MATHEMATICS

(ENGLISH - ODIA VERSION)

Textbook for Class IX

Semester - 1

H7Z6I1

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2023

New Impression - 2024, 2025, 2026

DISCLAIMER

Any form of copying of the content, information and illustrations from this text book is a punishable offence.

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser. The copy right holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 G.S.M S.S. Maplitho. Title Page 220 G.S.M. White Art Card.

AP SCERT

Published by Samagra Shiksha & SCERT - Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

Vande Mataram

Vande Mataram!
Sujalam, suphalam, malayaja shitalam,
Shasyashyamalam, Mataram!
Vande Mataram!
Shubhrajyotsna pulakitayaminim,
Phullakusumita drumadala shobhinim,
Suhasinim sumadhura bhashinim,
Sukhadam varadam, Mataram!
Vande Mataram, Vande Mataram!

- Bankimchandra Chatterji

AP SCERT

ବନ୍ଦେ ମାତରମ୍‌ଂ

ବନ୍ଦେ ମାତରମ୍‌ଂ!
ସୁଜଳାଂ ସୁଫଳାଂ ମଳୟଜ ଶୀତଳାଂ
ଶସ୍ୟ ଶ୍ୟାମଳାଂ, ମାତରଂ
ବନ୍ଦେ ମାତରଂ!
ଶୁଭ୍ର ଜ୍ୟୋତ୍ସ୍ନା ପୁଲକିତୟାମିନୀଂ
ଫୁଲ୍ଲକୁସୁମିତ ଦ୍ରୁମଦଳ ଶୋଭିନୀଂ
ସୁହାସିନୀଂ ସୁମଧୁର ଭାଷିଣୀଂ
ସୁଖଦାଂ ବରଦାଂ ମାତରଂ
ବନ୍ଦେ ମାତରମ୍‌ଂ! ବନ୍ଦେ ମାତରମ୍‌ଂ!

– ବଙ୍କିମ ଚନ୍ଦ୍ର ଚାଟାର୍ଜୀ

Printed in India
at the A.P. Govt., Textbook Press,
Amaravati, Andhra Pradesh.

Our National Anthem | ଆମ ଜାତୀୟ ସଙ୍ଗୀତ

Jana-gana-mana-adhinayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata
Panjaba-Sindhu-Gujarata-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
uchchala-jaladhi-taranga
Tava Subha name jage,
tava subha asisa mage,
gahe tava jaya-gatha.
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

- Rabindranath Tagore

AP SCERT

ଜନ ଗଣ ମନ ଅଧିନାୟକ ଜୟ ହେ !
ଭାରତ ଭାଗ୍ୟ ବିଧାତା !
ପଞ୍ଜାବ, ସିନ୍ଧୁ, ଗୁଜରାଟ, ମରାଠା,
ଦ୍ରାବିଡ଼, ଉତ୍କଳ, ବଙ୍ଗ !
ବିନ୍ଧ୍ୟ, ହିମାଚଳ, ଯମୁନା, ଗଙ୍ଗା !
ଉଚ୍ଛଳ ଜଳଧି ତରଙ୍ଗ !
ତବ ଶୁଭ ନାମେ ଜାଗେ !
ତବ ଶୁଭ ଆଶିଷ ମାଗେ !
ଗାହେ ତବ ଜୟ ଗାଥା !
ଜନ ଗଣ ମଙ୍ଗଳ ଦାୟକ ଜୟ ହେ !
ଭାରତ ଭାଗ୍ୟ ବିଧାତା !
ଜୟ ହେ ! ଜୟ ହେ ! ଜୟ ହେ !
ଜୟ ଜୟ ଜୟ ଜୟ ହେ !

