" اس کے دعوے کا جائزہ لیں اور اپنے نتیجے کی وضاحت کریں۔
3. دو اعداد جو 3 کے اضعاف ہوں، ان کا مجموعہ کب 6 کا اضعاف ہوتا ہے اور کب نہیں ہوتا؟ مختلف ممکنہ صورتیں بیان کریں اور نمونے کو عمومی شکل دیں۔
4. سری لتھا کہتی ہے: "میرے پاس ایک عدد ہے جو 9 سے قابلِ تقسیم ہے۔ اگر میں اس کے ہندسے الٹ دوں تو بھی وہ 9 سے قابلِ تقسیم رہے گا۔"

(i) جانچیں کہ کیا یہ دعویٰ کسی بھی 9 کے اضعاف کے لیے درست ہے۔

(ii) کیا ہندسوں کی کوئی اور ترتیب بھی ممکن ہے جس سے بنا عدد بھی 9 کا اضعاف رہے؟

5. اگر 18،a23b48 کا اضعاف ہو تو a اور b کی تمام ممکنہ جوڑیاں لکھیں۔
6. اگر 44،p7q83 سے قابلِ تقسیم ہو تو p اور q کی تمام ممکنہ جوڑیاں لکھیں۔

یہ بھی کیجیے

7. تین مسلسل اعداد تلاش کریں جن میں پہلا عدد 2 کا اضعاف ہو، دوسرا 3 کا اضعاف ہو اور تیسرا 4 کا اضعاف ہو۔ کیا ایسے اور بھی اعداد موجود ہیں؟ یہ کتنی بار آتے ہیں؟

ریاضی بحث



8. 36 کے پانچ اضعاف لکھیں جو 45,000 اور 47,000 کے درمیان ہوں۔

اپنی حکمت عملی کلاس میں بیان کریں۔

9. پانچ مسلسل جفت اعداد کی ترتیب میں درمیانی عدد 5p ہے۔ باقی چار اعداد کو p کی صورت میں ظاہر کریں۔
10. ایک 6 ہندسوں کا عدد لکھیں جو 15 سے قابلِ تقسیم ہو، اور جب اس کے ہندسے الٹ دیے جائیں تو وہ 6 سے قابلِ تقسیم ہو۔
11. دیپک کہتا ہے: "کچھ ایسے 11 کے اضعاف ہیں جنہیں دو گنا کرنے پر بھی وہ 11 کے اضعاف ہی رہتے ہیں، لیکن کچھ اضعاف ایسے بھی ہیں جو دو گنا کرنے پر 11 کے اضعاف نہیں رہتے۔" اس دعوے کا جائزہ لیں اور نتیجہ بیان کریں۔

APSCERT

12. Determine whether the statements below are 'Always True', 'Sometimes True', or 'Never True'. Explain your reasoning.

(i) The product of a multiple of 6 and a multiple of 3 is a multiple of 9.

(ii) The sum of three consecutive even numbers will be divisible by 6.

(iii) If abcdef is a multiple of 6, then badcef will be a multiple of 6.

(iv) 8 (7b - 3) - 4 (11b + 1) is a multiple of 12.

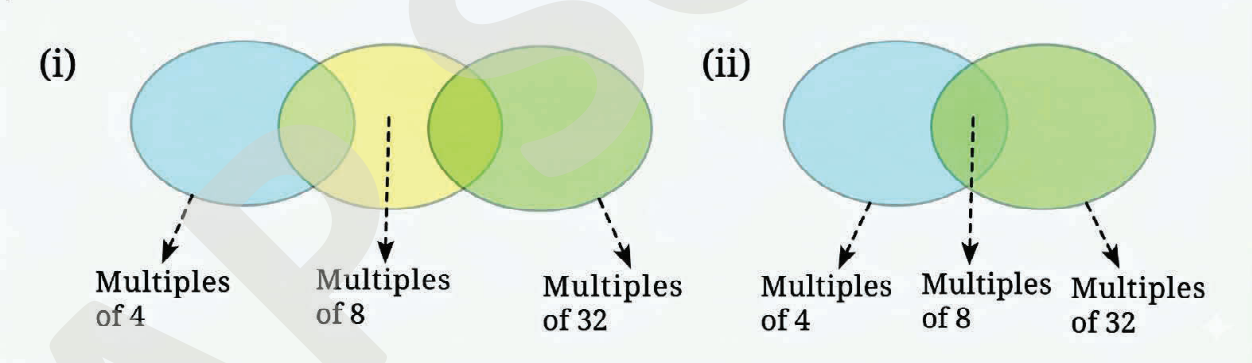
13. Choose any 3 numbers. When is their sum divisible by 3? Explore all possible cases and generalise.

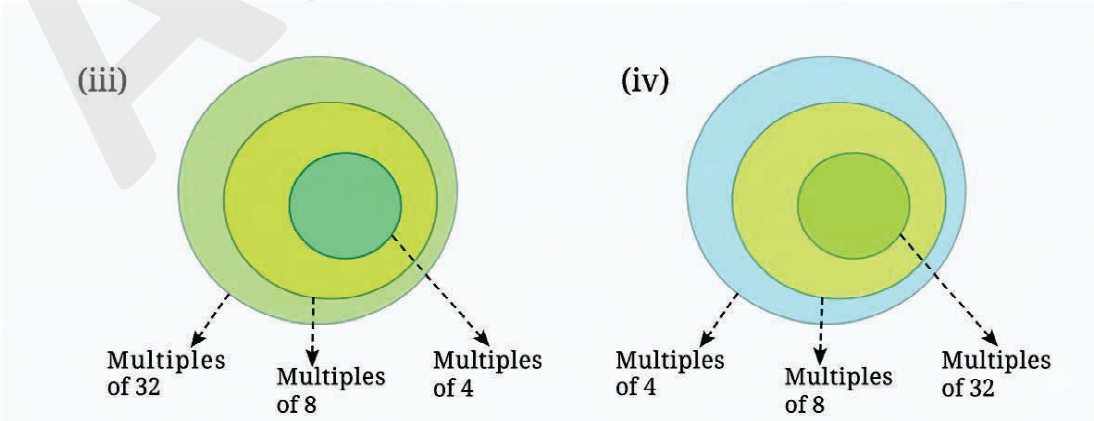
14. Is the product of two consecutive integers always multiple of 2? Why? What about the product of these consecutive integers? Is it always a multiple of 6? Why or why not? What can you say about the product of 4 consecutive integers? What about the product of five consecutive integers?

15. Solve the cryptarithms -

(i) EF × E = GGG (ii) WOW × 5 = MEOW

16. Which of the following Venn diagrams captures the relationship between the multiples of 4, 8, and 32?





© NCERT

12. درج ذیل بیانات کے بارے میں فیصلہ کریں کہ آیا وہ "ہمیشہ درست"، "کبھی کبھار درست" یا "کبھی بھی درست نہیں" ہیں۔ اپنے استدلال کی وضاحت کریں۔

(i) 6 کے ایک اضعاف اور 3 کے ایک اضعاف کا حاصلِ ضرب، 9 کا اضعاف ہوتا ہے۔

(ii) تین متواتر جفت اعداد کا مجموعہ 6 سے قابلِ تقسیم ہوگا۔

(iii) اگر abcdef، 6 کا اضعاف ہو تو badcef بھی 6 کا اضعاف ہوگا۔

(iv) $8(7b - 3) - 4(11b + 1)$، 12 کا اضعاف ہے۔

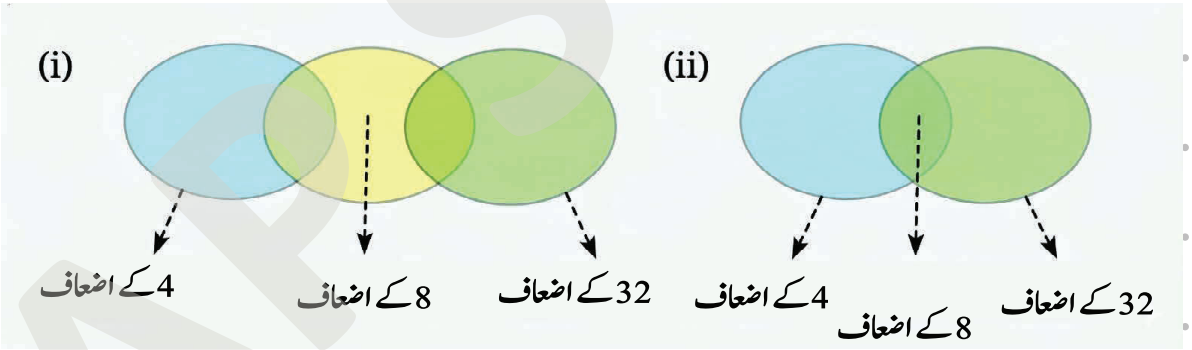
13. کوئی بھی 3 اعداد منتخب کریں۔ ان کا مجموعہ کب 3 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے؟ تمام ممکنہ صورتوں کا جائزہ لیں اور ایک عمومی اصول بیان کریں۔

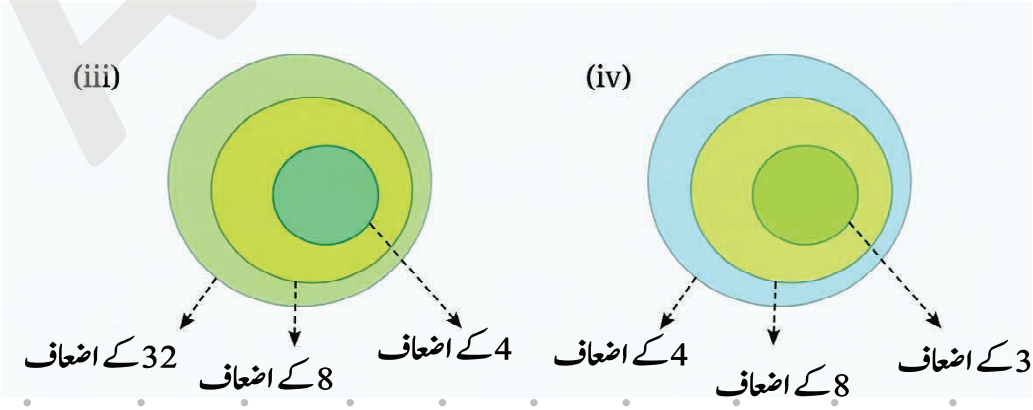
14. کیا دو متواتر صحیح اعداد کا حاصلِ ضرب ہمیشہ 2 کا اضعاف ہوتا ہے؟ کیوں؟ ان متواتر اعداد کے حاصلِ ضرب کے بارے میں اور کیا کہا جا سکتا ہے؟ کیا یہ ہمیشہ 6 کا اضعاف ہوتا ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟ چار متواتر صحیح اعداد کے حاصل ضرب کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ اور پانچ متواتر صحیح اعداد کے حاصلِ ضرب کے بارے میں؟

15. درج ذیل کرپت اریتھمز حل کریں:

(i) EF × E = GGG　　(ii) WOW × 5 = MEOW

16. درج ذیل وین ڈایاگرامز میں سے کون سا 4، 8 اور 32 کے اضعاف کے درمیان تعلق کو درست طور پر ظاہر کرتا ہے؟





© APSCERT

SUMMARY

- We explored and learnt various properties of divisibility-
  - If a is divisible by b, then all multiples of a are divisible by b.
  - If a is divisible by b, then a is divisible by all the factors of b.
  - If a divides m and a divides n, then a divides m + n and m - n.
  - If a is divisible by b and is also divisible by c, then a is divisible by the LCM of b and c.
- We learnt shortcuts to check divisibility by 3, 9 and 11, and why they work.
- Through all this we were exposed to the power of mathematical thinking and reasoning, using algebra, visualisation, examples and counterexamples.

Think and Disscuss

1. **The Palindrome Secret - 4-Digit Number**

   A four-digit "palindrome" reads the same forward and backward, like 5225 or 7117.

   - Check if 5225 is divisible by 11.
   - Check if 7117 is divisible by 11.

   Is every four-digit palindrome a multiple of 11?

2. **The Repeating Triple**

   Write down a six-digit number where the first three digits repeat exactly, such as 123,123 or 456,456.

   - Divide your number by 11. Is there a remainder?

خلاصہ

ہم نے تقسیم پذیری کی مختلف خصوصیات کا مطالعہ کیا اور سیکھا:

- اگر a ، b سے قابلِ تقسیم ہو تو a کے تمام اضعاف بھی b سے قابلِ تقسیم ہوں گے۔
- اگر a ، b سے قابلِ تقسیم ہو تو a ، b کے تمام عوامل سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا۔
- اگر a ، m کو تقسیم کرتا ہو اور a ، n کو بھی تقسیم کرتا ہو، تو a ، m + n اور m − n کو بھی تقسیم کرے گا۔
- اگر a ، b سے قابلِ تقسیم ہو اور c سے بھی قابلِ تقسیم ہو، تو a ، b اور c کے ذواضعاف اقل مشترک (ذ-ا-م) سے بھی قابلِ تقسیم ہو گا۔
- ہم نے 3، 9 اور 11 سے قابلِ تقسیم ہونے کے شارٹ کٹس سیکھے اور یہ بھی سمجھا کہ وہ کیوں درست ہیں۔
- اس تمام مطالعے کے دوران ہمیں الجبرا، بصری نمائندگی، مثالوں اور جوابی مثالوں (counterexamples) کے ذریعے ریاضیاتی سوچ اور استدلال کی قوت سے روشناس ہونے کا موقع ملا۔

سوچیے اور بحث کیجیے

1. **پیلنڈروم کا راز — 4 ہندسوں والا عدد**

چار ہندسوں والا "پیلنڈروم" وہ عدد ہوتا ہے جو آگے اور پیچھے سے ایک جیسا پڑھا جائے، جیسے 5225 یا 7117۔

- جانچیں کہ آیا 5225، 11 سے قابلِ تقسیم ہے۔
- جانچیں کہ آیا 7117، 11 سے قابلِ تقسیم ہے۔

کیا ہر چار ہندسوں والا پیلنڈروم، 11 کا اضعاف ہوتا ہے؟

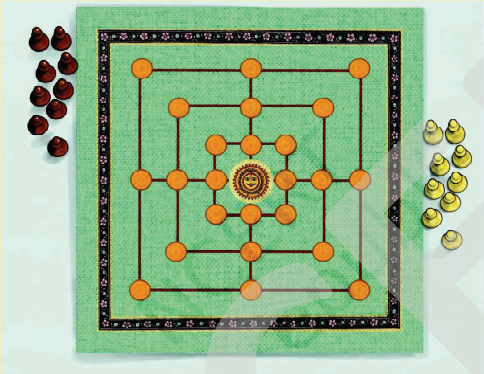
2. **تہرے اعادے والا عدد**

ایک ایسا 6 ہندسوں والا عدد لکھیں جس کے پہلے تین ہندسے بعینہٖ دوبارہ دہرائے گئے ہوں، جیسے 123123 یا 456456

- اپنے عدد کو 11 سے تقسیم کریں۔ کیا کوئی باقی بچتا ہے؟



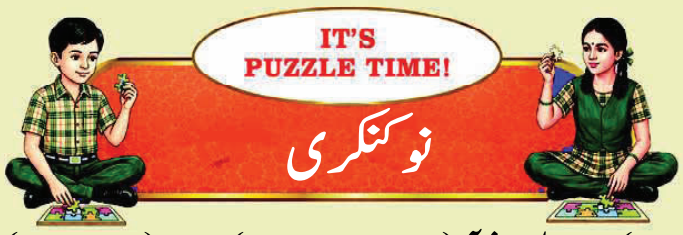
Navakankari, also known as Salu Mane ata, Char-Par, or Navkakri, is a traditional Indian board game that is the same as ?Nine Men's Morris' or 'Mills in the West'. It is a strategy game for two players where the goal is to form lines of three pawns to eliminate the opponent's pawns or block their movement.



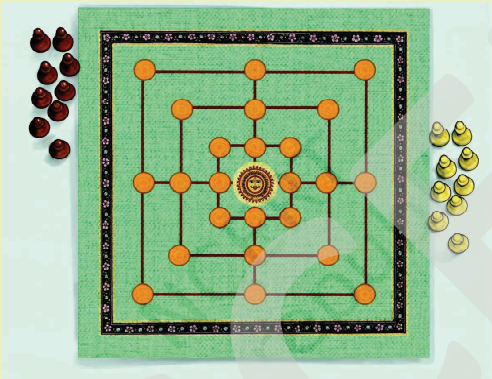
Gameplay

1. Each player starts with 9 pawns. The players take turns in placing their pawns on the marked intersections. An intersection can have at most one pawn.
2. Once all the pawns are placed, the players take turns to move one of their pawns to adjacent empty intersections to form lines of three. The line can be horizontal or vertical.
3. Once a player makes a line with their pawns they can remove any one of the opponent's pawns as long as it is not a part of one of their lines.
   A player wins if the opponent has less than 3 pawns or is unable to make a move.





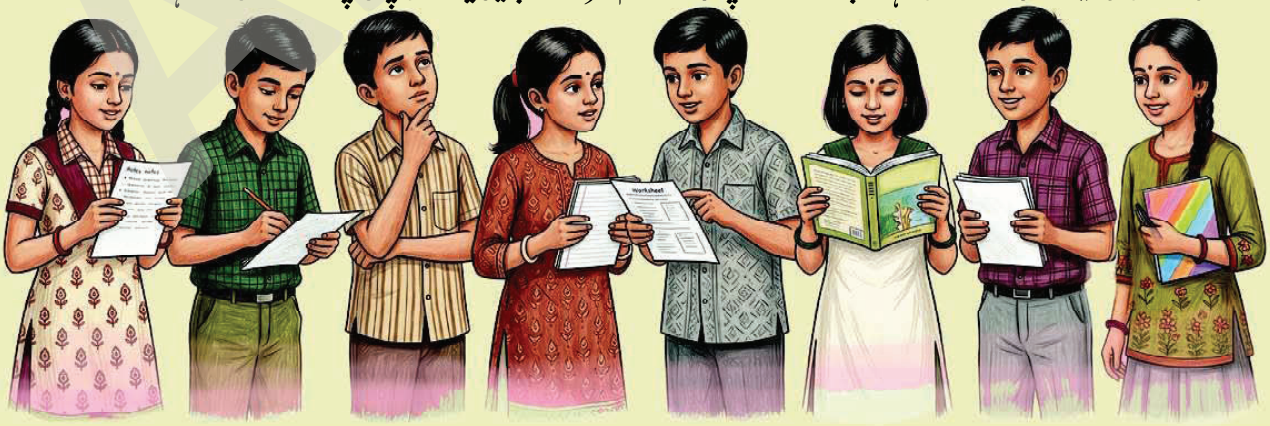
نو کنکری(Navakankari)، جسے **سالو مانے آٹا**(Salu Mane Ata)، **چار پار** (Char-Par) یا **نو ککری** (Navkakri) بھی کہا جاتا ہے، ایک روایتی ہندوستانی تختی کھیل (board game) ہے جو مغرب میں "**نائن مینس مورس** (Nine Men's Morris)" یا "**ملس** (Mills)" کے نام سے معروف کھیل کے مشابہ ہے۔ یہ دو کھلاڑیوں کے درمیان کھیلا جانے والا ایک حکمتِ عملی پر مبنی کھیل ہے، جس میں مقصد تین مہروں کی سیدھی قطار بنانا ہوتا ہے تاکہ حریف کے مہرے کو کھیل سے خارج کیا جا سکے یا اس کی نقل و حرکت کو روک دیا جائے۔



کھیلنے کا طریقہ

1. ہر کھلاڑی 9 مہروں کے ساتھ کھیل شروع کرتا ہے۔ کھلاڑی باری باری اپنے مہرے نشان زدہ تقاطعات پر رکھتے ہیں۔ ایک تقاطع پر زیادہ سے زیادہ ایک ہی مہرہ رکھا جا سکتا ہے۔
2. جب تمام مہرے رکھ دیے جائیں، تو کھلاڑی باری باری اپنے کسی ایک مہرے کو ملحقہ خالی تقاطع پر منتقل کرتے ہیں تاکہ تین مہروں کی ایک قطار بنا سکیں۔ یہ قطار افقی یا عمودی ہو سکتی ہے۔
3. جب کوئی کھلاڑی اپنے مہروں کی تین کی قطار بنا لیتا ہے، تو وہ مخالف کے کسی ایک مہرے کو کھیل سے نکال سکتا ہے، بشرطیکہ وہ مہرہ مخالف کی کسی تین مہروں والی قطار کا حصہ نہ ہو۔

کسی کھلاڑی کی جیت اس وقت ہوتی ہے جب مخالف کے پاس 3 سے کم مہرے رہ جائیں یا وہ کوئی چال چلنے کے قابل نہ رہے۔



6 WE DISTRIBUTE, YET THINGS MULTIPLY

Learning outcomes



By the end of this chapter, learner will be able to:

- Reduce complex expressions into simpler forms using distribution. (CG-2)
- Simplify algebraic expressions, expand brackets, perform rapid mental calculations. (CG-2)
- Apply these techniques to algebraic problems and practical scenarios. (CG-10)
- Utilize distribution to calculate products quickly. (CG-2)
- Identify patterns in numeric and algebraic expressions. (CG-1)
- Use distributive property as the foundation for algebra. (CG-2)
- Identify that this chapter acts as a bridge between basic arithmetic and more complex algebraic thinking. (CG-2)

6.0 Introduction -

We have seen how algebra makes use of letter symbols to write general statements about patterns and relations in a compact manner. Algebra can also be used to justify or prove claims and conjectures (like the many properties you saw in the previous chapter) and to solve problems of various kinds.

Distributivity is a property relating multiplication and addition that is captured concisely using algebra. In this chapter, we explore different types of multiplication patterns and show how they can be described in the language of algebra by making use of distributivity.

6.1 Some Properties of Multiplication

Increments in Products

Consider the multiplication of two numbers, say, 23 × 27.

? 1. By how much does the product increase if the first number (23) is increased by 1?

6 ہم تقسیم کرتے ہیں پھر بھی چیزیں بڑھ جاتی ہیں

L4L7Y1

اکتسابی نتائج

اس باب کے اختتام تک، طلبہ اس قابل بنیں گے:

- تقسیم کا استعمال کرتے ہوئے پیچیدہ عبارتوں کو سادہ شکل میں بدل سکیں گے۔(CG-2)
- الجبری عبارتوں کو سادہ کر سکیں گے، قوسین کو پھیلا سکیں گے، ذہنی حسابات تیزی سے کر سکیں گے۔(CG-2)
- ان تکنیکوں کو الجبری مسائل اور عملی صورتحال میں استعمال کر سکیں گے۔(CG-10)
- ضرب کو تیزی سے حساب کرنے کے لیے تقسیم کا استعمال کر سکیں گے۔(CG-2)
- عددی اور الجبری عبارتوں میں نمونے پہچان سکیں گے۔(CG-1)
- الجبرے کی بنیاد کے طور پر تقسیمی خاصیت کا استعمال کر سکیں گے۔(CG-2)
- یہ پہچان سکیں گے کہ یہ باب بنیادی حساب اور زیادہ پیچیدہ الجبری سوچ کے درمیان ایک پل کا کام کرتا ہے۔(CG-2)

6.0 تعارف

ہم نے دیکھا ہے کہ الجبرا حروفی علامات کا استعمال کرتے ہوئے نمونوں اور تعلقات کے بارے میں عمومی بیانات کو مختصر انداز میں لکھتا ہے۔ الجبرا کو دعووں اور قیاسات کو ثابت کرنے (جیسے پچھلے باب میں آپ نے دیکھی گئی بہت سی خصوصیات) اور مختلف قسم کے مسائل حل کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

تقسیمی خاصیت، ضرب اور جمع سے متعلق ایک خاصیت ہے جسے الجبرا کے ذریعے مختصراً بیان کیا جاتا ہے۔ اس باب میں، ہم ضرب کے مختلف نمونوں کا جائزہ لیتے ہیں اور دکھاتے ہیں کہ انہیں تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے الجبرا کی زبان میں کیسے بیان کیا جا سکتا ہے۔

6.1 ضرب کی کچھ خصوصیات حاصل ضرب میں اضافہ

دو اعداد کی ضرب پر غور کریں، مثلاً 27×23

1. اگر پہلا عدد (23) ایک سے بڑھایا جائے تو حاصل ضرب کتنا بڑھے گا؟

2. What if the second number (27) is increased by 1?

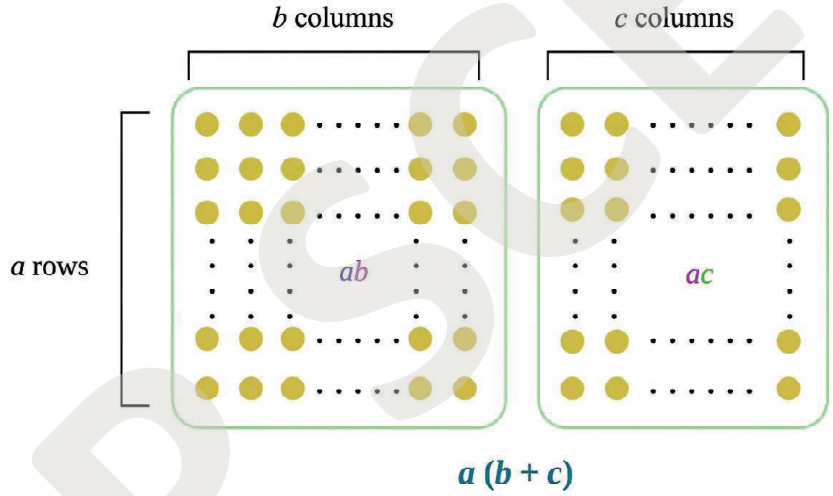
3. How about when both numbers are increased by 1?

Do you see a pattern that could help generalise our observations to the product of any two numbers?

Let us first consider a simpler problem - find the increase in the product when 27 is increased by 1. From the definition of multiplication (and the commutative property), it is clear that the product increases by 23. This can be seen from the distributive property of multiplication as well. If a, b and c are three numbers, then -

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

This property can be visualised nicely using a diagram :



This is called the **distributive property** of multiplication over addition. Using the identity a (b + c) = ab + ac with a = 23, b = 27, and c = 1, we have

$$23\,(27 + 1) = 23 \times 27 + \boxed{23}$$

Increase

Remember that here, a (b + c) and 23 (27 + 1) mean a × (b + c), and 23 × (27 + 1), respectively. We usually skip writing the '×' symbol before or after brackets, just as in the case of expressions like 5a, xy, etc.

© NCERT

2. اگر دوسرا عدد (27) ایک سے بڑھایا جائے تو کیا ہو گا؟

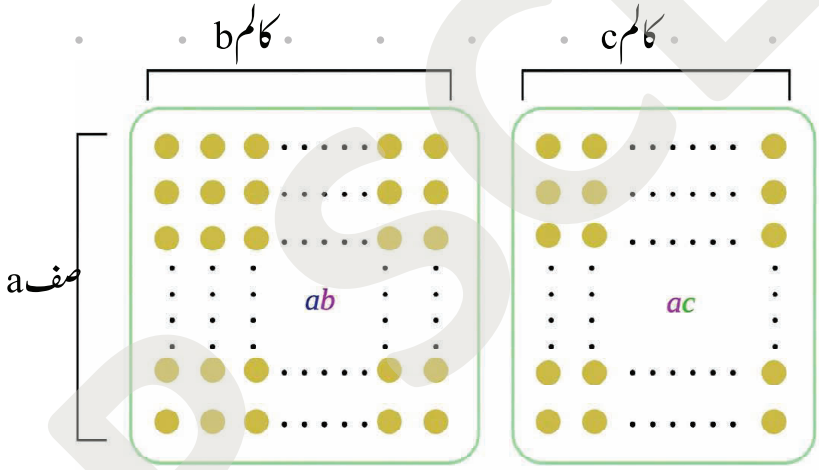
3. جب دونوں اعداد ایک ایک سے بڑھائے جائیں تو کیا ہو گا؟

کیا آپ کوئی ایسا نمونہ دیکھ رہے ہیں جو ہمارے مشاہدات کو کسی بھی دو اعداد کے حاصل ضرب تک عام کرنے میں مدد کر سکے؟

آیئے پہلے ایک آسان مسئلے پر غور کریں — جب 27 کو ایک سے بڑھایا جائے تو حاصل ضرب میں کتنا اضافہ ہوتا ہے۔ ضرب کی تعریف (اور تبادلی خاصیت) سے یہ واضح ہے کہ حاصل ضرب 23 سے بڑھتا ہے۔ یہ ضرب کی تقسیمی خاصیت سے بھی دیکھا جا سکتا ہے۔ اگر a ، b اور c تین اعداد ہیں، تو —

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

اس خاصیت کو ایک خاکے کے ذریعے اچھی طرح سمجھا جا سکتا ہے:



$a\,(b + c)$

4. اسے ضرب کی جمع پر تقسیمی خاصیت کہتے ہیں۔ $a = 23$، $b = 27$، اور $c = 1$ کے ساتھ $a\,(b + c) = ab + ac$ کا استعمال کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے

$$23\,(27 + 1) = 23 \times 27 + \boxed{23}$$

اضافہ

یاد رہے کہ یہاں $a\,(b + c)$ اور $23(1+ 27)$ کا مطلب بالترتیب $a \times (b + c)$ اور $23 \times (1 + 27)$ ہے۔

ہم عام طور پر قوسین سے پہلے یا بعد میں '×' علامت لکھنا چھوڑ دیتے ہیں، جیسا کہ $5a$، xy وغیرہ جیسی عبارتوں میں ہوتا ہے۔

We can also similarly expand (a + b) c using the distributive property as follows -

$$(a + b)\, c = c\,(a + b) \text{ (commutativity of multiplication)}$$
$$= ca + cb \text{ (distributivity)}$$
$$= ac + bc \text{ (commutativity of multiplication)}$$

We can use the distributive property to find, in general, how much a product increases if one or both the numbers in the product are increased by 1. Suppose the initial two numbers are a and b. If one of the numbers, say b, is increased by 1, then we have -

$$a\,(b + 1) = ab + \boxed{a}$$
Increase

Now let us see what happens if both numbers in a product are increased by 1. If in a product ab, both a and b are increased by 1, then we obtain (a + 1) (b + 1).

? How do we expand this?

Let us consider (a + 1) as a single term. Then, by the distributive property, we have

$$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)\, b + (a + 1)\, 1$$

Again applying the distributive property, we obtain

$$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)\, b + (a + 1)\, 1$$
$$= ab + \boxed{(b + a + 1)} \ldots\ldots 1$$
Increase

If a = 23, and, b = 27, we get

$$(23 + 1)(27 + 1) = (23 + 1)\, 27 + (23 + 1)\, 1$$
$$= 23 \times 27 + \boxed{(27 + 23 + 1)}$$
Increase

Thus, the product ab increases by a + b + 1 when each of a and b are increased by 1.

? What would we get if we had expanded (a + 1) (b + 1) by first taking (b + 1) as a single term? Try it?

ہم تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے $c(a + b)$ کو بھی اسی طرح پھیلا سکتے ہیں۔

$(a + b)c = c(a + b)$ (ضرب کی تبادلی خاصیت)

$= ca + cb$ (تقسیمی خاصیت)

$= ac + bc$ (ضرب کی تبادلی خاصیت)

ہم تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے عام طور پر یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ اگر حاصل ضرب میں ایک یا دونوں اعداد کو 1 سے اضافہ کیا جائے تو حاصل ضرب کتنا اضافہ ہو گا۔ فرض کریں کہ ابتدائی دو اعداد a اور b ہیں۔ اگر ایک عدد، مثلاً b، کو 1 سے اضافہ کیا جائے، تو ہمارے پاس ہے۔

$$a(b + 1) = ab + \boxed{a}$$

اضافہ

اب دیکھتے ہیں کہ اگر حاصل ضرب کے دونوں اعداد کو 1 سے اضافہ یا جائے تو کیا ہوتا ہے۔

اگر حاصل ضرب ab میں، a اور b دونوں کو 1 سے بڑھایا جائے، تو ہمیں $(a + 1)(b + 1)$ حاصل ہوتا ہے۔

ہم اسے کیسے پھیلائیں گے؟

آیئے $(a + 1)$ کو ایک واحد رکن سمجھیں۔ پھر، تقسیمی خاصیت کے ذریعے، ہمارے پاس ہے

اگر $a = 23$، اور $b = 27$ ہو، تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(23 + 1)(27 + 1) = (23 + 1)27 + (23 + 1)1$

$= 23 \times 27 + \boxed{(27 + 23 + 1)}$

اضافہ

$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)b + (a + 1)1$

تقسیمی خاصیت کو دوبارہ لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)b + (a + 1)1$

$= ab + \boxed{(b + a + 1)}$ 1

اضافہ

اس طرح، جب a اور b دونوں کو 1 سے بڑھایا جائے تو حاصل ضرب ab میں $a + b + 1$ کا اضافہ ہوتا ہے۔

اگر ہم $(a + 1)(b + 1)$ کو پہلے $(b + 1)$ کو واحد رکن سمجھ کر پھیلاتے تو کیا حاصل ہوتا؟

آزمائیں۔

? What happens when one of the numbers in a product is increased by 1 and the other is decreased by 1? Will there be any change in the product?

Let us again take the product ab of two numbers a and b. If a is increased by 1 and b is decreased by 1, then their product will be (a + 1) (b - 1). Expanding this, we get

$$(a + 1)(b - 1) = (a + 1)\,b - (a + 1)\,1$$
$$= ab + b - (a + 1)$$
$$= ab + \boxed{b - a - 1} \quad \ldots (2)$$
Increase
$(b - a - 1 > 0)$

If a = 23, and b = 27, we get

$$(23 + 1)(27 - 1) = (23 + 1)\,27 - (23 + 1)\,1$$
$$= 23 \times 27 + 27 - (23 + 1)$$
$$= 23 \times 27 + \boxed{27 - 23 - 1}$$
Increase

? Will the product always increase? Find 3 examples where the product decreases.

? What happens when a and b are negative integers?

Check by substituting different values for a and b in each of the above cases. For example, a = –5, b = 8; a = –4, b = –5; etc.

We have seen that integers also satisfy the distributive property, that is, if x, y and z are any three integers, then x (y + z) = xy + xz.

Thus, the expressions we have for increase of products hold when the letter-numbers take on negative integer values as well i.e., the expressions in 1 and 2 hold good for negative integers values also.

Recall that two algebraic expressions are equal if they take on the same values when their letter-numbers are replaced by numbers. These numbers could be any integers. Mathematical statements that express the equality of two algebraic expressions, such as

$$a (b + 8) = ab + 8a,$$
$$(a + 1) (b - 1) = ab + b - a - 1, \text{ etc.,}$$

are called **identities**.

? By how much will the product of two numbers change if one of the numbers is increased by m and the other by n?

کیا ہوتا ہے جب حاصل ضرب میں ایک عدد کو 1 سے اضافہ کیا جائے اور دوسرے کو 1 سے گھٹایا جائے؟ کیا حاصل ضرب میں کوئی تبدیلی آئے گی؟

آیئے دوبارہ دو اعداد a اور b کے حاصل ضرب ab پر غور کریں۔ اگر a کو 1 سے اضافہ کیا جائے اور b کو 1 سے گھٹایا جائے، تو ان کا حاصل ضرب $(a + 1)(b - 1)$ ہوگا۔ اسے پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(a + 1)(b - 1) = (a + 1)b - (a + 1)1$$
$$= ab + b - (a + 1)$$
$$= ab + \boxed{b - a - 1} \quad \ldots (2)$$

اضافہ $(b - a - 1 > 0)$

اگر $a = 23$، اور $b = 27$ ہو، تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(23 + 1)(27 - 1) = (23 + 1)27 - (23 + 1)1$$
$$= 23 \times 27 + 27 - (23 + 1)$$
$$= 23 \times 27 + \boxed{27 - 23 - 1}$$

اضافہ

کیا حاصل ضرب ہمیشہ بڑھے گا؟ 3 ایسی مثالیں تلاش کریں جہاں حاصل ضرب کم ہو۔ جب a اور b منفی صحیح اعداد ہوں تو کیا ہوتا ہے؟

a اور b کی مختلف قدریں رکھ کر اوپر دیے گئے ہر معاملے کی جانچ کریں۔ مثال کے طور پر، $a = -5$، $b = 8$؛ $a = -4$، $b = -5$؛ وغیرہ۔

ہم نے دیکھا ہے کہ صحیح اعداد بھی تقسیمی خاصیت پر پورا اترتے ہیں، یعنی اگر x، y اور z کوئی بھی تین صحیح اعداد ہوں، تو $x(y + z) = xy + xz$۔

اس طرح، حاصل ضرب میں اضافے کے لیے جو عبارتیں ہم نے حاصل کی ہیں وہ اس وقت بھی درست رہتی ہیں جب حروفی اعداد منفی صحیح اعداد کی قدریں لیں، یعنی 1 اور 2 میں دی گئی عبارتیں منفی صحیح اعداد کی قدروں کے لیے بھی درست ہیں۔

یاد کریں کہ دو الجبری عبارتیں برابر ہوتی ہیں اگر وہ یکساں قدریں لیں جب ان کے حروفی اعداد کو اعداد سے بدلا جائے۔ یہ اعداد کوئی بھی صحیح اعداد ہو سکتے ہیں۔ ریاضیاتی بیانات جو دو الجبری عبارتوں کی مساوات ظاہر کرتے ہیں، جیسے

$$a(b + 8) = ab + 8a،$$

$$(a + 1)(b - 1) = ab + b - a - 1، \text{وغیرہ،}$$

انہیں **مماثلت** کہتے ہیں۔

اگر ایک عدد کو m سے اور دوسرے کو n سے اضافہ کیا جائے تو دو اعداد کا حاصل ضرب کتنا بدلے گا؟

APSCERT

If a and b are the initial numbers being multiplied, they become a + m and b + n.

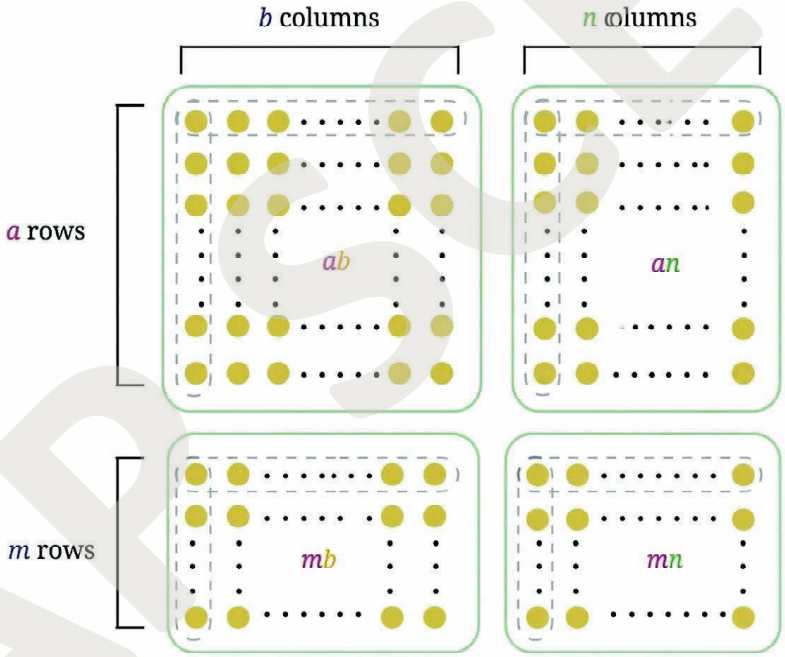
$$(a + m)(b + n) = (a + m)b + (a + m)n$$
$$= ab + mb + an + mn$$

The increase is an + bm + mn.

Notice that the product is the sum of the product of each term of (a + m) with each term of (b + n).

Identity 1 $(a + m)(b + n) = ab + mb + an + mn$

This identity can be visualised as follows -



$(a + m)(b + n)$

? This identity can be used to find how products change when the numbers being multiplied are increased or decreased by any amount. Can you see how this identity can be used when one or both numbers are decreased?

For example, let us reconsider the case when one number is increased by 1 and the other decreased by 1. Let us write the product (a + 1) (b - 1) as (a + 1) (b + (-1). Taking m = 1 and n = -1 in Identity 1, we have

اگر a اور b ابتدائی اعداد ہیں جن کو ضرب دیا جارہا ہے، تو وہ a + m اور b + n بن جاتے ہیں۔

$$(a + m)(b + n) = (a + m)b + (a + m)n$$

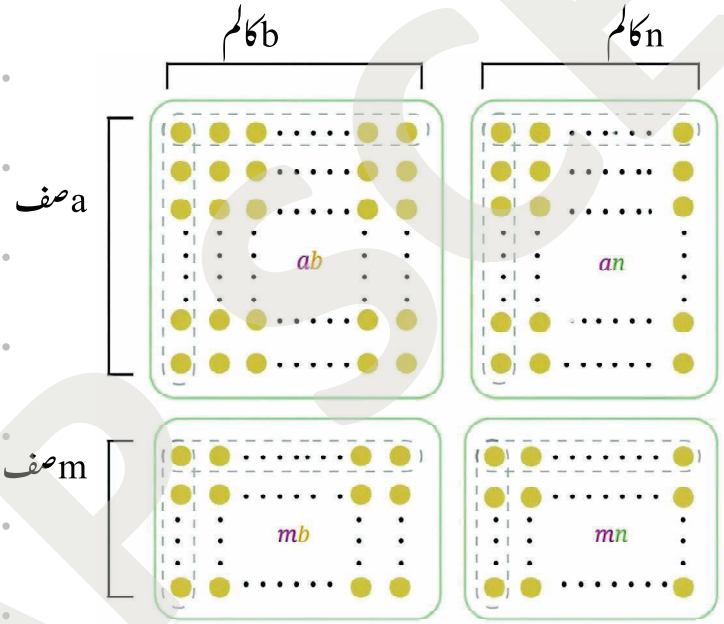
$$= ab + mb + an + mn$$

اضافہ an + bm + mn ہے۔

غور کریں کہ حاصل ضرب، (a + m) کی ہر رکن اور (b + n) کی ہر رکن کے حاصل ضرب کا مجموعہ ہے۔

$$(a + m)(b + n) = ab + mb + an + mn$$ مماثلت 1

اس مماثلت کو درج ذیل طریقے سے سمجھا جاسکتا ہے—



$(a + m)(b + n)$

اس مماثلت کو یہ معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے کہ جب ضرب کیے جانے والے اعداد کو کسی بھی مقدار سے بڑھایا یا گھٹایا جائے تو حاصل ضرب کیسے بدلتا ہے۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مماثلت کو کب استعمال کیا جاسکتا ہے جب ایک یا دونوں اعداد کم کیے جائیں؟ مثال کے طور پر، آیئے اس صورت پر دوبارہ غور کریں جب ایک عدد کو 1 سے بڑھایا جائے اور دوسرے کو 1 سے گھٹایا جائے۔ آیئے حاصل ضرب (a + 1)(b − 1) کو (a + 1)(b + (−1)) لکھتے ہیں۔ مماثلت 1 میں m = 1 اور n = −1 رکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$$ab + (1) \times b + a \times (-1) + (1) \times (-1) = ab + b - a - 1,$$

which is the same expression that we obtain earlier.

Use Identity 1 to find how the product changes when

(i) one number is decreased by 2 and the other increased by 3;

(ii) both numbers are decreased, one by 3 and the other by 4.

Verify the answers by finding the products without converting the subtractions to additions.

Generalising this, we can find the product (a + u) (b - v) as follows.

$$(a + u)(b - v) = (a + u)\, b - (a + u)\, v$$
$$= ab + ub - (av + uv)$$
$$= ab + ub - av - uv.$$

Check that this is the same as taking m = u and n = -v in Identity 1.

As in Identity 1, the product (a + u) (b - v) is the sum of the product of each term of a + u (a and u) with each term of b - v (b and (-v)). Notice that the signs of the terms in the products can be determined using the usual rules of integer multiplication.

See how the rules of integer multiplication allows us to handle multiple cases using a single identity!

Expand (i) (a - u) (b + v), (ii) (a - u) (b - v).

We get

$$(a - u)(b + v) = ab - ub + av - uv, \text{ and}$$
$$(a - u)(b - v) = ab - ub - av + uv.$$

The distributive property is not restricted to two terms within a bracket.

Example 1: Expand $\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right)$

$$\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3a}{2} \times a\right) - \left(\frac{3a}{2} \times b\right) + \left(\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5}\right)$$

The terms can be simplified as follows -

$$\frac{3a}{2} \times a = \frac{3}{2} \times (a \times a)$$

$ab + (1) \times b + a \times (-1) + (1) \times (-1) = ab + b - a - 1$،

جو وہی عبارت ہے جو ہمیں پہلے حاصل ہوتی ہے۔

؟ مماثلت 1 کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ حاصل ضرب کیسے بدلتا ہے جب

(i) ایک عدد کو 2 سے گھٹایا جائے اور دوسرے کو 3 سے بڑھایا جائے؛

(ii) دونوں اعداد کم کیے جائیں، ایک کو 3 سے اور دوسرے کو 4 سے۔

؟ تفریق کو جمع میں تبدیل کیے بغیر حاصل ضرب معلوم کر کے جوابات کی تصدیق کریں۔

اسے عام کرتے ہوئے، ہم حاصل ضرب $(a + u)(b - v)$ کو اس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(a + u)(b - v) = (a + u)b - (a + u)v$$

$$= ab + ub - (av + uv)$$

$$= ab + ub - av - uv$$

جانچیں کہ یہ مماثلت 1 میں $m = u$ اور $n = -v$ رکھنے کے برابر ہے۔

مماثلت 1 کی طرح، حاصل ضرب $(a + u)(b - v)$، $a + u$ کی ہر حد (a اور u) اور $b - v$ کی ہر حد (b اور $(-v)$) کے حاصل ضرب کا مجموعہ ہے۔ غور کریں کہ حاصل ضرب میں ارکان کی علامات صحیح اعداد کی ضرب کے معمول کے قواعد سے معلوم کی جا سکتی ہیں۔

دیکھیں کہ صحیح اعداد کی ضرب کے قواعد ہمیں ایک واحد مماثلت سے متعدد صورتوں کو کیسے سنبھالنے دیتے ہیں!

؟ پھیلائیں (i) $(a + u)(b + v)$، (ii) $(a - u)(b - v)$۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(a + u)(b + v) = ab + ub + av + uv$$، اور

$$(a - u)(b - v) = ab - ub - av + uv$$۔

تقسیمی خاصیت قوسین کے اندر دو ارکان تک محدود نہیں ہے۔

؟ مثال 1: پھیلائیں $\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right)$

$$\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3a}{2} \times a\right) - \left(\frac{3a}{2} \times b\right) + \left(\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5}\right)$$

ارکان کو اس طرح سادہ کیا جا سکتا ہے—

$$\frac{3a}{2} \times a = \frac{3}{2} \times (a \times a)$$

Using exponent notation, we can write $\frac{3}{2} \times (a \times a) = \frac{3}{2}a^2$

$$\frac{3a}{2} \times b = \frac{3}{2} \times (a \times b) = \frac{3}{2}ab$$

$$\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5} = (\frac{3}{2} \times \frac{1}{5})a = \frac{3}{10}a$$

So we get

$$\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5}) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{10}a.$$

Can any two terms be added to get a single term?