– ରବୀନ୍ଦ୍ରନାଥ ଠାକୁର

Pledge | ଶପଥ

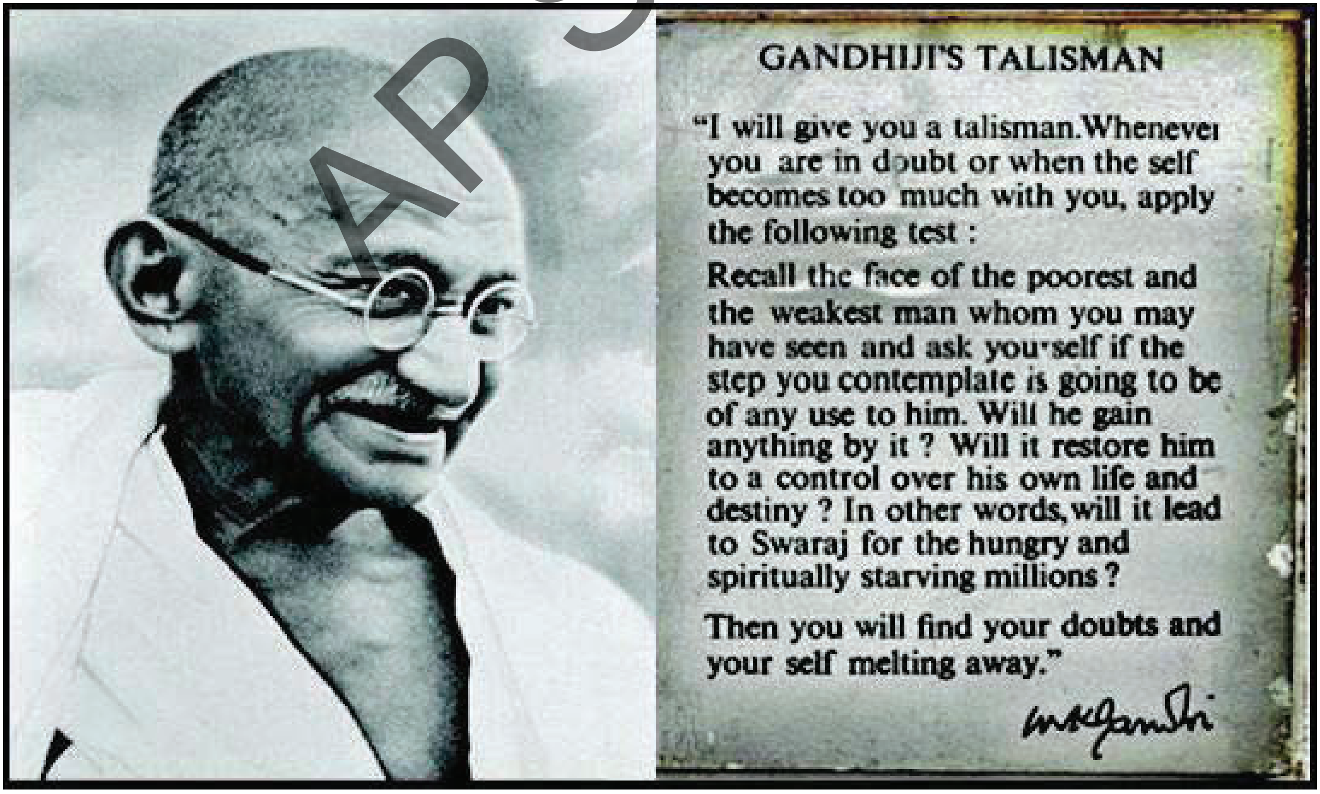
India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

ଭାରତ ମୋର ମାତୃଭୂମି । ସମସ୍ତ ଭାରତୀୟ ମୋର ଭାଇ ଓ ଭଉଣୀ ।
ମୁଁ ମୋ ଦେଶକୁ ଭଲପାଏ ଏବଂ ଏହାର ଐଶ୍ବର୍ଯ୍ୟପୂର୍ଣ୍ଣ ନାନାବିଧ ପରମ୍ପରା ପାଇଁ ମୁଁ ଗର୍ବିତ ।
ମୁଁ ଏହାର ଯୋଗ୍ୟ ସନ୍ତାନ ହେବା ପାଇଁ ସର୍ବଦା ଚେଷ୍ଟା କରିବି ।
ମୁଁ ମୋର ପିତାମାତା, ଗୁରୁ ଏବଂ ସମସ୍ତ ଗୁରୁଜନଙ୍କୁ ସମ୍ମାନ ଦେଖାଇବି ଓ
ସମସ୍ତଙ୍କୁ ଭଦ୍ର ବ୍ୟବହାର ଦେଖାଇବି । ମୁଁ ପ୍ରାଣୀମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ସଦୟ ରହିବି ।
ମୋ ଦେଶ ଓ ଦେଶବାସୀଙ୍କ ସେବା କରିବା ପାଇଁ ମୁଁ ଶପଥ ନେଉଅଛି ।
ସେମାନଙ୍କର ମଙ୍ଗଳ ଓ ଉନ୍ନତିରେ ହିଁ ମୋର ସୁଖ ନିହିତ ।