For example, can $\frac{3}{2}a^2$ and $\frac{3}{10}a$ be added to get a single term?

We see that no two terms have exactly the same letter-numbers, which would have allowed them to be simplified into a single term. So, a further simplification of the expression is not possible.

Recall that we call terms having the same letter-numbers as **like terms**.

Example 2: Expand (a + b) (a + b).

We have (a + b) (a + b) = (a+b) a + (a + b)b = a × a + b × a + ab + b × b

$= a^2 + ba + ab + b^2$

Since ba = ab, we have two terms having the same letter-numbers ab (or, that are like terms), and so can be added

$$ba + ab = ab + ab = 2ab$$

So we get

$$(a + b) (a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Example 3: Expand $(a + b) (a^2 + 2ab + b^2)$.

$(a + b) (a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)a^2 + (a + b) \times 2ab + (a + b)b^2$

$= (a \times a^2) + ba^2 + (a \times 2ab) + (b \times 2ab) + ab^2 + (b \times b^2)$

The terms can be simplified as follows -

$$a \times a^2 = a^3 \text{ (why?)}$$

$$ba^2 = a^2b$$

$$a \times 2ab = 2 \times a \times a \times b = 2a^2b$$

$$b \times 2ab = 2 \times a \times b \times b = 2ab^2$$

$$b \times b^2 = b^3$$

APSCERT

قوت نمائی علامت کا استعمال کرتے ہوئے، ہم لکھ سکتے ہیں $\frac{3}{2} \times (a \times a) = \frac{3}{2} a^2$

$$\frac{3a}{2} \times b = \frac{3}{2} \times (a \times b) = \frac{3}{2} ab$$

$$\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5} = (\frac{3}{2} \times \frac{1}{5})a = \frac{3}{10} a$$

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5}) = \frac{3}{2} a^2 - \frac{3}{2} ab + \frac{3}{10} a.$$

کیا کوئی دو ارکان ایک واحد رکن حاصل کرنے کے لیے جمع کی جا سکتی ہیں؟

مثال کے طور پر، کیا $\frac{3}{2} a^2$ اور $\frac{3}{2} a$ کو جمع کر کے ایک واحد رکن حاصل کی جا سکتی ہے؟

ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی بھی دو ارکان میں بالکل یکساں حروفی اعداد نہیں ہیں، جو انہیں ایک واحد رکن میں سادہ کرنے کی اجازت دیتے۔ اس لیے، عبارت کو مزید سادہ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یاد کریں کہ ہم یکساں حروفی اعداد والی ارکان کو **یکساں ارکان** کہتے ہیں۔

مثال 2: $(a + b)(a + b)$ کو پھیلائیں۔

ہمارے پاس ہے

$$(a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b$$
$$= a \times a + b \times a + ab + b \times b$$
$$= a^2 + ba + ab + b^2$$

چونکہ $ba = ab$ ہے، اس لیے ہمارے پاس یکساں حروفی اعداد ab والی دو ارکان ہیں (یا، جو یکساں ارکان ہیں)، اس لیے جمع کی جا سکتی ہیں

$$ba + ab = ab + ab = 2ab$$

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$۔

مثال 3: $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$ کو پھیلائیں۔

$$(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)a^2 + (a + b) \times 2ab + (a + b)b^2$$
$$= (a \times a^2) + ba^2 + (a \times 2ab) + (b \times 2ab) + ab^2 + (b \times b^2)$$

حدوں کو اس طرح مختصر کیا جا سکتا ہے $a \times a^2 = a^3$ — (کیوں؟)

$$ba^2 = a^2 b$$
$$a \times 2ab = 2 \times a \times a \times b = 2a^2 b$$
$$b \times 2ab = 2 \times a \times b \times b = 2ab^2$$
$$b \times b^2 = b^3$$

So, $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$.

We see that a^2b and $2a^2b$ have the same letter-numbers (or, are like

$$a^2b + 2a^2b = (1 + 2)\, a^2\, b = 3a^2\, b.$$

Similarly, ab^2 and $2ab^2$ are like terms and so can be added

$$ab^2 + 2ab^2 = (1 + 2)ab^2 = 3ab^2.$$

Thus, we have

$$(a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A Pinch of History

The distributive property of multiplication over addition was implicit in the calculations of mathematicians in many ancient civilisations, particularly in ancient Egypt, Mesopotamia, Greece, China, and India. For example, the mathematicians Euclid (in geometric form) and Aryabhata (in algebraic form) used the distributive law in an implicit manner extensively in their mathematical and scientific works. The first explicit statement of the distributive property was given by Brahmagupta in his work Brahmasphutasiddhanta (Verse 12.55), who referred to the use of the property for multiplication as khanda-gunanam (multiplication by parts). His verse states, "The multiplier is broken up into two or more parts whose sum is equal to it; the multiplicand is then multiplied by each of these and the results added". That is, if there are two parts, then using letter symbols this is equivalent to the identity $(a + b)\, c = ac + bc$. In the next verse (Verse 12.56), Brahmagupta further describes a method for doing fast multiplication using this distributive property, which we explore further in the next section.



Figure it Out - 6.1

1. Observe the multiplication grid below. Each number inside the grid is formed by multiplying two numbers. If the middle number of a 3×3 frame is given by the expression pq, as shown in the figure, write the expressions for the other numbers in the grid.

اس طرح، $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$۔

ہم دیکھتے ہیں کہ a^2b اور $2a^2b$ کے یکساں حروفی اعداد ہیں (یا، یکساں ارکان ہیں)

$$a^2b + 2a^2b = (1 + 2)a^2b = 3a^2b$$۔

اسی طرح، ab^2 اور $2ab^2$ یکساں ارکان ہیں اس لیے جمع کی جاسکتی ہیں

$$ab^2 + 2ab^2 = (1 + 2)ab^2 = 3ab^2$$۔

اس طرح، ہمارے پاس ہے

$$(a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$۔

تاریخ کی ایک جھلک

ضرب کی جمع پر تقسیمی خاصیت کئی قدیم تہذیبوں کے ریاضی دانوں کے حسابات میں مضمر تھی، خاص طور پر قدیم مصر، میسوپوٹامیا، یونان، چین اور ہندوستان میں۔ مثال کے طور پر، ریاضی دان اقلیدس (ہندسی شکل میں) اور آریہ بھٹ (الجبری شکل میں) نے اپنے ریاضیاتی اور سائنسی کاموں میں تقسیمی قانون کو وسیع پیمانے پر مضمر طریقے سے استعمال کیا۔ تقسیمی خاصیت کا پہلا واضح بیان برہم گپت نے اپنی کتاب برہم سپھوٹ سدھانت (آیت 12.55) میں دیا، جنہوں نے ضرب کے لیے اس خاصیت کے استعمال کو کھنڈا- گونانم (حصوں میں ضرب) کہا۔ ان کی آیت میں کہا گیا ہے، "ضرب کنندہ کو دو یا زیادہ حصوں میں توڑا جاتا ہے جن کا مجموعہ اس کے برابر ہو؛ پھر مضروب کو ان میں سے ہر ایک سے ضرب دیا جاتا ہے اور نتائج جمع کیے جاتے ہیں"۔ یعنی، اگر دو حصے ہوں، تو حروفی علامات کا استعمال کرتے ہوئے یہ یکسانی $(a + b)\, c = ac + bc$ کے مساوی ہے۔ اگلی آیت (آیت 12.56) میں، برہم گپت نے اس تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے تیز ضرب کرنے کا طریقہ مزید بیان کیا، جسے ہم اگلے حصے میں مزید دریافت کریں گے۔



حل کیجیے–6.1

1. نیچے دیے گئے ضرب کے جدول کو غور سے دیکھیں۔ جدول کے اندر ہر عدد دو اعداد کی ضرب سے بنتا ہے۔ اگر 3×3 فریم کا درمیانی عدد عبارت pq سے ظاہر کیا جائے، جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے، تو جدول میں دیگر اعداد کی عبارتیں لکھیں۔

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3 × 5	3 × 6	3 × 7
4 × 5	4 × 6	4 × 7
5 × 5	5 × 6	5 × 7

	pq	

2. Expand the following products.

(i) $(3 + u)(v - 3)$ (ii) $\frac{2}{3}(15 + 6a)$

(iii) $(10a + b)(10c + d)$ (iv) $(3 - x)(x - 6)$

(v) $(-5a + b)(c + d)$ (vi) $(5 + z)(y + 9)$

3. Find 3 examples where the product of two numbers remains unchanged when one of them is increased by 2 and the other is decreased by 4. For an example, $1 \times 6 = (1+ 2) \times (6 - 4)$



4. Expand (i) $(a + ab - 3b^2)(4 + b)$, and (ii) $(4y + 7)(y + 11z - 3)$.

5. Expand (i) $(a - b)(a + b)$, (ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ and (iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, Do you see a pattern? What would be the next identity in the pattern that you see? Can you check it by expanding?

6.1.1 Fast Multiplications Using the Distributive Property

The distributive property can be used to come up with quick methods of multiplication when certain types of numbers are multiplied.

When one of the numbers is 11, 101, 1001, ...

? Use the following multiplications to find the product of a number with 11 in a single step.

(a) 3874×11 (b) 5678×11

Let us take the first multiplication.

$$3874 \times 11 = 3874\,(10 + 1) = 38740 + 3874$$

$$38740$$

$$+\ 3874$$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3×5	3×6	3×7
4×5	4×6	4×7
5×5	5×6	5×7

	pq	

2. درج ذیل حاصل ضرب کو پھیلائیں۔

(i) $(3+u)(v-3)$ (ii) $(15+6a)$

(iii) $(10a+b)(10c+d)$ (iv) $(3-x)(x-6)$

(v) $(-5a+b)(c+d)$ (vi) $(5+z)(y+9)$



3. 3 ایسی مثالیں تلاش کریں جہاں دو اعداد کا حاصل ضرب اس وقت بھی تبدیل نہ ہو جب ان میں سے ایک کو 2 سے بڑھایا جائے اور دوسرے کو 4 سے گھٹایا جائے۔ مثال کے طور پر، $(6-4)\times(2+1) = 6\times1$

4. پھیلائیں (i) $(a+ab-3b^2)(4+b)$، اور (ii) $(4y+7)(y+11z-3)$۔

5. پھیلائیں (i) $(a-b)(a+b)$، (ii) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ اور (iii) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$۔

کیا آپ کوئی نمونہ دیکھ رہے ہیں؟ آپ کے دیکھے ہوئے نمونے میں اگلی مماثلت کیا ہوگی؟ کیا آپ اسے پھیلا کر جانچ سکتے ہیں؟

6.1.1 تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے تیز ضرب

تقسیمی خاصیت کو کچھ خاص قسم کے اعداد کی ضرب میں تیز طریقے اختیار کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

جب ایک عدد 11، 101، 1001، ... ہو

درج ذیل ضرب کا استعمال کرتے ہوئے کسی عدد کو 11 سے ایک مرحلے میں ضرب دینے کا طریقہ معلوم کریں۔

(a) 3874×11، (b) 5678×11 آیئے پہلی ضرب لیتے ہیں۔

$$3874\times11 = 3874(10+1) = 38740+3874$$

$$38740$$

$$+3874$$

Notice how the digits are getting added.

Let us take a 4-digit number dcba, that is, the number that has d in the thousands place, c in the hundreds place, b in the tens place and a in the units place.

$$dcba \times (10 + 1) = dcba \times 10 + dcba.$$

This becomes

d	c	b	a	o
+	d	c	b	a
d	(c + d)	(b + c)	(a + b)	a

This can be used to obtain the product in one line.

Step 1

$$\begin{array}{r} 387④ \times 11 \\ \hline 4 \end{array}$$

Step 2

$$\begin{array}{r} \overset{①}{\curvearrowright}+ \\ 3874 \times 11 \\ \hline 14 \end{array}$$

Step 3

$$\begin{array}{r} \overset{①①}{\curvearrowright}+ \\ 3874 \times 11 \\ \hline 614 \end{array}$$

Step 4

$$\begin{array}{r} \overset{①①①}{\underset{0\ 1}{\curvearrowright}}+ \\ 3874 \times 11 \\ \hline 2614 \end{array}$$

Step 5

$$\begin{array}{r} ①①① \\ \overset{1}{③}874 \times 11 \\ \hline 42614 \end{array}$$

? Describe a general rule to multiply a number (of any number of digits) by 11 and write the product in one line.

Evaluate (i) 94×11, (ii) 495×11, (iii) 3279×11, (iv) 4791256×11.

? Can we come up with a similar rule for multiplying a number by 101?

? Multiply 3874 by 101.

Let us take a 4-digit number dcba.

$$dcba \times 101 = dcba \times (100 + 1) = dcba \times 100 + dcba.$$

This becomes

d	c	b	a	o	o
+		d	c	b	a
d	c	(b + d)	(a + c)	b	a

? Use this to multiply 3874×101 in one line.

APSCERT

غور کریں کہ ہندسے کیسے جمع ہو رہے ہیں۔

آیئے ایک 4 ہندسوں کا عدد dcba لیتے ہیں، یعنی وہ عدد جس کے ہزار کے مقام پر d، سیکڑے کے مقام پر c، دہائی کے مقام پر b اور اکائی کے مقام پر a ہو۔

$$dcba \times (10 + 1) = dcba \times 10 + dcba$$

یہ اس طرح بنتا ہے

d	c	b	a	o
+	d	c	b	a
d	(c + d)	(b + c)	(a + b)	a

اسے ایک سطر میں حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$387④ \times 11$ → 4

3874×11 (①+) → 14

3874×11 (①①+) → 614

3874×11 (①①①+, 0 1) → 2614

$③874 \times 11$ (①①①, 1) → 42614

کسی بھی ہندسوں والے عدد کو 11 سے ضرب دینے کا ایک عمومی قاعدہ بیان کریں اور حاصل ضرب ایک صف میں لکھیں۔

حساب لگائیں (i) 11×94، (ii) 11×495، (iii) 11×3279، (iv) 11×4791256۔



کیا ہم کسی عدد کو 101 سے ضرب دینے کے لیے بھی اسی طرح کا قاعدہ بنا سکتے ہیں؟

3874 کو 101 سے ضرب دیں۔

آیئے ایک 4 ہندسوں کا عدد dcba لیتے ہیں۔

$$dcba \times 101 = dcba \times (100 + 1) = dcba \times 100 + dcba$$

یہ اس طرح بنتا ہے

d	c	b	a	o	o
+		d	c	b	a
d	c	(b + d)	(a + c)	b	a

اسے استعمال کرتے ہوئے 3874×101 ایک سطر میں ضرب دیں۔

What could be a general rule to multiply a number by 101 and write the product in one line? Extend this rule for multiplication by 1001, 10001, ...

Use this to find (i) 89 × 101, (ii) 949 × 101, (iii) 265831 × 1001, (iv) 1111 × 1001, (v) 9734 × 99 and (vi) 23478 × 999.



Such methods of applying the distributive property to easily multiply two numbers were discussed extensively in the ancient mathematical works of Brahmagupta (628 CE), Sridharacharya (750 CE) and Bhaskaracharya (Lilavati, 1150 CE). In his work *Brahmasphuta-siddhanta* (Verse 12.56), Brahmagupta refers to such methods for fast multiplication using the distributive property as **ista-gunana.**

6.2 Special Cases of the Distributive Property

Square of the Sum/Difference of Two Numbers

The area of a square of sidelength 60 units is 3600 sq. units (60^2) and that of a square of sidelength 5 units is 25 sq. units (5^2). Can we use this to find the area of a square of sidelength 65 units?

A square of sidelength 65 can be split into 4 regions as shown in the figure - a square of sidelength 60, a square of sidelength 5, and two rectangles of sidelengths 60 and 5. The area of the square of sidelength 65 is the sum of the areas of all its constituent parts. Can you find the areas of the four parts in the figure above?

We get

$65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 5^2 + 2 \times (60 \times 5)$.

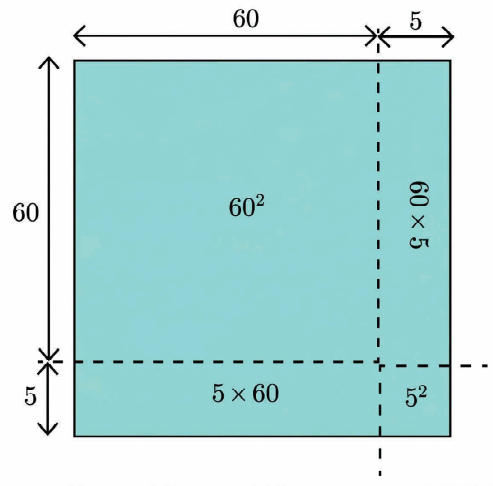
$= 3600 + 25 + 600 = 4225$ sq. units.

Let us multiply $(60 + 5) \times (60 + 5)$ using the distributive property.

$(60 + 5) \times (60 + 5)$

$= 60 \times 60 + 5 \times 60 + 60 \times 5 + 5 \times 5$

$= 60^2 + 2 \times (60 \times 5) + 5^2$.



APSCERT

کسی عدد کو 101 سے ضرب دینے اور حاصل ضرب ایک صف میں لکھنے کا عمومی قاعدہ کیا ہو سکتا ہے؟



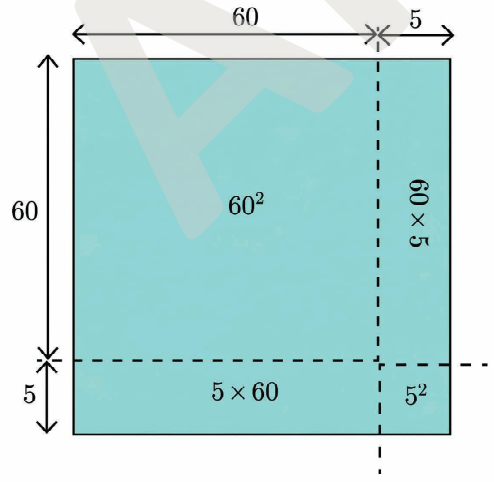
اس قاعدے کو 1001، 10001، ... کی ضرب تک بڑھائیں۔

اسے استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں (i) 101×89، (ii) 101×949، (iii) 1001×265831، (iv) 1001×1111، (v) 99×9734 اور (vi) 999×23478۔

تقسیمی خاصیت کو دو اعداد کو آسانی سے ضرب دینے کے لیے استعمال کرنے کے ایسے طریقوں پر قدیم ریاضیاتی کتابوں میں تفصیل سے بحث کی گئی ہے، جن میں برہم گپت (628 عیسوی)، سریدھاراچاریہ (750 عیسوی) اور بھاسکرا چاریہ (لیلاوتی، 1150 عیسوی) کی تصانیف شامل ہیں۔ اپنی کتاب برہم سپھوٹ سدھانت (آیت 12.56) میں، برہم گپت نے تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے تیز ضرب کے ایسے طریقوں کو اِشٹ گُنّب کہا ہے۔

6.2 تقسیمی خاصیت کے خاص معاملات دو اعداد کے مجموعے / فرق کا مربع

60 اکائی ضلع والے مربع کا رقبہ 3600 مربع اکائی (60^2) ہے اور 5 اکائی ضلع والے مربع کا رقبہ 25 مربع اکائی (5^2) ہے۔ کیا ہم اسے 65 اکائی ضلع والے مربع کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں؟ 65 ضلع والے مربع کو تصویر میں دکھائے گئے مطابق 4 حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے — 60 ضلع والا ایک مربع، 5 ضلع والا ایک مربع، اور 60 اور 5 اضلاع والے دو مستطیل۔ 65 ضلع والے مربع کا رقبہ اس کے تمام اجزاء کے رقبوں کا مجموعہ ہے۔ کیا آپ اوپر کی تصویر میں چاروں حصوں کے رقبے معلوم کر سکتے ہیں؟



ہمیں حاصل ہوتا ہے

$65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 5^2 + 2 \times (60 \times 5)$۔

$= 3600 + 25 + 600 = 4225$ مربع اکائی۔

آیئے تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے

$(60 + 5) \times (5 + 60)$ ضرب کریں۔

$(60 + 5) \times (60 + 5)$

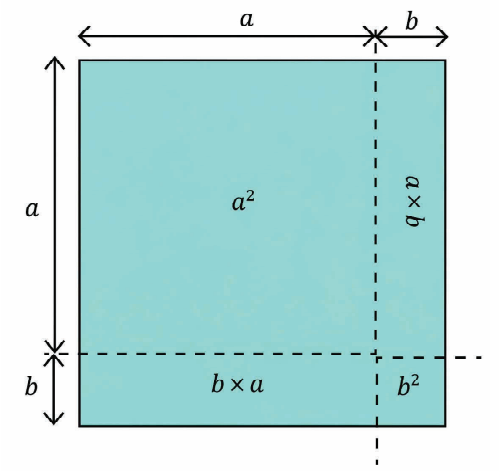
$= 60 \times 60 + 5 \times 60 + 60 \times 5 + 5 \times 5$

$= 60^2 + 2 \times (60 \times 5) + 5^2$۔

? What if we write 65^2 as $(30 + 35)^2$ or $(52 + 13)^2$?

Draw the figures and check the area that you get.

Let us look at the general expression for the square of sum of two numbers, $(a + b)^2$.



Using the distributive property, $(a+b)^2$ can be expanded as

$(a+b) \times (a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$

$= a^2 + 2ab + b^2$,

as we had already seen in Example 2.

Identity 1A $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



? If a and b are any two integers, is $(a + b)^2$ always greater than $a^2 + b^2$? If not, when is it greater?

? Use Identity 1A to find the values of 104^2, 37^2. (Hint: Decompose 104 and 37 into sums or differences of numbers whose squares are easy to compute.)

? Use Identity 1A to write the expressions for the following.

(i) $(m + 3)^2$ (ii) $(6 + p)^2$

? Expand $(6x + 5)^2$.

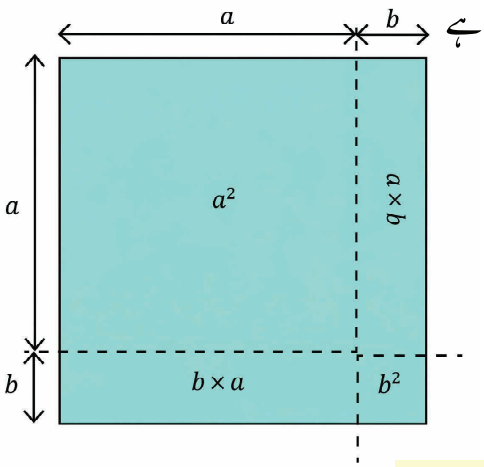
Using the Distributive Property	Using the Identity
$(6x + 5)^2 = (6x + 5)(6x + 5)$ $= (6x \times 6x) + (5 \times 6x)$ $+(6x \times 5) + 5 \times 5$ $= (6x)^2 + 2(6x \times 5) + 5^2$ $= 36x^2 + 60x + 25.$	$(6x + 5)^2 = (6x)^2 + 5^2 + 2 \times (6x \times 5)$ $= 36x^2 + 25 + 60x.$ $= 36x^2 + 60x + 25$

اگر ہم 65^2 کو $(30 + 35)^2$ یا $(52 + 13)^2$ لکھیں تو کیا ہو گا؟

تصویریں بنائیں اور حاصل ہونے والے رقبے کی جانچ کریں۔

آیئے دو اعداد کے مجموعے کے مربع کی عمومی عبارت $(a + b)^2$ دیکھتے ہیں۔

تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے، $(a + b)^2$ کو اس طرح پھیلایا جا سکتا ہے



$$a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = (a + b) \times (a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$ ،

جیسا کہ ہم مثال 2 میں پہلے ہی دیکھ چکے ہیں۔

مماثلت 1A $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اگر a اور b کوئی بھی دو صحیح اعداد ہوں، تو کیا $(a + b)^2$ ہمیشہ $a^2 + b^2$ سے بڑا ہوتا ہے؟

اگر نہیں، تو کب بڑا ہوتا ہے؟



یکسانی 1A کا استعمال کرتے ہوئے 104^2، 37^2 کی قدریں معلوم کریں۔

(اشارہ: 104 اور 37 کو ایسے اعداد کے مجموعے یا فرق میں توڑیں جن کے مربع آسانی سے حساب کیے جا سکتے ہوں۔)

مماثلت 1A کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی عبارتیں لکھیں۔

(i) $(m + 3)^2$ (ii) $(6 + p)^2$

$(6x + 5)^2$ کو پھیلائیں۔

مماثلت کا استعمال کرتے ہوئے	تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے
$(6x + 5)^2 = (6x)^2 + 5^2 + 2 \times (6x \times 5)$ $= 36x^2 + 25 + 60x.$ $= 36x^2 + 60x + 25$	$(6x + 5)^2 = (6x + 5)\ (6x + 5)$ $= (6x \times 6x) + (5 \times 6x)$ $+(6x \times 5) + 5 \times 5$ $= (6x)^2 + 2\ (6x \times 5) + 5^2$ $= 36x^2 + 60x + 25.$

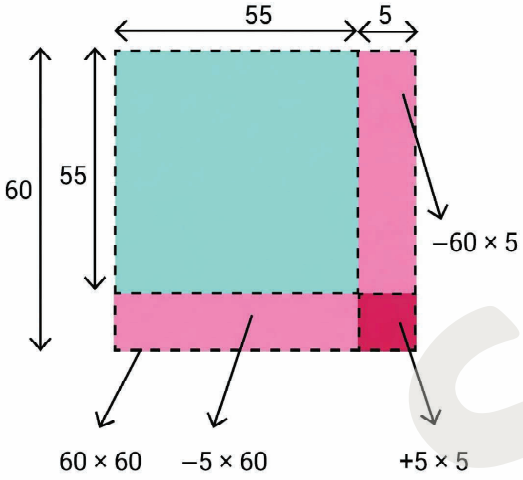
If you have difficulty remembering or using the general rule, you can just apply the distributive property to multiply and get the desired result.

? Expand $(3j + 2k)^2$ using both the identity and by applying the distributive property.

? Can we use 60^2 (= 3600) and 5^2 (= 25) to find the value of $(60 - 5)^2$ or 55^2?

Let us approach this through geometry by drawing a square of side length 55 sitting inside a square of side length 60.

Area of a square of sidelength 55 is $(60 - 5)^2 = 55^2$.



We can get the area of the square of sidelength 55 by taking the area of the square of sidelength 60 and removing the areas of the two rectangles of sidelengths 60 and 5, i.e., $60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60)$. By doing this, we remove the area of the small square of sidelength 5 twice. What can we do with this expression to get the actual area?

We can add back the area of the square of sidelength 5 to this expression. That way, we are only subtracting this area once.

So,

$$(60 - 5)^2 = 60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60) + 5^2$$
$$= 3600 - 300 - 300 + 25$$
$$= 3025.$$

The area of the square of sidelength 55 is 3025 sq. units.

We have seen what $(a + b)^2$ gives when expanded. What is the expansion of $(a - b)^2$?

Using the distributive property,

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$$
$$= (a)^2 - ba - ab + (b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

APSCERT

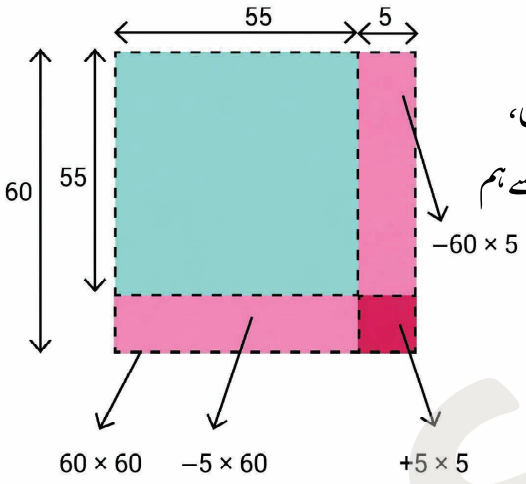
اگر آپ کو عمومی قاعدہ یاد رکھنے یا استعمال کرنے میں دشواری ہو، تو آپ صرف تقسیمی خاصیت کو ضرب کے لیے استعمال کر کے مطلوبہ نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں۔

تقسیمی خاصیت اور مماثلت دونوں کا استعمال کرتے ہوئے $(3j + 2k)^2$ کو پھیلائیں۔

کیا ہم 60^2 (=3600) اور 5^2 (=25) کو $(60 - 5)^2$ یا 55^2 کی قدر معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں؟

آیئے اسے ہندسی طریقے سے سمجھتے ہیں—60 ضلع والے مربع کے اندر 55 ضلع والا مربع بنائیں۔

55 ضلع والے مربع کا رقبہ $55^2 = (60 - 5)^2$ ہے۔



ہم 55 ضلع والے مربع کا رقبہ 60 ضلع والے مربع کے رقبے سے 60 اور 5 اضلاع والے دو مستطیلوں کے رقبے گھٹا کر حاصل کر سکتے ہیں، یعنی $60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60)$۔ ایسا کرنے سے ہم 5 ضلع والے چھوٹے مربع کا رقبہ دو بار گھٹا دیتے ہیں۔

اصل رقبہ حاصل کرنے کے لیے ہم اس عبارت کے ساتھ کیا کر سکتے ہیں؟

ہم اس عبارت میں 5 ضلع والے مربع کا رقبہ واپس جمع کر سکتے ہیں۔

اس طرح، ہم یہ رقبہ صرف ایک بار گھٹاتے ہیں۔ اس لیے،

$$\begin{aligned}(60 - 5)^2 &= 60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60) + 5^2 \\ &= 3600 - 300 - 300 + 25 \\ &= 3025\end{aligned}$$

55 ضلع والے مربع کا رقبہ 3025 مربع اکائی ہے۔ ہم نے دیکھا ہے کہ $(a + b)^2$ کو پھیلانے پر کیا حاصل ہوتا ہے۔

$(a - b)^2$ کا پھیلاؤ کیا ہے؟

تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے،

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b) \times (a - b) \\ &= (a)^2 - ba - ab + (b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

APSCERT

We can also use the expansion of $(a + b)^2$ to find the expansion of $(a - b)^2$. Think how.

Hint: $(a - b)^2 = (a + (-b)^2$.

We can now directly use the expansion of $(a + b)^2$.

$(a + (-b)^2 = (a)^2 + (-b)^2 + 2 \times (a) \times (-b)$

Identity 1B $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Find the general expansion of $(a - b)^2$ using geometry, as we did for 55^2.

Use the identity $(a - b)^2$ to find the values of (a) 99^2 and (b) 58^2.

Expand the following using both Identity 1B and by applying the distributive property

(i) $(b - 6)^2$ (ii) $(- 2a + 3)^2$ (iii) $\left(7y - \frac{3}{4z}\right)^2$

Investigating Patterns

Pattern 1

Look at the following pattern.

$$2\,(2^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2$$
$$2\,(3^2 + 1^2) = 4^2 + 2^2$$
$$2\,(6^2 + 5^2) = 11^2 + 1^2$$
$$2\,(5^2 + 3^2) = 8^2 + 2^2.$$

Take a pair of natural numbers. Calculate the sum of their squares. Can you write twice this sum as a sum of two squares? (i.e., as the above Pattern 1)

Try this with other pairs of numbers. Have you figured out a pattern?

Notice that $2\,(6^2 + 5^2) = (6 + 5)^2 + (6 - 5)^2$.

Do the identities below help in explaining the observed pattern?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

Adding the like terms $a^2 + a^2 = 2a^2$, $b^2 + b^2 = 2b^2$ and $2ab - 2ab = 0$, we get

$$2\,(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

Pattern 2

Here is a related pattern. Try to describe the pattern using algebra to determine if the pattern always holds.

ہم $(a + b)^2$ کی توسیع کو استعمال کرتے ہوئے $(a - b)^2$ کی توسیع بھی معلوم کرسکتے ہیں۔ غور کریں کیسے ؟

اشارہ: $(a - b)^2 = (a + (-b))^2$

اب ہم براہِ راست $(a + b)^2$ کی توسیع استعمال کرسکتے ہیں۔ $(a + (-b))^2 = (a)^2 + (-b)^2 + 2 \times (a) \times (-b)$

مماثلت 1B $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- $(a - b)^2$ کی عمومی توسیع جیومیٹری کے ذریعے معلوم کریں، جیسے ہم نے 55^2 کے لیے کی تھی۔
- $(a - b)^2$ کی مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت معلوم کریں: (a) 99^2 (b) 58^2
- درج ذیل کو مماثلت 1B اور خاصیتِ تقسیم دونوں طریقوں سے توسیع کریں:

(i) $(b - 6)^2$ (ii) $(-2a + 3)^2$ (iii) $\left(7y - \frac{3}{4z}\right)^2$

نمونوں کی تحقیق

نمونہ 1

درج ذیل نمونے کو دیکھیں:

$2(2^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2$

$2(3^2 + 1^2) = 4^2 + 2^2$

$2(6^2 + 5^2) = 11^2 + 1^2$

$2(5^2 + 3^2) = 8^2 + 2^2$

- طبعی اعداد کا ایک جوڑا لیں۔ ان کے مربعوں کا مجموعہ معلوم کریں۔ کیا آپ اس مجموعے کے دوگنے کو دو مربعوں کے مجموعوں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں؟

اسے دوسرے اعداد کے جوڑوں کے ساتھ بھی آزمائیں۔ کیا آپ نے کوئی نمونہ دریافت کیا؟

غور کریں کہ : $2(6^2 + 5^2) = (6 + 5)^2 + (6 - 5)^2$

- کیا درج ذیل مساوات اس مشاہدہ شدہ نمونے کی وضاحت میں مدد دیتی ہیں؟

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$

یکساں ارکان کو جمع کرنے پر: $2ab - 2ab = 0$، $b^2 + b^2 = 2b^2$، $a^2 + a^2 = 2a^2$

لہٰذا ہمیں حاصل ہوتا ہے: $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$

نمونہ 2

- یہ ایک متعلقہ نمونہ ہے۔ کوشش کریں کہ الجبرا کی مدد سے اس نمونے کو بیان کریں اور معلوم کریں کہ آیا یہ نمونہ ہمیشہ درست رہتا ہے یا نہیں۔

$$9 \times 9 - 1 \times 1 = 10 \times 8$$

$$8 \times 8 - 6 \times 6 = 14 \times 2$$

$$7 \times 7 - 2 \times 2 = 9 \times 5$$

$$10 \times 10 - 4 \times 4 = 14 \times 6$$

The pattern here appears to be $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$.

Is this a true identity? Using the distributive property, we get

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - ab + ba - a^2.$$

Adding the like terms, $ab + (- ab) = 0$, we see that indeed

Identity 1C $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$.

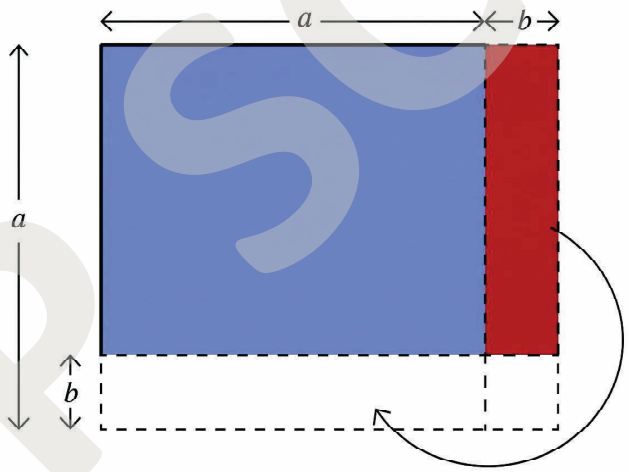
You had seen this identity earlier in Figure it Out 6.1 - 5 (i).

? Use Identity 1C to calculate 98×102, and 45×55.

Try This

? Show that $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ geometrically.

Hint :



What do we get when this piece is moved?

Sridharacharya (750 CE) gave an interesting method to quickly compute the squares of numbers using Identity 1C! Consider the following modified form of this identity -

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

? Why is this identity true?

Now, for example, 31^2 can be found by taking $a = 31$ and $b = 1$.

$$9 \times 9 - 1 \times 1 = 10 \times 8$$

$$8 \times 8 - 6 \times 6 = 14 \times 2$$

$$7 \times 7 - 2 \times 2 = 9 \times 5$$

$$10 \times 10 - 4 \times 4 = 14 \times 6$$

یہاں نمونہ ایسا معلوم ہوتا ہے : $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

کیا یہ واقعی ایک صحیح مساوات ہے؟ خاصیتِ تقسیم استعمال کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے :

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

یکساں ارکان کو جمع کرنے پر : $ab + (-ab) = 0$ لہٰذا ہم واقعی دیکھتے ہیں :

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$$ مماثلت 1C

آپ یہ مماثلت پہلے بھی حل کیجیے 6.1- (i) 5 میں دیکھ چکے ہیں۔

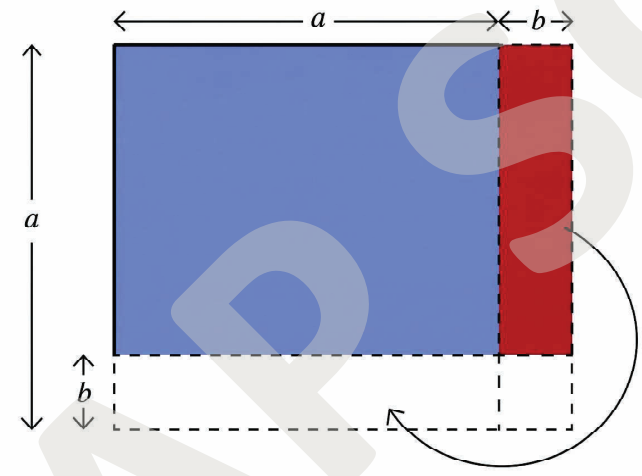
یہ بھی کیجیے

؟ مماثلت 1C استعمال کرتے ہوئے 98×102 اور 45×55 معلوم کریں۔

؟ جیومیٹری کے ذریعے ثابت کریں کہ :

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$$

اشارہ:



جب اس حصے کو منتقل کیا جاتا ہے
تو ہمیں کیا حاصل ہوتا ہے؟

سری دھر آچاریہ (750 عیسوی) نے مماثلت 1C استعمال کرتے ہوئے اعداد کے مربعات جلد معلوم کرنے کا ایک دلچسپ طریقہ بتایا۔ اس مماثلت کی درج ذیل تبدیل شدہ صورت پر غور کریں:

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

؟ یہ مماثلت درست کیوں ہے؟

مثال کے طور پر، 31^2 معلوم کرنے کے لیے $a = 31$ اور $b = 1$ لیا جاتا ہے۔

$$31^2 = (31 + 1)(31 - 1) + 1^2$$
$$= 32 \times 30 + 1$$
$$= 961.$$

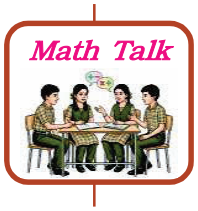
197^2 can be found by taking a = 197, and b = 3.

$$197^2 = (197 + 3)(197 - 3) + 3^2$$
$$= 200 \times 194 + 9$$
$$= 38809.$$



Figure it Out - 6.2

1. Which is greater: $(a - b)^2$ or $(b - a)^2$? Justify your answer.
2. Express 100 as the difference of two squares.
3. Find 406^2, 72^2, 145^2, 1097^2, and 124^2 using the identities you have learnt so far.
4. Do Patterns 1 and 2 hold only for counting numbers? Do they hold for negative integers as well? What about fractions? Justify your answer.



6.3 Mind the Mistake, Mend the Mistake

We have expanded and simplified some algebraic expressions below to their simplest forms.

(i) Check each of the simplifications and see if there is a mistake.

(ii) If there is a mistake, try to explain what could have gone wrong.

(iii) Then write the correct expression

1. $-3p(-5p + 2q)$
   $= -3p + 5p - 2q$
   $= p - 2q$

2. $2(x - 1) + 3(x + 4)$
   $= 2x - 1 + 3x + 4$
   $= 5x + 3$

3. $y + 2(y + 2)$
   $= (y + 2)^2$
   $= y^2 + 4y + 4$

4. $(5m + 6n)^2$
   $= 25m^2 + 36n^2$

5. $(-q + 2)^2$
   $= q^2 - 4q + 4$

6. $3a(2b \times 3c)$
   $= 6ab + 9ac$
   $= 54a2bc$

APSCERT

$$31^2 = (31 + 1)(31 - 1) + 1^2$$

$$= 32 \times 30 + 1$$

$$= 961$$

اسی طرح 197^2 معلوم کرنے کے لیے $a = 197$ اور $b = 3$ لیا جاتا ہے۔

$$197^2 = (197 + 3)(197 - 3) + 3^2$$

$$= 200 \times 194 + 9$$

$$= 38809$$



حل کیجیے–6.2

1. کون سا بڑا ہے $(a - b)^2$ یا $(b - a)^2$؟ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔
2. 100 کو دو مربعوں کے فرق کی صورت میں ظاہر کریں۔
3. 406^2، 72^2، 145^2، 1097^2، اور 124^2 ان متماثلت کی مدد سے معلوم کریں جو آپ نے اب تک سیکھی ہیں۔
4. کیا نمونہ 1 اور نمونہ 2 صرف شمار کے اعداد کے لیے درست ہیں؟ کیا یہ منفی صحیح اعداد کے لیے بھی درست ہیں؟ کسروں کے لیے کیا صورت ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔



6.3 غلطی کو پہچانو، غلطی کو درست کرو

ہم نے کچھ الجبری عبارات کو توسیعی اور مختصر کر کے ان کی سادہ ترین صورتیں لکھی ہیں۔

(i) ہر آسان شکل کو جانچیں اور دیکھیں کہ آیا اس میں کوئی غلطی ہے۔

(ii) اگر غلطی ہو تو وضاحت کریں کہ کیا غلط ہوا ہو گا۔

(iii) پھر درست عبارت لکھیں۔

1. $-3p\,(-5p + 2q)$
$= -3p + 5p - 2q$
$= p - 2q$

2. $2(x - 1) + 3(x + 4)$
$= 2x - 1 + 3x + 4$
$= 5x + 3$

3. $y + 2\,(y + 2)$
$= (y + 2)^2$
$= y^2 + 4y + 4$

4. $(5m + 6n)^2$
$= 25m^2 + 36n^2$

5. $(-q + 2)^2$
$= q^2 - 4q + 4$

6. $3a\,(2b \times 3c)$
$= 6ab + 9ac$
$= 54a2bc$

AP SCERT

(7) $\frac{1}{2}(10s-6)+3$
$= 5s-3+3$
$= 5s$

(8) $5w^2 + 6w$
$= 11w^2$

(9) $2a^3 + 3a^3 + 6a^2b + 6ab^2$
$= 5a^3 + 12a^2b^2$

(10) $(x+2)(x+5)$
$= (x+2)x + (x+2)5$
$= x^2 + 2x + 5x + 10$
$= x^2 + 7x + 10$

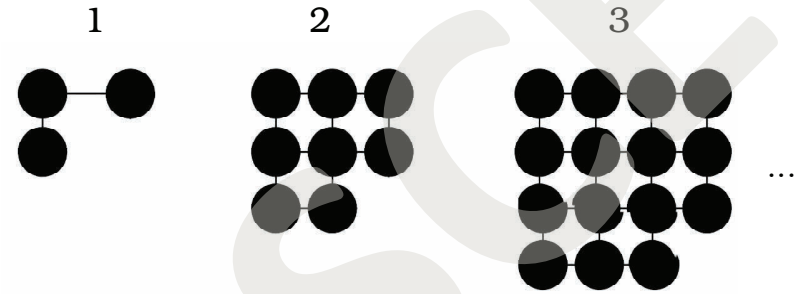
(11) $(a+2)(b+4)$
$= ab + 8$

(12) $ah^2 + a^2b + a^2b^2$
$= ab(a + b + ab)$

6.4 This Way or That Way, All Ways Lead to the Bay

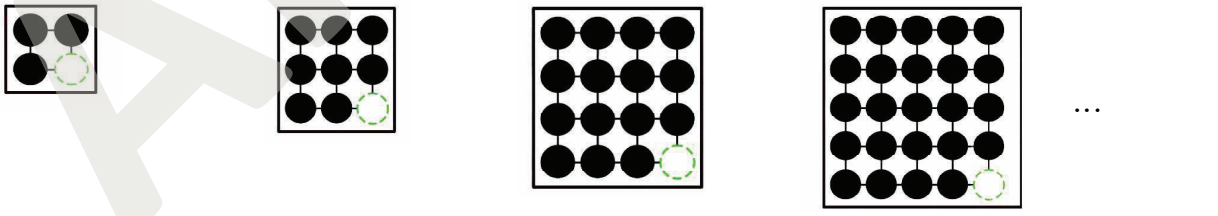


Observe the pattern in the figure below. Draw the next figure in the sequence. How many circles does it have? How many total circles are there in Step 10? Write an expression for the number of circles in Step k.



There are many ways of interpreting this pattern. Here are some possibilities:

Method 1



$2^2 - 1$ $3^2 - 1$ $4^2 - 1$ $5^2 - 1$

$= (1 + 1)^2 - 1$ $= (2 + 1)^2 - 1$ $= (3 + 1)^2 - 1$ $= (4 + 1)^2 - 1$ $\ldots(k + 1)^2 - 1$

AP SCERT

(7) $\frac{1}{2}(10s-6)+3$
$= 5s-3+3$
$= 5s$

(8) $5w^2+6w$
$= 11w^2$

(9) $2a^3+3a^3+6a^2b+6ab^2$
$= 5a^3+12a^2b^2$

(10) $(x+2)(x+5)$
$= (x+2)x+(x+2)5$
$= x^2+2x+5x+10$
$= x^2+7x+10$

(11) $(a+2)(b+4)$
$= ab+8$

(12) $ah^2+a^2b+a^2b^2$
$= ab(a+b+ab)$

6.4 یہ طریقہ یا وہ طریقہ، ہر راستہ منزل تک پہنچتا ہے

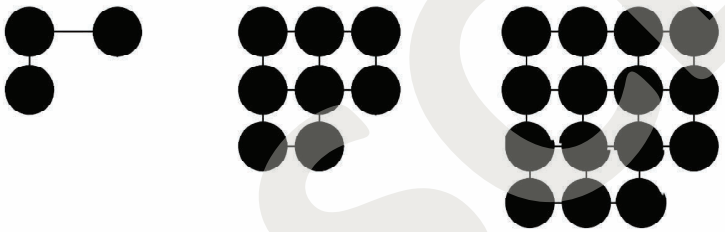
نیچے دی گئی شکل میں نمونے کا مشاہدہ کریں۔ سلسلے کی اگلی شکل بنائیں۔ اس میں کتنے دائرے ہیں؟



مرحلہ 10 میں کل کتنے دائرے ہوں گے؟

مرحلہ k میں دائروں کی تعداد کے لیے ایک عبارت لکھیں۔

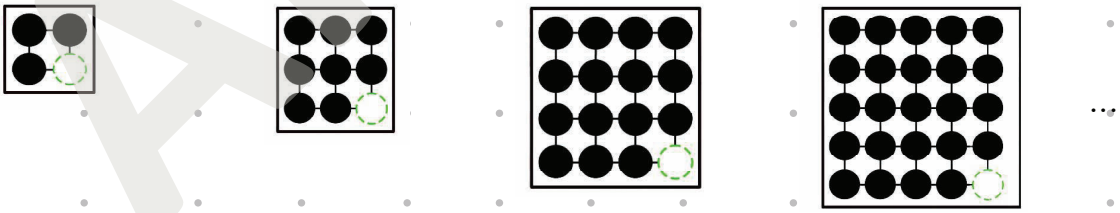
1 2 3



اس نمونے کو سمجھنے کے بہت سے طریقے ہو سکتے ہیں۔ یہاں کچھ ممکنہ طریقے دیے گئے ہیں:

طریقہ 1

مرحلہ 1 | مرحلہ 2 | مرحلہ 3 | مرحلہ 4 | ... مرحلہ k



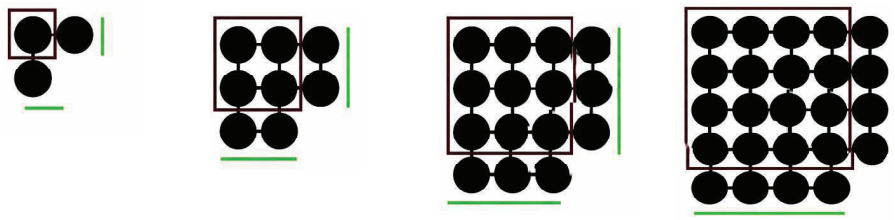
$2^2 - 1$ | $3^2 - 1$ | $4^2 - 1$ | $5^2 - 1$ | ...

$= (1+1)^2 - 1$ | $= (2+1)^2 - 1$ | $= (3+1)^2 - 1$ | $= (4+1)^2 - 1$ | $...(k+1)^2 - 1$

APSCERT

Method 2

Step 1 Step 2 Step 3 Step 4 . . . Step k

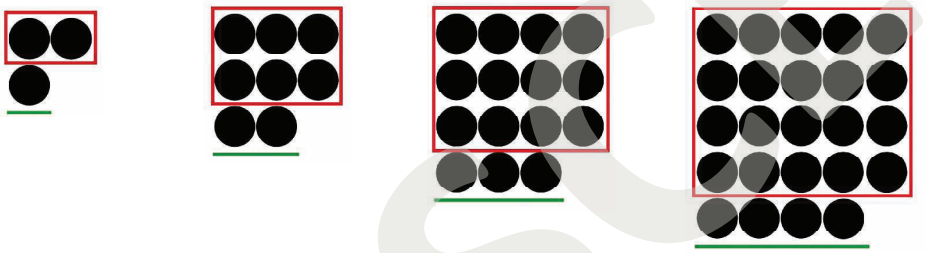


$1 + 2 \times 1$ $2^2 + 2 \times 2$ $3^2 + 2 \times 3$ $4^2 + 2 \times 4$

$= 1^2 + 2 \times 1$ $= 2^2 + 2 \times 2$ $= 3^2 + 2 \times 3$ $= 4^2 + 2 \times 4$ . . . $k^2 + 2 \times k$

Method 3

Step 1 Step 2 Step 3 Step 4 . . . Step k



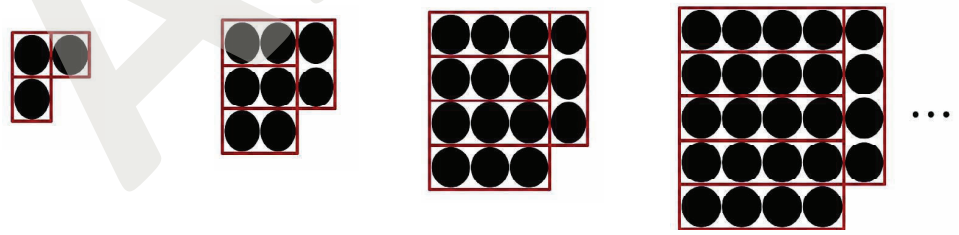
$1 \times 2 + 1$ $2 \times 3 + 2$ $3 \times 4 + 3$ $4 \times 5 + 4$

$= 1 \times (1 + 1) + 1$ $= 2 \times (2 + 1) + 2$ $= 3 \times (3 + 1) + 3$ $= 4 \times (4 + 1) + 4$

. . . $k \times (k + 1) + k$

Method 4

Step 1 Step 2 Step 3 Step 4 . . . Step k

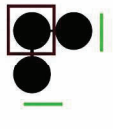
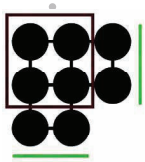
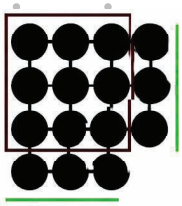
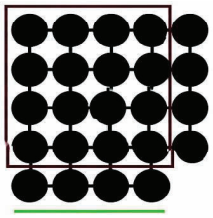


1×3 2×4 3×5 4×6

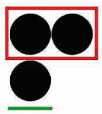
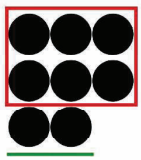
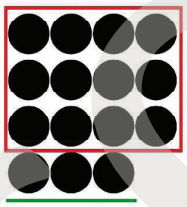
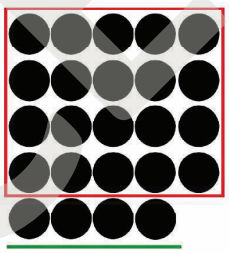
$= 1 \times (1 + 2)$ $= 2 \times (2 + 2)$ $= 3 \times (3 + 2)$ $= 4 \times (4 + 2)$ . . . $k \times (k+2)$

APSCERT

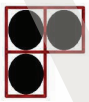
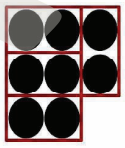
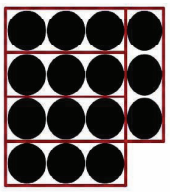
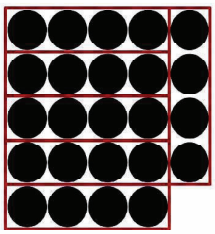
طریقہ 2

مرحلہ 1	مرحلہ 2	مرحلہ 3	مرحلہ 4	مرحلہ k ...
				
$1 + 2 \times 1$	$2^2 + 2 \times 2$	$3^2 + 2 \times 3$	$4^2 + 2 \times 4$	
$= 1^2 + 2 \times 1$	$= 2^2 + 2 \times 2$	$= 3^2 + 2 \times 3$	$= 4^2 + 2 \times 4$	$\ldots k^2 + 2 \times k$

طریقہ 3

مرحلہ 1	مرحلہ 2	مرحلہ 3	مرحلہ 4	مرحلہ k ...
				
$1 \times 2 + 1$	$2 \times 3 + 2$	$3 \times 4 + 3$	$4 \times 5 + 4$	
$= 1 \times (1 + 1) + 1$	$= 2 \times (2 + 1) + 2$	$= 3 \times (3 + 1) + 3$	$= 4 \times (4 + 1) + 4$	
				$\ldots k \times (k + 1) + k$

طریقہ 4

مرحلہ 1	مرحلہ 2	مرحلہ 3	مرحلہ 4		مرحلہ k ...
				...	
1×3	2×4	3×5	4×6		
$= 1 \times (1 + 2)$	$= 2 \times (2 + 2)$	$= 3 \times (3 + 2)$	$= 4 \times (4 + 2)$		$\ldots k \times (k+2)$

APSCERT

Does your method match any of these, or is it different? Each expression that we have identified appears different, but are they really different? Since they describe the same pattern, they should all be the same. Let us simplify each expression and find out.

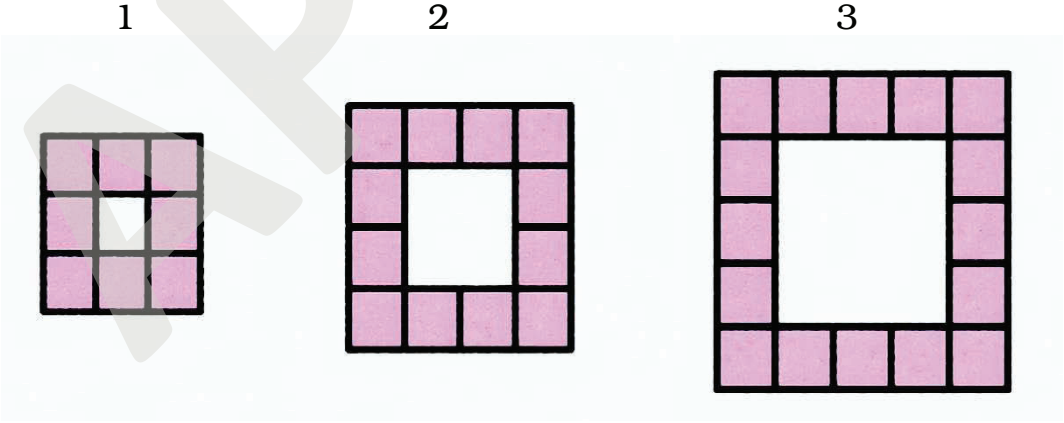
$(k + 1)^2 - 1$	$k^2 + 2 \times k$	$k \times (k + 1) + k$	$k \times (k + 2)$
$= k^2 + 1 + 2k - 1$	$= k^2 + 2k$	$= k^2 + k + k$	$= k^2 + 2k$
$= k^2 + 2k$		$= k^2 + 2k$	

When carried out correctly, all methods lead to the same answer; $k^2 + 2k$. The expression $k^2 + 2k$ gives the number of circles at Step k of this pattern.

In Mathematics, there are often multiple ways of looking at a pattern, and different ways of approaching and solving the same problem. Finding such ways often requires a great deal of creativity and imagination! While one or two of the ways might be your favourite(s), it can be amusing and enriching to explore other ways as well

? Use this formula to find the number of circles in Step 15.

? Consider the pattern made of square tiles in the picture below.



? How many square tiles are there in each figure?

? How many are there in Step 4 of the sequence? What about Step 10?

کیا آپ کا طریقہ ان میں سے کسی طریقے سے ملتا ہے یا مختلف ہے؟ ہم نے جو عبارات حاصل کی ہیں وہ بظاہر مختلف نظر آتی ہیں، لیکن کیا وہ واقعی مختلف ہیں؟ چونکہ یہ سب ایک ہی نمونے کو بیان کرتی ہیں، اس لیے ان سب کی قیمت ایک جیسی ہونی چاہیے۔ آیئے ہر عبارت کو مختصر بناتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں۔

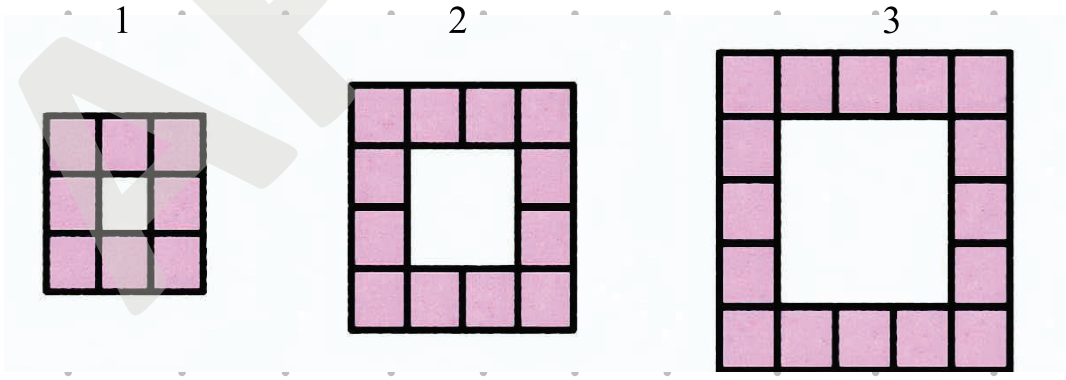
$(k + 1)^2 - 1$	$k^2 + 2 \times k$	$k \times (k + 1) + k$	$k \times (k + 2)$
$= k^2 + 1 + 2k - 1$	$= k^2 + 2k$	$= k^2 + k + k$	$= k^2 + 2k$
$= k^2 + 2k$		$= k^2 + 2k$	

جب تمام طریقے درست طور پر انجام دیے جائیں تو سب ایک ہی جواب تک پہنچتے ہیں : $k^2 + 2k$

عبارت $k^2 + 2k$ اس نمونے کے مرحلہ k میں دائروں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔

ریاضی میں اکثر کسی نمونے کو دیکھنے کے کئی طریقے ہوتے ہیں، اور ایک ہی مسئلے کو سمجھنے اور حل کرنے کے بھی مختلف راستے ہو سکتے ہیں۔ ایسے طریقے دریافت کرنے کے لیے اکثر بہت زیادہ تخلیقی صلاحیت اور تصور کی ضرورت ہوتی ہے۔ اگرچہ ان میں سے ایک یا دو طریقے آپ کے پسندیدہ ہو سکتے ہیں، لیکن دوسرے طریقوں کو بھی دریافت کرنا دلچسپ اور علم میں اضافہ کرنے والا تجربہ ثابت ہو سکتا ہے۔

- اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے مرحلہ 15 میں دائروں کی تعداد معلوم کریں۔
- نیچے دی گئی تصویر میں مربع ٹائلوں سے بنے ہوئے نمونے پر غور کریں۔



- ہر شکل میں کتنی مربع ٹائلیں ہیں؟
- سلسلے کے مرحلہ 4 میں کتنی مربع ٹائلیں ہیں؟ اور مرحلہ 10 میں کتنی ہوں گی؟

Write an algebraic expression for the number of tiles in Step n. Share your methods with the class. Can you find more than one method to arrive at the answer?

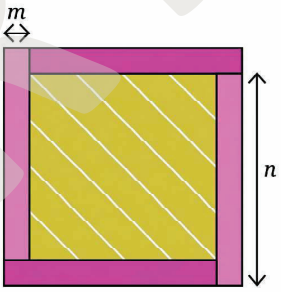


Find the area of the (interior) shaded region in the figure below. All four rectangles have the same dimensions.

Tadang's method:

The total region is a square of side (m + n) with an area $(m + n)^2$.

Subtracting the area of four rectangles from the total area will give the area of the interior shaded region. That is, $(m + n)^2 - 4mn$.



Yusuf's method:

The shaded region is a square with sidelength (n - m). So, its area is $(n - m)^2$.

By expanding both expressions, check that $(m + n)^2 - 4mn = (n - m)^2$.

Find out the area of the region with slanting lines in the figure. All three rectangles have the same dimensions (Fig. 1).

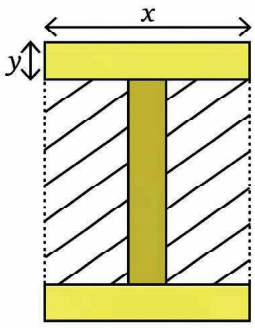


Fig. 1

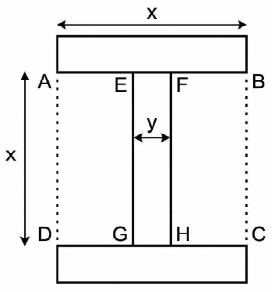
Anusha's method:

Required area = Area (ABCD) - Area (EFGH)

Area of ABCD = x^2.

Area of EFGH = xy.

Required area = $x^2 - xy$.



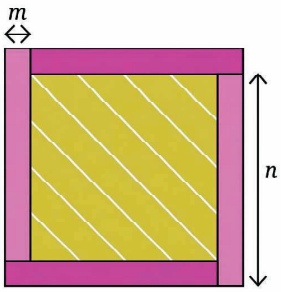
APSCERT



مرحلہ n میں ٹائلوں کی تعداد کے لیے ایک الجبری عبارت لکھیں۔ اپنے طریقے جماعت کے ساتھ تبادلہ خیال کریں۔ کیا آپ جواب تک پہنچنے کے لیے ایک سے زیادہ طریقے تلاش کر سکتے ہیں؟

نیچے دی گئی شکل میں سایہ دار (اندرونی) حصے کا رقبہ معلوم کریں۔ چاروں مستطیلوں کے ابعاد ایک جیسے ہیں۔

تادانگ کا طریقہ:



پورا حصہ $(m + n)$ ضلع والے مربع پر مشتمل ہے،

جس کا رقبہ $(m + n)^2$ ہے۔

کل رقبے میں سے چار مستطیلوں کا رقبہ منفی کرنے سے اندرونی سایہ دار حصے کا رقبہ حاصل ہو گا۔ یعنی: $(m + n)^2 - 4mn$

یوسف کا طریقہ:

سایہ دار حصہ $(n - m)$ ضلع والا ایک مربع ہے۔ لہٰذا اس کا رقبہ: $(n - m)^2$

دونوں عبارات کو توسیع کر کے تصدیق کریں کہ: $(m + n)^2 - 4mn = (n - m)^2$

شکل میں ترچھی لکیروں والے حصے کا رقبہ معلوم کریں۔

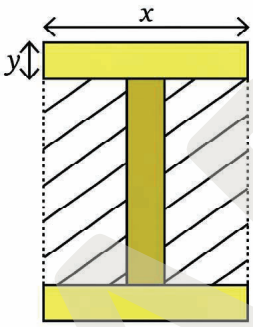
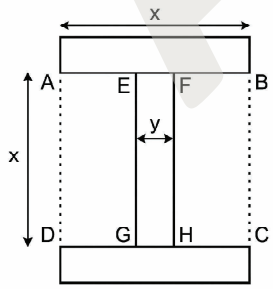


Fig. 1

تینوں مستطیلوں کے ابعاد ایک جیسے ہیں (شکل 1)۔

انوشا کا طریقہ:



مطلوبہ رقبہ = رقبہ (ABCD) - رقبہ (EFGH)

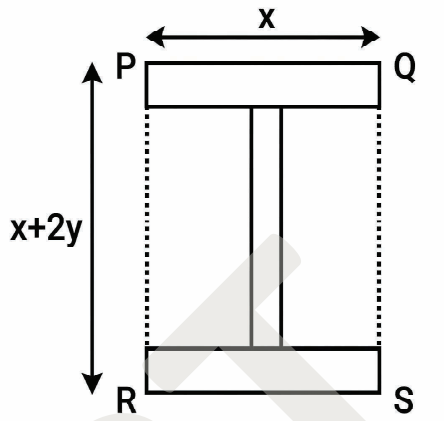
ABCD کا رقبہ = x^2

EFGH کا رقبہ = xy

مطلوبہ رقبہ = $x^2 - xy$

APSCERT

Vaishnavi's method:



QS = y + x + y

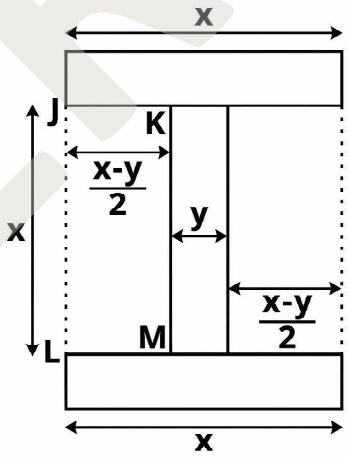
= x + 2y.

Area of PQSR = x (x + 2y)

Required area = Area of PQSR – (area of the three rectangles

= x (x + 2y) - 3xy.

Aditya's method:



The required area is 2 times the area of JKML.

$$JK = \frac{x-y}{2}, KM = x$$

Area (JKML) = $x\frac{(x-y)}{2}$

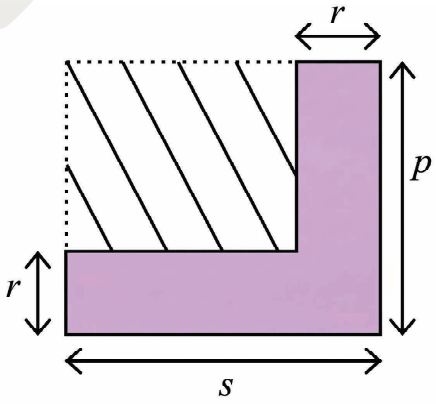
Required area = 2 × Area of JKML

$$= 2x\frac{(x-y)}{2} \quad = x(x-y)$$

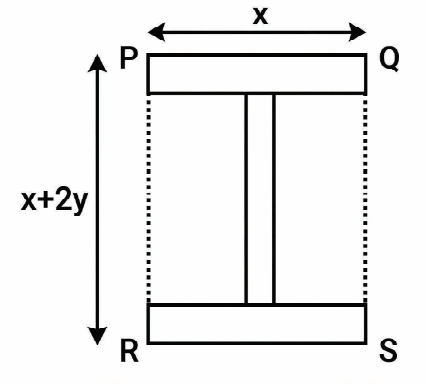
By expanding the expressions, verify that all three expressions are equivalent. If x = 8 and y = 3, find the area of the shaded region.

Write an expression for the area of the dashed region in the figure below. Use more than one method to arrive at the answer. Substitute p = 6, r = 3.5, and s = 9, and calculate the area.





APSCERT



ویشنوی کا طریقہ:

$QS = y + x + y$

$= x + 2y$

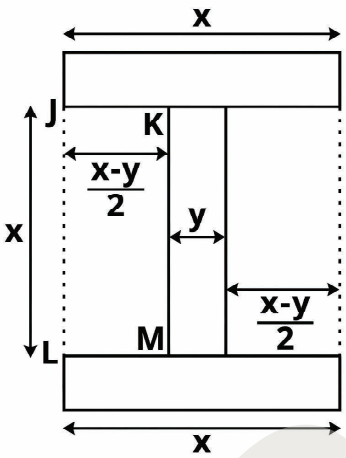
PQSR کا رقبہ $= x(x + 2y)$

مطلوبہ رقبہ = PQSR کا رقبہ — (تین مستطیلوں کا رقبہ)

$= x(x + 2y) - 3xy$

آدتیہ کا طریقہ:

مطلوبہ رقبہ، JKML کے رقبے کا دوگنا ہے۔



$JK = \frac{x-y}{2}, KM = x$

JKML کا رقبہ ... $= x\frac{(x-y)}{2}$

مطلوبہ رقبہ = 2× JKML کا رقبہ

$= 2x\frac{(x-y)}{2} = x(x-y)$

دونوں عبارات کو توسیع کر کے تصدیق کریں کہ تینوں عبارات مساوی ہیں۔

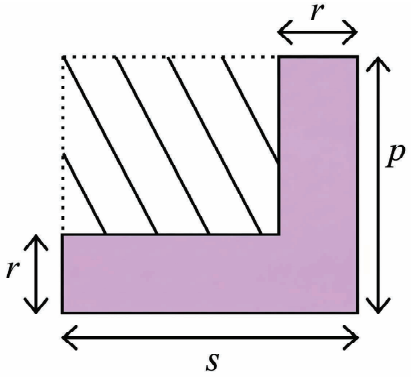
اگر $x = 8$ اور $y = 3$ ہوں تو سایہ دار حصے کا رقبہ معلوم کریں۔

نیچے دی گئی شکل میں نقطہ دار (dashed) حصے کے رقبے کے لیے ایک عبارت لکھیں۔



جواب تک پہنچنے کے لیے ایک سے زیادہ طریقے استعمال کریں۔

پھر $p = 6$ ، $r = 3.5$ اور $s = 9$ رکھ کر رقبہ معلوم کریں۔



APSCERT



Figure it Out - 6.3

1. Compute these products using the suggested identity.

   (i) 46^2 using Identity 1A for $(a + b)^2$

   (ii) 397×403 using Identity 1C for $(a + b)(a - b)$

   (iii) 91^2 using Identity 1B for $(a - b)^2$

   (iv) 43×45 using Identity 1C for $(a + b)(a - b)$

2. Use either a suitable identity or the distributive property to find each of the following products.

   (i) $(p - 1)(p + 11)$ (ii) $(3a - 9b)(3a + 9b)$

   (iii) $-(2y + 5)(3y + 4)$ (iv) $(6x + 5y)^2$

   (v) $(2x - \frac{1}{2})^2$ (vi) $(7p) \times (3r) \times (p + 2)$

3. For each statement identify the appropriate algebraic expression(s).

   (i) Two more than a square number.

   $2 + s$ $(s + 2)^2$ $s^2 + 2$ $s^2 + 4$ $2s^2$ 2^2s

   (ii) The sum of the squares of two consecutive numbers

   $m^2 + n^2$ $(m + n)^2$ $m^2 + 1$ $m^2 + (m + 1)^2$

   $m^2 + (m - 1)^2$ $(m + (m + 1))^2$ $(2m)^2 + (2m + 1)^2$

4. Consider any 2 by 2 square of numbers in a calendar, as shown in the figure.

February						
Su	**M**	**Tu**	**W**	**Th**	**F**	**Sa**
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

APSCERT



6.3- حل کیجیے

1. درج ذیل حاصلِ ضرب دی گئی مماثلت استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

(i) 46^2 کو مماثلت 1A یعنی $(a + b)^2$ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

(ii) 403×397 کو مماثلت 1C یعنی $(a + b)(a - b)$ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

(iii) 91^2 کو مماثلت 1B یعنی $(a - b)^2$ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

(iv) 45×43 کو مماثلت 1C یعنی $(a + b)(a - b)$ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

2. مناسب مماثلت یا خاصیتِ تقسیم استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(p - 1)(p + 11)$ (ii) $(3a - 9b)(3a + 9b)$

(iii) $-(2y + 5)(3y + 4)$ (iv) $(6x + 5y)^2$

(v) $(2x - \frac{1}{2})^2$ (vi) $(7p) \times (3r) \times (p + 2)$

3. ہر بیان کے لیے مناسب الجبری عبارت کی نشاندہی کریں۔

(i) ایک کامل مربع عدد سے دو زیادہ۔

$2 + s$ $(s + 2)^2$ $s^2 + 2$ $s^2 + 4$ $2s^2$ 2^2s

(ii) دو مسلسل اعداد کے مربعوں کا مجموعہ۔

$m^2 + n^2$ $(m + n)^2$ $m^2 + 1$ $m^2 + (m + 1)^2$

$m^2 + (m - 1)^2$ $(m + (m + 1))^2$ $(2m)^2 + (2m + 1)^2$

4. کیلنڈر میں موجود اعداد کے 2×2 مربع پر غور کریں، جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

February						
Su	**M**	**Tu**	**W**	**Th**	**F**	**Sa**
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

AP SCERT

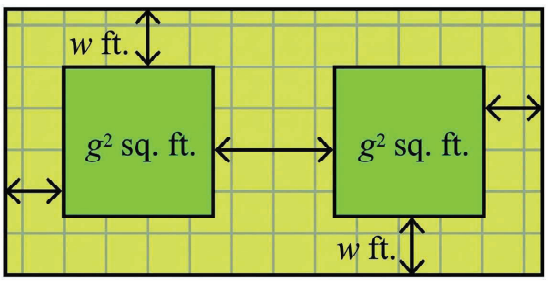
Find products of numbers lying along each diagonal - 4 × 12 = 48, 5 × 11 = 55. Do this for the other 2 by 2 squares. What do you observe about the diagonal products? Explain why this happens.



Hint: Label the numbers in each 2 by 2 square as

a	(a + 1)
a + 7	(a + 8)

5. Verify which of the following statements are true.
   (i) (k + 1) (k + 2) - (k + 3) is always 2.
   (ii) (2q + 1) (2q - 3) is a multiple of 4.
   (iii) Squares of even numbers are multiples of 4, and squares of odd numbers are 1 more than multiples of 8.
   (iv) $(6n + 2)^2 - (4n + 3)^2$ is 5 less than a square number.
6. A number leaves a remainder of 3 when divided by 7, and another number leaves a remainder of 5 when divided by 7. What is the remainder when their sum, difference, and product are divided by 7?
7. Choose three consecutive numbers, square the middle one, and subtract the product of the other two. Repeat the same with other sets of numbers. What pattern do you notice? How do we write this as an algebraic equation? Expand both sides of the equation to check that it is a true identity.
8. What is the algebraic expression describing the following steps - add any two numbers. Multiply this by half of the sum of the two numbers? Prove that this result will be half of the square of the sum of the two numbers.
9. Which is larger? Find out without fully computing the product.
   (i) 14 × 26 or 16 × 24
   (ii) 25 × 75 or 26 × 74
10. A tiny park is coming up in Dhauli. The plan is shown in the figure. The two square plots, each of area g^2 sq. ft., will have a green cover. All the remaining area is a walking path w ft. wide that needs to be tiled. Write an expression for the area that needs to be tiled.



© NCERT



ہر وتر (diagonal) پر موجود اعداد کا حاصلِ ضرب معلوم کریں۔ 48 = 12 × 4، 55 = 11 × 5 دیگر 2 × 2 مربعوں کے لیے بھی یہی عمل کریں۔ وتر پر موجود اعداد کے حاصل ضرب کے بارے میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ وضاحت کریں کہ ایسا کیوں ہوتا ہے۔

اشارہ: ہر 2 × 2 مربعی اعداد کو یوں ظاہر کریں:

a	(a + 1)
(a + 7)	(a + 8)

5. تصدیق کریں کہ درج ذیل بیانات میں سے کون سے درست ہیں۔

(i) $(k + 1)(k + 2) - (k + 3)$ ہمیشہ 2 کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) $(2q + 1)(2q - 3)$ ہمیشہ 4 کا اضعاف ہوتا ہے۔

(iii) جفت اعداد کے مربعوں 4 کے اضعاف ہوتے ہیں، اور طاق اعداد کے مربعوں 8 کے اضعاف سے 1 زیادہ ہوتے ہیں۔

(iv) $(6n + 2)^2 - (4n + 3)^2$ ایک کامل مربع سے 5 کم ہوتا ہے۔

6. ایک عدد کو 7 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 آتا ہے، اور دوسرے عدد کو 7 سے تقسیم کرنے پر باقی 5 آتا ہے۔ ان کے مجموعے، فرق اور حاصلِ ضرب کو 7 سے تقسیم کرنے پر کیا باقی بچے گا؟

7. تین متواتر اعداد منتخب کریں۔ درمیانی عدد کا مربع معلوم کریں اور باقی دو اعداد کے حاصلِ ضرب کو اس میں سے منفی کریں۔ یہی عمل دوسرے مجموعوں کے ساتھ بھی دہرائیں۔ آپ کیا نمونہ دیکھتے ہیں؟ اس نمونے کو الجبری مساوات کی صورت میں لکھیں۔ مساوات کے دونوں طرف توسیع کر کے تصدیق کریں کہ یہ ایک صحیح مماثلت ہے۔

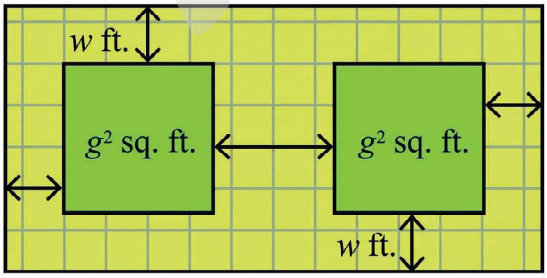
8. درج ذیل مراحل کو بیان کرنے والی الجبری عبارت لکھیں: کسی بھی دو اعداد کو جمع کریں۔ پھر اس مجموعے کو انہی دو اعداد کے مجموعے کے نصف سے ضرب دیں۔ ثابت کریں کہ حاصل شدہ جواب ان دو اعداد کے مجموعے کے مربع کے نصف کے برابر ہوگا۔

9. مکمل حاصلِ ضرب معلوم کیے بغیر بتائیں کہ کون سا بڑا ہے؟

(i) 26×14 یا 16×24

(ii) 75×25 یا 26×74

10. دھولی میں ایک چھوٹا سا پارک بنایا جا رہا ہے۔ اس کا نقشہ شکل میں دیا گیا ہے۔ دو مربع قطعات، جن میں سے ہر ایک کا رقبہ g^2 مربع فٹ ہے، سبزہ زار کے لیے مخصوص ہیں۔ باقی تمام حصہ w فٹ چوڑا پیدل چلنے کا راستہ ہے جس پر ٹائلیں لگانی ہیں۔ اس حصے کے رقبے کے لیے ایک الجبری عبارت لکھیں جس پر ٹائلیں لگائی جانی ہیں۔

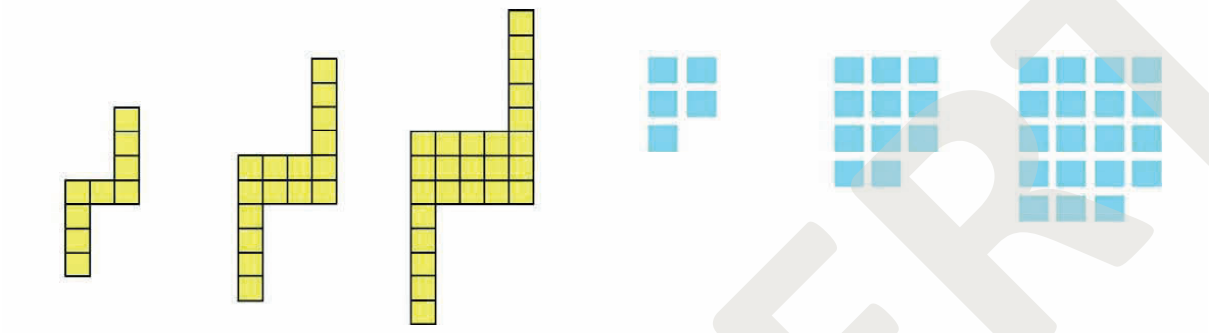


11. For each pattern shown below,

(i) Draw the next figure in the sequence.

(ii) How many basic units are there in Step 10?

(iii) Write an expression to describe the number of basic units in Step y.



Step 1 Step 2 Step 3 Step 1 Step 2 Step 3

SUMMARY

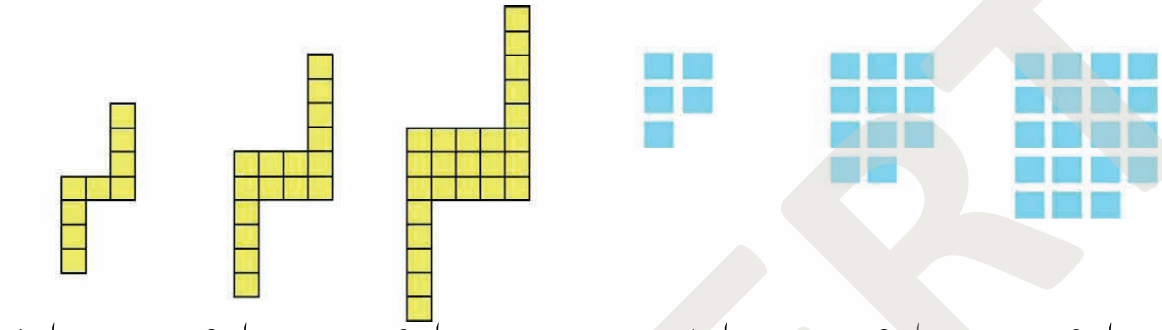
- We extended the distributive property to find the product of two expressions each of which has two terms. The general form for the same is $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$.
- We saw some special cases of this identity.
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- We considered different patterns, and explored how to understand them using algebra. We saw that, often, there are multiple ways to solve a problem and arrive at the same correct answer. Finding different methods to approach and solve the same problem is a creative process.

11. درج ذیل ہر نمونے کے لیے:

(i) سلسلے میں اگلی شکل بنائیں۔

(ii) مرحلہ 10 میں کتنی بنیادی اکائیاں (Basic Units) ہوں گی؟

(iii) مرحلہ y میں بنیادی اکائیوں کی تعداد بیان کرنے کے لیے ایک الجبری عبارت لکھیں۔



خلاصہ

- ہم نے تقسیمی خاصیت کو وسیع کرتے ہوئے دو ایسی عبارات کا حاصلِ ضرب معلوم کیا جن میں سے ہر ایک میں دو ارکان تھیں۔ اس کی عمومی صورت یہ ہے: $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$
- ہم نے اس مماثلت کی کچھ خاص صورتیں بھی دیکھیں:
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- ہم نے مختلف نمونوں کا مطالعہ کیا اور الجبرا کی مدد سے انہیں سمجھنے کی کوشش کی۔ ہم نے دیکھا کہ اکثر ایک مسئلے کو حل کرنے اور درست جواب تک پہنچنے کے کئی مختلف طریقے ہوتے ہیں۔ ایک ہی مسئلے کو سمجھنے اور حل کرنے کے مختلف طریقے تلاش کرنا ایک تخلیقی عمل ہے۔

IT'S PUZZLE TIME!

Coin Conjoin

Arrange 10 coins in a triangle as shown in the figure below on the left. The task is to turn the triangle upside down by moving one coin at a time. How many moves are needed? What is the minimum number of moves?

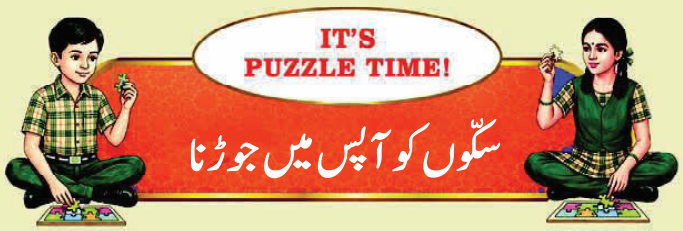
A triangle of 3 coins can be inverted (turned upside down) with a single move, and a triangle of 6 coins can be inverted by moving 2 coins.



The 10-coin triangle can be flipped with just 3 moves; did you figure out how? Find out the minimum possible moves needed to flip the next bigger triangle having 15 coins. Try the same for bigger triangular numbers.

Is there a simple way to calculate the minimum number of coin moves needed for any such triangular arrangement?





10 سکّوں کو ایک مثلث کی شکل میں ترتیب دیں، جیسا کہ بائیں جانب دی گئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ کام یہ ہے کہ ایک وقت میں ایک سکّہ حرکت دے کر مثلث کو الٹا کر دیا جائے۔ کتنی حرکتوں (moves) کی ضرورت ہو گی؟ کم سے کم کتنی حرکتیں درکار ہوں گی؟

3 سکّوں والے مثلث کو ایک ہی حرکت سے الٹا کیا جا سکتا ہے، جبکہ 6 سکّوں والے مثلث کو 2 سکّے حرکت دے کر الٹا کیا جا سکتا ہے۔



10 سکّوں والے مثلث کو صرف 3 حرکتوں سے الٹا کیا جا سکتا ہے؛ کیا آپ نے معلوم کیا کہ کیسے؟ اب اگلے بڑے مثلث، جس میں 15 سکّے ہیں، کو الٹا کرنے کے لیے درکار کم سے کم حرکتوں کی تعداد معلوم کریں۔ اسی طرح بڑے تکونی اعداد کے لیے بھی کوشش کریں۔

کیا کوئی آسان طریقہ ہے جس سے ایسی کسی بھی تکونی ترتیب کو الٹا کرنے کے لیے درکار کم سے کم سکّوں کی حرکتوں کی تعداد معلوم کی جا سکے؟



7 PROPORTIONAL REASONING-1

Learning outcomes : Learners will be able to

- Understand and explain ratio as a comparison of two quantities (CG-1)
- Recognise equivalent and proportional ratios (CG-1)
- Simplify ratios to lowest form using HCF (CG-8)
- Apply proportional reasoning in real-life contexts (recipes, scaling, speed, cost) (CG-10)
- Use Rule of Three (Trairasika) and cross multiplication to solve proportions (CG-9)
- Divide quantities in a given ratio and justify reasoning (CG-6)
- Convert between related units in proportion-based problems (CG-8)
- Communicate mathematical reasoning clearly through contextual analysis and discussion. (CG-6)

B7Z4D3

7.0 Introduction

Proportional reasoning helps us understand how two quantities change in relation to each other. It is the foundation of comparing, scaling, and solving problems involving ratios and proportions in real life.

We often use proportional reasoning when resizing images, mixing ingredients, sharing profits, or converting units. When two quantities increase or decrease in the same ratio, we say they are proportional.

For example, if the width and height of a picture both double, the image looks the same but larger - showing similarity through proportion.

Using ratios, simplest forms, and cross multiplication, we can identify proportional relationships and solve real-life problems, such as recipes, distances, or sharing money fairly.AA

7.1 Observing Similarity in Change

We are all familiar with digital images. We often change the size and orientation of these images to suit our needs. Observe the set of images below

7 تناسبی وجوہات-1

C7X8K2

اکتسابی نتائج: طلبہ اس قابل بنیں گے:

- نسبت کو دو مقداروں کے موازنے کے طور پر سمجھیں گے اور بیان کریں گے (CG-1)
- ہم قدر اور متناسب نسبتوں کو پہچانیں گے (CG-1)
- ذ۔ا۔م استعمال کر کے نسبتوں کو مختصر صورت میں لائیں گے (CG-8)
- روزمرہ زندگی کے تناظر میں متناسب استدلال استعمال کریں گے (ترکیبیں، پیمانہ بندی، رفتار، قیمت) (CG-10)
- تناسب حل کرنے کے لیے تین کا قاعدہ (تریراشیکا) اور کراس ضرب استعمال کریں گے (CG-9)
- مقداروں کو دی گئی نسبت میں تقسیم کریں گے اور استدلال کا جواز پیش کریں گے (CG-6)
- تناسب پر مبنی مسائل میں متعلقہ اکائیوں کو ایک دوسرے میں بدلیں گے (CG-8)
- سیاق وسباق کے تجزیے اور بحث کے ذریعے ریاضیاتی استدلال واضح طور پر بیان کریں گے (CG-6)

7.0 تعارف

متناسب استدلال ہمیں یہ سمجھنے میں مدد دیتا ہے کہ دو مقداریں ایک دوسرے کے سلسلے میں کیسے بدلتی ہیں۔ یہ روزمرہ زندگی میں نسبتوں اور تناسب سے متعلق مسائل کے موازنے، پیمانہ بندی اور حل کی بنیاد ہے۔

ہم اکثر تصاویر کا سائز بدلتے وقت، اجزاء ملاتے وقت، منافع تقسیم کرتے وقت یا اکائیاں بدلتے وقت متناسب استدلال استعمال کرتے ہیں۔ جب دو مقداریں ایک ہی نسبت سے بڑھیں یا گھٹیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ متناسب ہیں۔

مثال کے طور پر اگر کسی تصویر کی چوڑائی اور اونچائی دونوں دوگنی ہو جائیں تو تصویر ایک جیسی لگتی ہے لیکن بڑی ہو جاتی ہے — یہ تناسب کے ذریعے مماثلت ظاہر کرتا ہے۔

نسبتوں، مختصر صورتوں اور کراس ضرب کا استعمال کرتے ہوئے ہم متناسب تعلقات شناخت کر سکتے ہیں اور روزمرہ مسائل جیسے ترکیبیں، فاصلے یا رقم کی منصفانہ تقسیم حل کر سکتے ہیں۔

7.1 تبدیلی میں مماثلت کا مشاہدہ

ہم سب ڈیجیٹل تصاویر سے واقف ہیں۔ ہم اکثر اپنی ضرورت کے مطابق ان تصاویر کا سائز اور رخ بدلتے ہیں۔

نیچے دی گئی تصاویر کا مجموعہ دیکھیے۔



Image A



Image B



Image C



Image D



Image E

We can see that all the images are of different sizes.

Which images look similar and which ones look different?

Images (A, C, and D) look similar, eventhough they have different sizes.

Do images B and E look like the other three images?

No, they are slightly distorted. The tiger appears elongated in B, and compressed and fatter in E!

Why?

You may notice that images A, C, and D are rectangular, but E is square.May be that is why E looks different. But B is also a rectangle! Why does it look different from the other rectangular images?

Can we observe any pattern to answer this question?

Perhaps by measuring the rectangles?



APSCERT



تصویر A



تصویر B



تصویر C



تصویر D



تصویر E

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ تمام تصاویر مختلف سائز کی ہیں۔

کون سی تصاویر ملتی جلتی لگتی ہیں اور کون سی مختلف؟

تصاویر (A، C اور D) ملتی جلتی لگتی ہیں، چاہے ان کے سائز مختلف ہوں۔

کیا تصاویر B اور E باقی تین تصاویر جیسی لگتی ہیں؟

نہیں، وہ تھوڑی بگڑی ہوئی ہیں۔ B میں شیر لمبا لگتا ہے اور E میں چپٹا اور موٹا!

کیوں؟

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تصاویر A ، C اور D مستطیل ہیں لیکن E مربع ہے۔ شاید اسی لیے E مختلف لگتی ہے۔

لیکن B بھی مستطیل ہے! یہ باقی مستطیلی تصاویر سے مختلف کیوں لگتی ہے؟

کیا ہم اس سوال کا جواب دینے کے لیے کوئی نمونہ دیکھ سکتے ہیں؟

شاید مستطیلوں کو پیمائش کر کے؟



Image	Width (in mm)	Height (in mm)
Image A	60	40
Image B	40	20
Image C	30	20
Image D	90	60
Image E	60	60

What makes images A, C, and D appear similar, and B and E different?

When we compare image A with C, we notice that the width of C is half that of A. The height is also half of A. Both the width and height have **changed by the same factor** (through multiplication), 1/2 in this case. Since the widths and heights have changed by the same factor, the **images look similar**.

When we compare image A with image B, we notice that the width of B is 20 millimetre (mm) less than that of A. The height too is 20 mm less than the height of A. Even though the difference (through subtraction) is the same, the images look different. Have the width and height changed by the same factor? The height of B is half the height of A. But the width of B is not half the width of A. Since the width and height have not changed by the same factor, the images look different.

Can you check by what factors the width and height of image D change as compared to image A? Are the factors the same?

Images A, C, and D look similar because their widths and heights have changed by the same factor. We say that the changes to their widths and heights are **proportional**.

7.2 Ratios

We use the notion of a ratio to represent such proportional relationships in mathematics.

We can say that the ratio of width to height of image A is 60 : 40.

The numbers 60 and 40 are called the terms of the ratio.

The ratio of width to height of image C is 30 : 20, and that of image D is 90 : 60.