– ପାଇଡ଼ିମାରି ଓ୍ୱେଙ୍କାଟା ସୁବ୍ବାରାଓ

AP SCERT



MATHEMATICS
ଗଣିତ
Class / ଶ୍ରେଣୀ - IX

Semester (ସେମିଷ୍ଟର) - I

Contents
ବିଷୟବସ୍ତୁ

Chapter	Content	Month	Pg.No.
	Learning Outcomes ଶିକ୍ଷଣ ଫଳାଫଳ		(i-iv)
Chapter 1 ଅଧ୍ୟାୟ 1	Number Systems ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଣାଳୀ	June-July	2
Chapter 2 ଅଧ୍ୟାୟ 2	Polynomials ବହୁପଦୀ	July	50
Chapter 3 ଅଧ୍ୟାୟ 3	Co-ordinate Geometry ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି	August	86
Chapter 4 ଅଧ୍ୟାୟ 4	Linear Equations in two variables ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ	August	110
Chapter 5 ଅଧ୍ୟାୟ 5	Introduction to Euclid's Geometry ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ପରିଚୟ	September	120
Chapter 6 ଅଧ୍ୟାୟ 6	Lines and Angles ରେଖା ଓ କୋଣ	September	138
Appendix.1 ପରିଶିଷ୍ଟ -1	Proofs in Mathematics ଗଣିତରେ ପ୍ରମାଣ	October	166
	Answers ଉତ୍ତରମାଳା		206

APSCERT

U6D7Y8
Teachers Corner

B6H5Z4
Student Corner

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
1	Number System	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Acquire knowledge on rational and irrational numbers, their existence and operations on those numbers • Can place any number of rationals & irrationals between any two rationals and irrationals • Can convert decimals into p/q and vice versa. • Can rationalize the given irrational using rationalizing factor • Utilize the laws of exponents and Number Systems in real life situations effectively.
2	Polynomials	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Distinguish between a multinomial and polynomial and can separate polynomials out of the given algebraic expressions • Find the co-efficient and degree of a polynomial • Factorise given polynomial with factor theorem • Find the remainder using remainder theorem • Utilize the concept of polynomials in real life situations and appreciate its significanace
3	Co-ordinate geometry	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Express what a cartesian plane is? and its history • Distringuish which point belongs to which quadrant • Plot any point on the cartesian plane • Name any point on the cartesian plane • Utilize the concept of co-ordinate geometry in real life situations and appreciate its significanace
4	Linear equations in two variables	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Express any linear equation in two variables in standard form • Find any number of solutions to any sort of linear equation in two variables • Check whether the given pair of co-ordinates is a solution to the given equation or not. • Utilize the concept of Linear Equations in two variables in real life situations and appreciate its significanace

AP SCERT

ଶିକ୍ଷଣ ଫଳାଫଳ

କ୍ର.ସଂ.	ଅଧ୍ୟାୟର ନାମ	ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ଶିକ୍ଷଣ ଫଳାଫଳ
1	ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଣାଳୀ	**ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ସମାପ୍ତ ହେବା ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ଏହା ଶିଖିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବେ :** • ପରିମେୟ ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା, ସେଗୁଡ଼ିକର ଅବସ୍ଥିତି ଏବଂ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜ୍ଞାନ ଲାଭ କରିବେ । • ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ । • ଦଶମିକ ଭଗ୍ନାଂଶଗୁଡ଼ିକୁ p/q ରୂପେ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମ କରିପାରିବେ । • ପରିମେୟ କାରକ ଉତ୍ପାଦକ ସାହାଯ୍ୟରେ ଦତ୍ତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପରିମେୟକରଣ କରିପାରିବେ । • ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଣାଳୀ ଏବଂ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମଗୁଡ଼ିକର ଉପଯୁକ୍ତ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ ।
2	ବହୁପଦୀ	**ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ସମାପ୍ତ ହେବା ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ଏହା ଶିଖିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବେ :** • ବହୁଳପଦୀ ଏବଂ ବହୁପଦୀ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରଭେଦ ଜାଣିପାରିବେ ଏବଂ ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଅଲଗା କରିପାରିବେ । • ବହୁପଦୀର ସହଗ ଏବଂ ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ । • ଦତ୍ତ ବହୁପଦୀକୁ ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରିପାରିବେ । • ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ । • ବାସ୍ତବ ଜୀବନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ବହୁପଦୀର ଧାରଣା ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ ଏବଂ ଏହାର ଗୁରୁତ୍ୱ ଉପଭୋଗ କରିପାରିବେ ।
3	ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି	**ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ସମାପ୍ତ ହେବା ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ଏହା ଶିଖିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବେ :** • କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ ଏବଂ ଏହାର ଇତିହାସ ବିଷୟରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବେ । • କାର୍ଟିଜୀୟ ସମତଳରେ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ କେଉଁ ପାଦରେ ରହେ କହିପାରିବେ । • ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ କାର୍ଟିଜୀୟ ସମତଳରେ ସ୍ଥାପିତ କରିପାରିବେ । • କାର୍ଟିଜୀୟ ସମତଳରେ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ନାମକରଣ କରିପାରିବେ । • ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ଧାରଣାକୁ ବାସ୍ତବ ଜୀବନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ ଏବଂ ଏହାର ଗୁରୁତ୍ୱ ଉପଭୋଗ କରିବେ ।
4	ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ	**ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ସମାପ୍ତ ହେବା ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ଏହା ଶିଖିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବେ :** • ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣକୁ ମାନକ ରୂପରେ ଲେଖିପାରିବେ । • ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଅନେକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ । • ଦତ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯୋଡ଼ି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହେଉଛି କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବେ । • ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଧାରଣା ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରାଧାନ୍ୟତା ଉପଭୋଗ କରିପାରିବେ ।