تصویر	چوڑائی (ملی میٹر میں)	لمبائی (ملی میٹر میں)
		تصویر A
		تصویر B
		تصویر C
		تصویر D
		تصویر E

تصاویر A ، C اور D ملتی جلتی کیوں لگتی ہیں اور B اور E مختلف کیوں؟

جب ہم تصویر A کا C سے موازنہ کرتے ہیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ C کی چوڑائی A کی چوڑائی سے آدھی ہے۔ لمبائی بھی A کی آدھی ہے۔ چوڑائی اور لمبائی دونوں ایک ہی جزضربی سے بدلی ہیں (ضرب کے ذریعے)، اس صورت میں ½۔ چونکہ چوڑائی اور لمبائی ایک ہی جزضربی سے بدلی ہیں اس لیے تصاویر ملتی جلتی لگتی ہیں۔

جب ہم تصویر A کا تصویر B سے موازنہ کرتے ہیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ B کی چوڑائی A سے 20 ملی میٹر کم ہے۔ لمبائی بھی A کی لمبائی سے 20 ملی میٹر کم ہے۔ اگرچہ فرق (تفریق کے ذریعے) ایک جیسا ہے پھر بھی تصاویر مختلف لگتی ہیں۔ کیا چوڑائی اور لمبائی ایک ہی جزضربی سے بدلی ہیں؟ B کی لمبائی A کی لمبائی کی آدھی ہے۔ لیکن B کی چوڑائی A کی چوڑائی کی آدھی نہیں ہے۔ چونکہ چوڑائی اور لمبائی ایک ہی جزضربی سے نہیں بدلیں اس لیے تصاویر مختلف لگتی ہیں۔

کیا آپ جانچ سکتے ہیں کہ تصویر A کے مقابلے میں تصویر D کی چوڑائی اور لمبائی کس جزضربی سے بدلی ہیں؟

کیا جزضربی ایک جیسے ہیں؟

تصاویر A ، C اور D ملتی جلتی لگتی ہیں کیونکہ ان کی چوڑائی اور لمبائی ایک ہی جزضربی سے بدلی ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ ان کی چوڑائی اور لمبائی میں تبدیلیاں متناسب ہیں۔

7.2 نسبتیں

ہم ریاضی میں ایسے متناسب تعلقات کو ظاہر کرنے کے لیے نسبت کا تصور استعمال کرتے ہیں۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ تصویر A کی چوڑائی اور لمبائی کی نسبت 40 : 60 ہے۔

اعداد 60 اور 40 نسبت کی حدود کہلاتے ہیں۔

تصویر C کی چوڑائی اور لمبائی کی نسبت 20 : 30 ہے اور تصویر D کی 60 : 30 ہے۔

In a ratio of the form a : b, we can say that for every 'a' units of the first quantity, there are 'b' units of the second quantity.

So, in image A, we can say that for every 60 mm of width, there are 40 mm of height. We can say that the ratios of width to height of images A, C, and D are proportional because the terms of these ratios change by the same factor. Let us see how.

Image A — 60 : 40

Multiplying both the terms by $\frac{1}{2}$, we get

$$60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$$

which is 30 : 20, the ratio of width to height in image C.

Note : Ratio compares quantities of same kind or part to part but fraction compares part-to-whole.

? By what factor should we multiply the ratio 60 : 40 (image A) to get 90 : 60 (image D)?

A more systematic way to compare whether the ratios are proportional is to reduce them to their simplest form and see if these simplest forms are the same.

7.3 Ratios in their Simplest Form

We can reduce ratios to their simplest form by dividing the terms by their HCF.

In image A, the terms are 60 and 40. What is the HCF of 60 and 40? It is 20. Dividing the terms by 20, we get the ratio of image A to be 3 : 2 in its simplest form. The ratio of image D is 90 : 60. Dividing both terms by 30 (HCF of 90 and 60), we get the simplest form to be 3 : 2. So the ratios of images A and D are proportional as well.

What is the simplest form of the ratios of images B and E?

The ratio of image B is 40 : 20; in its simplest form, it is 2 : 1.

The ratio of image E is 60 : 60; in its simplest form, it is 1 : 1.

These ratios are not the same as 3 : 2. So, we can say that the ratios of width to height of images B and E are not proportional to the ratios of images A, C, and D.

APSCERT

a : b کی صورت والی نسبت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ پہلی مقدار کی ہر 'a' اکائیوں کے لیے دوسری مقدار کی 'b' اکائیاں ہوتی ہیں۔

پس تصویر A میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ چوڑائی کے ہر 60 ملی میٹر کے لیے 40 ملی میٹر لمبائی ہے۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ تصاویر A ، C اور D کی چوڑائی اور لمبائی کی نسبتیں متناسب ہیں کیونکہ ان نسبتوں کی ارکان ایک ہی جزضربی سے بدلتی ہیں۔ آیئے دیکھتے ہیں کیسے۔

نوٹ: نسبت ایک ہی قسم کی مقداروں یا حصے سے حصے کا موازنہ کرتی ہے جبکہ کسر حصے سے کُل کا موازنہ کرتی ہے۔

تصویر — A 40 : 60 دونوں ارکان کو ½ سے ضرب دینے پر:

$60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$

جو 30 : 20 ہے، یعنی تصویر C کی چوڑائی اور لمبائی کی نسبت۔

؟ نسبت 40 : 60 (تصویر A) کو 60 : 90 (تصویر D) بنانے کے لیے کس جزضربی سے ضرب دینی چاہیے؟

نسبتوں کے متناسب ہونے کا موازنہ کرنے کا ایک زیادہ منظم طریقہ یہ ہے کہ انہیں مختصر صورت میں لائیں اور دیکھیں کہ آیا یہ مختصر صورتیں ایک جیسی ہیں۔

7.3 مختصر صورت میں نسبتیں

ہم نسبتوں کو ان کے ارکان کو ع-ا-م پر تقسیم کر کے مختصر صورت میں لا سکتے ہیں۔

تصویر A میں ارکان 60 اور 40 ہیں۔ 60 اور 40 کا ع-ا-م کیا ہے؟ یہ 20 ہے۔ ارکان کو 20 سے تقسیم کرنے پر تصویر A کی نسبت مختصر صورت میں 2 : 3 ہو جاتی ہے۔

تصویر D کی نسبت 60 : 90 ہے۔ دونوں ارکان کو 30 (90 اور 60 کا ع۔ا۔م) سے تقسیم کرنے پر مختصر صورت 2: 3 آتی ہے۔ پس تصاویر A اور D کی نسبتیں بھی متناسب ہیں۔

تصاویر B اور E کی نسبتوں کی مختصر صورت کیا ہے؟

تصویر B کی نسبت 20: 40 ہے؛ مختصر صورت میں یہ 1 :2 ہے۔

تصویر E کی نسبت 60 : 60 ہے؛ مختصر صورت میں یہ 1 : 1 ہے۔

یہ نسبتیں 2 : 3 کے برابر نہیں ہیں۔ پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ تصاویر B اور E کی چوڑائی اور لمبائی کی نسبتیں تصاویر A ، C اور D کی نسبتوں کے متناسب نہیں ہیں۔

When two ratios are the same in their simplest forms, we say that the ratios are in **proportion**, or that the ratios are **proportional**. We use the '::' symbol to indicate that they are proportional.

So a : b :: c : d indicates that the ratios a : b and c : d are proportional.

Thus,

60 : 40 :: 30 : 20 and 60 : 40 :: 90 : 60.

7.4 Problem Solving with Proportional Reasoning

Example1: Are the ratios 3:4 and 72:96 proportional?

3: 4 is already in its simplest form.

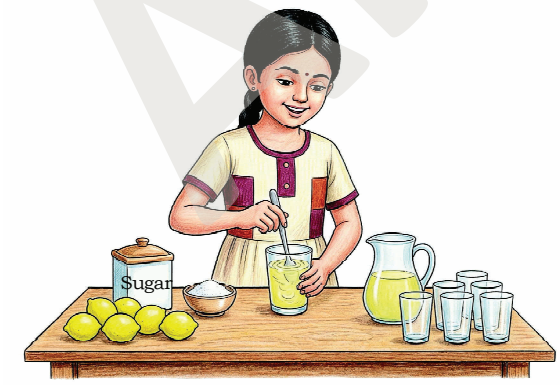
To find the simplest form of 72 : 96, we need to divide both terms by their HCF.

What is the HCF of 72 and 96?

The HCF of 72 and 96 is 24. Dividing both terms by 24, we get 3:4. Since both ratios in their simplest form are the same, they are proportional.

Example 2 : Thanwika wanted to make lemonade for a celebration. She made 6 glasses of lemonade in a vessel and added 10 spoons of sugar to the drink. Her father expected more people to join the celebration. So he asked her to make 18 more glasses of lemonade.

To make the lemonade with the same sweetness, how many spoons of sugar should she add?



To maintain the same sweetness, the ratio of the number of glasses of lemonade to the number of spoons of sugar should be proportional. For 6 glasses of lemonade, she added 10 spoons of sugar. The ratio of glasses of lemonade to spoons of sugar is 6:10. If she needs to make 18 more glasses of lemonade, how many spoons of sugar should she use? We can model this problem as 6:10::18:?

APSCERT

جب دو نسبتیں اپنی مختصر صورت میں ایک جیسی ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ نسبتیں تناسب میں ہیں یا کہ نسبتیں متناسب ہیں۔ ہم '::' کی علامت اس بات کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں کہ وہ متناسب ہیں۔ پس a : b :: c : d اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ نسبتیں a : b اور c : d متناسب ہیں۔

پس،

20 : 30 :: 40 : 60 اور 60 : 90 :: 40 : 60۔

7.4 متناسب استدلال سے مسائل حل کرنا

مثال 1 : کیا نسبتیں 3:4 اور 72:96 متناسب ہیں؟

3:4 پہلے سے مختصر صورت میں ہے۔

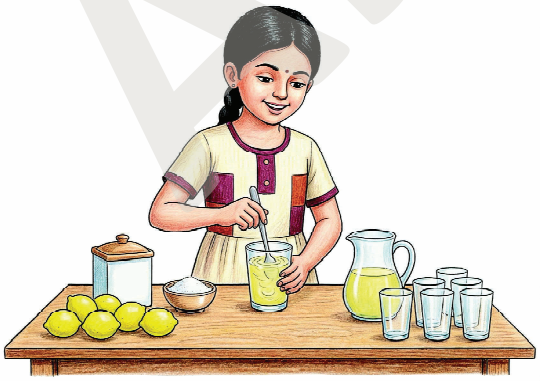
72:96 کی مختصر صورت معلوم کرنے کے لیے ہمیں دونوں ارکان کو ان کے ع۔ا۔م پر تقسیم کرنا ہوگا۔

72 اور 96 کا ع۔ا۔م کیا ہے؟

72 اور 96 کا ع۔ا۔م 24 ہے۔ دونوں ارکان کو 24 سے تقسیم کرنے پر 3:4 حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں نسبتیں مختصر صورت میں ایک جیسی ہیں اس لیے وہ متناسب ہیں۔

مثال 2 : تنویکا ایک تقریب کے لیے لیموں پانی بنانا چاہتی تھی۔ اس نے ایک برتن میں 6 گلاس لیموں پانی بنایا اور اس میں 10 چمچ چینی ملائی۔ اس کے والد کو توقع تھی کہ مزید لوگ تقریب میں شامل ہوں گے۔ اس لیے انہوں نے اس سے 18 مزید گلاس لیموں پانی بنانے کو کہا۔

اتنی ہی مٹھاس کے ساتھ لیموں پانی بنانے کے لیے اسے کتنے چمچ چینی ملانی چاہیے؟



ایک جیسی مٹھاس برقرار رکھنے کے لیے لیموں پانی کے گلاسوں کی تعداد اور چینی کے چمچوں کی تعداد کی نسبت متناسب ہونی چاہیے۔ 6 گلاس لیموں پانی کے لیے اس نے 10 چمچ چینی ملائی۔ لیموں پانی کے گلاسوں اور چینی کے چمچوں کی نسبت 6:10 ہے۔ اگر اسے 18 مزید گلاس لیموں پانی بنانا ہو تو اسے کتنے چمچ چینی استعمال کرنی چاہیے؟ ہم اس مسئلے کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں؟ : 18 :: 10 :6

We know that each term in the ratio must change by the same factor, for the ratios to be proportional.

How can we find the factor of change in the ratio?

The first term has increased from 6 to 18. To find the factor of change, we can divide 18 by 6 to get 3.

These condterm should also change by the same factor. When 10 increases by a factor of 3, it becomes 30. Thus,

6:10::18:30.

So, she should use 30 spoons of sugar to make 18 glasses of lemonade with the same sweetness as earlier.

Example 3 : Nitin and Hari were constructing a compound wall around their house. Nitin was building the longer side, 60 ft in length, and Hari was building the shorter side, 40 ft in length. Nitin used 3 bags of cement but Hari used only 2 bags of cement. Nitin was worried that the wall Hari built would not be as strong as the wall he built because she used less cement. Is Nitin correct in his thinking?

In Nitin and Hari's case, we should compare the ratio of the length of the wall to the bags of cement used by each of them and see whether they are proportional.

The ratio in Nitin'scaseis60:3,i.e.,20:1(in its simplest form). The ratio in Hari's case is 40 : 2, i.e., 20 : 1 (in its simplest form).

Since both ratios are proportional, the walls are equally strong. Nitin should not worry!

Example 4 : In my school, there are 5 teachers and 170 students. The ratio of teachers to students in my school is 5 : 170. Count the numberof teachers and students in your school. What is the ratio of teachers to students in your school? Write it below.

Is the teacher-to-student ratio in your school proportional to the one in my school?

Example 5 : Measure the width and height (to the nearest cm) of the blackboard in your classroom. What is the ratio of width to height of the blackboard?

_____ : _____

APSCERT

ہم جانتے ہیں کہ نسبتوں کے متناسب ہونے کے لیے نسبت کی ہر رکن ایک ہی جز ضربی سے بدلنی چاہیے۔

ہم نسبت میں تبدیلی کا جز ضربی کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

پہلیر کن 6 سے بڑھ کر 18 ہو گئی ہے۔ تبدیلی کا جز ضربی معلوم کرنے کے لیے ہم 18 کو 6 پر تقسیم کر کے 3 حاصل کر سکتے ہیں۔

دوسری رکن بھی اسی جز ضربی سے بدلنی چاہیے۔ جب 10 کو 3 کے جز ضربی سے ضرب دیا جائے تو یہ 30 ہو جاتا ہے۔

پس، $6 : 10 :: 18 : 30$

اس طرح اسے پہلے جیسی مٹھاس کے ساتھ 18 گلاس لیموں پانی بنانے کے لیے 30 چمچ چینی استعمال کرنی چاہیے۔

مثال 3 : نتن اور ہری اپنے گھر کے گرد ایک چار دیواری بنا رہے تھے۔ نتن لمبی دیوار بنا رہا تھا جو 60 فٹ لمبی تھی اور ہری چھوٹی دیوار بنا رہا تھا جو 40 فٹ لمبی تھی۔ نتن نے سیمنٹ کے 3 تھیلے استعمال کیے لیکن ہری نے صرف 2 تھیلے استعمال کیے۔ نتن کو فکر تھی کہ ہری کی بنائی دیوار اس کی دیوار جتنی مضبوط نہیں ہو گی کیونکہ اس نے کم سیمنٹ استعمال کی۔

کیا نتن کی سوچ درست ہے؟

نتن اور ہری کی صورت میں ہمیں دونوں کی دیوار کی لمبائی اور استعمال شدہ سیمنٹ کے تھیلوں کی نسبت کا موازنہ کرنا چاہیے اور دیکھنا چاہیے کہ آیا وہ متناسب ہیں۔

نتن کی صورت میں نسبت 60:3 ہے، یعنی مختصر صورت میں 20:1۔ ہری کی صورت میں نسبت 40:2 ہے، یعنی مختصر صورت میں 20:1۔

چونکہ دونوں نسبتیں متناسب ہیں اس لیے دونوں دیواریں یکساں مضبوط ہیں۔ نتن کو فکر نہیں کرنی چاہیے!

مثال 4 : میرے اسکول میں 5 اساتذہ اور 170 طلبہ ہیں۔ میرے اسکول میں اساتذہ اور طلبہ کی نسبت 5:170 ہے۔ اپنے اسکول میں اساتذہ اور طلبہ کی تعداد گنیں۔ آپ کے اسکول میں اساتذہ اور طلبہ کی نسبت کیا ہے؟ نیچے لکھیے۔

کیا آپ کے اسکول میں اساتذہ سے طالب علم کی نسبت میرے اسکول کی نسبت کے متناسب ہے؟

مثال 5 : اپنی جماعت میں تختہ سیاہ کی چوڑائی اور لمبائی (قریب ترین سمر تک) ناپیے۔ تختہ سیاہ کی چوڑائی اور لمبائی کی نسبت کیا ہے؟

_____ : _____

Can you draw a rectangle in your notebook whose width and height are proportional to the ratio of the blackboard?

Compare the rectangle you have drawn to those drawn by your classmates. Do they all look the same?



Note to the Teacher: Give more such examples that students can relate to and ask them to give reasons why they think they are correct. Engaging with these problems and finding solutions through a process of proportional reasoning should go along with learning procedures and methods to solve the problems.

Example 6 : When Neelima was 3 years old, her mother's age was 10 times her age. What is the ratio of Neelima's age to her mother's age? What would be the ratio of their ages when Neelima is 12 years old? Would it remain the same?

The ratio of Neelima's age to her mother's age when Neelima is3 years old is 3 :30 (her mother's age is 10 times Neelima's age). In the simplest form, it is 1 : 10.

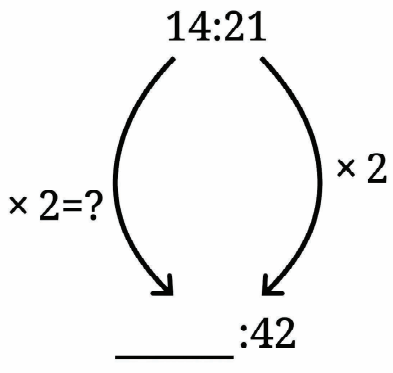
WhenNeelimais12yearsold(i.e.,9yearslater),theratiooftheirages will be 12 : 39 (9 years later, her mother would be 39 years old). In the simplest form, it is 4 : 13.

When we add (or subtract)the same number from the terms of a ratio, the ratio changes and is not necessarily proportional to the original ratio.

Example 7: Fill in the missing numbers for the following ratios that are proportional to 14 : 21.

_____: 42 6 : _____ 2 : _____

In the first ratio, we don't know the first term. But the second term is 42. It is 2 times the second term of the ratio 14:21. So, the first term should also be 2 times 14 (the first term). Hence the proportional ratio is 28:42.



For the second ratio, the first term is 6.



کیا آپ اپنی کاپی میں ایک ایسا مستطیل کھینچ سکتے ہیں جس کی چوڑائی اور لمبائی تختہ سیاہ کی نسبت کے متناسب ہو؟

اپنے کھینچے ہوئے مستطیل کا اپنے ساتھیوں کے مستطیلوں سے موازنہ کیجیے۔ کیا وہ سب ایک جیسے لگتے ہیں؟

معلم کے لیے نوٹ: ایسی مزید مثالیں دیجیے جن سے طلبہ آسانی سے جڑ سکیں اور ان سے پوچھیں کہ وہ کیوں سوچتے ہیں کہ ان کے جوابات درست ہیں۔ ان مسائل سے جڑنا اور متناسب استدلال کے عمل سے حل تلاش کرنا مسائل حل کرنے کے طریقہ کار اور اصولوں کے ساتھ ساتھ چلنا چاہیے۔

مثال 6: جب نیلیما 3 سال کی تھی تو اس کی ماں کی عمر اس کی عمر کا 10 گنا تھی۔ نیلیما کی عمر اور اس کی ماں کی عمر کی نسبت کیا ہے؟ جب نیلیما 12 سال کی ہو گی تو ان کی عمروں کی نسبت کیا ہو گی؟ کیا یہ نسبت وہی رہے گی؟

جب نیلیما 3 سال کی ہے تو اس کی عمر اور اس کی ماں کی عمر کی نسبت 3:30 ہے (ماں کی عمر نیلیما کی عمر کا 10 گنا ہے)۔

سادہ ترین صورت میں یہ 1:10 ہے۔

جب نیلیما 12 سال کی ہو گی (یعنی 9 سال بعد) تو ان کی عمروں کی نسبت 12:39 ہو گی (9 سال بعد ماں کی عمر 39 سال ہو گی)۔ سادہ ترین صورت میں یہ 4:13 ہے۔

جب ہم نسبت کی رکنوں میں ایک ہی عدد جوڑیں (یا گھٹائیں) تو نسبت بدل جاتی ہے اور یہ ضروری نہیں کہ اصل نسبت کے متناسب رہے۔

مثال 7: درج ذیل نسبتوں میں گمشدہ اعداد پُر کیجیے جو 14:21 کے متناسب ہوں۔

_____ : 2 6 : _____ 42 : _____

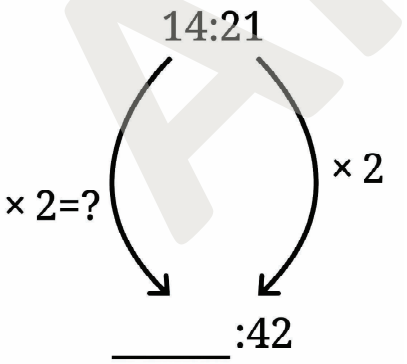
پہلی نسبت میں ہمیں پہلی رکن معلوم نہیں۔ لیکن دوسری رکن 42 ہے۔

یہ نسبت 14:21 کی دوسری رکن کا 2 گنا ہے۔

پس پہلی رکن بھی 14 (پہلی رکن) کا 2 گنا ہونی چاہیے۔

اس لیے متناسب نسبت 28:42 ہے۔

دوسری نسبت میں پہلی رکن 6 ہے



What factor should we multiply 14 by to get 6? Can it be an integer? Or should it be a fraction?

We can model this as $14y = 6$. So, $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

So, we need to multiply 21 (the second term of 14 : 21) also by the same factor $\frac{3}{7}$

$21 \times \frac{3}{7}$ is 9. So, the ratio is 6 : 9.

In the third ratio, the first term is 2.

We can see that when we divide 14 (the first term of 14 : 21) by 7 (HCF of 14 and 21) we get 2.

If we divide 21 also by 7, we get 3. So, the ratio is 2 : 3.

Filter Coffee!

Filter coffee is a beverage made by mixing coffee decoction with milk. Manjunath usually mixes 15 mL of coffee decoction with 35 mL of milk to make one cup of filter coffee in his coffee shop.



In this case, we can say that the ratio of coffee decoction to milk is 15 : 35.

If customers want 'stronger' filter coffee, Manjunath mixes 20 mL of decoction with 30 mL of milk. The ratio here is 20 : 30.

Why is this coffee stronger?

And when they want 'lighter' filter coffee, he mixes 10 mL of coffee and 40 mL of milk, making the ratio 10 : 40.

Why is this coffee lighter?





APSCERT

14 کو کس جز ضربی سے ضرب دیں تو 6 حاصل ہو؟ کیا یہ عدد صحیح ہو سکتا ہے؟ یا یہ کسر ہونی چاہیے؟

ہم اسے اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں: $14y = 6$۔ پس $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

پس ہمیں 21 (14:21 کی دوسری حد) کو بھی اسی جز ضربی سے ضرب دینی ہوگی۔

$21 \times \frac{3}{7} = 9$۔ پس نسبت 6:9 ہے۔

تیسری نسبت میں پہلی حد 2 ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ جب ہم 14 (14:21 کی پہلی حد) کو 7 (14 اور 21 کا ع-ا-م) سے تقسیم کریں تو 2 حاصل ہوتا ہے۔

اگر 21 کو بھی 7 سے تقسیم کریں تو 3 حاصل ہوتا ہے۔ پس نسبت 2:3 ہے۔

فلٹر کافی!



فلٹر کافی ایک مشروب ہے جو کافی کے عرق کو دودھ میں ملا کر بنایا جاتا ہے۔

منجوناتھ عام طور پر اپنی کافی کی دکان میں ایک کپ فلٹر کافی بنانے کے لیے 15 ملی لیٹر کافی کا عرق اور 35 ملی لیٹر دودھ ملاتا ہے۔

اس صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ کافی کے عرق اور دودھ کی نسبت 15:35 ہے۔

اگر گاہک 'تیز' فلٹر کافی چاہتے ہیں تو منجوناتھ 20 ملی لیٹر عرق اور 30 ملی لیٹر دودھ ملاتا ہے۔ یہاں نسبت 20:30 ہے۔

یہ کافی زیادہ کڑک کیوں ہے؟



اور جب وہ 'ہلکی' فلٹر کافی چاہتے ہیں تو وہ 10 ملی لیٹر کافی اور 40 ملی لیٹر دودھ ملاتا ہے جس سے نسبت 10:40 بنتی ہے۔ یہ کافی کم کڑک کیوں ہے؟



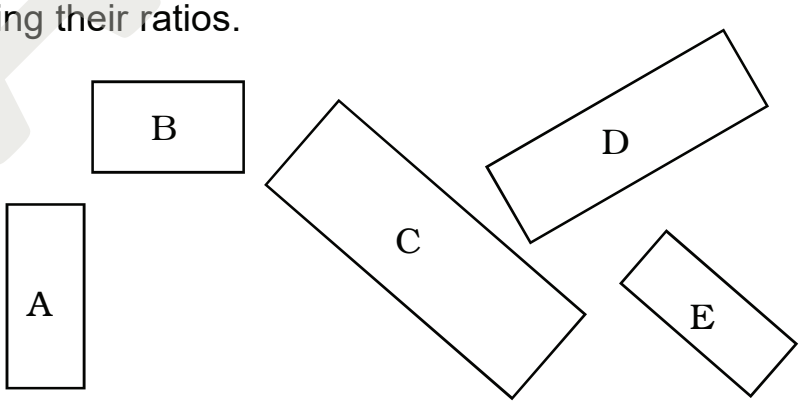
The following table shows the different ratios in which Manjunath mixes coffee decoction with milk. Write in the last column if the coffee is stronger or lighter than the regular coffee.

Coffee Decoction (in mL)	Milk (in mL)	Regular/Strong/Light
300	600	
150	500	
200	400	
24	56	
100	300	



Figure it Out - 7.1

1. Circle the following statements of proportion that are true.
   (i) 4 : 7 :: 12 : 21 (ii) 8 : 3 :: 24 : 6
   (iii) 7 : 12 :: 12 : 7 (iv) 21 : 6 :: 35 : 10
   (v) 12 : 18 :: 28 : 12 (vi) 24 : 8 :: 9 : 3
2. Give 3 ratios that are proportional to 4 : 9.
   _____ : _____ _____ : _____ _____ : _____
3. Fill in the missing numbers for these ratios that are proportional to 18 : 24.
   3 : _____ 12 : _____ 20 : _____ 27 : _____
4. Look at the following rectangles. Which rectangles are similar to each other? You can verify this by measuring the width and height using a scale and comparing their ratios.



درج ذیل جدول میں منجوناتھ کے ذریعہ کافی ڈیکوکشن اور دودھ کو ملانے کے مختلف تناسب دکھائے گئے ہیں۔
آخری کالم میں لکھیں کہ کافی معمول کی کافی سے تیز ہے یا ہلکی۔

دودھ (ملی لیٹر میں)	معمول / تیز / ہلکی کڑک	کافی ڈیکوکشن (ملی لیٹر میں)
	600	300
	500	150
	400	200
	56	24
	300	100



حل کیجیے-7.1

1. تناسب کے درج ذیل بیانات میں سے جو درست ہوں انہیں دائرے میں لیں۔

(i) 4 : 7 :: 12 : 21 (ii) 8 : 3 :: 24 : 6

(iii) 21 : 6 :: 35 : 10 (iv) 7 : 12 :: 12 : 7

(v) 24 : 8 :: 9 : 3 (vi) 12 : 18 :: 28 : 12

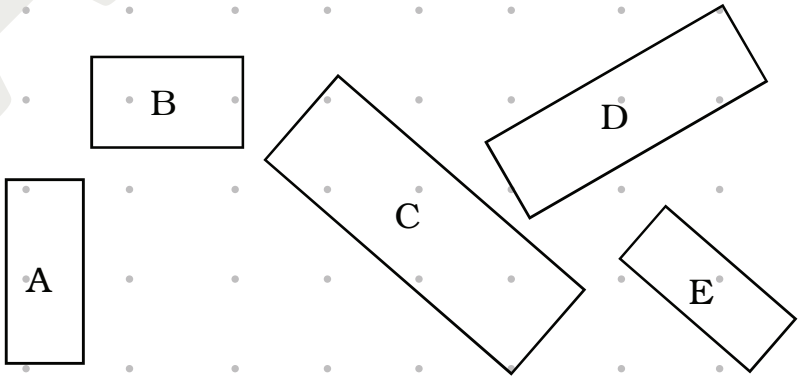
2. 4 : 9 کے متناسب 3 تناسب لکھیں۔

_____ : _____ _____ : _____ _____ : _____

3. 24 : 18 کے متناسب ان تناسبوں میں خالی جگہ پُر کریں۔

_____ : 27 _____ : 20 _____ : 12 _____ : 3

4. درج ذیل مستطیلوں کو دیکھیں۔ کون سے مستطیل ایک دوسرے سے مشابہ ہیں؟ آپ اسکیل سے چوڑائی اور لمبائی ناپ کر اور ان کے تناسب کا موازنہ کر کے اسے جانچ سکتے ہیں۔



APSCERT

5. Look at the following rectangle. Can you draw a smaller rectangle and a bigger rectangle with the same width to height ratio in your notebooks? Compare your rectangles with your classmates' drawings. Are all of them the same? If they are different from yours, can you think why? Are they wrong?



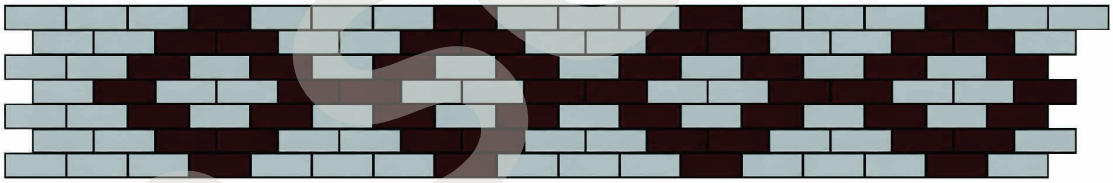


6. The following figure shows a small portion of a long brick wall with patterns made using coloured bricks. Each wall continues this pattern throughout the wall. What is the ratio of grey bricks to coloured bricks? Try to give the ratios in their simplest form.

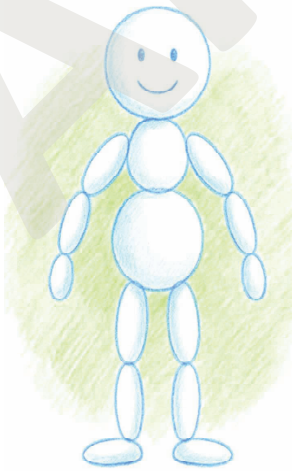
(a)



(b)



7. Let us draw some human figures. Measure your friend's body — the lengths of their head, torso, arms, and legs. Write the ratios as mentioned below—



head : torso

_____ : _____

torso : arms

_____ : _____

torso : legs

_____ : _____





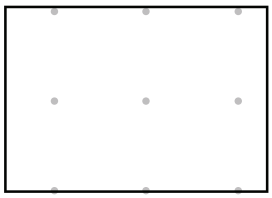
© NCERT not to be republished

5. درج ذیل مستطیل کو دیکھیں۔ کیا آپ اپنی کاپی میں اسی چوڑائی اور اونچائی کے تناسب کے ساتھ ایک چھوٹا مستطیل اور ایک بڑا مستطیل بنا سکتے ہیں؟ اپنے مستطیلوں کا اپنے ہم جماعتوں کی تصویروں سے موازنہ کریں۔

ریاضی بحث

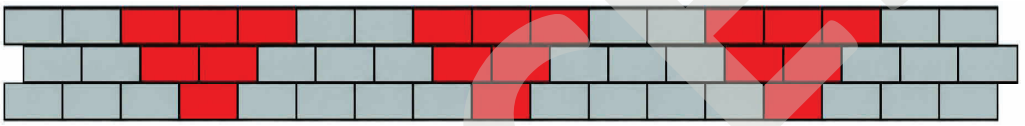


کیا وہ سب ایک جیسے ہیں؟ اگر وہ آپ کے سے مختلف ہیں، تو کیا آپ سوچ سکتے ہیں کیوں؟ کیا وہ غلط ہیں؟

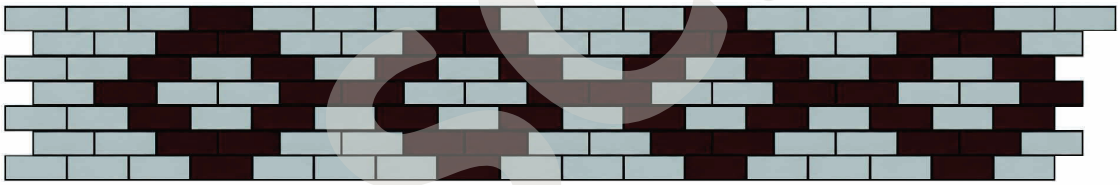


6. درج ذیل تصویر میں رنگین اینٹوں سے بنے نمونوں والی ایک لمبی اینٹوں کی دیوار کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔ ہر دیوار پوری دیوار میں یہی نمونہ جاری رکھتی ہے۔ سرمئی اینٹوں اور رنگین اینٹوں کا تناسب کیا ہے؟ تناسب کو سادہ ترین شکل میں دینے کی کوشش کریں۔

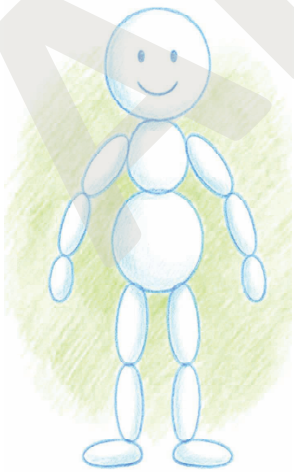
(a)



(b)



7. آیئے کچھ انسانی شکلیں بنائیں۔ اپنے دوست کے جسم کی پیمائش کریں — سر، دھڑ، بازوؤں اور پیروں کی لمبائی۔ نیچے دیے گئے مطابق تناسب لکھیں۔



سر : دھڑ

_____ : _____

دھڑ : بازو

_____ : _____

دھڑ : پیر

_____ : _____





Now, draw a figure with head, torso, arms, and legs with equivalent ratios as above.

Does the drawing look more realistic if the ratios are proportional? Why? Why not?



Note to the Teacher: In all these activities, encourage students to reason why their drawings are proportional.

Trairasika — The Rule of Three

Example 8: For the mid-day meal in a school with 120 students, the cook usually makes 15 kg of rice. On a rainy day, only 80 students came to school. How many kilograms of rice should the cook make so that the food is not wasted?

The ratio of the number of students to the amount of rice needs to be proportional.

So, 120 : 15 :: 80 : ?

What is the factor of change in the first term?

We can find that by dividing the terms $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$

The number of students is reduced by a factor of $\frac{2}{3}$

On multiplying the weight of rice by the same factor, we get, $15 \times \frac{2}{3} = 10$.

So, the cook should make 10 kg of rice on that day.

The situation above is a typical example of a problem where we need to use proportional reasoning to find a solution. Four quantities are linked proportionally, out of which three are known and we must find the fourth, unknown, quantity.

To solve such problems, we can model two proportional ratios using algebraic notation as —

a : b :: c : d.

For these two ratios to be proportional, we know that term c should be a multiple of term a by a factor, say f, and term d should be a multiple of term b by the same factor f. So,

c = f a ...(1)

d = f b ...(2)

APSCERT



اب، اوپر دیے گئے مساوی تناسب کے ساتھ سر، دھڑ، بازو اور پیروں والی ایک شکل بنائیں۔

کیا تصویر زیادہ حقیقی لگتی ہے اگر تناسب متناسب ہو؟ کیوں؟ کیوں نہیں؟

اساتذہ کے لیے نوٹ: ان تمام سرگرمیوں میں، طلبہ کو یہ سوچنے کی ترغیب دیں کہ ان کی تصویریں متناسب کیوں ہیں۔

ترائی راسیکا — تین کا قاعدہ

مثال 120:8 طلبہ والے اسکول میں دوپہر کے کھانے کے لیے، باورچی عام طور پر 15 کلو چاول پکاتا ہے۔ ایک بارش والے دن، صرف 80 طلبہ اسکول آئے۔ باورچی کو کتنے کلو گرام چاول پکانے چاہیے تاکہ کھانا ضائع نہ ہو؟

طلبہ کی تعداد اور چاول کی مقدار کا تناسب متناسب ہونا ضروری ہے۔

اس لیے، $120 : 15 :: 80 : ?$

پہلی رکن میں تبدیلی کا عنصر کیا ہے؟

ہم اسے ارکان کو تقسیم کرکے معلوم کرسکتے ہیں $\frac{80}{100} = \frac{2}{3}$

طلبہ کی تعداد کے عنصر میں کمی ہوئی چاول کے وزن کو اسی عنصر سے ضرب دینے پر، $15 \times \frac{2}{3} = 10$ ملتا ہے۔

اس لیے، باورچی کو اس دن 10 کلو چاول پکانے چاہئیں۔

اوپر دی گئی صورتحال ایک مسئلے کی مثال ہے جہاں ہمیں حل تلاش کرنے کے لیے متناسب استدلال استعمال کرنا ہوتا ہے۔ چار مقداریں متناسب طور پر جڑی ہوتی ہیں، جن میں سے تین معلوم ہوتی ہیں اور ہمیں چوتھی، نامعلوم مقدار معلوم کرنی ہوتی ہے۔

ایسے مسائل حل کرنے کے لیے، ہم دو متناسب تناسبوں کو الجبری اشارے سے اس طرح ظاہر کرسکتے ہیں —

$$a : b :: c : d$$

ان دو تناسبوں کے متناسب ہونے کے لیے، ہم جانتے ہیں کہ رکن c کو رکن a کا ایک عنصر f سے ضرب حاصل ہونا چاہیے، اور رکن d کو رکن b کا اسی عنصر f سے ضرب حاصل ہونا چاہیے۔ اس لیے،

$$c = fa \quad ...(1)$$

$$d = fb \quad ...(2)$$

From (1) and (2), we can say that,

$$f = \frac{c}{a} \text{ and } f = \frac{d}{b}.$$

$$\text{Therefore, } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

Multiplying both sides by ab, we get,

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$bc = ad \text{ or } ad = bc$$

Thus, when a : b :: c : d, then ad = bc. This is known as cross multiplication of terms.

Since ad = bc, we can show that $d = \frac{bc}{a}$.

Two ratios are proportional if their terms are equal when cross multiplied. The fourth unknown quantity can be found through such cross multiplication.

In ancient India, Aryabha.a (199 CE) and others called such problems of proportionality Rule of Three problems. There were 3 numbers given — the prama.a (measure — 'a' in our case), the phala (fruit — 'b' in our case), and the ichchha (requisition — 'c' in our case). To find the ichchhaphala (yield — 'd' in our case), Aryabhata says,

"Multiply the phala by the ichchha and divide the resulting product by the pramana."

In other words, Aryabhata says,

"pramana : phala :: ichchha : ichchhaphala," therefore,

pramana × ichchhaphala = phala × ichchha.

Thus,

$$\text{ichchhaphala} = \frac{\textit{phala} \times \textit{ichchha}}{\textit{pramana}}$$

Using the cross multiplication method proposed by Aryabha.a, ancient Indians solved complex problems that involved proportionality.

Example 9: A car travels 90 km in 150 minutes. If it continues at the same speed, what distance will it cover in 4 hours?

APSCERT

(1)اور(2) سے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ،

$$f = \frac{d}{b} \text{ اور } f = \frac{c}{a}$$

اس لیے، $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

دونوں طرف ab سے ضرب دینے پر،

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$ad = bc \text{ یا } bc = ad$$

اس طرح، جب a : b :: c : d ہو، تو ad = bc ۔ اسے حدوں کی کراس ضرب کہتے ہیں۔

چونکہ ad = bc ہے، اس لیے ہم ظاہر کرسکتے ہیں کہ d = ۔

دو تناسب متناسب ہوتے ہیں اگر کراس ضرب کرنے پر ان کی ارکان مساوی ہوں۔ چوتھی نامعلوم مقدار ایسی کراس ضرب کے ذریعے معلوم کی جاسکتی ہے۔

قدیم ہندوستان میں، آریہ بھٹ (199 عیسوی) اور دیگر نے تناسب کے ایسے مسائل کو تین کا قاعدہ کہا۔ تین اعداد دیے جاتے تھے — پرمانا) پیمانہ — ہمارے معاملے میں ('a' ، پھالا) نتیجہ — ہمارے معاملے میں ('b' ، اور اِچھا) مطلوبہ — ہمارے معاملے میں ('c' ۔ اِچھاپھالا) حاصل — ہمارے معاملے میں ('d' معلوم کرنے کے لیے، آریہ بھٹ کہتے ہیں، "پھالا کو اِچھا سے ضرب دو اور حاصل ضرب کو پرمان سے تقسیم کرو۔ "دوسرے لفظوں میں، آریہ بھٹ کہتے ہیں،

"پرمانا: پھالا:: اِچھا: اِچھاپھالا،" اس لیے،

پرمانا × اِچھاپھالا = پھالا × اِچھا۔ اس طرح،

$$\text{اِچھاپھالا} = \frac{\text{اِچھا} \times \text{پھالا}}{\text{پرمانا}}$$

آریہ بھٹ کی تجویز کردہ کراس ضرب کے طریقے سے، قدیم ہندوستانیوں نے تناسب پر مشتمل پیچیدہ مسائل حل کیے۔

مثال 9: ایک گ کر اس 150 منٹ میں 90 کلو میٹر سفر کرتی ہے۔ اگر وہ اسی رفتار سے چلتی رہے، تو 4 گھنٹوں میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟ اگر وہ اسی رفتار سے چلتی رہے، تو لیے گئے وقت کا تناسب ہونا چاہیے ؟

If it continues at the same speed, the ratio of the time taken should be proportional to the ratio of the distance covered.

$$150 : 90 :: 4 : ?$$

Is this the right way to formulate the question?

No, because 150 is in minutes, but 4 is in hours. The second ratio should use the same units for time as the first ratio. Since 4 hours is 240 minutes, the right form is

$$150 : 90 :: 240 : ?$$

How can you find the distance covered in 240 minutes?

Discuss with your classmates and find the answer using different strategies.

Note to the Teacher: Instead of giving one 'method' to solve the problem of the distance, encourage students to reason out the answer through different strategies. They can use their understanding of equivalent fractions and equivalent ratios to find the answer.

We can model this proportion as

$$150 : 90 :: 240 : x.$$

By cross multiplication, we get

$$150 \times x = 240 \times 90$$

Therefore,
$$x = \frac{240 \times 90}{150}$$

$$= \frac{\overset{48}{\cancel{240}} \times \overset{3}{\cancel{90}}}{\underset{5}{\cancel{150}}} = 144$$
$$1$$

The distance covered by the car in 4 hours is 144 km.

Example 10: A small farmer in Himachal Pradesh sells each 200 g packet of tea for ₹200. A large estate in Meghalaya sells each 1 kg packet of tea for ₹800. Are the weight-to-price ratios in both places proportional?

The ratio of weight to price of the Himachal tea is 200 : 200.

What is the weight to price ratio of the Meghalaya tea? Is it 1 : 800?

This would not be appropriate, because we considered the weight in

اگر وہ اسی رفتار سے چلتی رہے، تو لیے گئے وقت کا تناسب طے کیے گئے فاصلے کے تناسب کے متناسب ہونا چاہیے۔

$$150 : 90 :: 4 : ?$$

کیا یہ سوال بنانے کا صحیح طریقہ ہے؟ نہیں، کیونکہ 150 منٹ میں ہے، لیکن 4 گھنٹوں میں ہے۔ دوسرے تناسب میں وقت کے لیے وہی اکائی استعمال ہونی چاہیے جو پہلے تناسب میں ہے۔ چونکہ 4 گھنٹے 240 منٹ ہوتے ہیں، اس لیے درست شکل یہ ہے

$$150 : 90 :: 240 : ?$$

240 منٹ میں طے کیا گیا فاصلہ کیسے معلوم کیا جا سکتا ہے؟

اپنے ہم جماعتوں سے بحث کریں اور مختلف طریقوں سے جواب تلاش کریں۔

اساتذہ کے لیے نوٹ: فاصلے کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے ایک 'طریقہ' دینے کے بجائے، طلبہ کو مختلف طریقوں سے جواب سوچنے کی ترغیب دیں۔ وہ جواب معلوم کرنے کے لیے مساوی کسر اور مساوی تناسب کی اپنی سمجھ استعمال کر سکتے ہیں۔

ہم اس تناسب کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں

$$150 : 90 :: 240 : x$$

کراس ضرب سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$150 \times x = 240 \times 90$$

اس لیے،

$$x = \frac{240 \times 90}{150}$$

$$= \frac{\cancel{240} \times \cancel{90}}{\cancel{150}\ 1} = 144$$

4 گھنٹوں میں طے کیا گیا فاصلہ 144 کلو میٹر ہے۔

مثال 10: ہماچل پردیش کا ایک چھوٹا کسان چائے کا ہر 200 گرام کا پیکٹ 200 روپے میں بیچتا ہے۔ میگھالیہ کی ایک بڑی چائے کی باغیچہ کمپنی چائے کا ہر 1 کلو کا پیکٹ 800 روپے میں بیچتی ہے۔ کیا دونوں جگہوں پر وزن اور قیمت کا تناسب متناسب ہے؟ ہماچل پردیش کی چائے کے وزن اور قیمت کا تناسب 200 : 200 ہے۔ میگھالیہ کی چائے کا وزن اور قیمت کا تناسب کیا ہے؟ کیا یہ 800 : 1 ہے؟ یہ مناسب نہیں ہوگا، کیونکہ ہم نے وزن کو

grams in the case of Himachal. So, the weight to price ratio is 1000 : 800 in Meghalaya after we convert the weight to grams.

To check if the ratios are proportional, we need to see if both ratios are the same in their simplest forms.

The Himachal tea ratio in its simplest form is 1 : 1.

The Meghalaya tea ratio in its simplest form is 5 : 4.

So, the ratios are not proportional.

? Which tea is more expensive? Why?

Note to the Teacher: Encourage a discussion on the more expensive tea, how they came to their conclusions and what the reasons for that tea being more expensive could be.

To answer the question as to which tea is more expensive, we should compare the price of tea for the same weight in both places. What is the price of 1 kg of tea from Meghalaya? It is ₹800.

In Himachal, if 200 g of tea costs rupees 200, what is the cost of 1 kg of tea?

Let us say that the price of 1 kg of tea is x rupees. 200 g is $\frac{1}{5}$ of 1 kg.

So, $\frac{1}{5} \times x = 200$.

Multiplying both sides by 5, we get

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000.$$

So, the cost of 1 kg of tea is 800 in Meghalaya and 1,000 in Himachal Pradesh.

Therefore, the tea from Himachal Pradesh is more expensive.

Activity 1: Take your favourite dish. Find out all the ingredients and their respective quantities needed to make the dish for your family. Suppose you are celebrating a festival and you want to invite 15 guests. Find out the quantities of the ingredients required to cook the same dish for them.

AP SCERT

ہماچل کے معاملے میں گرام میں۔ اس لیے، میگھالیہ میں وزن کو گرام میں تبدیل کرنے کے بعد وزن اور قیمت کا تناسب 800 : 1000 ہے۔

تناسب کے متناسب ہونے کی جانچ کے لیے، ہمیں دیکھنا ہوگا کہ آیا دونوں تناسب اپنی سادہ ترین شکل میں یکساں ہیں۔

ہماچل کی چائے کا تناسب سادہ ترین شکل میں 1 : 1 ہے۔

میگھالیہ کی چائے کا تناسب سادہ ترین شکل میں 4 : 5 ہے۔

اس لیے، تناسب متناسب نہیں ہیں۔ کون سی چائے زیادہ مہنگی ہے؟ کیوں؟

اساتذہ کے لیے نوٹ: زیادہ مہنگی چائے کے بارے میں بحث کی ترغیب دیں، کہ وہ اپنے نتائج تک کیسے پہنچے اور اس چائے کے زیادہ مہنگی ہونے کی کیا وجوہات ہو سکتی ہیں۔

یہ سوال کہ کون سی چائے زیادہ مہنگی ہے، اس کا جواب دینے کے لیے ہمیں دونوں جگہوں پر یکساں وزن کی چائے کی قیمت کا موازنہ کرنا چاہیے۔ میگھالیہ سے 1 کلو چائے کی قیمت کیا ہے؟ یہ 800 روپیے ہے۔

ہماچل میں، اگر 200 گرام چائے کی قیمت 200 روپیے ہے، تو 1 کلو چائے کی قیمت کیا ہوگی؟

فرض کریں کہ 1 کلو چائے کی قیمت x روپیے ہے۔ 200 گرام، 1 کلو کا $\frac{1}{5}$ ہے۔

اس لیے، $\frac{1}{5} \times x = 200$

دونوں طرف 5 سے ضرب دینے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000.$$

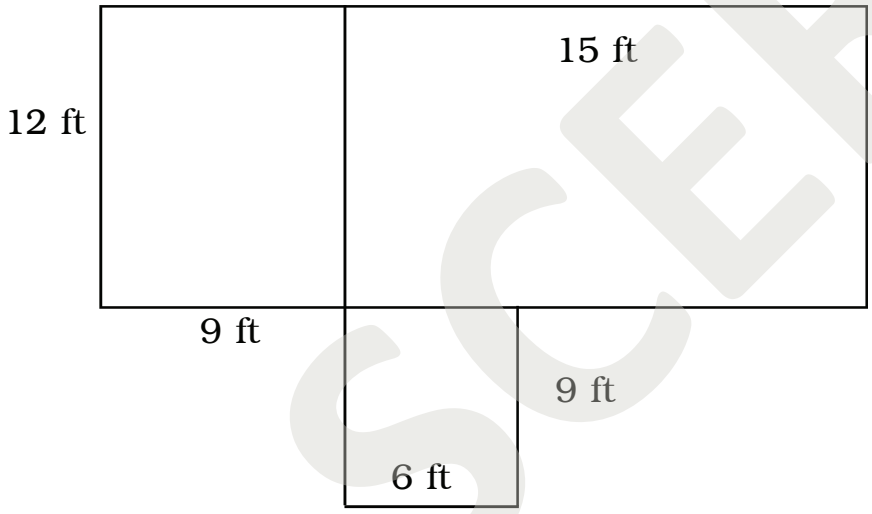
اس لیے، 1 کلو چائے کی قیمت میگھالیہ میں 800 روپیے اور ہماچل پردیش میں 1,000 روپیے ہے۔ اس لیے، ہماچل پردیش کی چائے زیادہ مہنگی ہے۔

سرگرمی 1: اپنا پسندیدہ کھانا لیں۔ اپنے خاندان کے لیے یہ کھانا بنانے میں درکار تمام اجزاء اور ان کی مقداریں معلوم کریں۔ فرض کریں کہ آپ ایک تہوار منا رہے ہیں اور آپ 15 مہمانوں کو مدعو کرنا چاہتے ہیں۔ ان کے لیے یہی کھانا پکانے میں درکار اجزاء کی مقداریں معلوم کریں۔



Figure it Out - 7.2

1. The Earth travels approximately 940 million kilometres around the Sun in a year. How many kilometres will it travel in a week?
2. A mason is building a house in the shape shown in the diagram. He separates two rooms. To build a wall of 10-feet, he requires approximately 1450 bricks. How many bricks would he need to build the house? Assume all walls are of the same height and thickness.





? Puneeth's father went from Lucknow to Kanpur in 2 hours by riding his motorcycle at a speed of 50 km/h. If he drives at 75 km/h, how long will it take him to reach Kanpur? Can we form this problem as a proportion —

50 : 2 :: 75 : ——.

Would it take Puneeth's father more time or less time to reach Kanpur? Think about it.

Even though this problem looks similar to the previous problems, it cannot be solved using the Rule of Three!

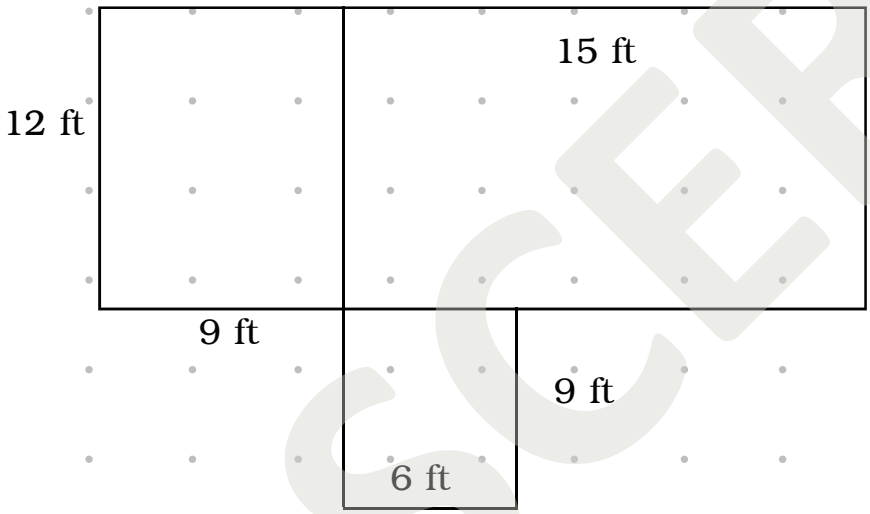
The time of travel would actually decrease when the speed increases. So this problem cannot be modelled as 50 : 2 :: 75 : ——

AP SCERT



حل کیجیے-7.2

1. زمین ایک سال میں سورج کے گرد تقریباً 940 ملین کلو میٹر سفر کرتی ہے۔ وہ ایک ہفتے میں کتنے کلو میٹر سفر کرے گی؟
2. ایک راج مستری ایک گھر بنا رہا ہے جیسا کہ خاکے میں دکھایا گیا ہے۔ وہ دو کمرے الگ کرتا ہے۔ 10 فٹ کی دیوار بنانے کے لیے اسے تقریباً 1450 اینٹوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ گھر بنانے کے لیے اسے کتنی اینٹوں کی ضرورت ہو گی؟ فرض کریں کہ تمام دیواریں یکساں اونچائی اور موٹائی کی ہیں۔





پونیت کے والد لکھنؤ سے کانپور تک موٹر سائیکل پر 50 کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے 2 گھنٹے میں گئے۔ اگر وہ 75 کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چلائیں، تو انہیں کانپور پہنچنے میں کتنا وقت لگے گا؟

کیا ہم اس مسئلے کو تناسب کی صورت میں بنا سکتے ہیں —

—— : 75 :: 2 : 50

کیا پونیت کے والد کو کانپور پہنچنے میں زیادہ وقت لگے گا یا کم؟ اس کے بارے میں سوچیں۔

اگرچہ یہ مسئلہ پچھلے مسائل سے ملتا جلتا لگتا ہے، لیکن اسے تین کے قاعدے سے حل نہیں کیا جا سکتا! سفر کا وقت دراصل رفتار بڑھنے پر کم ہو جائے گا۔ اس لیے اس مسئلے کو —— : 75 :: 2 : 50 کی صورت میں نہیں بنایا جا سکتا۔

Activity 2: Go to the market and collect the prices of different sizes of shampoo containers of the same shampoo and create a table like the one given below. See if the volume of shampoo is proportional to the price.

Container	Volume	Price
Sachet	6 mL	₹2
Small bottle	180 mL	₹154
Medium bottle	340 mL	₹276
Large bottle	1000 mL	₹540

Let us compare the ratios for the sample table above.
The ratio of the volume of a sachet to a small bottle is 6 : 180. The ratio of their prices is 2 : 154. Are these ratios proportional?

Why do you think that the ratio of the prices is not proportional to the ratio of the volumes?
Discuss the pros and cons of different size bottles for the company and for customers. For reducing ecological footprint, what would you recommend to the company and to the customer?
Does the same occur for other products? Make similar tables for other products in the market, capturing different prices for different measures of the same product, e.g., rice or atta (flour).
Observe the products for which the prices are proportional to the different measures.
Discuss in class the proportionality of prices to measures of the same product.

Note to the Teacher: Give a project to students. Start by dividing the class into groups. Each group should go to one shop and collect prices for different measures of the same product. For example, they should note down the prices of 500 g of rice, 1 kg of rice, and 10 kg of rice. They should make tables with measure sizes and prices, and present them to the rest of the class. They should discuss if the prices are proportional or not, and why.

APSCERT

سرگرمی 2: بازار جائیں اور ایک ہی شیمپو کے مختلف سائز کے برتنوں کی قیمتیں معلوم کریں اور نیچے دی گئی جدول جیسی ایک جدول بنائیں۔ دیکھیں کہ آیا شیمپو کی مقدار قیمت کے متناسب ہے۔

برتن	مقدار	قیمت
ساچٹ	6 ملی لیٹر	2 روپے
چھوٹی بوتل	180 ملی لیٹر	154 روپے
درمیانی بوتل	340 ملی لیٹر	276 روپے
بڑی بوتل	1000 ملی لیٹر	540 روپے

آیئے اوپر دی گئی نمونہ جدول کے تناسب کا موازنہ کریں۔ ساشے اور چھوٹی بوتل کی مقدار کا تناسب 180 : 6 ہے۔ ان کی قیمتوں کا تناسب 154 : 2 ہے۔ کیا یہ تناسب متناسب ہیں؟

آپ کے خیال میں قیمتوں کا تناسب مقدار کے تناسب کے متناسب کیوں نہیں ہے؟

مختلف سائز کی بوتلوں کے کمپنی اور گاہکوں کے لیے فائدے اور نقصانات پر بحث کریں۔ ماحولیاتی اثرات کم کرنے کے لیے آپ کمپنی اور گاہک کو کیا تجویز کریں گے؟ کیا یہی دیگر مصنوعات کے ساتھ بھی ہوتا ہے؟

بازار کی دیگر مصنوعات کے لیے بھی اسی طرح کی جدولیں بنائیں، جیسے چاول یا آٹا،

جن میں ایک ہی مصنوع کی مختلف مقداروں کی مختلف قیمتیں ہوں۔ ان مصنوعات کا مشاہدہ کریں جن کی قیمتیں مختلف مقداروں کے متناسب ہیں۔

کلاس میں ایک ہی مصنوع کی مقداروں کے مقابلے میں قیمتوں کے تناسب پر بحث کریں۔

اساتذہ کے لیے نوٹ: طلبہ کو ایک منصوبہ دیں۔ کلاس کو گروپوں میں تقسیم کر کے شروع کریں۔ ہر گروپ کو ایک دکان پر جانا چاہیے اور ایک ہی مصنوع کی مختلف مقداروں کی قیمتیں جمع کرنی چاہئیں۔ مثال کے طور پر، انہیں 500 گرام چاول، 1 کلو چاول اور 10 کلو چاول کی قیمتیں نوٹ کرنی چاہئیں۔ انہیں مقدار کے سائز اور قیمتوں کی جدولیں بنانی چاہئیں، اور انہیں باقی کلاس کے سامنے پیش کرنا چاہیے۔ انہیں اس بات پر بحث کرنی چاہیے کہ آیا قیمتیں متناسب ہیں یا نہیں، اور کیوں۔

7.5 Sharing, but Not Equally!

Activity 3: Form a pair. Collect 12 countable objects or counters (it can be coins, seeds, or pebbles). Now, shxare them between the two of you in different ways.



If you divide them equally, what is the ratio of the number of counters with each of you?

Each of you will get 6 counters. So, the ratio is 6 : 6, or 1 : 1 in its simplest form.

Now let us not share equally.

If your partner gets 5 counters, how many objects will you get? What is the ratio of the counters?

The ratio of the counters of your partner to yours is 5 : 7.

Now, if you want to share the counters between the two of you in the ratio of 3 : 1, how many counters would each of you get?

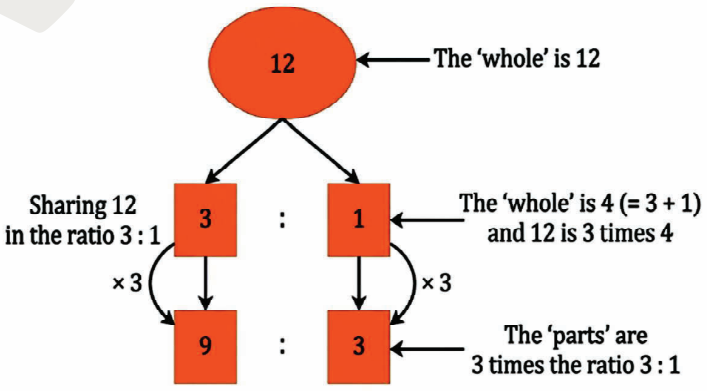
Share the counters in different ways and see which combination is in the ratio 3 : 1.

One way to share the counters in the ratio of 3 : 1 is as follows —

1. Your partner takes 3 counters and you take 1 counter.
   There are now 8 counters left.
2. Your partner takes 3 more counters and you take 1 more counter.
   There are now 4 counters left.
3. Your partner takes 3 more counters and you take 1 more counter.
   There are no more counters left.

So, your partner gets 9 counters in total and you get 3 counters.

When we divide 12 counters in the ratio of 3 : 1 between two people, one gets 9 counters and the other gets 3 counters.



APSCERT

7.5 بانٹنا، لیکن مساوی نہیں!



سرگرمی 3: جوڑا بنائیں۔ 12 گنے جانے والی اشیاء یا کاؤنٹر جمع کریں (یہ سکے، بیج یا کنکریاں ہو سکتی ہیں)۔ اب انہیں مختلف طریقوں سے آپس میں بانٹیں۔

اگر آپ انہیں مساوی تقسیم کریں، تو آپ میں سے ہر ایک کے پاس کاؤنٹروں کی تعداد کا تناسب کیا ہو گا؟ آپ میں سے ہر ایک کو 6 کاؤنٹر ملیں گے۔ اس لیے، تناسب 6 : 6 ہے، یا مختصر شکل میں 1 : 1 ہے۔ اب مساوی نہ بانٹیں۔

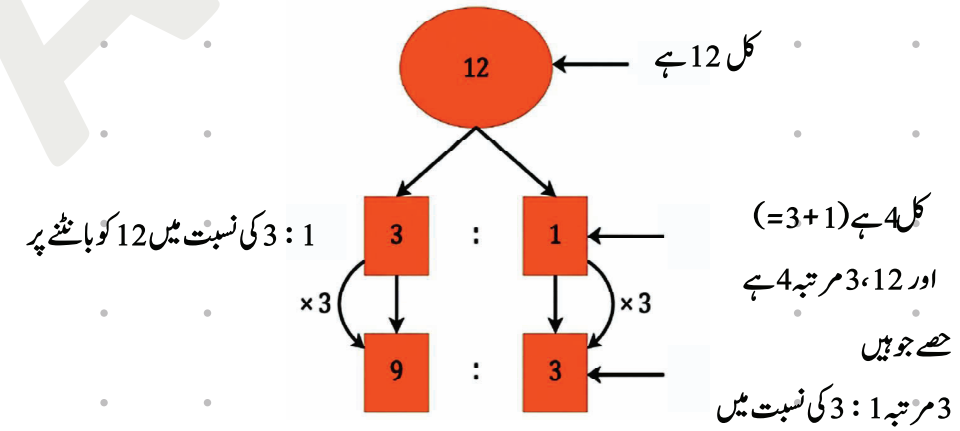
اگر آپ کے ساتھی کو 5 کاؤنٹر ملیں، تو آپ کو کتنی اشیاء ملیں گی؟ کاؤنٹروں کا تناسب کیا ہے؟ آپ کے ساتھی کے کاؤنٹروں کا آپ کے کاؤنٹروں سے تناسب 7 : 5 ہے۔

اب، اگر آپ دونوں کے درمیان کاؤنٹروں کو 1 : 3 کے تناسب میں بانٹنا چاہتے ہیں، تو آپ میں سے ہر ایک کو کتنے کاؤنٹر ملیں گے؟ کاؤنٹروں کو مختلف طریقوں سے بانٹیں اور دیکھیں کہ کون سا امتزاج 1 : 3 کے تناسب میں ہے۔

1 : 3 کے تناسب میں کاؤنٹروں کو بانٹنے کا ایک طریقہ یہ ہے—

1. آپ کا ساتھی 3 کاؤنٹر لیتا ہے اور آپ 1 کاؤنٹر لیتے ہیں۔ اب 8 کاؤنٹر باقی ہیں۔
2. آپ کا ساتھی 3 مزید کاؤنٹر لیتا ہے اور آپ 1 مزید کاؤنٹر لیتے ہیں۔ اب 4 کاؤنٹر باقی ہیں۔
3. آپ کا ساتھی 3 مزید کاؤنٹر لیتا ہے اور آپ 1 مزید کاؤنٹر لیتے ہیں۔ اب کوئی کاؤنٹر باقی نہیں ہے۔

اس طرح، آپ کے ساتھی کو کل 9 کاؤنٹر ملتے ہیں اور آپ کو 3 کاؤنٹر ملتے ہیں۔ جب ہم 12 کاؤنٹروں کو دو افراد کے درمیان 1 : 3 کے تناسب میں تقسیم کرتے ہیں، تو ایک کو 9 کاؤنٹر اور دوسرے کو 3 کاؤنٹر ملتے ہیں۔



- Now, if you want to share 42 counters between the two of you in the ratio of 4 : 3, how will you do it?

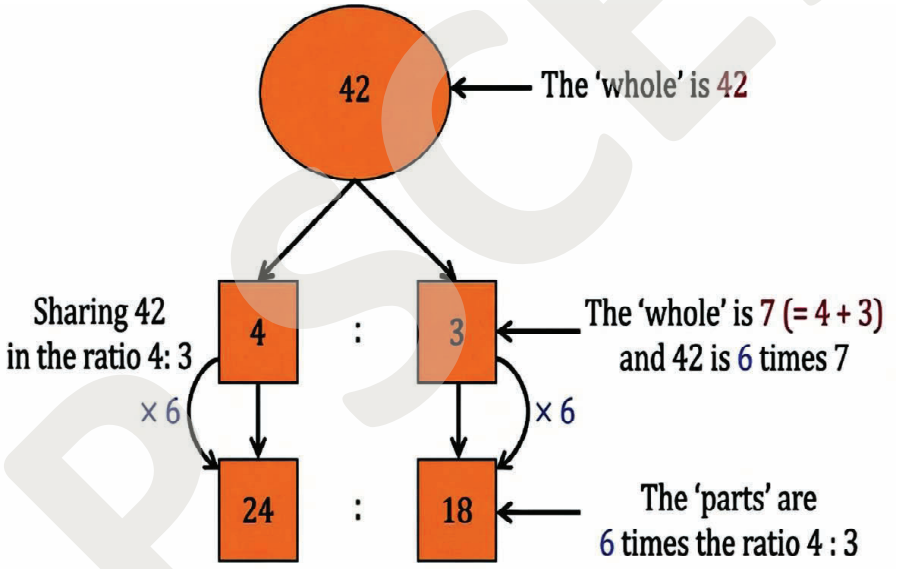
  Using the same procedure would take a long time! There is a simpler way to share the whole with parts in a specified ratio.

  You need to divide 42 into groups such that your partner gets 4 groups and you get 3 groups.

- What is the size of each group?

  If your partner gets 4 groups and you get 3 groups, the total number of groups is 7. So, the size of each group is 42 ÷ 7 = 6.

  Multiplying the number of groups by the size of each group, your partner gets 24 counters and you get 18 counters, when you share 42 counters in the ratio of 4 : 3.



In general, when we want to divide a quantity, say x, in the ratio m: n, we do the following:

1. We need to split x into groups such that it can be divided into two parts where the first part has m groups and the second part has n groups.
2. But what is the size of each group? This can be found out by dividing x by the number of groups. The number of groups are m + n. So, the size of each group is $\frac{x}{m + n}$

✪ اب، اگر آپ 42 کاؤنٹروں کو 3 : 4 کے تناسب میں آپس میں بانٹنا چاہتے ہیں، تو آپ یہ کیسے کریں گے ؟

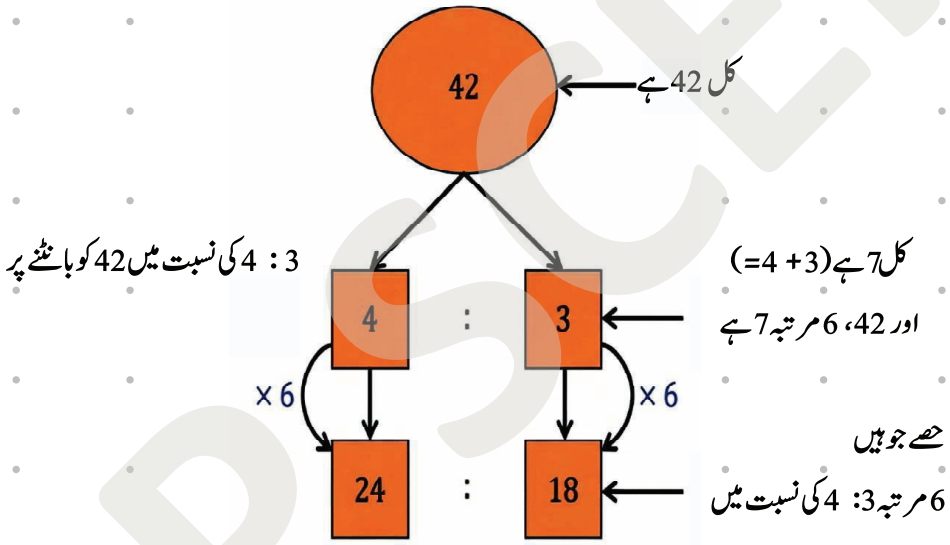
اسی طریقے سے کرنے میں کافی وقت لگے گا! پورے کو مخصوص تناسب میں حصوں میں بانٹنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔

آپ کو 42 کو گروپوں میں تقسیم کرنا ہوگا تاکہ آپ کے ساتھی کو 4 گروپ اور آپ کو 3 گروپ ملیں۔

✪ ہر گروپ کا سائز کیا ہے؟

اگر آپ کے ساتھی کو 4 گروپ اور آپ کو 3 گروپ ملتے ہیں، تو گروپوں کی کل تعداد 7 ہے۔ اس لیے، ہر گروپ کا سائز $42 \div 7 = 6$ ہے۔

گروپوں کی تعداد کو ہر گروپ کے سائز سے ضرب دینے پر، جب آپ 42 کاؤنٹروں کو 3 : 4 کے تناسب میں بانٹتے ہیں تو آپ کے ساتھی کو 24 کاؤنٹر اور آپ کو 18 کاؤنٹر ملتے ہیں۔



عام طور پر، جب ہم کسی مقدار، مثلاً x کو m : n کے تناسب میں تقسیم کرنا چاہتے ہیں، تو ہم یہ کرتے ہیں:

1. ہمیں x کو گروپوں میں تقسیم کرنا ہوگا تاکہ اسے دو حصوں میں بانٹا جاسکے جہاں پہلے حصے میں m گروپ اور دوسرے حصے میں n گروپ ہوں۔
2. لیکن ہر گروپ کا سائز کیا ہے؟ یہ x کو گروپوں کی تعداد سے تقسیم کرکے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ گروپوں کی تعداد $m + n$ ہے۔ اس لیے، ہر گروپ کا سائز ہے۔ $\frac{x}{m + n}$

3. So, the first part has $m \times \frac{x}{m+n}$ objects and the second part has $n \times \frac{x}{m+n}$ objects.

Thus, if we want to divide a quantity x in the ratio of m: n, then the parts will be $m \times \frac{x}{m+n}$ and $n \times \frac{x}{m+n}$. We see that

$$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n.$$

Example 11: Prashanti and Bhuvan started a food cart business near their school. Prashanti invested ₹75,000 and Bhuvan invested ₹25,000. At the end of the first month, they gained a profit of ₹4,000. They decided that they would share the profit in the same ratio as that of their investment. What is each person's share of the profit?

The ratio of their investment is 75000 : 25000.

Reducing this ratio to its simplest form, we get 3 : 1.

3 + 1 is 4 and dividing the profit of 4000 by 4, we get 1000.

So, Prashanti's share is 3 × 1000 and Bhuvan's share is 1 × 1000.

So, Prashanti would get ₹3,000 and Bhuvan would get ₹1,000 of the profit.

Example12: Amixture of 40kg contains sand and cement inthe ratio of 3 : 1. How much cement should be added to the mixture to make the ratio of sand to cement 5 : 2?

Let us find the quantity of sand and cement in the original mixture.

The ratio is 3 : 1 and the total weight is 40 kg.

So, the weight of sand is $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ kg.

The weight of cement is $\frac{1}{(3+1)} \times 40 = 10$ kg.

The weight of sand is the same in the new mixture. It remains 30. But the new ratio of sand to cement is 5 : 2. So the question is,

$$5 : 2 :: 30 : ?$$

If the ratio is 5 : 2, then the second term is $\frac{2}{5}$ times the first term. Since the new ratio is equivalent to 5 : 2, the second term in the new ratio should also be $\frac{2}{5}$ times of 30.

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12.$$

© NCERT

3. اس لیے، پہلے حصے میں $m \times \frac{x}{m+n}$ اشیاء ہیں اور دوسرے حصے میں $n \times \frac{x}{m+n}$ اشیاء ہیں۔

اس طرح، اگر ہم کسی مقدار x کو m : n کے تناسب میں تقسیم کرنا چاہتے ہیں،

تو حصے $m \times \frac{x}{m+n}$ اور $n \times \frac{x}{m+n}$ ہوں گے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

$$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n.$$

مثال 11: پرشانتی اور بھوون نے اپنے اسکول کے قریب ایک فوڈ کارٹ کا کاروبار شروع کیا۔ پرشانتی نے 75,000 روپیے اور بھوون نے 25,000 روپیے لگائے۔ پہلے مہینے کے آخر میں، انہیں 4,000 روپیے کا منافع ہوا۔ انہوں نے فیصلہ کیا کہ وہ منافع کو اپنی سرمایہ کاری کے تناسب میں بانٹیں گے۔ ہر شخص کے منافع کا حصہ کیا ہے؟

ان کی سرمایہ کاری کا تناسب 25000 : 75000 ہے۔

اس تناسب کو سادہ ترین شکل میں کم کرنے پر، ہمیں 1 : 3 حاصل ہوتا ہے۔

3 + 1 = 4 ہے اور 4000 کے منافع کو 4 سے تقسیم کرنے پر، ہمیں 1000 ملتا ہے۔ اس لیے، پرشانتی کا حصہ 1000 × 3 ہے اور بھوون کا حصہ 1000 × 1 ہے۔ اس لیے، پرشانتی کو 3,000 روپیے اور بھوون کو 1,000 روپیے منافع ملے گا۔

مثال 12: 40 کلو کے ایک مرکب میں ریت اور سیمنٹ 1 : 3 کے تناسب میں ہیں۔ ریت اور سیمنٹ کا تناسب 2 : 5 بنانے کے لیے مرکب میں کتنا سیمنٹ ملانا چاہیے؟

آیئے اصل مرکب میں ریت اور سیمنٹ کی مقدار معلوم کریں۔ تناسب 1 : 3 ہے اور کل وزن 40 کلو ہے۔

اس لیے، ریت کا وزن $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ کلو ہے۔

سیمنٹ کا وزن $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 10$ کلو ہے۔

نئے مرکب میں ریت کا وزن وہی رہتا ہے۔ یہ 30 رہتا ہے۔ لیکن ریت اور سیمنٹ کا نیا تناسب 5 : 2 ہے۔ اس لیے سوال یہ ہے،

$$5 : 2 :: 30 : ?$$

اگر تناسب 2:5 ہے، تو دوسری حد پہلی حد کی $\frac{5}{2}$ گنا ہے۔

چونکہ نیا تناسب 2 : 5 کے مساوی ہے، اس لیے نئے تناسب میں دوسری حد بھی 30 کی $\frac{2}{5}$ گنا ہونی چاہیے۔

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12$$

The new mixture should have 12 kg of cement if the ratio of sand to cement is to be 5 : 2.

There is 10 kg of cement already. So, we need to add 2 kg of cement to the original mixture.



Figure it Out - 7.3

1. Divide .4,500 into two parts in the ratio 2 : 3.
2. In a science lab, acid and water are mixed in the ratio of 1 : 5 to make a solution. In a bottle that has 240 mL of the solution, how much acid and water does the solution contain?
3. Blue and yellow paints are mixed in the ratio of 3 : 5 to produce green paint. To produce 40 mL of green paint, how much of these two colours are needed? To make the paint a lighter shade of green, I added 20 mL of yellow to the mixture. What is the new ratio of blue and yellow in the paint?
4. To make soft idlis, you need to mix rice and urad dal in the ratio of 2 : 1. If you need 6 cups of this mixture to make idlis tomorrow morning, how many cups of rice and urad dal will you need?
5. I have one bucket of orange paint that I made by mixing red and yellow paints in the ratio of 3 : 5. I added another bucket of yellow paint to this mixture. What is the ratio of red paint to yellow paint in the new mixture?

7.6 Unit Conversions

We have noticed earlier that solving problems with proportionality often requires us to convert units from one system to another. Here are a few important unit conversions for your reference.

Length

1 metre = 3.281 feet

Area

1 square metre = 10.764 square feet

1 acre = 43,560 square feet

1 hectare = 10,000 square metres

1 hectare = 2.471 acres

AP SCERT

نئے مرکب میں 12 کلو سیمنٹ ہونی چاہیے اگر ریت اور سیمنٹ کا تناسب 2 : 5 ہونا ہے۔ پہلے سے 10 کلو سیمنٹ موجود ہے۔ اس لیے، ہمیں اصل مرکب میں 2 کلو سیمنٹ مزید ملانی ہو گی۔



حل کیجیے– 7.3

1. 4,500 روپے کو 3 : 2 کے تناسب میں دو حصوں میں تقسیم کریں۔
2. سائنس لیب میں، ایک محلول بنانے کے لیے تیزاب اور پانی کو 5 : 1 کے تناسب میں ملایا جاتا ہے۔ 240 ملی لیٹر محلول والی بوتل میں کتنا تیزاب اور پانی ہے؟
3. سبز رنگ بنانے کے لیے نیلے اور پیلے رنگ کو 5 : 3 کے تناسب میں ملایا جاتا ہے۔ 40 ملی لیٹر سبز رنگ بنانے کے لیے ان دونوں رنگوں کی کتنی مقدار درکار ہے؟ رنگ کو ہلکا سبز بنانے کے لیے میں نے مرکب میں 20 ملی لیٹر پیلا رنگ ملایا۔ رنگ میں نیلے اور پیلے کا نیا تناسب کیا ہے؟
4. نرم اڈلی بنانے کے لیے آپ کو چاول اور اڑد کی دال کو 2 : 1 کے تناسب میں ملانا ہو گا۔ اگر کل صبح اڈلی بنانے کے لیے آپ کو اس مرکب کے 6 کپ چاہیے، تو آپ کو چاول اور اڑد کی دال کے کتنے کپ درکار ہوں گے؟
5. میرے پاس نارنجی رنگ کی ایک بالٹی ہے جو میں نے سرخ اور پیلے رنگ کو 5 : 3 کے تناسب میں ملا کر بنائی ہے۔ میں نے اس مرکب میں پیلے رنگ کی ایک اور بالٹی ملائی۔ نئے مرکب میں سرخ اور پیلے رنگ کا تناسب کیا ہے؟

7.6 اکائیوں کی تبدیلی

ہم نے پہلے دیکھا ہے کہ تناسب کے مسائل حل کرنے کے لیے اکثر اکائیوں کو ایک نظام سے دوسرے نظام میں تبدیل کرنا پڑتا ہے۔ آپ کے حوالے کے لیے یہاں کچھ اہم اکائی تبدیلیاں ہیں۔

لمبائی

1 میٹر = 3.281 فٹ

رقبہ

1 مربع میٹر = 10.764 مربع فٹ

1 ایکڑ = 43,560 مربع فٹ

1 ہیکٹر = 10,000 مربع میٹر

1 ہیکٹر = 2.471 ایکڑ

Volume 1 millilitre (mL) = 1 cubic centimetre (cc)

1 litre = 1,000 mL or 1,000 cc

Temperature

Temperature conversion between Fahrenheit and Celsius is a bit more complicated. 0^0C = 32°F, and

$$\text{Fahrenheit} = \frac{9}{5} \times \text{Celsius} + 32 \text{ and}$$

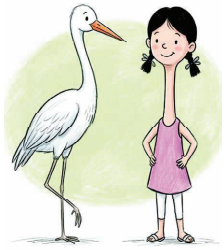
$$\text{Celsius} = \frac{5}{9} \times (\text{Fahrenheit} - 32)$$

For example, 25°C is 77°F.



Figure it Out - 7.4

1. Anagh mixes 600 mL of orange juice with 900 mL of apple juice to make a fruit drink. Write the ratio of orange juice to apple juice in its simplest form.
2. Last year, we hired 3 buses for the school trip. We had a total of 162 students and teachers who went on that trip and all the buses were full. This year we have 204 students. How many buses will we need? Will all the buses be full?
3. The area of Delhi is 1,484 sq. km and the area of Mumbai is 550 sq. km. The population of Delhi is approximately 30 million and that of Mumbai is 20 million people. Which city is more crowded? Why do you say so?
4. A crane of height 155 cm has its neck and the rest of its body in the ratio 4 : 6. For your height, if your neck and the rest of the body also had this ratio, how tall would your neck be?



5. Let us try an ancient problem from Lilavati. At that time weights were measured in a unit named palas and niskas was a unit of money. "If $2\frac{1}{2}$ palas of saffron costs $\frac{3}{7}$ niskas, O expert businessman! tell me quickly what quantity of saffron can be bought for 9 niskas?"

APSCERT

حجم

1 ملی لیٹر (mL) = 1 مکعب سم

1 لیٹر = 1,000 ملی لیٹر یا 1,000 (cc) مکعب سم

درجہ حرارت

فارن ہائیٹ اور سیلسیس کے درمیان درجہ حرارت کی تبدیلی قدرے پیچیدہ ہے۔ 0°C = 32°F، اور

فارن ہائیٹ = $\frac{9}{5}$ × سیلسیس + 32 اور

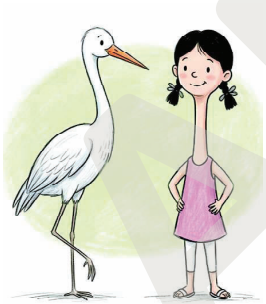
سیلسیس = $\frac{9}{5}$ × (فارن ہائیٹ − 32)

مثال کے طور پر، 25° C = 77°F ہے۔



حل کیجیے – 7.4

1. اناگھ 600 ملی لیٹر سنترہ کا جوس کو 900 ملی لیٹر سیب کے جوس کے ساتھ ملا کر ایک پھل کا مشروب بناتا ہے۔ سنترہ کا جوس اور سیب کے جوس کا تناسب سادہ ترین شکل میں لکھیں۔
2. گزشتہ سال، ہم نے اسکول کے سفر کے لیے 3 بسیں کرائے پر لی تھیں۔ اس سفر میں کل 162 طلبہ اور اساتذہ گئے تھے اور تمام بسیں بھری ہوئی تھیں۔ اس سال ہمارے پاس 204 طلبہ ہیں۔ ہمیں کتنی بسوں کی ضرورت ہو گی؟ کیا تمام بسیں بھری ہوں گی؟
3. دہلی کا رقبہ 1,484 مربع کلومیٹر اور ممبئی کا رقبہ 550 مربع کلومیٹر ہے۔ دہلی کی آبادی تقریباً 3 کروڑ اور ممبئی کی آبادی 2 کروڑ ہے۔ کون سا شہر زیادہ گنجان آباد ہے؟ آپ ایسا کیوں کہتے ہیں؟



4. 155 سم اونچے ایک سارس کی گردن اور باقی جسم کا تناسب 6 : 4 ہے۔ آپ کے قد کے لیے، اگر آپ کی گردن اور باقی جسم کا بھی یہی تناسب ہوتا، تو آپ کی گردن کتنی لمبی ہوتی؟
5. آیئے لیلاوتی کا ایک قدیم مسئلہ آزمائیں۔ اس وقت وزن کو پالا نامی اکائی میں اور پیسے کو نسکا نامی اکائی میں ناپا جاتا تھا۔ "اگر ڈھائی پالا زعفران کی قیمت $\frac{3}{7}$ نسکا ہے، اے ماہر تاجر! مجھے فوری بتاؤ کہ 9 نسکا میں کتنی زعفران خریدی جا سکتی ہے؟"

6. Taswika is a 1-year-old girl. Her elder brother is 5 years old. What will be Taswika's age when the ratio of her age to her brother's age is 1 : 2?
7. The mass of equal volumes of gold and water are in the ratio 37 : 2. If 1 litre of water is 1 kg in mass, what is the mass of 1 litre of gold?
8. It is good farming practice to apply 10 tonnes of cow manure for 1 acre of land. A farmer is planning to grow tomatoes in a plot of size 200 ft by 500 ft. How much manure should he buy? (Please refer to the section on Unit Conversions earlier in this chapter).
9. A tap takes 15 seconds to fill a mug of water. The volume of the mug is 500 mL. How much time does the same tap take to fill a bucket of water if the bucket has a 10-litre capacity?
10. One acre of land costs `15,00,000. What is the cost of 2,400 square feet of the same land?
11. A tractor can plough the same area of a field 4 times faster than a pair of oxen. A farmer wants to plough his 20-acre field. A pair of oxen takes 6 hours to plough an acre of land. How much time would it take if the farmer used a pair of oxen to plough the field? How much time would it take him if he decides to use a tractor instead?
12. The `10 coin is an alloy of copper and nickel called 'cupro-nickel'. Copper and nickel are mixed in a 3 : 1 ratio to get this alloy. The mass of the coin is 7.74 grams. If the cost of copper is `906 per kg and the cost of nickel is `1,341 per kg, what is the cost of these metals in a `10 coin?

SUMMARY

- Ratios in the form of a : b indicate that for every 'a' unit of the first quantity, there are 'b' units of the second quantity. 'a' and 'b' are the terms in the ratio.
- Two ratios — a : b and c : d — are proportional (written a : b :: c : d) if their terms change by the same factor, i.e., if ad = bc.
- If x is divided into two parts in the ratio m : n, then the quantity of the first part is $m \times \frac{x}{m+n}$ and the quantity of the second part is $n \times \frac{x}{m+n}$.

6. تسویکا 1 سال کی لڑکی ہے۔ اس کا بڑا بھائی 5 سال کا ہے۔ تسویکا کی عمر کتنی ہو گی جب اس کی عمر اور اس کے بھائی کی عمر کا تناسب 2 :1 ہو گا؟

7. سونے اور پانی کے برابر حجم کی کمیت کا تناسب 37 :2 ہے۔ اگر 1 لیٹر پانی کی کمیت 1 کلو ہے، تو 1 لیٹر سونے کی کمیت کیا ہو گی؟

8. اچھی کاشتکاری کے لیے 1 ایکڑ زمین پر 10 ٹن گائے کی کھاد ڈالنا ضروری ہے۔ ایک کسان 200 فٹ بہ 500 فٹ کے ایک پلاٹ میں ٹماٹر اگانے کا ارادہ رکھتا ہے۔ اسے کتنی کھاد خریدنی چاہیے؟ (براہ کرم اس باب میں پہلے دی گئی اکائیوں کی تبدیلی کا حوالہ لیں)۔

9. ایک نل کو پانی سے ایک مگ بھرنے میں 15 سیکنڈ لگتے ہیں۔ مگ کا حجم 500 ملی لیٹر ہے۔ اسی نل کو 10 لیٹر گنجائش والی بالٹی بھرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

10. ایک ایکڑ زمین کی قیمت 15,00,000 روپیے ہے۔ اسی زمین کے 2,400 مربع فٹ کی قیمت کیا ہو گی؟

11. ایک ٹریکٹر بیلوں کے ایک جوڑے سے 4 گنا تیزی سے کھیت جوت سکتا ہے۔ ایک کسان اپنے 20 ایکڑ کھیت کو جوتنا چاہتا ہے۔ بیلوں کا ایک جوڑا ایک ایکڑ زمین جوتنے میں 6 گھنٹے لیتا ہے۔ اگر کسان بیلوں کے جوڑے سے کھیت جوتے تو کتنا وقت لگے گا؟ اگر وہ ٹریکٹر استعمال کرے تو کتنا وقت لگے گا؟

12. 10 روپیے کا سکہ تانبے اور نکل کا ایک مرکب ہے جسے 'کیوپرونکل' کہتے ہیں۔ یہ مرکب بنانے کے لیے تانبے اور نکل کو 3 : 1 کے تناسب میں ملایا جاتا ہے۔ سکے کی کمیت 7.74 گرام ہے۔ اگر تانبے کی قیمت 906 روپیے فی کلو اور نکل کی قیمت 1,341 روپیے فی کلو ہے، تو 10 روپیے کے سکے میں ان دھاتوں کی قیمت کیا ہے؟

خلاصہ

a : b کی شکل میں تناسب یہ ظاہر کرتا ہے کہ پہلی مقدار کی ہر 'a' اکائی کے لیے دوسری مقدار کی 'b' اکائیاں ہیں۔ 'a' اور 'b' تناسب کی حدیں ہیں۔

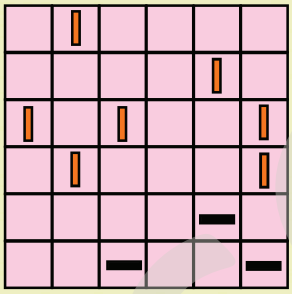
دو تناسب a : b — اور — c : d متناسب ہوتے ہیں) لکھا جاتا ہے (a : b :: c : d اگر ان کی حدیں ایک ہی عنصر سے بدلیں، یعنی اگر ad = bc ہو۔

اگر x کو m : n کے تناسب میں دو حصوں میں تقسیم کیا جائے، تو پہلے حصے کی مقدار $m \times \frac{x}{m+n}$ اور دوسرے حصے کی مقدار $n \times \frac{x}{m+n}$ ہے۔

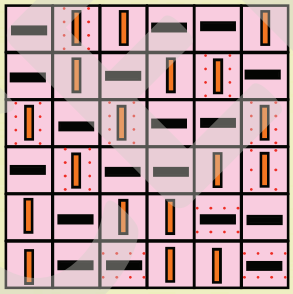


Binairo, also known as Takuzu, is a logic puzzle with simple rules. Binairo is generally played on a square grid with no particular size. Some cells start out filled with two symbols: here horizontal and vertical lines. The rest of the cells are empty. The task is to fill cells in such a way that:

1. Each row and each column must contain an equal number of horizontal and vertical lines.
2. More than two horizontal or vertical lines can't be adjacent.
3. Each row is unique. Each column is unique.