APSCERT

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
5	Introduction to Euclid's Geometry	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Recognize various geometry related problems in real life which are inferences of Euclid's Geometry • Identify the axioms and postulates used in solving geometrical problems. • Utilize appropriately the axioms and postulates of Euclid in future endeavours of gemoetry. • Appreciate Euclid and Other Mathematicians who strived through out their life in pursuit of everlasting geometry.
6	Lines and Angles	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Recognize different basic geometric shapes and can name them with their apt nomenclature • Identify and solve problems related to vertically opposite angles, linear pair of angles, adjacent angles etc., • Identify the parallel and intersecting lines in a plane and solve problems related to both the cases. • Utilize exactly the knowledge on different angles and different types of lines in exploring real life problems related to them. • Appreciate the concepts of Lines & Angles in real life usage

AP SCERT

ଶିକ୍ଷଣ ଫଳାଫଳ

କ୍ର.ସଂ.	ଅଧ୍ୟାୟର ନାମ	ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ଶିକ୍ଷଣ ଫଳାଫଳ
5	ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ପରିଚୟ	**ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ସମାପ୍ତ ହେବା ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ଏହା ଶିଖିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବେ :** • ବାସ୍ତବ ଜୀବନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ଅନୁଗାମୀ ବୋଲି ଜାଣିପାରିବେ । • ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଅଭିଗୃହୀତ ଓ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବେ । • ଭବିଷ୍ୟତରେ ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରଚେଷ୍ଟାରେ ଅଭିଗୃହୀତ ଓ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସଠିକ୍ ଭାବେ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ । • ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ ଜ୍ୟାମିତିର ଗବେଷଣା ପାଇଁ ସେମାନଙ୍କର ସାରା ଜୀବନ କିପରି ବିନିଯୋଗ କରିଛନ୍ତି ତାହାକୁ ପ୍ରଶଂସା କରିବେ ।
6	ରେଖା ଓ କୋଣ	**ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ସମାପ୍ତ ହେବା ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ଏହା ଶିଖିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବେ :** • ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତିକ ଆକୃତିର ନମୁନାଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନି ପାରିବେ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ନାମ କରିପାରିବେ । • ପ୍ରତୀପକୋଣ ଯୋଡ଼ି, ରେଖୀୟ ଯୋଡ଼ି, ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ି ଇତ୍ୟାଦି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କରିପାରିବେ । • ଏକ ସମତଳରେ ଛେଦିତ ଏବଂ ସମାନ୍ତର ରେଖାଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନି ପାରିବେ ଏବଂ ଉଭୟ ବିଷୟକ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କରିପାରିବେ । • ସେମାନଙ୍କ ବାସ୍ତବ ଜୀବନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର କୋଣ ଏବଂ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସଠିକ୍ ଧାରଣା ବ୍ୟବହାର କରି ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ କରିପାରିବେ । • ବାସ୍ତବ ଜୀବନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ରେଖା ଓ କୋଣର ଧାରଣାର ବ୍ୟବହାରକୁ ଉପଭୋଗ କରିପାରିବେ ।

AP SCERT

L4HZL9

ଅଧ୍ୟାୟ 1

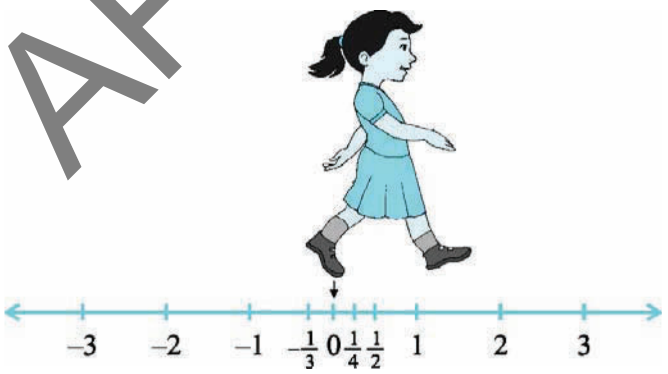
ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଣାଳୀ

1.1 ଉପକ୍ରମ

ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀଗୁଡ଼ିକରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଅଛ ଏବଂ ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କିପରି ଉପସ୍ଥାପନ କରିବା ଶିଖିଛ (ଚିତ୍ର 1.1 ଦେଖ) ।

ଚିତ୍ର 1.1 : ସଂଖ୍ୟାରେଖା

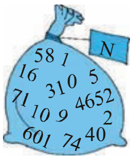
ଥରେ କଳ୍ପନା କରି ଦେଖ, ତୁମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଶୂନଠାରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ସେହି ରେଖାର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଗତିକରୁଛ । ତୁମେ ଦେଖିବାକୁ ପାଇବ ଯେ, କେବଳ ସଂଖ୍ୟା, ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସଂଖ୍ୟା!



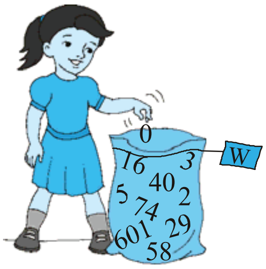
ଚିତ୍ର 1.2

ବର୍ତ୍ତମାନ, ମନେକର ତୁମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଦେଇ ଆଗକୁ ଗତିକରୁଛ ଏବଂ କେତୋଟି ସଂଖ୍ୟା ସଂଗ୍ରହ କରୁଛ । ସେହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସାଇତି ରଖିବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ମୁଣି ପ୍ରସ୍ତୁତ କର!

AP SCERT

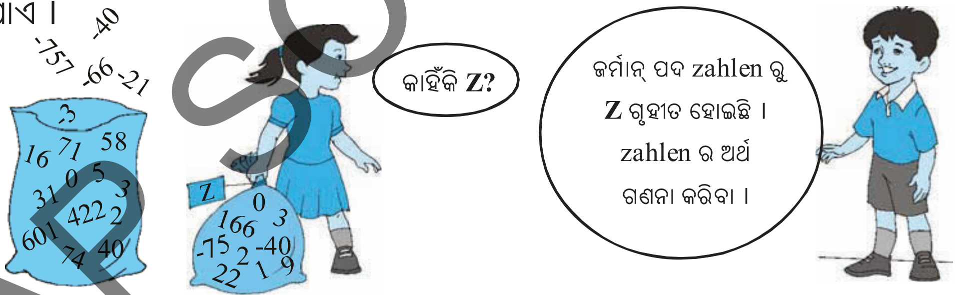


ତୁମେ ପ୍ରଥମେ କେବଳ 1,2,3 ଇତ୍ୟାଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସଂଗ୍ରହ କରିବା ଆରମ୍ଭ କରିଥିବ । ତୁମେ ଜାଣଯେ, ଏହି ତାଲିକା ଅସୀମଯାଏ ଜାରି ରହିଥାଏ (ଏହା କାହିଁକି ସତ୍ୟ?) । ତେଣୁ, ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମ ମୁଣିରେ ଅସଂଖ୍ୟ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି । ମନେପକାଅ ଯେ, ସଂଗ୍ରହ କରାଯାଇଥିବା ଏହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ 'N' ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରିଥାଉ ।



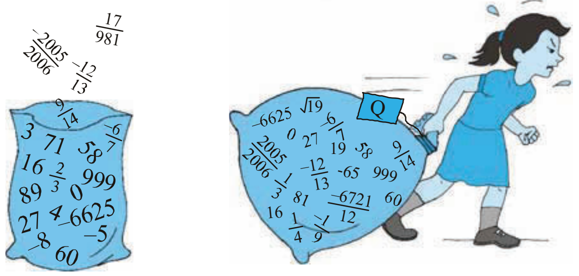
ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ପଛକୁ ଯାଅ ଏବଂ '0' (ଶୂନ)କୁ ତୁମ ମୁଣିରେ ରଖ । ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ସଂଗ୍ରହ କରିଥିବା ***ଅଖଣ୍ଡ*** *ସଂଖ୍ୟା* ଗୁଡ଼ିକୁ 'W' ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ତୁମ ସାମନାରେ ଅସଂଖ୍ୟ ଋଣ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ବିସ୍ତାର ରୂପେ ଥିବା ଲକ୍ଷ୍ୟକରିବ । ସେହି ସମସ୍ତ ଋଣ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ତୁମ ମୁଣିରେ ରଖ । ତୁମର ଏହି ନୂତନ ସଂଗ୍ରହଟି କ'ଣ? ମନେପକାଅ ଯେ, ଏହି ସବୁ ହେଉଛି, ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ଏହାକୁ **'Z'** ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରଯାଏ ।



ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଆଉ କେତେଟି ସଂଖ୍ୟା ବଳକି ଅଛିକି? ଅବଶ୍ୟ! $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, କିମ୍ବା $\frac{-2005}{2006}$ ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ରହିଛି । ଏହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ମଧ୍ୟ ମୁଣିରେ ରଖିଲେ, ଏଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ***ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା*** ସମୁଦାୟ ଗଠନହୁଏ ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଏହି ସମୁଦାୟକୁ **Q** ଅକ୍ଷର ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।



AP SCERT

'ପରିମେୟ'(Rational) ନାମକ ପଦଟି, 'ଅନୁପାତ' (ratio)ନାମକ ପଦରୁ ଏବଂ Q 'ଭାଗଫଳ'(Quotient) ପଦରୁ ଗୃହୀତ ହୋଇଛି ।

ତୁମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସଂଜ୍ଞାକୁ ମନେ ପକାଅ:

'r'କୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ, ଯେତେବେବେଳେ 'r'କୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ । ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ । ($q \neq 0$ କାହିଁକି?)

ଧ୍ୟାନଦିଅ ଯେ, ବର୍ତ୍ତମାନ ମୁଣିରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ସଂଖ୍ୟାକୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ । ଯେଉଁଠି p ଏବଂ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ -25 କୁ $\frac{-25}{1}$; ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା, ଏଠାରେ $p = -25$ ଏବଂ $q = 1$ ତେଣୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସମୁଦାୟରେ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଅଟେ ।

ମନେପକାଅ ଯେ, $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଥିବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ (ଯେଉଁଠି p, q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି ଏବଂ $q \neq 0$) ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, ଇତ୍ୟାଦି । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ସମତୁଲ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା(ସମ ଭଗ୍ନାଂଶ) କୁହାଯାଏ । $\frac{p}{q}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା, ଯାହାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯିବା ସମୟରେ ଆମେ ସର୍ତ୍ତମୂଳକ ଧରିନେବା ଯେ $q \neq 0$ ଏବଂ p,qର '1' ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନଥାଏ (ଅର୍ଥାତ୍ p ଏବଂ q ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି) । ତେଣୁ $\frac{1}{2}$ ର ଅସଂଖ୍ୟ ସମଭଗ୍ନାଂଶ ମଧ୍ୟରୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କେବଳ $\frac{1}{2}$ କୁ ହିଁ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଥିବା ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ କେତୋଟି ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 1 : ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ଅଟେ କୁହ? ତୁମ ଉତ୍ତରର କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

(ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

(iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ସମାଧାନ: (i) ଅସତ୍ୟ, କାରଣ ଶୂନ ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ କିନ୍ତୁ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(ii) ସତ୍ୟ, କାରଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା m କୁ $\frac{m}{1}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

(iii) ଅସତ୍ୟ, କାରଣ $\frac{3}{5}$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 2 : 1 ଏବଂ 2 ମଧ୍ୟରେ 5 ଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

ଆମେ ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ପ୍ରଣାଳୀରେ ସମାଧାନ କରିପାରିବା ।

ସମାଧାନ 1: r ଏବଂ s ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକରିବା ପାଇଁ r ଏବଂ s ର ଯୋଗଫଳକୁ 2 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରଥାଉ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{r+s}{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି r ଓ s ମଧ୍ୟରେ ଥାଏ । ତେଣୁ 1 ଓ 2 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି $\frac{3}{2}$ । ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କରି 1 ଏବଂ 2 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଅନ୍ୟ ଚାରୋଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ ଏବଂ $\frac{7}{4}$ ।