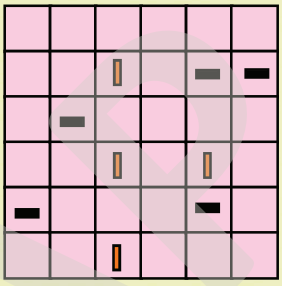


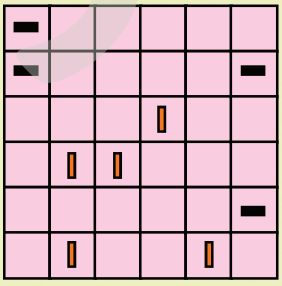
Puzzles

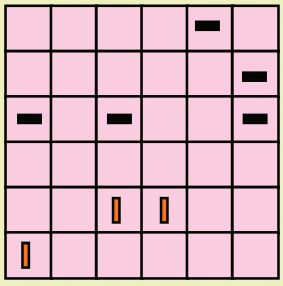


Solution

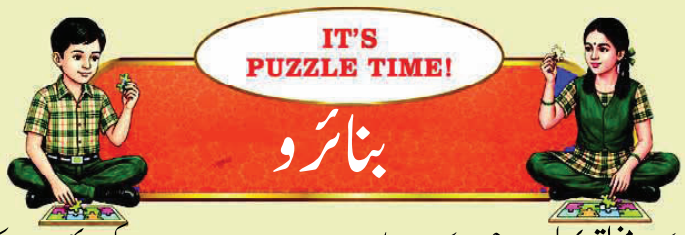
Solve the following Binairo puzzles:









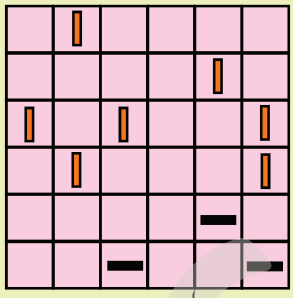


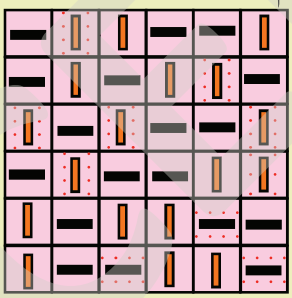
بنائرو

بینائرو، جسے تاکوزو بھی کہتے ہیں، ایک منطقی پہیلی ہے جس کے اصول سادہ ہیں۔ بینائرو عام طور پر کسی بھی سائز کی مربع جالی پر کھیلی جاتی ہے۔ کچھ خانے شروع سے دو علامتوں سے بھرے ہوتے ہیں: یہاں افقی اور عمودی لکیریں۔ باقی خانے خالی ہوتے ہیں۔

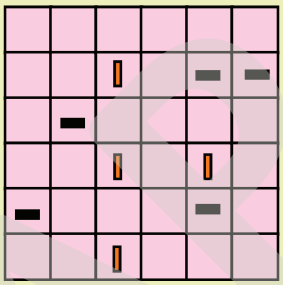
کام یہ ہے کہ خانوں کو اس طرح بھریں کہ:

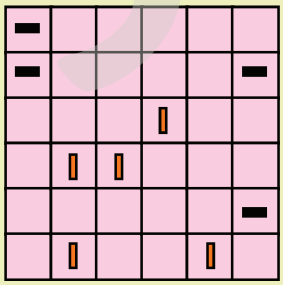
1. ہر قطار اور ہر ستون میں افقی اور عمودی لکیروں کی تعداد برابر ہو۔
2. دو سے زیادہ افقی یا عمودی لکیریں ایک دوسرے سے متصلہ نہیں ہو سکتے۔
3. ہر صف منفرد ہو۔ ہر کالم منفرد ہو۔

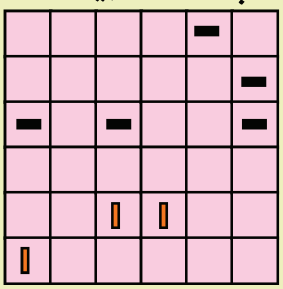

پزل


حل

درج ذیل بائنرو پزلس کو حل کیجیے۔









ANSWERS

Figure it out - 1.1

1. 2032, 2048, and 1027 are not perfect squares.
2. 108^2, 292^2 3. 15625 + 251 4. 21m 5. 900
6. The smallest number to multiply by is 3.
   The square root of the product is 168.
7. There are exactly '2n' numbers between n^2 and $(n+1)^2$
   (i) 32 (ii) 198
8. $4^2 + 5^2 + 20^2 = (21)^2$
   $9^2 + 10^2 + (90)^2 = (91)^2$
9. Total Tiny Squares = 81 × 25 = 2025
   $3^4 \times 5^2$ prime factorisation

Figure it out - 1.2

1. 30 and 22 2. 7
3. (i) False. Because, the cube of any odd number is odd
   (ii) False. The cube of 2 ends with 8
   (iii) False. For example, 10^3 = 1000 is a 4 - digit number
   (iv) False. The cube of largest two digit number $(99)^3$ = 970299 has only 6 digits
   (v) False. The factors of 8, which is cube of 2 = 1, 2 ,4, 8 (even number)
4. (i) yes, the cube root of 1331 can be guessed without factorization. $10 < \sqrt[3]{1331} < 20$, as 1331 ends with 1, its cube root also ends with 1
   So, the cube root of 1331 is 11
   (ii) 4,913: $10 < \sqrt[3]{4913} < 20$, as 4913 ends with 3, its cube root ends with 7 So, the cube root of 4913 = 17
   (iii) 12,167: $20 < \sqrt[3]{12167} < 30$, as 12,617 ends with 7, its cube root ends with 3
   So, the cube root of 12,617 is 23.
   (iv) 32
5. 67^3 - 66^3. Because it involves the highest base numbers raised to the highest power.

جوابات

حل کیجیے-1.1

1۔ 2032، 2048 اور 1027 مکمل مربع نہیں ہیں۔

2۔ 292^2، 108^2 3۔ 15625 + 251 4۔ 21 میٹر 5۔ 900

6۔ ضرب دینے کے لیے سب سے چھوٹا عدد 3 ہے۔ حاصل ضرب کا جذر المربع 168 ہے۔

7۔ n^2 اور $(n+1)^2$ کے درمیان بالکل 'n 2' اعداد ہوتے ہیں۔ (i) 32 (ii) 198

8۔ $4^2 + 5^2 + 20^2 = (21)^2$

$9^2 + 10^2 + (90)^2 = (91)^2$

9۔ کل چھوٹے مربعوں کی تعداد = 81 × 25 = 2025

$3^4 \times 5^2$ امفرد اجزائے ضربی

حل کیجیے-1.2

1۔ 30 اور 22 2۔ 7

3۔ (i) غلط۔ کیونکہ کسی بھی طاق عدد کا مکعب طاق ہوتا ہے۔

(ii) غلط۔ 2 کا مکعب 8 پر ختم ہوتا ہے۔

(iii) غلط۔ مثال کے طور پر 10^3 =1000 چار ہندسوں والا عدد ہے۔

(iv) غلط۔ سب سے بڑے دو ہندسوں والے عدد 970299 = $(99)^3$ میں صرف 6 ہندسے ہیں۔

(v) غلط۔ 2 کے مکعب 8 کے اجزائے ضربی = 1، 2، 4، 8 (جفت تعداد) ہیں۔

4۔ (i) ہاں، 1331 کا مکعب جذر اجزاء میں تقسیم کیے بغیر اندازہ لگایا جا سکتا ہے۔ $10 < \sqrt[3]{1331} < 20$،

چونکہ 1331 کا آخری ہندسہ 1 ہے اس لیے اس کا مکعب جذر بھی 1 پر ختم ہوگا۔ پس 1331 کا مکعب جذر 11 ہے۔

(ii) $10 < \sqrt[3]{4913} < 20$: 4913، چونکہ 4913 کا آخری ہندسہ 3 ہے اس لیے اس کا مکعب جذر 7 پر ختم ہوگا۔ پس 4913 کا مکعب جذر 17 ہے۔

(iii) $20 < \sqrt[3]{12167} < 30$: 12167، چونکہ 12167 کا آخری ہندسہ 7 ہے اس لیے اس کا مکعب جذر 3 پر ختم ہوگا۔ پس 12167 کا مکعب جذر 23 ہے۔

(iv) 32

5۔ $67^3 - 66^3$ سب سے بڑا ہے کیونکہ اس میں سب سے بڑی بنیادی اعداد کو سب سے بڑی قوت میں استعمال کیا گیا ہے۔

APSCERT

Reason :

(i) Cubes vs. Squares: The difference between consecutive cubes ($a^3 - b^3$) grows much faster than the difference between consecutive squares ($a^2 - b^2$). Therefore, (i) and (ii) will be significantly larger than (iii) and (iv).

(ii) Magnitude of Bases: Between the two cube expressions, uses much larger base numbers (67 vs 66). Since the difference is ($a^2 + ab + b^2$), larger values of a and b will result in a much larger sum.

Conclusion : The greatest value is **(i) $67^3 - 66^3$.**

Figure it out - 2.1

1. (i) 6^4 (ii) y^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$
   (iv) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d^1$
2. (i) $648 = 2^3 \times 3^4$ (ii) $405 = 3^4 \times 5$
   (iii) $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$
3. (i) 2000 (ii) 392 (iii) 768 (iv) 225
   (v) 90000 (vi) –32000000

Figure it out - 2.2

1. 6 2. 200 bottles
3. (i) 64^3: $(2^6)^3$, $(4^3)^3$, $(8^2)^3$ (ii) 192^8: $(2^6 \times 3)^8$, $192^4 \times 192^4$, $(192^2)^4$
   (iii) 32^{-5}: $(2^5)^{-5}$, $32^{-2} \times 32^{-3}$, $(32^{-1})^5$
4. (i) Sometimes True (e.g., 1 and 64 are both; 8 is only a cube).
   (ii) Always True (Any x^4 is $(x^2)^2$).
   (iii) Always True (For integers; $x^5 \div x^3 = x^2$).
   (iv) Always True ($a^3 \times b^3 = (ab)^3$).
   (v) Never True (46 is not divisible by 4).
5. (i) 10^{-7} (ii) 5^3 (iii) 9^{-11} (iv) 13^6 (v) $m^{14}n^{21}$
6. (i) 1.44 (ii) 0.0144 (iii) 0.000144 (iv) 14400
7. $2^4 \times 3^6$, $6^4 \times 3^2$, and $18^2 \times 6^2$. (All these are equal to 11,664)
8. (i) 3^4 (ii) 2^8 (iii) 2^{100}
9. 10 digits (10^{10} = 10 billion)
10. Numbers that are both Squares and Cubes
    Examples: 1, 64, 729, 4096
    General Description: Any number that is a 6th power (n^6).

وجہ: (i)مکعب بمقابلہ مربع: یکے بعد دیگرے مکعبوں کا فرق $(a^3 - b^3)$ یکے بعد دیگرے مربعوں کے فرق $(a^2 - b^2)$ سے بہت تیزی سے بڑھتا ہے۔اس لیے (i) اور (ii) کی قدریں (iii) اور (iv) سے نمایاں طور پر زیادہ ہوں گی۔

(ii)بنیادی اعداد کی قدر: دونوں مکعب عبارتوں میں سے (i) میں بہت بڑے بنیادی اعداد(67بمقابلہ 66) استعمال ہوئے ہیں۔چونکہ فرق $(a^2 + ab + b^2)$ ہے،اس لیے a اور b کی بڑی قدریں بہت بڑا مجموعہ دیں گی۔

نتیجہ: سب سے بڑی قدر(i) $67^3 - 66^3$ ہے۔

حل کیجیے-2.1

1- 64(i) y^2(ii) b^4(iii) $5^2 \times 7^3$(iv) $2^2 \times a^2$(v) $a^3 \times c^4 \times d^1$(vi)

2- $648 = 2^3 \times 3^4$(i) $405 = 3^4 \times 5$(ii)
$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$(iii) $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$(iv)

3- (i) 2000 (ii) 392 (iii) 768 (iv) 225(v) 90000 (vi) −32000000

حل کیجیے-2.2

1- 6 2- 200بوتلیں

3- (i) 64^3: $(2^6)^3$, $(4^3)^3$, $(8^2)^3$ (ii) 192^8: $(2^6 \times 3)^8$, $192^4 \times 192^4$, $(192^2)^4$
(iii) 32^{-5}: $(2^5)^{-5}$, $32^{-2} \times 32^{-3}$, $(32^{-1})^5$

4- (i) کبھی کبھی درست(مثلاً 1 اور 64 دونوں ہیں؛8 صرف مکعب ہے)۔
(ii)ہمیشہ درست (کوئی بھی x^4 ، $(x^2)^2$ ہے)۔
(iii)ہمیشہ درست(اعداد صحیح کے لیے؛$x^5 \div x^3 = x^2$)۔
(iv)ہمیشہ درست$(a^3 \times b^3 = (ab)^3)$۔
(v) کبھی درست نہیں(4^6چار پر قابلِ تقسیم نہیں)۔

5- 10^{-7}(i) 5^3 (ii) 9^{-11}(iii) 13^6 (iv) $m^{14}n^{21}$ (v)

6- 1.44(i) 0.0144 (ii) 0.000144(iii) 14400(iv)

7- $2^4 \times 3^6$ ، $6^4 \times 3^2$،اور $6^2 \times 18^2$۔(یہ سب 11,664 کے برابر ہیں)

8- 3^4(i) 2^8 (ii) 2^{100} (iii)

9- 10ہندسے$(10^{10} = 10$ارب)

10- وہ اعداد جو مربع بھی ہیں اور مکعب بھی :مثالیں:1،64،729،4096 عمومی وضاحت: کوئی بھی عدد جو چھٹویں قوت (n^6) ہو۔

11. Characters available: 62 (10 digits + 26 lowercase + 26 uppercase)
62^5 (or 916,132,832 codes)

12. (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. i) 2.43×10^{11} pieces (world population = 8.1×10^9 approximately)
ii) 5×10^{12} honeybees
iii) 3.078×10^{23} bacterial cells (world population = 8.1×10^9 approximately)

14. Approximately 31.7 years ago (roughly August 1994).

Figure it out - 3.1

1. Stick Method - Mathematical Operations
If we use a number system consisting of sticks (tally marks) without using Hindu-Arabic numerals or names, we can perform operations through physical grouping:
Addition : Simply combine two separate collections of sticks into one large pile.
Example: (| | |) + (| |) = (| | | | |)
Subtraction: From the first collection, remove as many sticks as there are in the second collection. The remaining sticks represent the result.
Multiplication: Lay out the first collection of sticks as many times as there are sticks in the second collection. For example, to multiply 3 by 2, you place a group of 3 sticks down twice.
Division: Determine how many times you can "take away" the divisor group from the dividend group. The number of times you successfully remove it is the **quotient**, and any sticks left over are the **remainder**.

2. Extending the Letter System (Method 2)
In a system where 'a' through 'z' represent 1 to 26, we can extend it to represent infinite numbers using a Positional (Base- 26) System:
Place Value : Just as we move from 9 to 10, we can move from 'z' (26) to 'aa' (27). In this system, the first 'a' represents the "26s" place, and the second 'a' represents the "1s" place.
Column Logic : This is identical to how Microsoft Excel names its columns (A, B... Z, AA, AB...). To represent very large numbers, you simply add more letters (e.g., 'aaa' for numbers beyond \$26 \ times 26\$).
Additive Extension : Another way is to use specific letter combinations to represent milestones (like 'aa' = 50, 'aaa' = 100), similar to the Roman numeral logic.

11۔ دستیاب حروف: 62 (10 ہندسے + 26 چھوٹے حروف + 26 بڑے حروف) (62^5 یا 916,132,832 رمز)

12۔ (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13۔ (i) 2.43×10^{11} ٹکڑے (دنیا کی آبادی تقریباً 8.1×10^9) (ii) 5×10^{12} شہد کی مکھیاں

(iii) 3.078×10^{23} جراثیمی خلیے (دنیا کی آبادی تقریباً 8.1×10^9)

14۔ تقریباً 31.7 سال پہلے (تقریباً اگست 1994)۔

حل کیجیے-3.1

1۔ لکڑی کا طریقہ — ریاضی کے عمل

اگر ہم ہندو-عربی ہندسوں یا ناموں کے بغیر لکڑیوں (شمار نشانوں) پر مشتمل عددی نظام استعمال کریں تو طبعی گروہ بندی کے ذریعے عمل انجام دے سکتے ہیں:

جمع: دو الگ الگ لکڑیوں کے مجموعوں کو ایک بڑے گھٹے میں اکٹھا کریں۔ مثال (||||) + (|||) = (|||||):

تفریق: پہلے مجموعے سے اتنی لکڑیاں ہٹائیں جتنی دوسرے مجموعے میں ہوں۔ باقی بچی لکڑیاں نتیجہ ظاہر کرتی ہیں۔

ضرب: پہلے مجموعے کی لکڑیاں اتنی بار رکھیں جتنی دوسرے مجموعے میں لکڑیاں ہوں۔ مثلاً 3 کو 2 سے ضرب دینے کے لیے 3 لکڑیوں کا ایک گروہ دو بار رکھیں۔

تقسیم: معلوم کیجیے کہ مقسوم کے گروہ سے مقسوم علیہ کا گروہ کتنی بار "الگ کیا" جا سکتا ہے۔ جتنی بار کامیابی سے الگ کریں وہ خارج قسمت ہے اور باقی بچی لکڑیاں باقی ہیں۔

2۔ حرفی نظام کی توسیع (طریقہ2)

ایک ایسے نظام میں جہاں 'a' سے 'z' تک 1 سے 26 کو ظاہر کیا جائے، ہم اسے مقامی (بنیاد-26) نظام کے ذریعے لامحدود اعداد تک بڑھا سکتے ہیں:

مقامی قدر: جیسے ہم 9 سے 10 پر جاتے ہیں، اسی طرح 'z' (26) سے 'aa' (27) پر جا سکتے ہیں۔ اس نظام میں پہلا "26" 'a' کی جگہ" اور دوسرا 'a' اکائی کی جگہ" ظاہر کرتا ہے۔

خانوں کی منطق: یہ بالکل ویسا ہی ہے جیسے Microsoft Excel اپنے خانوں کے نام رکھتا ہے (A، B...Z، AA، AB..)۔

بہت بڑے اعداد ظاہر کرنے کے لیے مزید حروف شامل کیجیے (مثلاً بہت بڑے اعداد کے لیے 'aaa')۔

اضافی توسیع: ایک اور طریقہ یہ ہے کہ مخصوص حرفی امتزاج کو خاص قدروں کے لیے استعمال کیا جائے (جیسے 'aa' = 50، 'aaa' = 100)، رومن ہندسوں کی منطق کی طرح۔

3. Here is a sample "Shape-Based System" designed for clarity:

Symbol	Value
Dot (.)	1
Vertical Line (|)	5
Triangle (△)	10
Square (□)	50

Rules for Writing :

Symbols are written from largest value to smallest value.

Example 13: △... (One Triangle + 3 Dots)

Example 67: □△|.. (One Square + One Triangle + One Line + 2 Dots)

Figure it out - 3.2

1. (i) MCCXXII

(ii) MMCMXCIX

(iii) CCCII

(iv) DCCXV

Figure it out - 3.3

1. The Hindu-Arabic numeral system is considered one of the greatest inventions in mathematics because of its logical efficiency.

Why Hindu system is more efficient?

1. Place Value System: Value of a digit depends on its position

   Example: 345 = 3 hundreds + 4 tens + 5 ones

   Roman system has no place value
2. Use of Zero (0): Zero is a powerful placeholder

   Distinguishes 5, 50, 500

   Roman numerals do not have zero

AP SCERT

3۔ یہاں وضاحت کے لیے ایک نمونہ "شکل پر مبنی نظام" پیش کیا گیا ہے:

قدر	علامت
1	نقطہ (.)
5	عمودی لکیر (|)
10	مثلث (△)
50	مربع (□)

لکھنے کے قواعد:

علامتیں سب سے بڑی قدر سے سب سے چھوٹی قدر کی ترتیب سے لکھی جاتی ہیں۔

مثال 13: △... (ایک مثلث + 3 نقطے)

مثال 67: □△|.. (ایک مربع + ایک مثلث + ایک لکیر + 2 نقطے)

حل کیجیے-3.2

1۔ MCCXXII(i)

MMCMXCIX(ii)

CCCII(iii)

DCCXV(iv)

حل کیجیے-3.3

1۔ ہندو-عربی عددی نظام کو ریاضی کی عظیم ترین ایجادات میں سے ایک سمجھا جاتا ہے کیونکہ یہ منطقی طور پر انتہائی موثر ہے۔

ہندو نظام زیادہ موثر کیوں ہے؟

1۔ مقامی قدر کا نظام: کسی ہندسے کی قدر اس کی جگہ پر منحصر ہوتی ہے۔

مثال: 345 = 3 سیکڑے + 4 دہائیاں + 5 اکائیاں رومن نظام میں مقامی قدر نہیں ہوتی۔

2۔ صفر (0) کا استعمال: صفر ایک طاقتور جگہ نشان ہے۔ 5، 50، 500 میں فرق کرتا ہے۔

رومن ہندسوں میں صفر نہیں ہوتا۔

3. Compact Representation: Large numbers written easily

   1000 vs M

   10,000 vs MMMMMMMMMM

4. Easy Calculations: Addition, subtraction, multiplication, division are simple and systematic Roman system is very difficult for calculations

5. Only 10 Symbols Needed: Digits: 0-9

   Roman system uses many symbols and rules (I, V, X, L, C, D, M)

6. Universal Usage: Used worldwide in science, commerce, technology

   Roman system is mostly used for labels (clocks, chapters, etc.)

2. To refine the Shape-Based System (Dot, Line, Triangle, Square),

1. Introduce a Zero Symbol (The Placeholder)

   In the old system, to write "one hundred," you might have to draw two squares (50+50). By adding a Zero (◯), we can reuse the "1" symbol (Dot) in a different position to mean ten, a hundred, or more.

2. Define a Base (Base-10)

   Instead of having a new symbol for every major number (10, 50, 100), we only need symbols for 0 through 9. Once we reach ten, we move to the next "place."

   Refined Symbols (0-9):

   0: ◯ (Circle)

   1: . (Dot) 2: .. 3: ... 4: .... 5: | (Line)

   6: |. 7: |.. 8: |... 9: |....

3. Applying Place Value

   Now, the position of the symbol determines its value. Each position to the left is 10 times greater than the one to its right.

   Example: Representing 1222

   Old Additive System: □□ ... (too many symbols!)

APSCERT

3۔ **مختصر نمائندگی:** بڑے اعداد آسانی سے لکھے جاسکتے ہیں۔ 1000 بمقابلہ M

10,000 بمقابلہ MMMMMMMMMM

4۔ **آسان حسابات:** جمع، تفریق، ضرب، تقسیم آسان اور منظم ہیں۔ رومن نظام میں حسابات بہت مشکل ہیں۔

5۔ **صرف 10 علامتیں درکار ہیں:** ہندسے: 0 تا 9۔ رومن نظام میں بہت سی علامتیں اور قواعد ہیں (M، D، C، L، X، V، I)

6۔ **عالمگیر استعمال:** سائنس، تجارت اور ٹیکنالوجی میں دنیا بھر میں استعمال ہوتا ہے۔ رومن نظام زیادہ تر لیبلوں کے لیے استعمال ہوتا ہے (گھڑیاں، ابواب وغیرہ)۔

2۔ شکل پر مبنی نظام (نقطہ، لکیر، مثلث، مربع) کو بہتر بنانے کے لیے :

1۔ **صفر کی علامت متعارف کرائیں (جگہ نشان)** پرانے نظام میں "ایک سو" لکھنے کے لیے دو مربع (50+50) بنانے پڑتے تھے۔ صفر (◯) شامل کرنے سے ہم "1" کی علامت (نقطہ) کو مختلف جگہ پر استعمال کر کے دس، سو یا اس سے زیادہ ظاہر کر سکتے ہیں۔

2۔ **بنیاد متعین کریں (بنیاد 10)** ہر بڑے عدد (10، 50، 100) کے لیے نئی علامت بنانے کی بجائے صرف 0 سے 9 تک کی علامتیں درکار ہیں۔ دس تک پہنچنے پر اگلی "جگہ" پر چلے جاتے ہیں۔

بہتر علامتیں: (0-9)

نقطہ: 1	2: ..	3: ...	4:	خط | :5
6: |.	7: |..	8: |...	9: |....	

3۔ **مقامی قدر استعمال کریں** اب علامت کی جگہ اس کی قدر متعین کرتی ہے۔ دائیں سے بائیں ہر جگہ 10 گنا زیادہ ہے۔

مثال: 1222 ظاہر کرنا

قدیم اضافی نظام: □ □ ... (بہت زیادہ علامتیں!)

Refined Place Value System: * 1 (Thousands) | 2 (Hundreds) | 2 (Tens) | 2 (Ones)

- . | .. | .. | ..
- Written as: . .. .

Example: Representing 50

Old Additive System: ?

Refined Place Value System:

5 (Tens) | 0 (Ones)

| | ◯ Written as: | ◯

Figure it out - 3.4

1. 10458= 10000 + 400 + 50 + 8

Representation :

1 finger (10000) 4 coils (400) 5 heel bones (50) 8 strokes (8)

1023 = 1000 + 20 + 3

Representation:

1 lotus 2 heel bones 3 strokes 2660 = 2000 + 600 + 60

Representation :

2 lotus 6 coils 6 heel bones 784= 700 + 80 + 4

Representation :

7 coils 8 heel bones 4 strokes 1111= 1000 + 100 + 10 + 1

Representation :

1 lotus 1 coil 1 heel bone 1 stroke

70707 = 70000 + 700 + 7

Representation :

7 fingers 7 coils 7 strokes

2. (i) 276 (ii) 4322

Figure it out - 3.5

1. 15 = □□□

50 = ⬡ ⬡

137 = □□□ Δ Δ

293 = □□ ⬡ □□□ Δ Δ Δ

651 = ~ ⬡ Δ

APSCERT

بہتر مقامی قدر کا نظام : 1 (ہزار) | 2 (سیکڑے) | 2 (دہائیاں) | 2 (اکائیاں)

.. | .. | .. | .

لکھا جائے گا: . . . .

مثال: 50 ظاہر کرنا

قدیم اضافی نظام: ؟

بہتر مقامی قدر کا نظام:

5 (دہائیاں) | 0 (اکائیاں)

|| ◯ لکھا جائے گا: | ◯

حل کیجیے-3.4

1- 10458 = 10000 + 400 + 50 + 8

نمائندگی: 1 انگلی (10000) 4 کنڈلیاں (400) 5 ایڑی کی ہڈیاں (50) 8 لکیریں (8)

1023 = 1000 + 20 + 3

نمائندگی: 1 کنول 2 ایڑی کی ہڈیاں 3 لکیریں 2660 = 2000 + 600 + 60

نمائندگی: 2 کنول 6 کنڈلیاں 6 ایڑی کی ہڈیاں 784 = 700 + 80 + 4

نمائندگی: 7 کنڈلیاں 8 ایڑی کی ہڈیاں 4 لکیریں 1111 = 1000 + 100 + 10 + 1

نمائندگی: 1 کنول 1 کنڈلی 1 ایڑی کی ہڈی 1 لکیر 70707 = 70000 + 700 + 7

نمائندگی: 7 انگلیاں 7 کنڈلیاں 7 لکیریں

2- 276(i) 4322(ii)

حل کیجیے-3.5

1.

15 = □□□

50 = ⬡ ⬡

137 = □□□ Δ Δ

293 = □□ ⬡ □□□ Δ Δ Δ

651 = ~ ⬡ Δ

APSCERT

2. No, every number can be represented.

Reason: Base-5 is a positional number system. It uses powers of 5 : 5^0, 5^1, 5^2, 5^3,...

3. Landmark Numbers (Base-7): 1, 7, 49, 343, 2401, 16807, ...

Figure it out - 3.6

1. **Technically, yes, but conventionally, no.**

Why it could happen: The Egyptian system is purely **additive**. Unlike our positional system, there is no mathematical "error" in writing ten to represent the number 10.

Why it was avoided: The Egyptians created higher-value symbols specifically to make writing and reading efficient. Since 10 strokes equal 1 heel bone , repeating a symbol 10 times defeats the purpose of the higher-value sign. It's like trying to pay for a 100-rupee item using 100 one-rupee coins; it's valid, but highly impractical. In formal inscriptions, symbols were almost always "rolled over" to the next higher power of ten once they reached a count of 10.

2. To create a Positional Base-4 System, we only need 4 symbols. Let's use: ○ = (Circle), 1 = (Triangle), 2 = (Square), 3 = (Hexagon).

The "Landmark Numbers" (place values) are $4^0 = 1$, $4^1 = 4$, and $4^2 = 16$

3. In the Positional Base-5 System we discussed (using symbols for 0, 1, 2, 3, 4), multiplying by 5 is incredibly simple-it follows the same logic as multiplying by 10 in our decimal system.

The Rule:

To multiply any number by 5, simply shift all symbols one position to the left and add a Zero symbol (□) at the end (the units place).

Example: If the number is 3 (⬡), multiplying by 5 makes it 15.

2۔ نہیں، ہر عدد کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ وجہ: اساس 5 ایک مقامی عددی نظام ہے۔
یہ 5 کی قوتوں کو استعمال کرتا ہے: 5^0، 5^1، 5^2، 5^3، ...

3۔ اہم اعداد (اساس 7): 1، 7، 49، 343، 2401، 16807، ...

حل کیجیے-3.6

1۔ **تکنیکی طور پر ہاں، لیکن روایتی طور پر نہیں۔**

کیوں ہو سکتا تھا: مصری نظام خالص اضافی ہے۔ ہمارے مقامی نظام کے برعکس، دس لکیریں لکھ کر عدد 10 ظاہر کرنے میں کوئی ریاضیاتی غلطی نہیں۔

کیوں گریز کیا جاتا تھا: مصریوں نے زیادہ قدر والی علامتیں خاص طور پر لکھنے اور پڑھنے کو موثر بنانے کے لیے بنائی تھیں۔ چونکہ 10 لکیریں 1 ایڑی کی ہڈی کے برابر ہیں، کسی علامت کو 10 بار دہرانا زیادہ قدر والی علامت کا مقصد ختم کر دیتا ہے۔ یہ ایسا ہے جیسے 100 روپے کی چیز خریدنے کے لیے 100 ایک روپے کے سکے استعمال کیے جائیں؛ یہ درست ہے لیکن انتہائی غیر عملی ہے۔ رسمی کتبوں میں علامتیں 10 تک پہنچتے ہی ہمیشہ اگلی بڑی قوت میں بدل دی جاتی تھیں۔

2۔ مقامی اساس 4 نظام بنانے کے لیے ہمیں صرف 4 علامتیں سیکھنی ہیں۔
استعمال کریں ◯ = 0: (دائرہ)، 1 =△ (مثلث)، 2 =□ (مربع)،
3 =⬡ (مسدس) "اہم اعداد" (مقامی قدریں) یہ ہیں: 4^0 =1، 4^1 =4، 4^2 =16

3۔ مقامی اساس 5 نظام میں (0، 1، 2، 3، 4 کی علامتوں کے ساتھ) کسی عدد کو 5 سے ضرب دینا انتہائی آسان ہے — یہ اعشاری نظام میں 10 سے ضرب دینے کی منطق کی طرح ہے۔

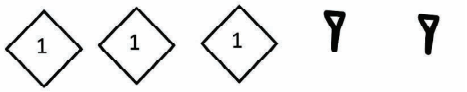
قاعدہ: کسی بھی عدد کو 5 سے ضرب دینے کے لیے تمام علامتوں کو ایک جگہ بائیں کریں اور آخر میں (اکائی کی جگہ پر) صفر کی علامت (◯) شامل کریں۔

مثال: اگر عدد 3 (⬡) ہو تو 5 سے ضرب دینے پر 15 حاصل ہوتا ہے۔

Figure it out - 3.7

1. (i) 63 

(ii) 132 

(iii) 200 

(iv) 60 

(v) 3605 

Figure it out - 3.8

1. **The Chinese Rod Numeral System (Zong and Heng)**

The Chinese used **Zong** (vertical) and **Heng** (horizontal) symbols to prevent confusion in their place-value system.

- **Why alternate?** They alternated to clearly distinguish between adjacent place values (Units, Tens, Hundreds, etc.). If you have two digits side-by-side, alternating the orientation acts as a "visual border."
- **Representing 41 using only Zong:**
  - 4 would be four vertical lines: 𝍠𝍠𝍠𝍠
  - 1 would be one vertical line: 𝍠
  - **Representation:** 𝍠𝍠𝍠𝍠 𝍠
- **Misinterpretation:** Without a significant space or alternating symbols, 𝍠𝍠𝍠𝍠 𝍠 could easily be read as 5 (five vertical lines) instead of **41**. Alternating (Heng for Tens, Zong for Units) makes it 𝍠 ≡ 𝍠, which is unmistakably **41**.

2. **The Role of Hindu Numerals and Zero (0)**

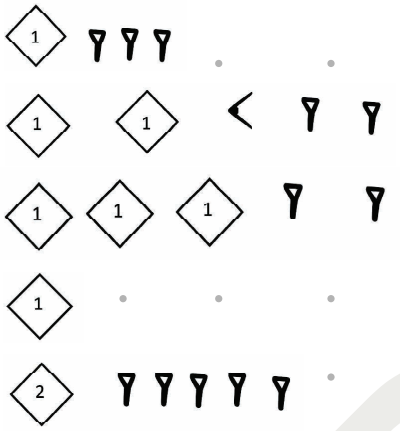
Daily Life & Professions:

- **Banking/Finance :** Interest rates, balances, and stock markets are impossible without 0 and place value.
- **Engineering/Construction :** Precise measurements (0.001mm) require decimal place values.
- **Computers/IT :** Everything digital is built on Binary (0 and 1).
- **Daily :** Setting alarms, checking prices at the market, or measuring medicine doses.

© NCERT

حل کیجیے-3.7

-1 63(i)



132(ii)

200(iii)

60(iv)

3605(v)

حل کیجیے-3.8

1۔ چینی چھڑی عددی نظام (زونگ اور ہینگ)

چینیوں نے اپنے مقامی قدر کے نظام میں ابہام سے بچنے کے لیے زونگ (عمودی) اور ہینگ (افقی) علامتیں استعمال کیں۔

- **باری باری کیوں؟** انہوں نے متصلہ مقامی قدروں (اکائیاں، دہائیاں، سیکڑے وغیرہ) میں واضح فرق کرنے کے لیے باری باری استعمال کیا۔ اگر دو ہندسے ساتھ ساتھ ہوں تو سمت بدلنا "بصری حد" کا کام کرتا ہے۔
- **41 کو صرف زونگ سے ظاہر کرنا :**
  - 4 چار عمودی لکیریں: ||||
  - 1 ایک عمودی لکیر: |
  - نمائندگی: | ||||
- **غلط تشریح :** کافی فاصلے یا باری باری علامتوں کے بغیر | |||| کو آسانی سے 41 کی بجائے 5 (پانچ عمودی لکیریں) پڑھا جا سکتا ہے۔ باری باری استعمال (دہائیوں کے لیے ہینگ، اکائیوں کے لیے زونگ) سے یہ بالکل واضح ہو جاتا ہے کہ یہ 41 ہے۔

2۔ ہندو ہندسوں اور صفر (0) کا کردار

روزمرہ زندگی اور پیشے:

- **بینکاری / مالیات :** سود کی شرح، بینک بیلنس اور حصص بازار 0 اور مقامی قدر کے بغیر ناممکن ہیں۔
- **انجینئرنگ / تعمیر :** درست پیمائش (0.001 ملی میٹر) کے لیے اعشاری مقامی قدر ضروری ہے۔
- **کمپیوٹر / آئی ٹی :** ہر ڈیجیٹل چیز دوہری بنیاد (0 اور 1) پر بنی ہے۔
- **روزمرہ :** الارم لگانا، بازار میں قیمتیں دیکھنا یا دوائی کی خوراک ناپنا۔

Life without 0 :

Our lives would be mathematically "heavy." Without 0 and place value, we would likely still be using systems like Roman Numerals. Simple multiplication like 25×12 would take a long time to solve on paper, and advanced physics, space travel, or modern internet technology would likely not exist.

4. Counting with 8 Fingers (Base-8 and Base-5)

   If humans had only 8 fingers, we would likely have used Base-8 (Octal).

- Base-8 Numerals: We would only have symbols 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. The number "8" would be written as 10.
- Base-5 Numerals: We would only use 0, 1, 2, 3, 4. The number "5" would be written as 10.

Converting the Decimal Number 25 :

Base System	Calculation	Representation
Base-10	2(10) + 5(1)	25
Base-8	3(8) + 1(1)	31
Base-5	1(25) + 0(5) + 0(1)	100
Base-2	1(16)+1(8)+0(4)+0(2)+1(1)	11001

Figure it out - 4.1

1. **Rectangle (i) :**

   $\angle OAB = 30^o$ $\angle OBA = 30^o$ $\angle AOB = 120^o$
   $\angle OAD = 60^o$ $\angle ODA = 60^o$ $\angle AOD = 60^o$
   $\angle ODC = 30^o$ $\angle OCD = 30^o$ $\angle DOC = 120^o$
   $\angle OCB = 60^o$ $\angle OBC = 60^o$ $\angle BOC = 60^o$

   Rectangle (ii) :

   Center angles : 110° and 70°
   Base angles (Wide triangles): 35°, 35°
   Base angles (Narrow triangles): 55°, 55°

2. **Quadrilateral Types**

   (i) Rectangle (ii) Rectangle (iii) Square (iv) Rectangle

صفر کے بغیر زندگی:

ہماری زندگی ریاضیاتی طور پر "بوجھل" ہو جاتی۔ صفر اور مقامی قدر کے بغیر ہم غالباً ابھی تک رومن ہندسوں جیسے نظام استعمال کر رہے ہوتے۔ 25 ×12 جیسی سادہ ضرب کاغذ پر حل کرنے میں کافی وقت لگتا، اور اعلیٰ طبیعیات، خلائی سفر یا جدید انٹرنیٹ ٹیکنالوجی شاید وجود میں نہ آتی۔

4۔ 8 انگلیوں سے گنتی (بنیاد 8 اور بنیاد 5)

اگر انسانوں کی صرف 8 انگلیاں ہوتیں تو ہم غالباً بنیاد 8 (آکٹال) استعمال کرتے۔

- **بنیاد 8 کے ہندسے:** ہمارے پاس صرف 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 کی علامتیں ہوتیں۔ عدد "8" کو 10 لکھا جاتا۔
- **بنیاد 5 کے ہندسے:** ہم صرف 0، 1، 2، 3، 4 استعمال کرتے۔ عدد "5" کو 10 لکھا جاتا۔

عشری عدد 25 کی تبدیلی:

نمائندگی	حساب	بنیادی نظام
25	2(10) + 5(1)	بنیاد 10
31	3(8) + 1(1)	بنیاد 8
100	1(25) + 0(5) + 0(1)	بنیاد 5
11001	1(16)+1(8)+0(4)+0(2)+1(1)	بنیاد 2

حل کیجیے-4.1

1۔ مستطیل (i): $\angle AOB = 120°$ $\angle OBA = 30°$ $\angle OAB = 30°$

$\angle AOD = 60°$ $\angle ODA = 60°$ $\angle OAD = 60°$

$\angle DOC = 120°$ $\angle OCD = 30°$ $\angle ODC = 30°$

$\angle BOC = 60°$ $\angle OBC = 60°$ $\angle OCB = 60°$

مستطیل (ii):

مرکزی زاویے: $110°$ اور $70°$ بنیادی زاویے (چوڑے مثلث): $35°$، $35°$

بنیادی زاویے (تنگ مثلث): $55°$، $55°$

2۔ چار ضلعی کی اقسام :

(i) مستطیل (ii) مستطیل (iii) مربع (iv) مستطیل

3. Figure APML
   Figure: Square.
   Reason: Diagonals are equal, bisect each other, and are perpendicular.
4. Exact 90° with Sticks
   Method: Cross two equal sticks at their exact midpoints. Adjust them until the four distances between the stick ends (measured with the thread) are all equal.
5. No.
   Reason: A quadrilateral with opposite sides parallel and equal is a parallelogram.

Figure it out - 4.2

1. (i) Parallelogram: $\angle E = 140^\circ$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle R = 140^\circ$
   (ii) Parallelogram: $\angle Q = 70^\circ$, $\angle R = 110^\circ$, $\angle S = 70^\circ$
   (iii) Rhombus:
   $\angle XVU = 30^\circ$ (Total $\angle UVW = 60^\circ$)
   $\angle UXW = 60^\circ$ (Split into 30°, 30° by diagonal)
   $\angle U = 120^\circ$ (Split into 60°, 60° by diagonal)
   $\angle W = 120^\circ$ (Split into 60°, 60° by diagonal)
   (iv) Rhombus:
   $\angle OEI = 20^\circ$ ($\angle AEI = 40^\circ$)
   $\angle IOA = 40^\circ$ (Split into 20°, 20° by diagonal)
   $\angle A = 140^\circ$ (Split into 70°, 70° by diagonal)
   $\angle I = 140^\circ$ (Split into 70°, 70° by diagonal)

Figure it out - 4.3

1. Sides: All four sides are 4 cm.
   - Angles: 60°, 120°, 60°, 120° (Rhombus).
2. Kite Construction
   - Draw diagonal AC = 8 cm.
   - Draw a perpendicular line through AC at any point (not necessarily the midpoint).
   - Measure 3 cm on both sides of AC along this line to mark points B and D.
   - Join A, B, C, D.
3. Remaining Angles in Trapeziums
   - Left Trapezium: Top-left angle = 45°,Top-right angle = 75°

3۔ شکل APML شکل: مربع۔ وجہ: قطر برابر ہیں، ایک دوسرے کو نصف کرتے ہیں اور عمود پر ہیں۔

4۔ لکڑیوں سے بالکل 90° بنانا طریقہ: دو برابر لکڑیوں کو ان کے بالکل درمیانی نقطے پر کراس کریں۔ انہیں اس وقت تک ترتیب دیں جب تک لکڑیوں کے سروں کے درمیان چاروں فاصلے (دھاگے سے ناپے گئے) برابر نہ ہو جائیں۔

5۔ نہیں۔ وجہ: وہ چار ضلعی جس کے مخالف اضلاع متوازی اور برابر ہوں متوازی الاضلاع کہلاتا ہے۔

حل کیجیے-4.2

1۔ (i) متوازی الاضلاع $\angle E = 140°$ ،: $\angle A = 40°$ ، $\angle R = 140°$

(ii) متوازی الاضلاع $\angle Q = 70°$ ،: $\angle R = 110°$ ، $\angle S = 70°$

(iii) معین: $\angle XVU = 30°$ (کل $\angle UVW = 60°$)

$\angle UXW = 60°$ (قطر سے $30°$ ، $30°$ میں تقسیم)

$\angle U = 120°$ (قطر سے $60°$ ، $60°$ میں تقسیم)

$\angle W = 120°$ (قطر سے $60°$ ، $60°$ میں تقسیم)

(iv) معین : $\angle AEI = 40°$) $\angle OEI = 20°$

$\angle IOA = 40°$ (قطر سے $20°$ ، $20°$ میں تقسیم)

$\angle A = 140°$ (قطر سے $70°$ ، $70°$ میں تقسیم)

$\angle I = 140°$ (قطر سے $70°$ ، $70°$ میں تقسیم)

حل کیجیے-4.3

1۔ اضلاع: چاروں اضلاع 4 سم ہیں۔

زاویے: $60°$ ، $120°$ ، $60°$ ، $120°$ (معین)۔

2۔ پتنگ کی تعمیر

- قطر AC = 8 سم کھینچیں۔
- AC پر کسی بھی نقطے پر (لازمی نہیں کہ درمیانی نقطہ ہو) عمودی لکیر کھینچیں۔
- اس لکیر پر AC کے دونوں طرف 3 سم ناپ کر نقاط B اور D نشان کریں۔
- A، B، C، D کو ملائیں۔

3۔ منحرف میں باقی زاویے

- بائیں منحرف: اوپر بائیں زاویہ = $45°$ ، اوپر دائیں زاویہ = $75°$

AP SCERT

- Right (Isosceles) Trapezium: Top-right angle = 100°, Bottom-left angle = 80°, Bottom-right angle = 80°.

4. Venn Diagram Questions
   (i) Rhombus and Square.
   (ii) Yes (a Square is both).
   (iii) No. Every rhombus is a kite, but not every kite is a rhombus. A rhombus is a kite with all sides equal.
5. ∠IOD = 30°
7. Square.
   Other ways: By choosing points on each side that are an equal distance from each vertex (e.g., let CU = AX = SW = EV).
8. Yes.
9. Parallelogram.
10. Yes, the sum is 360° (By joining B and D you have two triangles)
11. (i) False (It could be a rectangle). (ii) True.
    (iii) True. (iv) False (It could be a kite).
    (v) True. (vi) True. (vii) False.

Figure it out - 5.1

1. 7, 8, 9, 10
2. p - 1, p - 2, p - 3, p - 4
3. (i) Sometimes true (e.g., 2 + 4 = 6 is true; 2 + 2 = 4 is false).
   (ii) Never true (Every number divisible by 18 is divisible by 9, but the reverse is not true; e.g., 9 is not divisible by 18, yet it is divisible by 9).
   (iii) Sometimes true (e.g., 1 + 1= 2 is true; 3 + 3 = 6 is false).
   (iv) Always true (Multiples of 6 and 9 are both divisible by 3, so their sum must be).
   (v) Sometimes true (e.g., 6+3=9 is true; 12+3=15 is false).
4. Numbers: 14, 26, 38
   Expression: 12n + 2(where n is a non-negative integer).
5. 91 6. True
7. (i) 4779 + 661: 1 (Sum of remainders is 5 + 3 = 8; 8 ÷ 7 leaves remainder 1)
   (ii) 4779 - 661: 2 (Difference of remainders is 5 - 3 = 2)
8. 59
   Each remainder is exactly 1 less than the divisor. Thus, the number is LCM (3, 4, 5) - 1, which is 60 - 1 = 59.

- قائمہ (مساوی الساقین) منحرف: اوپر دائیں زاویہ = 100°، نیچے بائیں زاویہ = 80°، نیچے دائیں زاویہ = 80°

4۔ وین ڈائیگرام کے سوالات

(i) معین اور مربع۔ (ii) ہاں (مربع دونوں ہے)۔

(iii) نہیں۔ ہر معین پتنگ ہے لیکن ہر پتنگ معین نہیں۔ معین وہ پتنگ ہے جس کے تمام اضلاع برابر ہوں۔

5۔ $\angle IOD = 30°$

7۔ مربع۔ دوسرے طریقے: ہر ضلع پر ہر راس سے برابر فاصلے پر نقاط منتخب کر کے (مثلاً CU = AX = SW = EV)۔

8۔ ہاں۔

9۔ متوازی الاضلاع۔

10۔ ہاں، مجموعہ 360° ہے (B اور D کو ملانے سے دو مثلث بنتے ہیں)۔

11۔ (i) غلط (یہ مستطیل بھی ہو سکتا ہے)۔ (ii) درست۔ (iii) درست۔

(iv) غلط (یہ پتنگ بھی ہو سکتا ہے)۔ (v) درست۔ (vi) درست۔ (vii) غلط۔

حل کیجیے-5.1

1۔ 7، 8، 9، 10 2۔ p-1، p-2، p-3، p-4

3۔ (i) کبھی کبھی درست (مثلاً 2+4=6 درست ہے؛ 2+2=4 غلط ہے)۔

(ii) کبھی درست نہیں (18 پر قابلِ تقسیم ہر عدد 9 پر بھی قابلِ تقسیم ہے، لیکن الٹا درست نہیں؛ مثلاً 9، 18 پر قابلِ تقسیم نہیں مگر 9 پر ہے)۔

(iii) کبھی کبھی درست (مثلاً 1+1=2 درست ہے؛ 3+3=6 غلط ہے)۔

(iv) ہمیشہ درست (6 اور 9 کے گنج دونوں 3 پر قابلِ تقسیم ہیں، پس ان کا مجموعہ بھی ہو گا)۔

(v) کبھی کبھی درست (مثلاً 6+3=9 درست ہے؛ 12+3=15 غلط ہے)۔

4۔ اعداد: 14، 26، 38 عبارت: 12n + 2 (جہاں n ایک غیر منفی عدد صحیح ہے)۔

5۔ 91 6۔ درست

7۔ (i) 661 + 4779: باقی 1 (باقیوں کا مجموعہ 5+3=8؛ 8÷7 سے باقی 1)

(ii) 661 - 4779: باقی 2 (باقیوں کا فرق 5-3=2)

8۔ 59

ہر باقی مقسوم علیہ سے بالکل 1 کم ہے۔ پس عدد = 1 - ذ۔ا۔م (3,4,5) = 60 - 1 = 59

Figure it out - 5.2

1. (i) 123 (Sum 6) - No (ii) 405 (Sum 9) - Yes
   (iii) 8888 (Sum 32) - No (iv) 93547 (Sum 28) - No
   (v) 358095 (Sum 30) - No
2. 288 3. 6003 4. 11

Figure it out - 5.3

1. 6 (5 + 1 = 6)
2. Digital roots will increase by 2 in a cycle (e.g., 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4...) because 1+1=2.
3. 4 (9a and 36b have digital root 9; 13 has digital root 4)
4. Conjectures
   (i) No direct relation between parity and digital root.
   (ii) The digital root is the remainder when divided by 9 (if digital root is 9, remainder is 0).

Figure it out - 5.4

1. z = 0 or z = 9
   Sum of digits 3+1+z+5 = 9+z. Both 0 and 9 make the sum a multiple of 9.
2. True
3. Multiple of 6 if: Both are odd multiples (e.g., 3+9=12) or both are even multiples (e.g., 6+12=18).
   Not if: One is odd and one is even (e.g., 3+6=9).
4. (i) True. Changing digit order doesn't change the sum of digits.
   (ii) Yes. All shuffles are still multiples of 9.
5. Conditions: b must be even (0, 2, 4, 6, 8) and sum of digits (17 + a + b) must be a multiple of 9.
   - Pairs (a, b): (1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)
6. Conditions: Last two digits (q8) must be divisible by 4; alternating sum (3-p+7-q+8) must be a multiple of 11.
   Pairs (p, q): (7, 0), (3, 4), (8, 8)
7. Consecutive Numbers (Multiple of 2, 3, 4)
   Numbers: 2, 3, 4 or 14, 15, 16 or 26, 27, 28
   Occurrence: Every 12 numbers.

© NCERT not to be republished

حل کیجیے-5.2

1۔ (i) 123 (مجموعہ 6) – نہیں (ii) 405 (مجموعہ 9) - ہاں

(iii) 8888 (مجموعہ 32) - نہیں (iv) 93547 (مجموعہ 28) - نہیں

(v) 358095 (مجموعہ 30) - نہیں

2۔ 288 3۔ 6003 4۔ 11

حل کیجیے-5.3

1۔ 6 (5+1=6)

2۔ عددی جڑیں ایک چکر میں 2 سے بڑھتی جائیں گی (مثلاً 1، 3، 5، 7، 9، 2، 4...) کیونکہ 1+1=2

3۔ 4 (9a اور 36 b کی عددی جڑ 9 ہے؛ 13 کی عددی جڑ 4 ہے)

4۔ قیاسات

(i) جفت / طاق ہونے اور عددی جڑ کے درمیان کوئی براہ راست تعلق نہیں۔

(ii) عددی جڑ وہ باقی ہے جو 9 سے تقسیم کرنے پر ملے (اگر عددی جڑ 9 ہو تو باقی 0 ہے)

حل کیجیے-5.4

1۔ z = 0 یا z = 9 ہندسوں کا مجموعہ 3+1z+9 = 5+z+۔0 اور 9 دونوں مجموعے کو 9 کا ضریب بناتے ہیں۔

2۔ درست

3۔ 6 کا ضریب اگر: دونوں طاق ضریب ہوں (مثلاً 3+9=12) یا دونوں جفت ضریب ہوں (مثلاً 6+12=18)

اگر نہیں: ایک طاق اور ایک جفت ہو (مثلاً 3+6=9)

4۔ (i) درست۔ ہندسوں کی ترتیب بدلنے سے ہندسوں کا مجموعہ نہیں بدلتا۔

(ii) ہاں۔ تمام ردوبدل ابھی بھی 9 کے ضریب ہیں۔

5۔ شرائط b: جفت ہو (0، 2، 4، 6، 8) اور ہندسوں کا مجموعہ 9 (17+a+b) کا ضریب ہو۔

جوڑے Pairs (a, b): (1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)

6۔ شرائط: آخری دو ہندسے 4 (q8) پر قابلِ تقسیم ہوں؛ متبادل مجموعہ 11, (8+q-7+p-3) کا ضریب ہو۔ جوڑے

(p, q): (7, 0), (3, 4), (8, 8)

7۔ یکے بعد دیگرے اعداد (2، 3، 4 کے ضریب) اعداد 2، 3، 4 یا 14، 15، 16 یا 26، 27، 28 واقعہ: ہر 12 اعداد بعد۔

8. 45,000, 45,036, 45,072, 45,108, 45,144

9. 5p-4, 5p-2, 5p, 5p+2, 5p+4

10. Example: 100005 (Reversed is500001 - fails even check).
    - Correct Example: 111120 (Div by 15; reversed is 021111 - fails).
    - Valid Answer: 122220 (Div by 15; reversed is 022221 - fails).
    - Valid Answer: 444420 (Div by 15; reversed is 024444 - Divisible by 6).

11. False.

12. (i) Always True (Result is 18n, which is a multiple of 9).
    (ii) Always True (Sum is 6n+6).
    (iii) Always True (Parity and sum of digits remain the same).
    (iv) Never True (Simplifies to 12b - 28, 12b is a multiple of 12, but 28 is not.)

13. Every integer, when divided by 3, leaves a remainder of 0, 1, or 2. Let's look at the different combinations of three numbers based on these remainders:

Case	Remainder Types	Example Numbers	Sum of Remainders	Divisible by 3?
All Same	(0, 0, 0)	3, 6, 9	0	Yes
All Same	(1, 1, 1)	1, 4, 7	3	Yes
All Same	(2, 2, 2)	2, 5, 8	6	Yes
All Different	(0, 1, 2)	3, 4, 5	3	Yes
Two Same	(1, 1, 0)	1, 4, 3	2	No
Two Same	(2, 2, 1)	2, 5, 4	5	No

Generalization: The sum of any three integers is divisible by 3 if and only if the numbers either all leave the same remainder when divided by 3, or they each leave a different remainder (one 0, one 1, and one 2)

14. Two consecutive integers: always a multiple of 2.
    Three consecutive integers: always a multiple of $2 \times 3 = 6$.
    Four consecutive integers: always a multiple of 24
    Five consecutive integers: always a multiple of 120
    General Rule: The product of n consecutive integers is always divisible by n!

8۔ 45,000, 45,036, 45,072, 45,108, 45,144

9۔ 5p-4, 5p-2, 5p, 5p+2, 5p+4

10۔ مثال: 100005 (اسے الٹنے پر 500001 بنتا ہے—parity کی شرط پوری نہیں ہوتی۔)

- درست مثال: 111120 (15 سے تقسیم ہوتا ہے؛ الٹنے پر 021111 بنتا ہے— شرط پوری نہیں ہوتی۔)
- درست جواب: 122220 (15 سے تقسیم ہوتا ہے؛ الٹنے پر 022221 بنتا ہے— شرط پوری نہیں ہوتی۔)
- درست جواب: 444420 (15 سے تقسیم ہوتا ہے؛ الٹنے پر 024444 بنتا ہے—6 سے تقسیم ہوتا ہے۔)

11۔ غلط۔

12۔ (i) ہمیشہ درست (نتیجہ 18n ہے، جو 9 کا ضعف ہے۔)

(ii) ہمیشہ درست (مجموعہ 6n + 6 ہے۔)

(iii) ہمیشہ درست (parity اور ہندسوں کا مجموعہ یکساں رہتا ہے۔)

(iv) کبھی درست نہیں (سادہ کرنے پر 28 – 12b بنتا ہے۔ 12، 12b کا ضعف ہے لیکن 28، 12 کا ضعف نہیں ہے۔)

13۔ ہر صحیح عدد کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 0، 1 یا 2 آتا ہے۔ آیئے تین اعداد کے مختلف مجموعوں کا جائزہ لیتے ہیں:

3 سے قابلِ تقسیم؟	باقیات کا مجموعہ	مثال	باقیات کی اقسام	حالت
ہاں	0	9، 6، 3	(0,0,0)	سب ایک جیسی
ہاں	3	7، 4، 1	(1,1,1)	سب ایک جیسی
ہاں	6	8، 5، 2	(2,2,2)	سب ایک جیسی
ہاں	3	5، 4، 3	(0,1,2)	سب مختلف
نہیں	2	3، 4، 1	(1,1,0)	دو ایک جیسے
نہیں	5	4، 5، 2	(2,2,1)	دو ایک جیسے

عمومی نتیجہ: تین صحیح اعداد کا مجموعہ 3 سے تب اور صرف تب قابلِ تقسیم ہوگا جب، تینوں اعداد کو 3 سے تقسیم کرنے پر ایک ہی باقی آئے، یا ایک عدد کا باقی 0، دوسرے کا 1 اور تیسرے کا 2 ہو۔

14۔ دو متواتر صحیح اعداد کا حاصلِ ضرب ہمیشہ 2 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے۔

تین متواتر صحیح اعداد کا حاصلِ ضرب ہمیشہ 2 × 3 = 6 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے۔

چار متواتر صحیح اعداد کا حاصلِ ضرب ہمیشہ 24 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے۔

پانچ متواتر صحیح اعداد کا حاصلِ ضرب ہمیشہ 120 سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے۔

عمومی قاعدہ: n متواتر صحیح اعداد کا حاصلِ ضرب ہمیشہ (n! فیکٹوریل) سے قابلِ تقسیم ہوتا ہے۔

APSCERT

15. Cryptarithms

(i) EF × E = GGG

E = 3, F = 7, G = 1.

(ii) WOW ×5 = MEOW

M = 2, E = 6, O = 2, W = 5. (Note: In some cryptarithms, letters must be distinct. Since M and O are both 2 here, we check other O values. If O=7, 575 × 5 = 2875. Here M=2, E=8, O=7, W=5. All distinct!)

16. Venn Diagram: Multiples of 4, 8, and 32 the set of multiples of 32 is a subset of multiples of 8, which is a subset of multiples of 4.

The correct diagram is three concentric circles:

Innermost circle: Multiples of 32

Middle circle: Multiples of 8

Outermost circle: Multiples of 4

Figure it out - 6.1

1. The expressions for the 3 × 3 grid are:

(p-1)(q-1)	(p-1)q	(p-1)(q+1)
p(q-1)	pq	p(q+1)
(p+1)(q-1)	(p+1)q	(p+1)(q+1)

2. (i) 3v - 9 + uv - 3u

(ii) 10 + 4a

(iii) 100ac + 10ad + 10bc + bd

(iv) $3x - 18 - x^2 + 6x = -x^2 + 9x - 18$

(v) -5ac - 5ad + bc + bd

(vi) 5y + 45 + zy + 9z

APSCERT

15۔ حرفی پہیلیاں

EF × E = GGG(i)

G = 1، F = 7، E = 3

WOW × 5 = MEOW(ii)

M = 2، E = 6، O = 2، W = 5۔ (نوٹ: بعض حرفی پہیلیوں میں حروف الگ الگ ہونے چاہیے۔ چونکہ M اور O دونوں 2 ہیں، اس لیے O کی دوسری قدریں جانچیں۔ اگر O=7 تو 575 × 5 = 2875 یہاں M=2، E=8، O=7، W=5 سب الگ الگ ہیں!)

16۔ وین ڈائیگرام: 4، 8 اور 32 کے اضعاف، 32 کے اضعاف کا سیٹ، 8 کے اضعاف کا تحت سیٹ ہے، جو 4 کے اضعاف کا تحت سیٹ ہے۔ درست خاکہ تین ہم مرکز دائرے ہیں :

سب سے اندرونی دائرہ : 32 کے اضعاف

درمیانی دائرہ : 8 کے اضعاف

سب سے بیرونی دائرہ : 4 کے اضعاف

حل کیجیے - 6.1

1۔ 3×3 جدول کی عبارتیں یہ ہیں:

(p-1)(q+1)	(p-1)q	(p-1)(q-1)
p(q+1)	pq	p(q-1)
(p+1)(q+1)	(p+1)q	(p+1)(q-1)

2۔ 3v - 9 + uv - 3u(i)

10 + 4a(ii)

100ac + 10ad + 10bc + bd(iii)

3x - 18 - x^2 + 6x = -x^2 + 9x - 18(iv)

-5ac - 5ad + bc + bd(v)

5y + 45 + zy + 9z(vi)

APSCERT

3. $xy = (x + 2)(y - 4)$.

$xy = xy - 4x + 2y - 8$.

$y = 2x + 4$.

Examples:

If $x = 1$, then $y = 6$. Check: $1 \times 6 = 6$; $(1+2)(6-4) = 3 \times 2 = 6$.

If $x = 2$, then $y = 8$. Check: $2 \times 8 = 16$; $(2+2)(8-4) = 4 \times 4 = 16$.

If $x = 5$, then $y = 14$. Check: $5 \times 14 = 70$; $(5+2)(14-4) = 7 \times 10 = 70$.

4. (i) $4a + 5ab + ab^2 - 12b^2 - 3b^3$

(ii) $4y^2 + 44yz - 5y + 77z - 21$

5. (i) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$

The Pattern:

The product of (a-b) and a sum of terms where the powers of a decrease while b increase results in the difference of the two variables raised to the n-th power.

Next Identity:

$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

Check by expanding:

$a(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) - b(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$= (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4) - (a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

$= a^5 - b^5$

Figure it out - 6.2

1. They are equal.

Justification:

When you square a number, the result is always non-negative, regardless of whether the base is positive or negative. Note that (b - a) is simply the negative of (a - b), which can be written as -(a - b)

$(b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (-1)^2 . (a - b)^2 = 1 . (a - b)^2 = (a - b)^2$

2. $26^2 - 24^2$

$(14.5)^2 - (10.5)^2$

APSCERT

3۔ $xy = (x+2)(y-4)$

$xy = xy - 4x + 2y - 8$

$y = 2x + 4$

مثالیں: اگر $x = 1$ تب $y = 6$ جانچ: $1 \times 6 = 6;\ (1+2)(6-4) = 3 \times 2 = 6$

اگر $x = 2$ تب $y = 8$ جانچ: $2 \times 8 = 16;\ (2+2)(8-4) = 4 \times 4 = 16$

اگر $x = 5$ تب $y = 14$ جانچ: $5 \times 14 = 70;\ (5+2)(14-4) = 7 \times 10 = 70$

4۔ $4a + 5ab + ab^2 - 12b^2 - 3b^3$(i)

$4y^2 + 44yz - 5y + 77z - 21$(ii)

5۔ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$(i)

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$(ii)

$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4$(iii)

نمونہ $(a-b)$: اور ایسی حدود کے مجموعے کا حاصل ضرب جہاں a کی قوتیں گھٹتی ہیں اور b کی بڑھتی ہیں، دو متغیرات کو n ویں قوت تک اٹھانے کا فرق دیتا ہے۔

اگلی شناخت: $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = a^5 - b^5$

پھیلا کر جانچ کیجیے: $a(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) - b(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) =$

$(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4) - (a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5) = a^5 - b^5$

حل کیجیے-6.2

1۔ وہ برابر ہیں۔

جواز: جب کسی عدد کو مربع کیا جائے تو نتیجہ ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے، چاہے بنیاد مثبت ہو یا منفی۔

غور کیجیے کہ $(b-a)$ محض $(a-b)$ کا منفی ہے جسے $-(a-b)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$(b-a)^2 = [-(a-b)]^2 = (-1)^2 \times (a-b)^2 = 1 \times (a-b)^2 = (a-b)^2$

2۔ $26^2 - 24^2$

$(14.5)^2 - (10.5)^2$

3. $406^2 = 164,836$
   $72^2 = 5,184$
   $145^2 = 21,025$
   $1097^2 = 1,203,409$
   $124^2 = 15,376$

4. Yes, they hold for all real numbers.

   Justification:

   Algebraic identities are derived using the laws of arithmetic (distributive, commutative, and associative properties). These laws apply to all real numbers, including negative integers and fractions.

   For negative integers: If a = -2 and b = 3, then $(a+b)^2 = (-2+3)^2 = 1^2 = 1$.

   Using the identity: $(-2)^2 + 2(-2)(3) + 3^2 = 4 - 12 + 9 = 1$. It works.

   For fractions: If $a = \frac{1}{2}$, then $a^2 = \frac{1}{4}$. The logic of "length times width" for an area model still applies mathematically even when the dimensions are not whole numbers.

Figure it out - 6.3

1. (i) $46^2 = 2116$ (ii) $397 \times 403 = 159,991$
   (iii) $91^2 = 8281$ (iv) $43 \times 45 = 1935$
2. (i) $p^2 + 10p - 11$ (ii) $9a^2 - 81b^2$
   (iii) $-6y^2 - 23y - 20$ (iv) $36x^2 + 60xy + 25y^2$
   (v) $4x^2 - 2x + 0.25$ (vi) $21p^2r+42pr$
3. Identify the Appropriate Algebraic Expression(s)
   (i) $s^2 + 2$ (ii) $m^2 + (m + 1)^2$ and $m^2 + (m - 1)^2$
4. Calendar Square Investigation

   In a calendar, numbers in a row increase by 1, and numbers in a column increase by 7 (representing one week).

   Observation for other 2 × 2 squares:

   - Let's take the square starting at 6: 6, 7, 13, 14

     Diagonal 1: 6 ×14 = 84

     Diagonal 2: 7 ×13 = 91

     Difference: 91 - 84 = 7

APSCERT

3۔ $406^2 = 164,836$

$72^2 = 5,184$

$145^2 = 21,025$

$1097^2 = 1,203,409$

$124^2 = 15,376$

4۔ ہاں، یہ تمام حقیقی اعداد کے لیے درست ہیں۔

جواز: الجبری عبارتیں ریاضی کے قوانین (تقسیمی، تبادلی اور تلازمی خاصیت) سے اخذ کی جاتی ہیں۔ یہ قوانین تمام حقیقی اعداد پر استعمال ہوتے ہیں بشمول منفی صحیح اعداد اور کسور۔

منفی صحیح اعداد کے لیے: اگر $a = -2$ اور $b = 3$ ہو تو $(a+b)^2 = (-2+3)^2 = 1^2 = 1$ ۔ شناخت استعمال کرتے ہوئے: $(-2)^2 + 2(-2)(3) + 3^2 = 4 - 12 + 9 = 1$ ۔ درست ہے۔

کسور کے لیے: اگر $a = \frac{1}{2}$ تو $a^2 = \frac{1}{4}$ ۔ رقبے کے نمونے میں "لمبائی × چوڑائی" کی منطق ریاضیاتی طور پر اس وقت بھی استعمال ہوتی ہے جب ابعاد مکمل اعداد نہ ہوں۔

حل کیجیے-6.3

1۔ $46^2 = 2116$(i)　　$397 \times 403 = 159,991$(ii)

$91^2 = 8281$(iii)　　$43 \times 45 = 1935$(iv)

2۔ $p^2 + 10p - 11$(i)　　$9a^2 - 81b^2$(ii)

$-6y^2 - 23y - 20$(iii)　　$36x^2 + 60xy + 25y^2$(iv)

$4x^2 - 2x + 0.25$(v)　　$21p^2r + 42pr$(vi)

3۔ مناسب الجبری عبارت شناخت کیجیے

$s^2 + 2$(i)　　$m^2 + (m+1)^2$ اور $m^2 + (m-1)^2$(ii)

4۔ تقویم مربع کی جانچ تقویم میں قطار کے اعداد 1 سے اور خانے کے اعداد 7 سے بڑھتے ہیں (ایک ہفتہ)۔

دوسرے 2×2 مربعوں کا مشاہدہ 6 : سے شروع ہونے والا مربع: 6، 7، 13، 14

وتر 1:　$14 \times 6 = 84$

وتر 2:　$13 \times 7 = 91$

فرق:　$84 - 91 = 7$

- Let's take the square starting at 18: 18, 19, 25, 26

  Diagonal 1: $18 \times 26 = 468$

  Diagonal 2: $19 \times 25 = 475$

  Difference: $475 - 468 = 7$

Conclusion: The product of the numbers on the "upward" diagonal is always 7 more than the product of the numbers on the "downward" diagonal.

5. (i) False. (ii) False. (iii) True (iv) False
6. Sum Remainder: 1

   Difference Remainder: 2

   Product Remainder: 1
7. Pattern: The square of the middle number is always 1 more than the product of the two neighbors.

   Algebraic Equation: $n^2 - (n-1)(n+1) = 1$

   Verification: Expanding the right side: $n^2 - (n^2 - 1) = n^2 - n^2 + 1 = 1$. The identity holds.
8. $(a+b) \times \frac{1}{2}(a+b)$
9. (i) 16×24 is larger. (ii) 26×74 is larger.
10. $8gw + 8w^2$.
11. Yellow L-shape Pattern:

    (i) Next Figure (Step 4): The horizontal middle grows by 1 unit, and the vertical "arms" grow by 1 unit each.

    (ii) Units in Step 10: $12^2 = 144$

    (iii) Expression for Step y: $(y + 2)^2$

    Blue Square Pattern:

    (i) Next Figure (Step 4): A 5×5 grid with the bottom-right corner 1×1 square missing.

    (ii) Units in Step 10:131

    (iii) Expression for Step y: $(y+1)^2 + y$ or $y^2 + 3y + 1$

AP SCERT

18 سے شروع ہونے والا مربع: 18، 19، 25، 26

وتر 1: $26 \times 18 = 468$

وتر 2: $25 \times 19 = 475$

فرق: $475 - 468 = 7$

نتیجہ : اوپر والے "وتر کے اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ" نیچے والے "وتر کے اعداد کے حاصل ضرب سے 7 زیادہ ہوتا ہے۔

5۔ (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط

6۔ مجموعے کا باقی: 1

فرق کا باقی: 2

حاصل ضرب کا باقی: 1

7۔ نمونہ : درمیانی عدد کا مربع ہمیشہ دونوں پڑوسی اعداد کے حاصل ضرب سے 1 زیادہ ہوتا ہے۔

الجبری مساوات $n^2 - (n-1)(n+1) = 1$:

تصدیق: دائیں طرف پھیلا کر $n^2 - (n^2-1) = n^2 - n^2 + 1 = 1$:۔ شناخت درست ہے۔

8۔ $(a+b) \times \frac{1}{2}(a+b)$

9۔ (i) 24×16 بڑا ہے۔ (ii) 74×26 بڑا ہے۔

10۔ $8gw + 8w^2$

11۔ **زرد L شکل کا نمونہ :**

(i) اگلی شکل (مرحلہ 4): افقی درمیانی حصہ 1 اکائی اور عمودی "بازو" ہر ایک 1 اکائی بڑھتے ہیں۔

(ii) مرحلہ 10 میں اکائیاں: $12^2 = 144$

(iii) مرحلہ y کی عبارت: $(y+2)^2$

نیلے مربع کا نمونہ :

(i) اگلی شکل (مرحلہ 4): 5×5 جدول جس کے نیچے دائیں کونے کا 1×1 مربع غائب ہو۔

(ii) مرحلہ 10 میں اکائیاں: 131

(iii) مرحلہ y کی عبارت: $y^2 + 3y + 1$ یا $(y+1)^2 + y$

AP SCERT

Figure it out - 7.1

1. (i), (iv) and (vi).
2. 8 : 18, 12 : 27, 40 : 90
3. 4, 16, $26\frac{2}{3}$, 36
5. Are all of them the same?
   No, your rectangles and your classmates' drawings will likely look different in size, but they should have the same shape.
   If they are different, are they wrong?
   Not necessarily! They are only "wrong" if their width-to-height ratio is different from the original.
6. (a) 11:6 (b) 3:2

Figure it out - 7.2

1. 18,076,923.08 km 2. 15,660

Figure it out - 7.3

1. ₹ 1,800 and ₹ 2,700.
2. The solution contains 40ml of acid and 200ml of water.
3. To produce 40ml of green paint:
   Blue : 15 ml
   Yellow : 25 ml
   New ratio 1 : 3
4. You need 4 cups of rice and 2 cups of urad dal.
5. 3 : 13.

Figure it out - 7.4

1. 2:3
2. You will need 4 buses. Since 3.77 is not a whole number
3. Mumbai
4. If you are 160 cm tall, your neck would be 64 cm
5. 52.5 palas of saffron.
6. Taswika will be 4 years old (and her brother will be 8).
7. 1 litre of gold has a mass of 18.5 kg
8. approximately 23 tonnes of manure.
9. 5 minutes (300 seconds).
10. ₹ 82,645 11. 30 hours 12. ₹ 7.86.

AP SCERT

حل کیجیے-7.1

1۔ (i)، (iv)اور(vi) ۔

2۔ 8:18، 12:27، 40:90

3۔ 4، 16، 36

5۔ کیا یہ سب ایک جیسے ہیں؟

نہیں، آپ کے اور آپ کے ساتھیوں کے مستطیل شاید سائز میں مختلف ہوں گے لیکن شکل ایک جیسی ہونی چاہیے۔

اگر مختلف ہیں تو کیا وہ غلط ہیں؟

ضروری نہیں! وہ صرف تبھی "غلط" ہوں گے جب ان کی چوڑائی اور اونچائی کی نسبت اصل سے مختلف ہو۔

6۔ (الف) 11:6 (ب) 3:2

حل کیجیے-7.2

1۔ 18,076,923.08 کلومیٹر 2۔ 15,660

حل کیجیے-7.3

1۔ 1,800 روپے اور 2,700 روپے۔

2۔ محلول میں 40 ملی لیٹر تیزاب اور 200 ملی لیٹر پانی ہے۔

3۔ 40 ملی لیٹر سبز رنگ بنانے کے لیے :نیلا:15 ملی لیٹر پیلا:25 ملی لیٹر نئی نسبت 1:3

4۔ آپ کو 4 کپ چاول اور 2 کپ اڑد کی دال چاہیے۔

5۔ 3:13

حل کیجیے-7.4

1۔ 2:3 2۔ آپ کو 4 بسیں درکار ہوں گی۔ چونکہ 3.77 پورا عدد نہیں ہے۔

3۔ ممبئی 4۔ اگر آپ کا قد 160 سینٹی میٹر ہے تو آپ کی گردن 64 سینٹی میٹر ہو گی۔

5۔ 52.5 پالا زعفران۔ 6۔ تسویکا 4 سال کی ہو گی (اور اس کا بھائی 8 سال کا)۔

7۔ 1 لیٹر سونے کی کمیت 18.5 کلوگرام ہے۔

8۔ تقریباً 23 ٹن کھاد۔ 9۔ 5 منٹ (300 سیکنڈ)۔

10۔ 82,645 روپے 11۔ 30 گھنٹے 12۔ 7.86 روپے۔

AP SCERT

INTEGRATING ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI)

K6B4U8

Learning Outcomes : The student will be able to:

1. Understand and explain how mathematical concepts such as patterns, ratios, algebra, and classification are connected to the basic components of Artificial Intelligence.
2. Use basic AI terminology correctly, including dataset, algorithm, pattern recognition, bias, fairness, and prediction, in the context of Mathematics.
3. Apply and explore AI-supported thinking in Mathematics by framing clear prompts and analysing AI-generated responses step-by-step.
4. Demonstrate safe and responsible use of AI tools, including verifying answers, protecting personal information, and avoiding misuse during examinations.
5. Develop confidence and critical thinking, recognising that AI supports learning but does not replace mathematical reasoning or teacher guidance.



Jasvi was sitting under a neem tree after helping her father in the fields. Her father was checking the weather forecast on his mobile phone before deciding when to water the crops.

"How does the phone know it will rain tomorrow?" Jasvi asked.

"It studies old weather data and finds patterns," her father replied. "Artificial Intelligence, or AI, helps in predicting weather, crop prices, and even soil conditions."

That evening, Jasvi opened her Class 8 Mathematics textbook and read the chapter A Square and a Cube. She noticed the pattern in square numbers: 1, 4, 9, 16, 25...

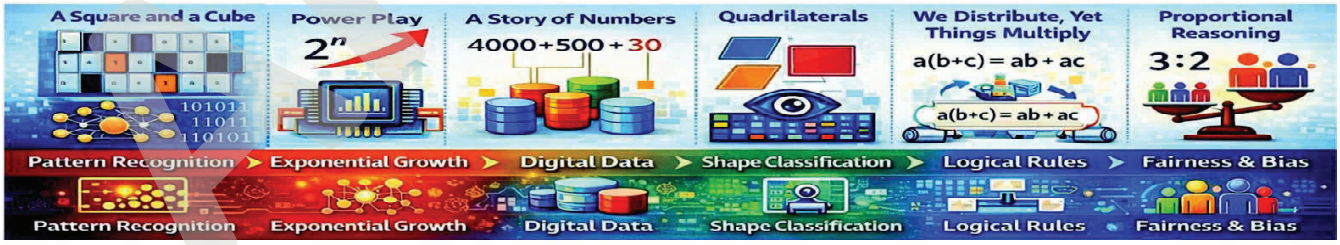
Each number was made by multiplying a number by itself.

She thought, "If I know the rule, I can predict the next square number."

Then she understood something important.

AI also studies data, finds patterns, and makes predictions — just like we find patterns in Mathematics.

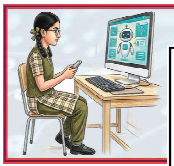
Let us now see how our Mathematics chapters are connected to AI.



Foundations of AI in Mathematics Learning.

The mathematical ideas in these chapters help students understand how Artificial Intelligence (AI) works. Concepts like pattern recognition in A Square and a Cube and exponential growth in Power Play show how AI systems identify patterns and scale quickly. Just as square numbers follow clear structures, AI models depend on good data quality and proper sampling to recognise correct patterns. If the sample data is incomplete, the AI

Disclaimer : "The use of AI tools by students must be strictly under the direct guidance and supervision of teachers and parents / guardians".



F5I5G5

مصنوعی ذہانت کا انضمام (AI)

اکتسابی نتائج: طالب علم اس قابل بنیں گے کہ:

1۔ یہ سمجھیں گے اور بیان کریں گے کہ ریاضی کے تصورات جیسے نمونے، نسبت، جبر اور درجہ بندی، مصنوعی ذہانت کے بنیادی اجزاء سے کیسے جڑے ہیں۔

2۔ مصنوعی ذہانت کی بنیادی اصطلاحات جیسے ڈیٹاسیٹ، الگورتھم، نمونہ شناسی، تعصب، انصاف اور پیش گوئی کو ریاضی کے تناظر میں درست طریقے سے استعمال کریں گے۔

3۔ ریاضی میں مصنوعی ذہانت کی مدد سے سوچ کو واضح سوالات بنا کر اور مصنوعی ذہانت کے جوابات کا مرحلہ بہ مرحلہ تجزیہ کر کے لاگو کریں گے اور دریافت کریں گے۔

4۔ مصنوعی ذہانت کے اوزاروں کا محفوظ اور ذمہ دارانہ استعمال ظاہر کریں گے، جس میں جوابات کی تصدیق، ذاتی معلومات کی حفاظت اور امتحانات میں غلط استعمال سے گریز شامل ہے۔

5۔ اعتماد اور تنقیدی سوچ پیدا کریں گے، یہ جانتے ہوئے کہ مصنوعی ذہانت سیکھنے میں مددگار ہے لیکن ریاضیاتی استدلال یا استاد کی رہنمائی کی جگہ نہیں لے سکتی۔

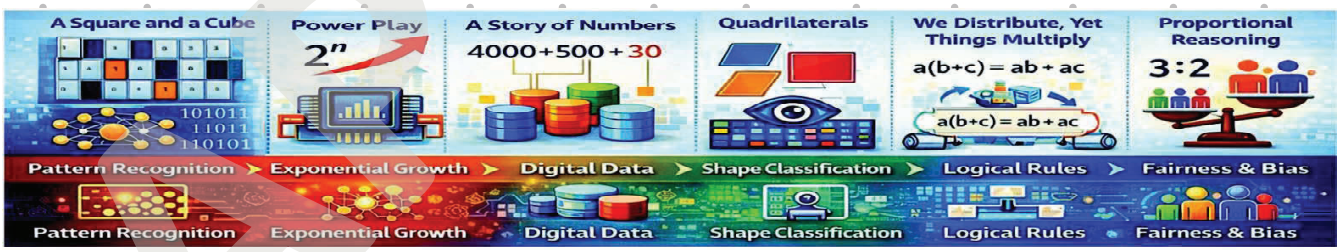


جسوی فصلوں کے کام میں اپنے والد کی مدد کے بعد نیم کے درخت کے نیچے بیٹھی تھی۔ اس کے والد فصل کو پانی دینے کا وقت طے کرنے سے پہلے موبائل فون پر موسم کی پیش گوئی دیکھ رہے تھے۔

"فون کو کیسے پتہ چلتا ہے کہ کل بارش ہو گی؟" جسوی نے پوچھا۔"

یہ پرانے موسمی اعداد و شمار کا مطالعہ کرتا ہے اور نمونے تلاش کرتا ہے،

" اس کے والد نے جواب دیا۔"مصنوعی ذہانت موسم، فصلوں کی قیمتوں اور یہاں تک کہ مٹی کے حالات کی پیش گوئی میں مدد کرتی ہے۔"اس شام جسوی نے اپنی آٹھویں جماعت کی ریاضی کی کتاب کھولی اور "مربع اور مکعب" کا باب پڑھا۔ اس نے مربع اعداد میں نمونہ دیکھا: 1، 4، 9، 16، 25... ہر عدد کسی عدد کو خود سے ضرب دے کر بنتا تھا۔ اس نے سوچا، "اگر مجھے قاعدہ معلوم ہو تو میں اگلا مربع عدد بتا سکتی ہوں۔" پھر اسے ایک اہم بات سمجھ آئی: مصنوعی ذہانت بھی اعداد و شمار کا مطالعہ کرتی ہے، نمونے تلاش کرتی ہے اور پیش گوئیاں کرتی ہے — بالکل ویسے جیسے ہم ریاضی میں نمونے تلاش کرتے ہیں۔ آیئے اب دیکھتے ہیں کہ ہمارے ریاضی کے ابواب مصنوعی ذہانت سے کیسے جڑے ہیں۔

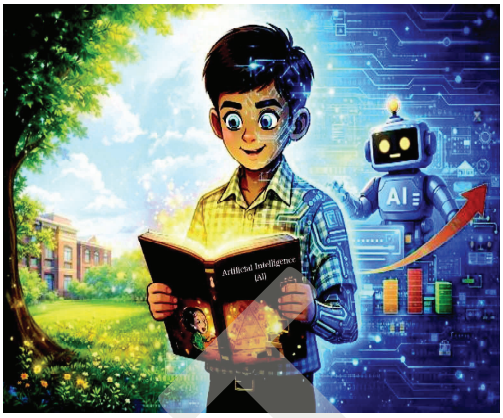


ریاضی کی تعلیم میں مصنوعی ذہانت کی بنیادیں

ان ابواب میں موجود ریاضیاتی تصورات طلبہ کو یہ سمجھنے میں مدد کرتے ہیں کہ مصنوعی ذہانت کیسے کام کرتی ہے۔ "مربع اور مکعب" میں نمونہ شناسی اور "قوت کا کھیل" میں تیز رفتار ترقی جیسے تصورات یہ ظاہر کرتے ہیں کہ مصنوعی ذہانت کے نظام کیسے نمونے شناخت کرتے اور تیزی سے پھیلتے ہیں۔ جیسے مربع اعداد واضح ساخت کی پیروی کرتے ہیں، ویسے ہی مصنوعی ذہانت کے نمونے درست نمونوں کو پہچاننے کے لیے اعلیٰ معیار کے اعداد و شمار اور مناسب نمونہ لینے پر انحصار کرتے ہیں۔ اگر نمونہ اعداد و شمار نامکمل ہوں تو مصنوعی ذہانت...

دستبرداری: "طلبہ کی جانب سے مصنوعی ذہانت (AI) کے ذرائع کا استعمال اساتذہ اور والدین / سرپرستوں کی براہِ راست رہنمائی اور نگرانی میں ہی کیا جانا چاہیے۔"

model may give incorrect conclusions. In Proportional Reasoning, balanced ratios help students understand fair comparison, similar to how statistical surveys require representative data.



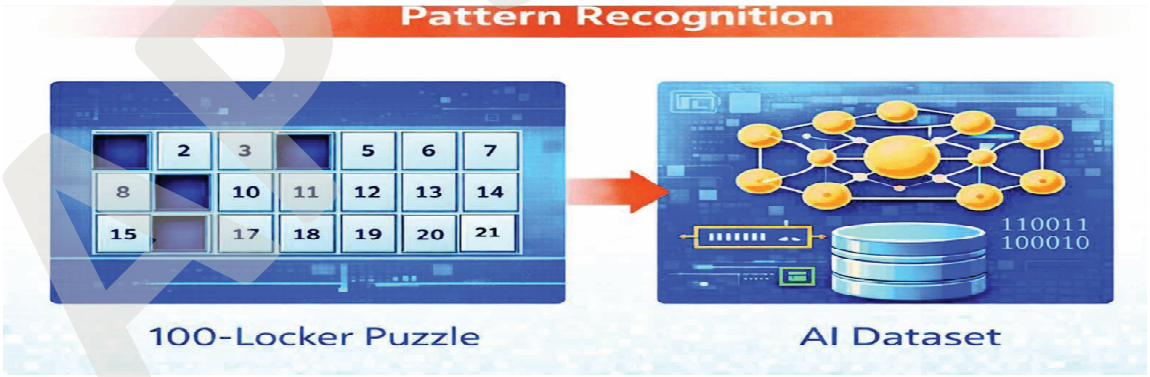
Chapters like Number Play and We Distribute, Yet Things Multiply develop logical reasoning and algebraic thinking, which are important for understanding probability, rule-based systems and AI decision-making. When AI predicts results, it calculates likelihoods based on patterns in a dataset. If the dataset is unbalanced, bias in datasets can affect predictions. In A Story of Numbers, correct number representation connects to data annotation and digital data encoding. In Quadrilaterals, classification of shapes relates to computer vision, where systems recognise shapes using labelled features.

Together, these mathematical foundations help students understand that AI depends on structured reasoning, fairness, and correct data. By learning about proportion, logical proof, and pattern analysis, students develop awareness of fairness in AI predictions, recognise sampling errors, and understand the importance of unbiased and well-annotated data. Mathematics builds the critical thinking needed to use AI systems responsibly and ethically.

Guidance: - Guidance to the Teacher

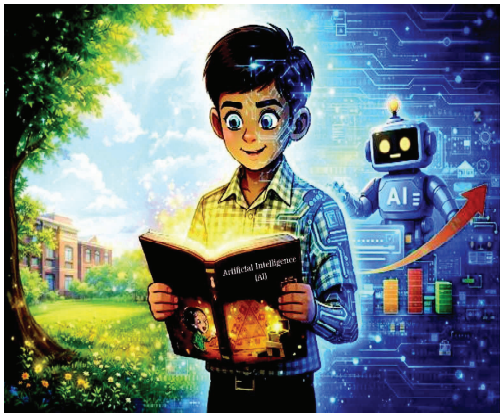
Teachers may help students connect the mathematical ideas in these chapters with how Artificial Intelligence (AI) works. Concepts such as patterns, proportions, and logical reasoning show how AI systems identify patterns and make predictions from data. Teachers can use simple classroom examples to explain that correct and balanced data is important for fair results. These discussions help students understand the role of mathematics in responsible and ethical use of AI.

Example 1: Pattern Recognition in Square Numbers



In the 100-locker puzzle, only lockers with square numbers remain open (1, 4, 9, 16...). This happens because square numbers have an odd number of factors. Careful observation of the pattern helps identify this rule.

In AI systems, machines also identify repeated structures in data. If the dataset is complete and properly sampled, the system recognises the pattern correctly.



کا نمونہ غلط نتائج دے سکتا ہے۔ "متناسب استدلال" میں متوازن نسبتیں طلبہ کو منصفانہ موازنے کو سمجھنے میں مدد دیتی ہیں، جیسے شماریاتی سروے میں نمائندہ اعداد و شمار کی ضرورت ہوتی ہے۔

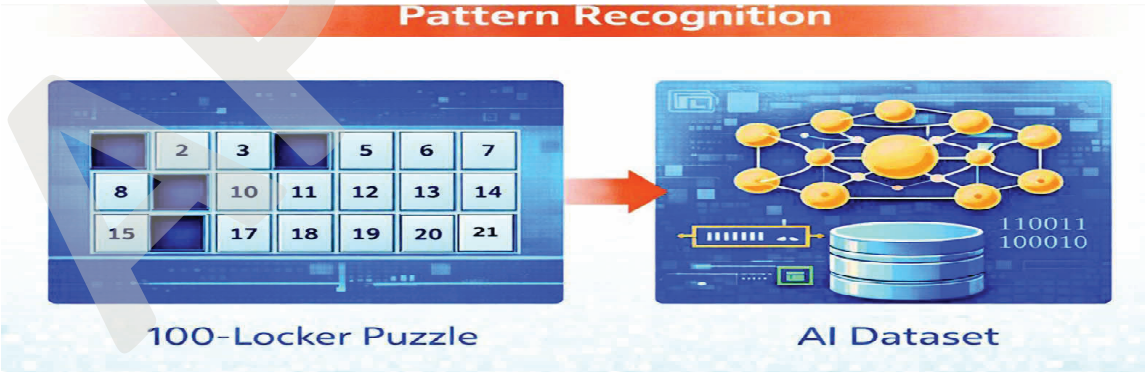
"عددی کھیل" اور "ہم تقسیم کرتے ہیں پھر بھی چیزیں بڑھتی ہیں" جیسے ابواب منطقی استدلال اور جبری سوچ پیدا کرتے ہیں جو احتمال، قاعدے پر مبنی نظاموں اور مصنوعی ذہانت کے فیصلہ سازی کو سمجھنے کے لیے اہم ہیں۔ جب مصنوعی ذہانت نتائج کی پیش گوئی کرتی ہے تو وہ ڈیٹاسیٹ میں نمونوں کی بنیاد پر امکانات کا حساب لگاتی ہے۔ اگر ڈیٹاسیٹ غیر متوازن ہو تو ڈیٹاسیٹ میں تعصب پیش گوئیوں کو متاثر کر سکتا ہے۔ "اعداد کی کہانی" میں درست عددی نمائندگی، ڈیٹا کی نشاندہی اور ڈیجیٹل ڈیٹا انکوڈنگ سے جڑتی ہے۔ "چار ضلعی" میں شکلوں کی درجہ بندی کمپیوٹر وژن سے متعلق ہے جہاں نظام نشاندہی شدہ خصوصیات کے ذریعے شکلیں پہچانتے ہیں۔

مل کر یہ ریاضیاتی بنیادیں طلبہ کو یہ سمجھنے میں مدد دیتی ہیں کہ مصنوعی ذہانت منظم استدلال، انصاف اور درست اعداد و شمار پر منحصر ہے۔ نسبت، منطقی ثبوت اور نمونہ تجزیہ سیکھ کر طلبہ مصنوعی ذہانت کی پیش گوئیوں میں انصاف کے بارے میں آگاہی پیدا کرتے ہیں، نمونہ لینے کی غلطیوں کو پہچانتے ہیں اور غیر متعصبانہ و درست طریقے سے نشاندہی شدہ اعداد و شمار کی اہمیت کو سمجھتے ہیں۔ ریاضی وہ تنقیدی سوچ پیدا کرتی ہے جو مصنوعی ذہانت کے نظاموں کو ذمہ داری اور اخلاقی طور پر استعمال کرنے کے لیے ضروری ہے۔

رہنمائی: معلم کے لیے ہدایات

معلم طلبہ کو ان ابواب کے ریاضیاتی تصورات کو مصنوعی ذہانت کے کام کرنے کے طریقے سے جوڑنے میں مدد دے سکتے ہیں۔ نمونے، نسبتیں اور منطقی استدلال جیسے تصورات یہ ظاہر کرتے ہیں کہ مصنوعی ذہانت کے نظام کیسے نمونے شناخت کرتے اور اعداد و شمار سے پیش گوئیاں کرتے ہیں۔ معلمین کلاس کی سادہ مثالوں سے یہ سمجھا سکتے ہیں کہ منصفانہ نتائج کے لیے درست اور متوازن اعداد و شمار ضروری ہیں۔ یہ بحثیں طلبہ کو مصنوعی ذہانت کے ذمہ دارانہ اور اخلاقی استعمال میں ریاضی کے کردار کو سمجھنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 1: مربع اعداد میں نمونہ شناسی



100 الماری والی پہیلی میں صرف مربع اعداد والی الماریاں کھلی رہتی ہیں (1، 4، 9، 16...)۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کیونکہ مربع اعداد کے اجزائے ضربی کی تعداد طاق ہوتی ہے۔ نمونے کا غور سے مشاہدہ اس قاعدے کو دریافت کرنے میں مدد دیتا ہے۔

مصنوعی ذہانت کے نظاموں میں مشینیں بھی اعداد و شمار میں بار بار آنے والی ساختیں شناخت کرتی ہیں۔ اگر ڈیٹاسیٹ مکمل اور مناسب طریقے سے نمونہ شدہ ہو تو نظام نمونے کو درست طریقے سے پہچان لیتا ہے۔

Thinking with AI :	If an AI app is used to solve the 100-locker puzzle, what numbers must it check before deciding which lockers remain open? Explain how the system would look for factor patterns and identify square numbers before giving the final answer. Scan the QR code for more information.
Key Words:	**Pattern Recognition:** Identifying repeated or regular structures. **Dataset:** A collection of organised information. **Sampling:** Selecting a part of data to study. **Artificial Intelligence (AI):** Technology that enables machines to analyse and recognise patterns.

Example 2: Exponential Growth

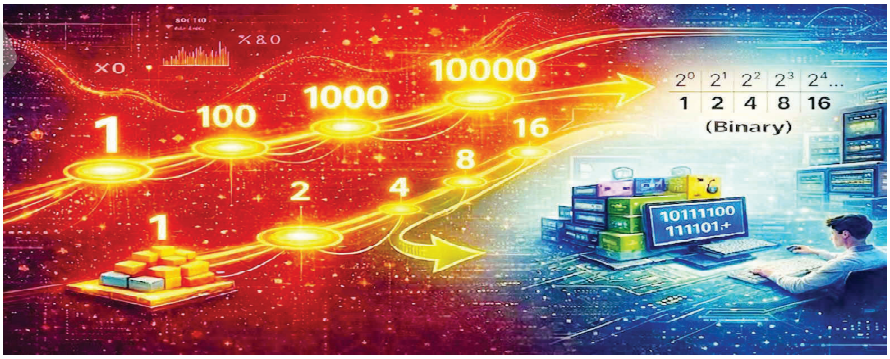


When a paper is folded repeatedly, its thickness doubles each time (2^1, 2^2, 2^3…). This is called exponential growth. The increase becomes very large after many folds.

In AI systems, computational processes and data size may grow rapidly in a similar way. Understanding exponents helps in understanding how fast systems can scale.

Thinking with AI :	If an AI system processes data that doubles every step (like 2^1, 2^2, 2^3…), what information must it analyse to predict how large the data will become after many steps? Explain how the system compares exponential growth with linear growth before deciding how much storage or processing power is needed. Scan the QR code for more information.
Key Words:	**Exponent:** A number showing repeated multiplication. **Base:** The number being multiplied repeatedly. **Exponential Growth:** Rapid increase by repeated multiplication. **Computation:** Processing of numerical data by a system.