ସମାଧାନ 2 : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଏକା ଥରକେ ପାଞ୍ଚଟି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା । ଯେହେତୁ ଆମର ପାଞ୍ଚଟିସଂଖ୍ୟା ଆବଶ୍ୟକ, ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟା 1 ଏବଂ 2 କୁ 5+1=6 ହର ବିଶିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ଲେଖିବା । ଅର୍ଥାତ୍ $1 = \frac{6}{6}$ ଏବଂ $2 = \frac{12}{6}$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରଯେ $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ ଏବଂ $\frac{11}{6}$ ଇତ୍ୟାଦି ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା 1 ଏବଂ 2 ମଧ୍ୟରେ ରହେ । ତେଣୁ $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ଏବଂ $\frac{11}{6}$ ଗୁଡ଼ିକ 1 ଏବଂ 2 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉଦାହରଣ 2 ରେ, ତୁମକୁ 1 ଏବଂ 2 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ କୁହାଯାଇଛି । କିନ୍ତୁ ତୁମେ ଜାଣଯେ, ପ୍ରକୃତରେ 1 ଏବଂ 2 ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିଥାଏ । ସାଧାରଣତଃ, ***ଦତ୍ତ ଯେ କୌଣସ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଥାଏ ।***

ପୁଣିଥରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା । ତୁମେ ସବୁ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସଂଗ୍ରହ କରିଲକି ? ନାହିଁ, ପ୍ରକୃତରେ ସଂଖ୍ୟା ରେଖା ଉପରେ ଅସଂଖ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ଛାଡ଼ିଦିଆଯାଇଛି । ତୁମେ ଚୟନ କରିଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଖାଲି ସ୍ଥାନ ରହିଛି, ସେଗୁଡ଼ିକ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଦୁଇଟି ନୁହଁ, ଅସଂଖ୍ୟ ଖାଲି ସ୍ଥାନ ରହିଛି । ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟର ବିଷୟ ଏହିଯେ, କୌଣସି ଦୁଇଟି ଖାଲି ସ୍ଥାନ ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିଥାଏ!

ଏବେ, ଆମ ପାଖରେ ନିମ୍ନ କେତୋଟି ପ୍ରଶ୍ନ ରହିଯାଇଛି :

1. ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଛାଡ଼ି ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ କ'ଣ କୁହାଯାଏ ?
2. ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ କିପରି ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବା? ଅର୍ଥାତ୍, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଠାରୁ କିପରି ପୃଥକ୍ କରିପାରିବା ?

ଏହି ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ତୁମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ବିଭାଗରେ ପାଇବ ।

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1.1

1. ଶୂନ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି? ଏହାକୁ ଆମେ $\frac{p}{q}$ ରୂପରେ ଲେଖିପାରିବା କି ? ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ।

2. 3 ଓ 4 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଛଅଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

3. $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{4}{5}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

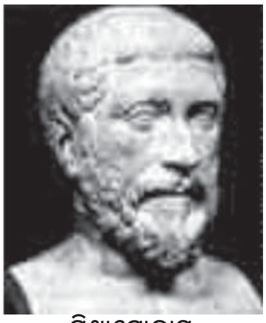
4. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ କୁହ । ତୁମ ଉତ୍ତରର କାରଣ ଜଣାଅ ।
   (i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।
   (ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।
   (iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

AP SCERT

1.2 ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ବିଭାଗରେ ଆମେ, ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଉନଥିବା ଅନେକ ସଂଖ୍ୟା ଥିବା ଦେଖିଲେ । ଏହି ବିଭାଗରେ, ଆମେ ଏପରି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ଅନୁସନ୍ଧାନ କରିବା । ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ତୁମେ ସମ୍ମୁଖୀନ ହୋଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଅଛି, ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ । ଏଠାରେ ତୁମେ ପ୍ରଶ୍ନ କରିପାର ଯେ, ଏହି ରୂପରେ ନଥିବା ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଅଛିକି ? ହଁ, ପ୍ରକୃତରେ ସେହିପରି ସଂଖ୍ୟା ଅଛି ।

ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 400ରେ ଗ୍ରୀକ୍‌ର ବିଖ୍ୟାତ ଗଣିତଜ୍ଞ ଏବଂ ଦାର୍ଶନିକ ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଅନୁଗାମୀମାନେ(ପିଥାଗୋରିୟନ୍ ମାନେ) ସର୍ବପ୍ରଥମେ ପରିମେୟ ହୋଇନଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଆବିଷ୍କାର କରିଥିଲେ । ସେହି ସଂଖ୍ୟାକୁ *ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା* କୁହାଯାଏ । କାରଣ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । ପିଥାଗୋରିୟନ୍, କ୍ରଟନ୍‌ର ହିପ୍ପାକାସ୍‌ଙ୍କ ଏହି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଆବିଷ୍କାର ସମ୍ପର୍କରେ ଅନେକ କିମ୍ବଦନ୍ତୀ ରହିଛି । ସେହି କିମ୍ବଦନ୍ତୀଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ, ହିପ୍ପାକାସ୍‌ଙ୍କ ଦୁଃଖଦ ଦେହାନ୍ତର କାରଣ ହେଉଛି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\sqrt{2}$ ର ଆବିଷ୍କାର କିମ୍ବା $\sqrt{2}$ ର ଗୁପ୍ତ ରହସ୍ୟକୁ ପିଥାଗୋରିୟନ୍‌ଙ୍କ ଗୁପ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ବାହାର ବ୍ୟକ୍ତିମାନଙ୍କୁ ବହିର୍ଗତ କରିବା !