Example 3: Landmark Numbers and Number Systems



اگر 100 الماری والی پہیلی حل کرنے کے لیے مصنوعی ذہانت کی ایپ استعمال کی جائے تو یہ فیصلہ کرنے سے پہلے کہ کون سی الماریاں کھلی رہیں گی، اسے کون سے اعداد جانچنے ہوں گے؟ وضاحت کیجیے کہ نظام اجزائے ضربی کے نمونے کیسے تلاش کرے گا اور حتمی جواب دینے سے پہلے مربع اعداد کیسے شناخت کرے گا۔ مزید معلومات کے لیے QR کوڈ اسکین کیجیے۔	:مصنوعی ذہانت سے سوچیے
نمونہ شناسی: بار بار آنے والی یا منظم ساختوں کی شناخت۔ **ڈیٹاسیٹ:** منظم معلومات کا مجموعہ۔ **نمونہ لینا:** مطالعے کے لیے اعداد و شمار کا ایک حصہ منتخب کرنا۔ **مصنوعی ذہانت:** وہ ٹیکنالوجی جو مشینوں کو نمونوں کا تجزیہ اور شناخت کرنے کے قابل بناتی ہے۔	:اہم الفاظ

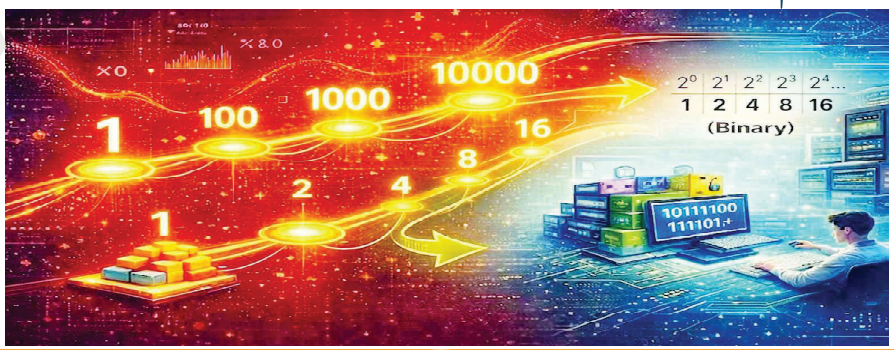
مثال 2: تیز رفتار ترقی



جب کاغذ کو بار بار موڑا جائے تو اس کی موٹائی ہر بار دوگنی ہو جاتی ہے $(2^1، 2^2، 2^3، ...)$۔ اسے تیز رفتار ترقی کہتے ہیں۔ کئی بار موڑنے کے بعد یہ اضافہ بہت بڑا ہو جاتا ہے۔ مصنوعی ذہانت کے نظاموں میں حسابی عمل اور اعداد و شمار کا حجم اسی طرح تیزی سے بڑھ سکتا ہے۔ قوتوں کو سمجھنا یہ جاننے میں مدد دیتا ہے کہ نظام کتنی تیزی سے پھیل سکتے ہیں۔

اگر کوئی مصنوعی ذہانت کا نظام ایسے اعداد و شمار پر کام کرے جو ہر مرحلے میں دوگنے ہو جاتے ہیں (جیسے $2^1، 2^2، 2^3، ...$)، تو کئی مراحل کے بعد اعداد و شمار کتنے بڑے ہو جائیں گے، یہ پیش گوئی کرنے کے لیے اسے کون سی معلومات کا تجزیہ کرنا ہو گا؟ وضاحت کیجیے کہ نظام یہ فیصلہ کرنے سے پہلے کہ کتنی ذخیرہ جگہ یا کارکردگی کی ضرورت ہے، تیز رفتار ترقی کا خطی ترقی سے موازنہ کیسے کرے گا۔ مزید معلومات کے لیے QR کوڈ اسکین کیجیے۔	:مصنوعی ذہانت سے سوچیے
قوت: وہ عدد جو بار بار ضرب کو ظاہر کرے۔ **اساس:** وہ عدد جسے بار بار ضرب دیا جائے۔ **تیز رفتار ترقی:** بار بار ضرب سے تیز اضافہ۔ **حساب:** کسی نظام کے ذریعے عددی اعداد و شمار کی پروسیسنگ۔	:اہم الفاظ

مثال 3: اہم اعداد اور عددی نظام



Landmark numbers are easily recognisable reference numbers in a number system. They help us understand and work with large numbers. In the decimal (base-10) system, landmark numbers are:

1, 10, 100, 1000, ... (powers of 10)

For example: 7,482 = 7 × 1000 + 4 × 100 + 8 × 10 + 2

Here, 1000, 100, 10, and 1 are landmark numbers.

In any base-n system, landmark numbers are powers of n (n^0, n^1, n^2, ...). Landmark numbers act as anchors in mathematics. In AI, powers of a base act as anchors for storing and computing data efficiently.

Thinking with AI :	If an AI system processes very large numbers, how does using andmark numbers (like powers of 10 or powers of 2) help it organise data and perform calculations efficiently? Scan the QR code for more information
Key Words:	**Landmark Numbers:** Reference numbers used for grouping. **Base:** The number that determines the system (e.g., 10 in decimal). **Power:** Repeated multiplication (e.g., $10^2 = 100$). **Positional System:** Value depends on position.

Example 4: Classification of Quadrilaterals



Quadrilaterals are classified based on properties such as equal sides, right angles, or parallel sides. For example, a rectangle has equal opposite sides and right angles.

Similarly, AI systems classify images by studying features such as edges and shapes. If the features match stored patterns, the image is grouped accordingly.

Thinking with AI :	If an AI system is designed to identify different quadrilaterals from images, what properties must it check before classifying a shape? Explain how the system would examine features such as equal sides, right angles, and parallel sides before deciding whether the shape is a rectangle, square, or another quadrilateral. Scan the QR code to explore how digital systems classify shapes using features and pattern matching.
Key Words:	**Classification:** Grouping based on common features. **Property:** A defining characteristic. **Feature:** A measurable characteristic used for identification. **Pattern Matching:** Comparing data to known patterns.

نمایاں اعداد ایسے حوالہ جاتی اعداد ہوتے ہیں جو کسی عددی نظام میں آسانی سے پہچانے جاتے ہیں۔ یہ بڑے اعداد کو سمجھنے اور ان کے ساتھ کام کرنے میں مدد دیتے ہیں۔ اعشاری نظام میں نمایاں اعداد یہ ہیں : 1، 10، 100، 1000، ...(10 کی قوتیں)

مثال کے طور پر : $7,482 = 7 \times 1000 + 4 \times 100 + 8 \times 10 + 2$

یہاں 1000، 100، 10، اور 1 نمایاں اعداد ہیں۔ کسی بھی عددی نظام میں، نمایاں اعداد بنیاد کی قوتیں ہوتے ہیں۔

نمایاں اعداد ریاضی میں بنیادی سہارے کا کام کرتے ہیں۔ مصنوعی ذہانت میں، کسی بنیاد کی قوتیں معلومات کو مؤثر انداز میں محفوظ کرنے اور حساب کرنے کے لیے بنیادی سہارے کا کردار ادا کرتی ہیں۔

اگر کوئی مصنوعی ذہانت کا نظام بہت بڑے اعداد پر عمل کرتا ہے، تو نمایاں اعداد معلومات کو منظم کرنے اور حسابات کو مؤثر بنانے میں کیسے مدد دیتے ہیں؟ مزید معلومات کے لیے QR کوڈ اسکین کریں۔	:مصنوعی ذہانت کے ساتھ غور کریں
نمایاں اعداد: گروہ بندی کے لیے استعمال ہونے والے حوالہ جاتی اعداد۔ **اساس:** وہ عدد جو نظام کی بنیاد متعین کرتا ہے۔ **قوت:** بار بار ضرب۔ **مقامی نظام:** ایسا نظام جس میں عدد کی قیمت اس کی جگہ پر منحصر ہو۔	:اہم الفاظ

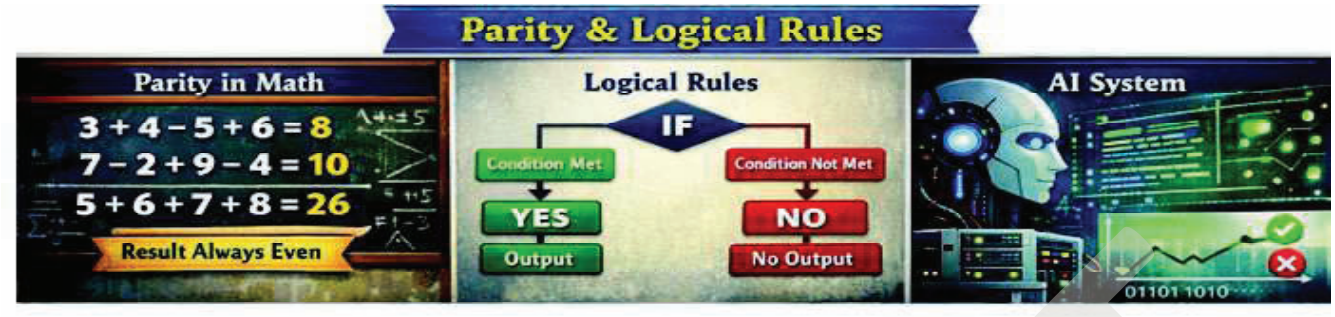
مثال 4: چار ضلعی اشکال کی درجہ بندی



چار ضلعی اشکال کی درجہ بندی ان کی خصوصیات کی بنیاد پر کی جاتی ہے، جیسے برابر اضلاع، قائمہ زاویے، یا متوازی اضلاع۔ مثال کے طور پر، مستطیل میں مقابل اضلاع برابر اور تمام زاویے قائمہ ہوتے ہیں۔ اسی طرح، مصنوعی ذہانت کے نظام تصاویر کو کناروں اور اشکال جیسی خصوصیات کا مطالعہ کرکے درجہ بند کرتے ہیں۔ اگر خصوصیات محفوظ شدہ نمونوں سے مطابقت رکھتی ہوں، تو تصویر کو اسی گروہ میں شامل کر لیا جاتا ہے۔

اگر کوئی مصنوعی ذہانت کا نظام تصاویر سے مختلف چہار ضلعی اشکال کی شناخت کے لیے بنایا گیا ہو، تو اسے کسی شکل کی درجہ بندی سے پہلے کن خصوصیات کو جانچنا ہوگا؟ وضاحت کریں کہ نظام برابر اضلاع، قائمہ زاویوں، اور متوازی اضلاع جیسی خصوصیات کو کیسے جانچے گا، اس سے پہلے کہ وہ فیصلہ کرے کہ شکل مستطیل، مربع، یا کوئی اور چہار ضلعی ہے۔ یہ جاننے کے لیے QR کوڈ اسکین کریں کہ ڈیجیٹل نظام خصوصیات اور نمونہ مطابقت کے ذریعے اشکال کی درجہ بندی کیسے کرتے ہیں۔	:مصنوعی ذہانت کے ساتھ غور کریں
درجہ بندی: مشترکہ خصوصیات کی بنیاد پر گروہ بندی۔ **خصوصیت:** کوئی تعریفی وصف۔ **شناختی وصف:** شناخت کے لیے استعمال ہونے والی قابلِ پیمائش خصوصیت۔ **نمونہ مطابقت:** معلومات کا معلوم نمونوں سے موازنہ کرنا۔	:اہم الفاظ

Example 5: Parity and Logical Rules



When four consecutive numbers are combined using + and – signs, the result is always even. This shows that mathematical expressions follow consistent logical rules. In AI, rule-based systems also follow defined conditions to produce output.

Thinking with AI :	If an AI system is programmed to check whether the result of four consecutive numbers (combined with + and – signs) is even or odd, what rules must it follow before giving the answer? Explain how the system would apply parity rules step-by-step to decide whether the final result is even. Scan the QR code for more information.
Key Words:	**Parity:** Whether a number is even or odd. **Logical Rule:** A condition that determines an outcome. **Algorithm:** A step-by-step procedure to solve a problem. **Prediction:** A result based on rules or probability.

Example 6: Distributive Property and Algorithms



The distributive property states that, a (b + c) = ab + ac.
This shows a clear step-by-step process.
Similarly, an algorithm in AI follows fixed steps to process input data and produce output.

Thinking with AI :	If an AI system is designed to expand algebraic expressions like a(b+c), what steps must it follow before giving the final answer? Explain how the system would apply the distributive rule step-by-step toproduce the correct output. Scan the QR code for more information
Key Words:	**Distributive Property:** Multiplying a number across terms inside brackets. **Input:** Data given to a system. **Processing:** Performing operations on input data.

مثال5:parityاور منطقی قواعد



جب چار مسلسل اعداد کو + اور — کی علامتوں کے ساتھ ملایا جائے، تو حاصل ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ ریاضیاتی عبارات مستقل منطقی اصولوں کی پیروی کرتی ہیں۔ مصنوعی ذہانت میں، اصول پر مبنی نظام بھی متعین شرائط کے مطابق نتائج پیدا کرتے ہیں۔

اگر کسی مصنوعی ذہانت کے نظام کو یہ جانچنے کے لیے پروگرام کیا جائے کہ چار مسلسل اعداد کو + اور — کی علامتوں کے ساتھ ملا کر حاصل جفت ہے یا طاق، تو جواب دینے سے پہلے اسے کن اصولوں کی پیروی کرنا ہوگی؟ وضاحت کریں کہ نظام step-by-step parity کے اصولوں کو کیسے استعمال کرے گا تاکہ یہ طے کرے کہ آخری حاصل جفت ہے۔ مزید معلومات کے لیے QR کوڈ اسکین کریں۔	مصنوعی ذہانت کے ساتھ غور کریں:
parity: کسی عدد کا جفت یا طاق ہونا۔ منطقی قاعدہ: ایسی شرط جو نتیجہ متعین کرے۔ الگورتھم: مسئلہ حل کرنے کا مرحلہ وار طریقہ۔ پیش گوئی: قواعد یا امکان کی بنیاد پر حاصل ہونے والا نتیجہ۔	اہم الفاظ:

مثال6: خاصیتِ تقسیم اور الگورتھم



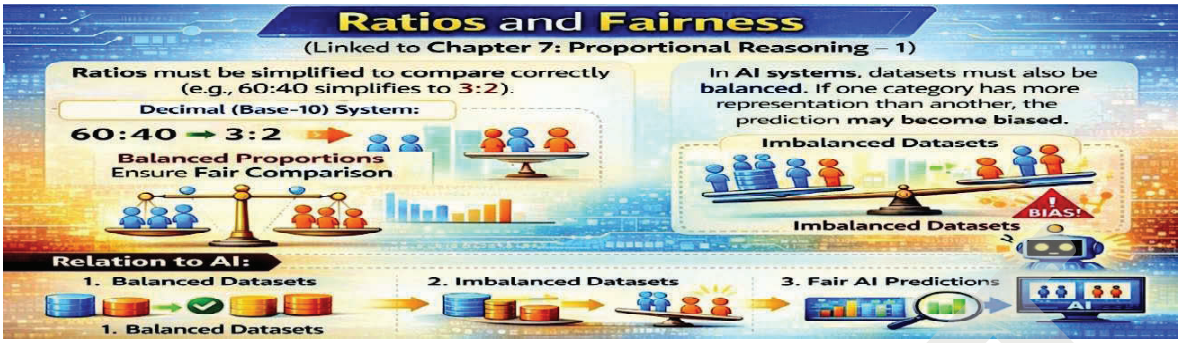
خاصیتِ تقسیم بیان کرتی ہے کہ : $a(b + c) = ab + ac$

یہ ایک واضح مرحلہ وار عمل کو ظاہر کرتی ہے۔

اسی طرح، مصنوعی ذہانت میں الگورتھم مقررہ مراحل کی پیروی کرتے ہوئے معلومات پر عمل کرتے ہیں اور نتیجہ پیدا کرتے ہیں۔

اگر کوئی مصنوعی ذہانت کا نظام $a(b + c)$ جیسی جبری عبارات کو توسیع کرنے کے لیے بنایا گیا ہو، تو آخری جواب دینے سے پہلے اسے کن مراحل کی پیروی کرنا ہوگی؟ وضاحت کریں کہ نظام خاصیتِ تقسیم کو سلسلہ وار کیسے استعمال کرے گا تاکہ درست نتیجہ حاصل ہو۔ مزید معلومات کے لیے QR کوڈ اسکین کریں۔	مصنوعی ذہانت کے ساتھ غور کریں:
خاصیتِ تقسیم: قوسین کے اندر موجود حدوں پر عدد کو ضرب دینا۔ ان پٹ: نظام کو دی گئی معلومات۔ عمل کاری: دی گئی معلومات پر عملیات انجام دینا۔	اہم الفاظ:

Example 7: Ratios and Fairness



Ratios must be simplified to compare correctly (e.g., 60:40 simplifies to 3:2). Balanced proportions ensure correct comparison.

In AI systems, datasets must also be balanced. If one category has more representation than another, the prediction may become biased.

Thinking with AI :	If an AI system compares two groups of data, what must it check to ensure the comparison is fair and balanced? Explain how simplifying ratios (like 60:40 to 3:2) helps in making correct comparisons. What might happen if the data is not balanced? Scan the QR code to explore how digital systems use proportional reasoning to avoid biased predictions.
Key Words:	**Ratio:** Comparison of two quantities. **Proportion:** Equality of two ratios. **Bias:** Unfair preference due to uneven data. **Fairness:** Equal and balanced representation.

Guidance: - Before introducing **Artificial Intelligence (AI)**, first teach the textbook concept clearly through examples and practice. Ensure students understand the mathematics before connecting it to **AI applications**. Introduce **AI terminology** only after students see the link between mathematical reasoning and **intelligent systems**. Keep the explanation simple and syllabus-based.

Before any **AI-based activity**, ask students to revise textbook methods. Teach them to write clear prompts and verify **AI-generated responses** with the textbook. Emphasise responsible use of **AI tools**. AI should support learning, not replace practice or logical reasoning.

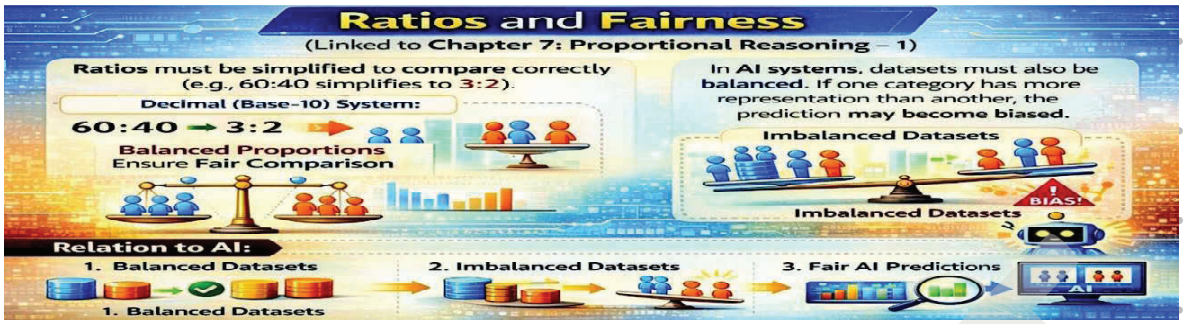
Exploring with AI

Understanding AI in Mathematics Learning

Artificial Intelligence (AI) helps computers analyse data, recognise patterns, and make predictions based on rules and probability. In Mathematics learning, AI can help explain concepts such as square numbers, exponents, ratios, algebraic expansion, and geometric reasoning in simple steps. However, AI does not replace textbook learning, teacher guidance, or regular practice. The textbook remains the primary and reliable source of mathematical knowledge. AI is only a supportive learning tool.

Mathematics develops skills such as logical reasoning, pattern recognition, proportional thinking, classification, and proof. These same skills form the foundation of intelligent systems. Just as mathematical problems require correct steps and balanced reasoning, AI systems depend on accurate data, proper sampling, and fair representation.

مثال 7: نسبتیں اور انصاف



درست موازنہ کرنے کے لیے نسبتوں کو سادہ بنانا ضروری ہوتا ہے (مثلاً 60:40 کو 3:2 بنایا جاتا ہے)۔ متوازن تناسب درست موازنہ کو یقینی بناتے ہیں۔ مصنوعی ذہانت کے نظاموں میں بھی معلوماتی مجموعوں کا متوازن ہونا ضروری ہے۔ اگر ایک گروہ کی نمائندگی دوسرے سے زیادہ ہو، تو پیش گوئی جانبدار ہو سکتی ہے۔

اگر کوئی مصنوعی ذہانت کا نظام دو معلوماتی گروہوں کا موازنہ کرے، تو اسے یہ یقینی بنانے کے لیے کیا جانچنا ہوگا کہ موازنہ منصفانہ اور متوازن ہو؟ وضاحت کریں کہ نسبتوں کو سادہ بنانا (جیسے 60:40 کو 3:2 بنانا) درست موازنہ میں کیسے مدد دیتا ہے۔ اگر معلومات متوازن نہ ہوں تو کیا ہو سکتا ہے؟ یہ جاننے کے لیے QR کوڈ اسکین کریں کہ ڈیجیٹل نظام جانبدار پیش گوئیوں سے بچنے کے لیے تناسبی استدلال کو کیسے استعمال کرتے ہیں۔	:مصنوعی ذہانت کے ساتھ غور کریں
نسبت: دو مقداروں کا موازنہ۔ تناسب: دو نسبتوں کی برابری۔ **جانبداری:** غیر متوازن معلومات کی وجہ سے غیر منصفانہ ترجیح۔ **انصاف:** برابر اور متوازن نمائندگی۔	:اہم الفاظ

رہنمائی: مصنوعی ذہانت کا تعارف کرانے سے پہلے، پہلے درسی کتاب کے تصور کو مثالوں اور مشق کے ذریعے واضح طور پر پڑھائیں۔ اس بات کو یقینی بنائیں کہ طلبہ ریاضی کو اچھی طرح سمجھ لیں، پھر اسے مصنوعی ذہانت کے استعمال سے جوڑیں۔

مصنوعی ذہانت کی اصطلاحات صرف اس وقت متعارف کروائیں جب طلبہ ریاضیاتی استدلال اور ذہین نظاموں کے درمیان تعلق کو سمجھ لیں۔

وضاحت کو آسان اور نصاب کے مطابق رکھیں۔ کسی بھی مصنوعی ذہانت پر مبنی سرگرمی سے پہلے، طلبہ کو درسی کتاب کے طریقے دہرانے کے لیے کہیں۔

انہیں واضح prompts لکھنا اور مصنوعی ذہانت سے حاصل شدہ جوابات کو درسی کتاب سے جانچنا سکھائیں۔ مصنوعی ذہانت کے ذمہ دارانہ استعمال پر زور دیں۔

مصنوعی ذہانت سیکھنے میں مدد دے، نہ کہ مشق یا منطقی استدلال کی جگہ لے۔

مصنوعی ذہانت کے ساتھ دریافت

ریاضی کی تعلیم میں مصنوعی ذہانت کو سمجھنا مصنوعی ذہانت کمپیوٹروں کو معلومات کا تجزیہ کرنے، نمونوں کو پہچاننے، اور قواعد و امکان کی بنیاد پر پیش گوئی کرنے میں مدد دیتی ہے۔ ریاضی کی تعلیم میں، مصنوعی ذہانت مربع اعداد، اساسات، نسبتیں، جبری توسیع، اور ہندسی استدلال جیسے تصورات کو آسان مراحل میں سمجھانے میں مدد دے سکتی ہے۔ تاہم، مصنوعی ذہانت درسی کتاب، استاد کی رہنمائی، یا باقاعدہ مشق کا متبادل نہیں ہے۔ درسی کتاب ریاضیاتی علم کا بنیادی اور قابلِ اعتماد ذریعہ ہے۔ مصنوعی ذہانت صرف ایک معاون تعلیمی آلہ ہے۔

ریاضی منطقی استدلال، نمونہ شناسی، تناسبی سوچ، درجہ بندی، اور ثبوت جیسی صلاحیتیں پیدا کرتی ہے۔ یہی صلاحیتیں ذہین نظاموں کی بنیاد بنتی ہیں۔

جس طرح ریاضی کے مسائل درست مراحل اور متوازن استدلال کا تقاضا کرتے ہیں، اسی طرح مصنوعی ذہانت کے نظام درست معلومات، مناسب نمونہ بندی، اور منصفانہ نمائندگی پر انحصار کرتے ہیں۔

Accessing AI for Mathematics Learning

AI tools may be used in school computer laboratories under teacher supervision or at home with parental guidance. AI must be used strictly for educational purposes and only after completing textbook exercises.

Safe and Responsible Use of AI

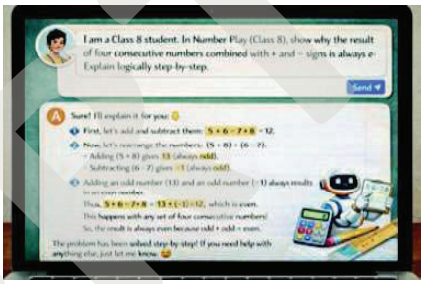
- Do not share personal information (name, school details, passwords).
- Do not copy AI responses without understanding.
- Always verify AI-generated answers with textbook methods.
- Do not use AI during examinations.
- Use AI only to improve clarity and reasoning.

Responsible use of AI strengthens honesty, discipline, and critical thinking.

Writing Effective Prompts in Mathematics:

A prompt is the instruction given to an AI tool.
A good Mathematics prompt should include:

- Class level (Class 8)
- Chapter name
- Clear concept
- Request for step-by-step explanation (if needed)



Example Prompt:

"I am a Class 8 student. In Number Play (Class 8), show why the result of four consecutive numbers combined with + and – signs are always even. Explain logically step-by-step."

Types of Prompts in Mathematics Learning:

To obtain clear and meaningful responses from an AI tool, prompts should be written according to the purpose of learning.

In Mathematics, prompts may be framed in three main ways:

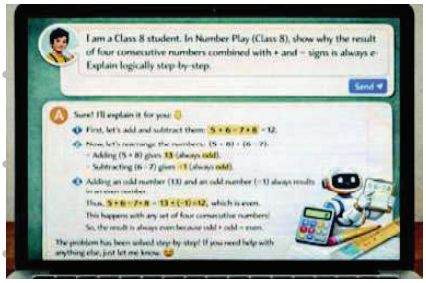
1. **Concept Understanding Prompt:** This type of prompt is used to understand a mathematical concept clearly in simple language. **Example:** "I am a Class 8 student. In the chapter A Square and a Cube, please explain why only square numbers remain open in the 100-locker puzzle in simple language with one clear example."
2. **Comparison or Analytical Prompt :** This type of prompt is used to compare two mathematical ideas or analyse differences and similarities. **Example:**"I am a Class 8 student. Please explain the difference between linear growth and exponential growth from the chapter Power Play with suitable examples." OR "I am studying Quadrilaterals in Class 8. Please compare a rectangle and a parallelogram by listing their similarities and differences."
3. **Application or Activity-Based Prompt:** This type of prompt is used to apply mathematical knowledge in real-life situations or activities. **Example:** "I am a Class 8 student. In Proportional Reasoning, help me design a simple real-life activity to show how ratios are used in cooking or map reading. Explain the steps clearly." OR "In the chapter We Distribute, Yet Things Multiply, create a real-life word problem where the distributive property is used and solve it step-by-step."

Do AI Make Mistakes?

Yes. AI systems depend completely on the data used to train them. If the dataset is incomplete or biased, AI may produce incorrect or unfair results. Sometimes AI may generate answers that look correct but contain mistakes. Therefore, all AI-generated solutions must be verified using textbook methods. AI supports learning but cannot replace mathematical reasoning or teacher guidance.

ریاضی کی تعلیم کے لیے مصنوعی ذہانت تک رسائی

مصنوعی ذہانت کے اوزار اسکول کی کمپیوٹر لیبارٹری میں استاد کی نگرانی میں یا گھر پر والدین کی رہنمائی میں استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ مصنوعی ذہانت کو صرف تعلیمی مقاصد کے لیے اور صرف کتابی مشقیں مکمل کرنے کے بعد استعمال کرنا چاہیے۔



مصنوعی ذہانت کا محفوظ اور ذمہ دارانہ استعمال

- ذاتی معلومات (نام، اسکول کی تفصیلات، پاس ورڈ) شیئر نہ کریں۔
- مصنوعی ذہانت کے جوابات سمجھے بغیر نقل نہ کریں۔
- مصنوعی ذہانت سے حاصل جوابات ہمیشہ کتابی طریقوں سے تصدیق کریں۔
- امتحانات کے دوران مصنوعی ذہانت استعمال نہ کریں۔
- مصنوعی ذہانت صرف وضاحت اور استدلال بہتر کرنے کے لیے استعمال کریں۔

مصنوعی ذہانت کا ذمہ دارانہ استعمال ایمانداری، نظم وضبط اور تنقیدی سوچ کو مضبوط کرتا ہے۔

ریاضی میں مؤثر سوالات لکھنا

سوال وہ ہدایت ہے جو مصنوعی ذہانت کے اوزار کو دی جاتی ہے۔ ریاضی کا اچھا سوال ان چیزوں پر مشتمل ہونا چاہیے:

- جماعت کی سطح (جماعت 8)
- باب کا نام
- واضح تصور
- مرحلہ بہ مرحلہ وضاحت کی درخواست (اگر ضروری ہو)

مثالی سوال" : میں جماعت 8 کا طالب علم ہوں۔ 'عددی کھیل' (جماعت 8) میں یہ بتایئے کہ چار یکے بعد دیگرے اعداد کو + اور − کی علامتوں کے ساتھ ملانے پر نتیجہ ہمیشہ جفت کیوں ہوتا ہے۔ منطقی طور پر مرحلہ بہ مرحلہ وضاحت کیجیے۔"

ریاضی کی تعلیم میں سوالات کی اقسام

مصنوعی ذہانت کے اوزار سے واضح اور بامعنی جوابات حاصل کرنے کے لیے سوالات سیکھنے کے مقصد کے مطابق لکھے جائیں۔ **ریاضی میں سوالات تین اہم طریقوں سے بنائے جاسکتے ہیں**

1۔ تصور سمجھنے کا سوال: اس قسم کا سوال کسی ریاضیاتی تصور کو سادہ زبان میں واضح طور پر سمجھنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مثال: "میں جماعت 8 کا طالب علم ہوں۔ 'مربع اور مکعب' کے باب میں سادہ زبان اور ایک واضح مثال کے ساتھ بتایئے کہ 100 الماری والی پہیلی میں صرف مربع اعداد والی الماریاں کیوں کھلی رہتی ہیں۔"

2۔ موازنہ یا تجزیاتی سوال: اس قسم کا سوال دو ریاضیاتی تصورات کا موازنہ کرنے یا فرق اور مماثلت کا تجزیہ کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مثال: "میں جماعت 8 کا طالب علم ہوں۔ 'قوت کا کھیل' کے باب سے مناسب مثالوں کے ساتھ خطی ترقی اور تیز رفتار ترقی کا فرق بتایئے۔" یا" میں جماعت 8 میں 'چار ضلعی' پڑھ رہا ہوں۔ مستطیل اور متوازی الاضلاع کی مماثلتیں اور فرق بیان کیجیے۔"

3۔ اطلاق یا سرگرمی پر مبنی سوال: اس قسم کا سوال روزمرہ زندگی میں ریاضیاتی علم کو لاگو کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مثال: "میں جماعت 8 کا طالب علم ہوں۔ 'متناسب استدلال' میں ایک سادہ روزمرہ سرگرمی بنانے میں مدد کیجیے جو یہ دکھائے کہ کھانا پکانے یا نقشہ پڑھنے میں نسبتیں کیسے استعمال ہوتی ہیں۔ مراحل واضح طور پر بتایئے۔" یا" 'ہم تقسیم کرتے ہیں پھر بھی چیزیں بڑھتی ہیں' کے باب میں ایک ایسا حقیقی مسئلہ بنایئے جہاں تقسیمی خاصیت استعمال ہو اور اسے مرحلہ بہ مرحلہ حل کیجیے۔"

کیا مصنوعی ذہانت غلطیاں کرتی ہے؟

ہاں۔ مصنوعی ذہانت کے نظام مکمل طور پر ان اعداد و شمار پر انحصار کرتے ہیں جن سے انہیں تربیت دی گئی ہو۔ اگر ڈیٹاسیٹ نامکمل یا متعصب ہو تو مصنوعی ذہانت غلط یا غیر منصفانہ نتائج دے سکتی ہے۔ کبھی کبھی مصنوعی ذہانت ایسے جوابات دے سکتی ہے جو درست لگتے ہوں لیکن غلطیاں رکھتے ہوں۔ اس لیے مصنوعی ذہانت کے تمام حل کتابی طریقوں سے تصدیق کیے جانے چاہئیں۔ مصنوعی ذہانت سیکھنے میں مددگار ہے لیکن ریاضیاتی استدلال یا استاد کی رہنمائی کی جگہ نہیں لے سکتی۔

Myth	Truth
AI is unsafe for students.	AI is safe when used responsibly and without sharing personal information.
AI understands problems like humans.	AI recognises patterns but does not truly understand like humans.
AI decisions are always unbiased.	If the dataset has bias, AI results can also be biased.

Chapter-wise AI-Supported Exploration

Tasks for Students to Explore with AI (Mathematics – Semester 1)

Chapter	Foundational Level	Analytical Level	Creative Level
Chapter 1: A Square and a Cube	• List first 10 square numbers. • Define perfect square.	• Explain why only square numbers remain open in the locker problem.	• Compare pattern recognition in number puzzles with AI pattern detection.
Chapter 2 : Power Play	• Define exponent and base. • Calculate simple powers.	• Compare linear and exponential growth.	• Explain how exponential growth relates to data processing in AI.
Chapter 3 : A Story of Numbers	• Write numbers in expanded form. • Explain place value.	• Compare ancient and modern number systems.	• Relate number representation to digital data storage in AI systems.
Chapter 4 : Quadrilaterals	• Define rectangle and square. • List properties of diagonals.	• Prove diagonals of rectangle are equal.	• Compare shape classification in geometry with image classification in AI.
Chapter 5 : Number Play	• Identify even and odd numbers.	• Analyse parity patterns in expressions	• Explain how rule-based systems in AI follow logical patterns.
Chapter 6 : We Distribute, Yet Things Multiply	• Expand a(b+c).	• Analyse changes in product when numbers increase.	• Compare distributive property with algorithmic steps in AI.
Chapter 7 : Proportional Reasoning – 1	• Define ratio and proportion.	• Simplify ratios using HCF.	• Explain how balanced ratios relate to fairness and unbiased datasets in AI.

Guidance: Before introducing AI connections, complete the related mathematical concept through textbook examples and problem-solving activities. Ensure that students clearly understand the mathematical idea before linking it to AI applications. Encourage students to explain similarities between mathematical reasoning and AI systems in their own words. Demonstrate how to frame subject-specific prompts and verify AI-generated responses using textbook methods. Monitor student interaction with AI tools carefully. Reinforce that AI should deepen conceptual clarity and not replace regular practice or logical reasoning.

Conclusion: The first seven chapters of Semester 1 develop essential mathematical skills such as pattern recognition, logical proof, proportional reasoning, algebraic expansion, and classification. These same skills form the foundation of intelligent systems. By strengthening mathematical thinking and using technology responsibly, students develop critical, ethical, and disciplined understanding of both Mathematics and Artificial Intelligence.

حقیقت	غلط فہمی
AI ذمہ داری کے ساتھ اور ذاتی معلومات شیئر کیے بغیر استعمال کیا جائے تو محفوظ ہے۔	AI طلبہ کے لیے غیر محفوظ ہے۔
AI نمونوں (Patterns) کو پہچانتا ہے لیکن انسانوں کی طرح حقیقی سمجھ نہیں رکھتا۔	AI انسانوں کی طرح مسائل کو سمجھتا ہے۔
اگر ڈیٹا میں تعصب ہو تو AI کے نتائج بھی متعصب ہو سکتے ہیں۔	AI کے فیصلے ہمیشہ غیر جانبدار ہوتے ہیں۔

ابواب کے لحاظ سے AI کی مدد سے دریافت

طلبہ کے لیے AI کے ساتھ تلاش کے کام (ریاضی — سمسٹر 1)

تخلیقی سطح	تجزیاتی سطح	بنیادی سطح	باب
• AI کے پیٹرن معلوم کرنے کے عمل کو عددی پہیلیوں میں پیٹرن کی پہچان سے موازنہ کریں۔	• وضاحت کریں کہ لاکر کے مسئلے میں صرف مربع اعداد ہی کیوں کھلے رہتے ہیں۔	• پہلے 10 مربع اعداد کی فہرست بنائیں۔ • مکمل مربع کی تعریف کریں۔	باب 1: مربع اور مکعب
• وضاحت کریں کہ اسّی بڑھوتری AI میں ڈیٹا پروسیسنگ سے کیسے متعلق ہے۔	• خطی اور قوت نما میں بڑھوتری کا موازنہ کریں۔	• قوت اور اساس کی تعریف کریں۔ • سادہ قوتیں معلوم کریں۔	باب 2: پاور پلے
• عددی نمائندگی کو AI نظاموں میں ڈیجیٹل ڈیٹا ذخیرہ کرنے سے مربوط کریں۔	• قدیم اور جدید عددی نظاموں کا موازنہ کریں۔	• اعداد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیں۔ • مقامِ عدد کی وضاحت کریں۔	باب 3: اعداد کی کہانی
• جیومیٹری میں اشکال کی درجہ بندی کا AI میں تصویری درجہ بندی سے موازنہ کریں۔	• ثابت کریں کہ مستطیل کے قطر برابر ہوتے ہیں۔	• مستطیل اور مربع کی تعریف کریں۔ • قطروں کی خصوصیات لکھیں۔	باب 4: چہار ضلعیات
• وضاحت کریں کہ AI میں اصول پر مبنی نظام منطقی نمونوں کی پیروی کیسے کرتے ہیں۔	• الجبری اظہارات میں جفت و طاق کے نمونوں کا تجزیہ کریں۔	• جفت اور طاق اعداد کی شناخت کریں۔	باب 5: اعداد کا کھیل
• تقسیمی خاصیت کا AI کے الگورتھمک مراحل سے موازنہ کریں۔	• تجزیہ کریں کہ اعداد بڑھنے پر حاصلِ ضرب میں کیا تبدیلی آتی ہے۔	• a(b+c) کو پھیلائیں۔	باب 6: ہم تقسیم کرتے ہیں، مگر چیزیں ضرب کھاتی ہیں
• وضاحت کریں کہ متوازن نسبتیں AI میں منصفانہ اور غیر متعصب ڈیٹا سیٹس سے کیسے متعلق ہیں۔	• HCF استعمال کرتے ہوئے نسبتوں کو آسان بنائیں۔	• نسبت اور تناسب کی تعریف کریں۔	باب 7: تناسبی استدلال — 1

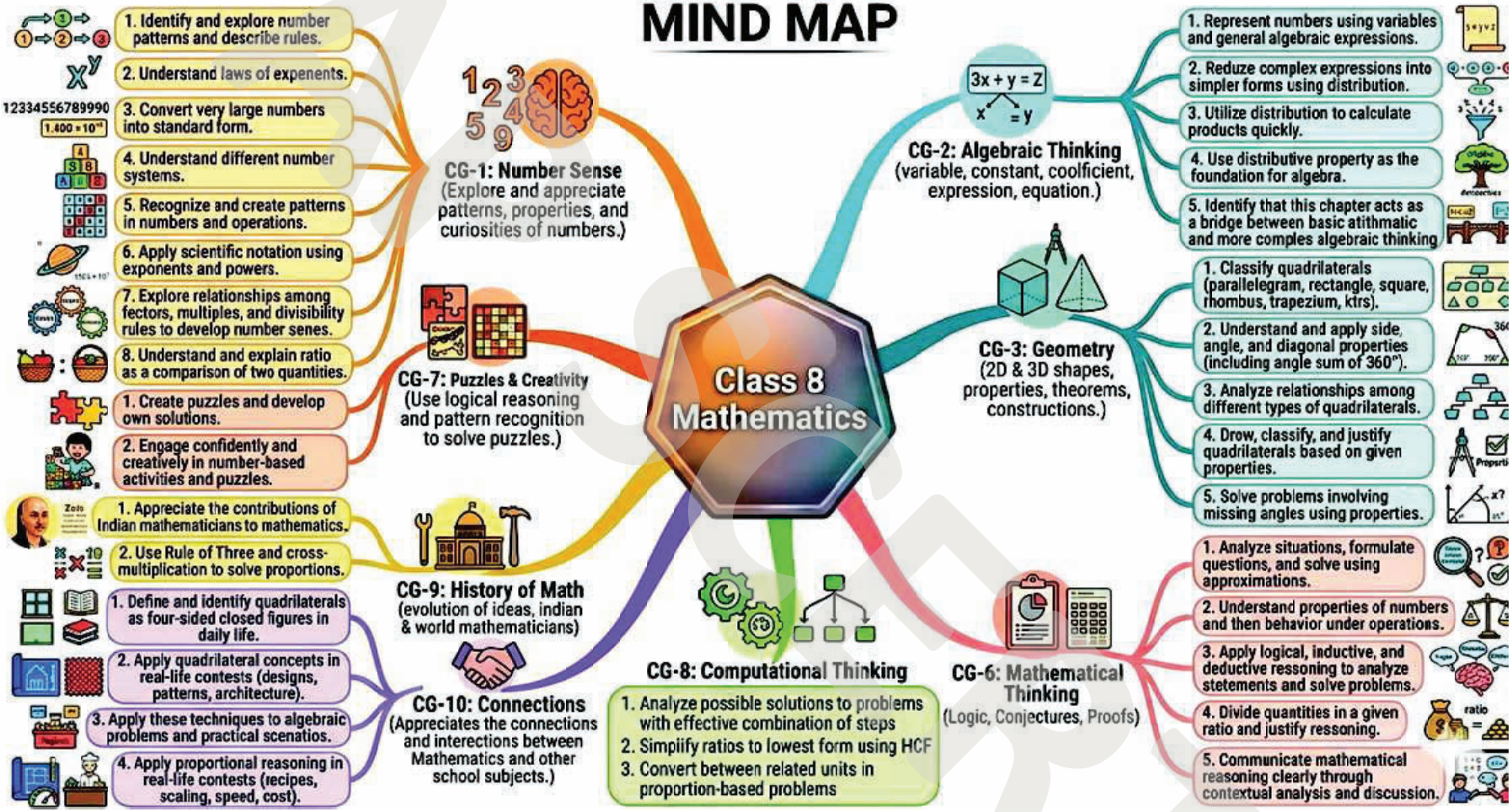
رہنمائی (Guidance)

AI سے متعلق روابط متعارف کرانے سے پہلے، درسی کتاب کی مثالوں اور مسئلہ حل کرنے کی سرگرمیوں کے ذریعے متعلقہ ریاضیاتی تصور مکمل کروائیں۔ اس بات کو یقینی بنائیں کہ طلبہ AI سے جوڑنے سے پہلے ریاضیاتی خیال کو اچھی طرح سمجھ لیں۔ طلبہ کو ترغیب دیں کہ وہ ریاضیاتی استدلال اور AI نظاموں کے درمیان مماثلتیں اپنے الفاظ میں بیان کریں۔ انہیں یہ بھی دکھائیں کہ موضوع سے متعلق مخصوص سوالات (Prompts) کیسے بنائے جاتے ہیں اور AI کے تیار کردہ جوابات کی درسی کتابی طریقوں سے تصدیق کیسے کی جاتی ہے۔ AI ٹولز کے ساتھ طلبہ کی سرگرمیوں کی نگرانی احتیاط سے کریں۔ اس بات پر زور دیں کہ AI تصوری وضاحت کو بہتر بنانے کے لیے ہے، نہ کہ باقاعدہ مشق یا منطقی استدلال کا متبادل۔

نتیجہ (Conclusion)

سمسٹر 1 کے پہلے سات ابواب بنیادی ریاضیاتی مہارتیں پیدا کرتے ہیں، جیسے نمونوں کی پہچان، منطقی ثبوت، تناسبی استدلال، الجبری پھیلاؤ اور درجہ بندی۔ یہی مہارتیں ذہین نظاموں کی بنیاد بھی بنتی ہیں۔ ریاضیاتی سوچ کو مضبوط بنا کر اور ٹیکنالوجی کو ذمہ داری سے استعمال کر کے، طلبہ ریاضی اور مصنوعی ذہانت دونوں کی تنقیدی، اخلاقی اور منظم سمجھ پیدا کرتے ہیں۔

MIND MAP


Class 8 Mathematics
CG-1: Number Sense
(Explore and appreciate patterns, properties, and curiosities of numbers.)
1. Identify and explore number patterns and describe rules.
2. Understand laws of expenents.
3. Convert very large numbers into standard form.
4. Understand different number systems.
5. Recognize and create patterns in numbers and operations.
6. Apply scientific notation using exponents and powers.
7. Explore relationships among fectors, multiples, and divisibility rules to develop number senes.
8. Understand and explain ratio as a comparison of two quantities.
CG-2: Algebraic Thinking
(variable, constant, coolficient, expression, equation.)
1. Represent numbers using variables and general algebraic expressions.
2. Reduze complex expressions into simpler forms using distribution.
3. Utilize distribution to calculate products quickly.
4. Use distributive property as the foundation for algebra.
5. Identify that this chapter acts as a bridge between basic atithmatic and more comples algebraic thinking
CG-3: Geometry
(2D & 3D shapes, properties, theorems, constructions.)
1. Classify quadrilaterals (parallelegram, rectangle, square, rhombus, trapezium, ktrs).
2. Understand and apply side, angle, and diagonal properties (including angle sum of 360°).
3. Analyze relationships among different types of quadrilaterals.
4. Drow, classify, and justify quadrilaterals based on given properties.
5. Solve problems involving missing angles using properties.
CG-6: Mathematical Thinking
(Logic, Conjectures, Proofs)
1. Analyze situations, formulate questions, and solve using approximations.
2. Understand properties of numbers and then behavior under operations.
3. Apply logical, inductive, and deductive ressoning to analyze stetements and solve problems.
4. Divide quantities in a given ratio and justify ressoning.
5. Communicate mathematical reasoning clearly through contextual analysis and discussion.
CG-8: Computational Thinking
1. Analyze possible solutions to problems with effective combination of steps
2. Simplify ratios to lowest form using HCF
3. Convert between related units in proportion-based problems
CG-7: Puzzles & Creativity
(Use logical reasoning and pattern recognition to solve puzzles.)
1. Create puzzles and develop own solutions.
2. Engage confidently and creatively in number-based activities and puzzles.
CG-9: History of Math
(evolution of ideas, indian & world mathematicians)
1. Appreciate the contributions of Indian mathematicians to mathematics.
2. Use Rule of Three and cross-multiplication to solve proportions.
CG-10: Connections
(Appreciates the connections and interections between Mathematics and other school subjects.)
1. Define and identify quadrilaterals as four-sided closed figures in daily life.
2. Apply quadrilateral concepts in real-life contests (designs, patterns, architecture).
3. Apply these techniques to algebraic problems and practical scenatios.
4. Apply proportional reasoning in real-life contests (recipes, scaling, speed, cost).