ପିଥାଗୋରାସ୍
(569 ଖ୍ରୀ.ପୂ. – 479 ଖ୍ରୀ.ପୂ.)
ଚିତ୍ର 1.3

ଏହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ବିଧିବଦ୍ଧ ଭାବେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା।

ଏକ ସଂଖ୍ୟା ‘s’ କୁ *ଅପରିମୟ ସଂଖ୍ୟା* କୁହାଯାଏ, ଯେତେବେଳେ ସେହି ସଂଖ୍ୟାକୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ, ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ।

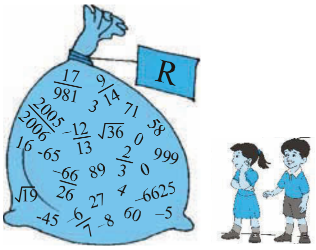
ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଥିବା ବିଷୟ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଅବଗତ ଅଛ । ସେହିପରି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଅସଂଖ୍ୟ ଥିବା ଆମେ ଜାଣିପାରିବା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ :

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଥରେ ମନେପକାଅ $\sqrt{\ }$ ଚିହ୍ନର ବ୍ୟବହାର ସମୟରେ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳକୁ ଧନାତ୍ମକ ରୂପେ ଧରିନେଉ । ତେଣୁ $\sqrt{4} = 2$ ରୂପେ ଲେଖିଲେ ମଧ୍ୟ $\sqrt{4}$ ର ପ୍ରକୃତ ବର୍ଗମୂଳ 2 ଓ –2 ।

ଉପରିସ୍ଥ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ ସଂଖ୍ୟା ସହ ତୁମେ ଆଗରୁ ପରିଚିତ ଅଛ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: ତୁମେମାନେ ଉପରେ ତାଲିକା ଭୁକ୍ତ ଅନେକ ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ π ଦେଖିଅଛ ।

$\sqrt{2}$ କୁ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ପିଥାଗୋରସ୍ ପ୍ରମାଣ କରିଥିଲେ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ପ୍ରାୟ ଖ୍ରୀ.ପୂ. 425 ରେ ସାଇରେନ୍ ଦେଶର ଥିଓଡାରାସ୍ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ ଏବଂ $\sqrt{17}$ ମଧ୍ୟ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିଥିଲେ । ତୁମେ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଶିଖିବ । π ସମ୍ପର୍କରେ ବିଭିନ୍ନ ସଂସ୍କୃତିର ଲୋକେ ହଜାର ହଜାର ବର୍ଷ ପୂର୍ବରୁ ଅବଗତ ଥିଲେ ଏବଂ 18 ଶତାବ୍ଦୀର ଶେଷରେ ହିଁ ଲାମ୍ବର୍ଟ୍ ଓ ଲେଜେଣ୍ଡ୍ରେଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଏହା 'ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା' ରୂପେ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଥିଲା । 0.10110111011110...ଏବଂ π ଗୁଡ଼ିକ କିପରି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ବିଭାଗରେ ଶିଖିବା ।



ପୂର୍ବ ବିଭାଗରେ ଆମେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିଥିବା ପ୍ରଶ୍ନକୁ ପୁଣି ଯିବା । ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ମୁଣିକୁ ମନେପକାଅ । ସମସ୍ତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସେହି ମୁଣିରେ ରଖିଲେ, ସଂଖ୍ୟା ରେଖା ଉପରେ ଆଉ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ବଳକା ରହିବ କି ? ନିଶ୍ଚୟ 'ନାହିଁ' । ଏହି ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସମୁଦାୟକୁ *ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା* ସମୁଦାୟ କୁହାଯାଏ, ଯାହାକୁ **R** ଅକ୍ଷର ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ । ତେଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ, **ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଥାଏ । ସେହିପରି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଏ ।** ତେଣୁ ଏହି ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାରେଖା କୁହାଯାଏ ।

1870 ରେ ଦୁଇଜଣ ଜର୍ମାନ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ କାଣ୍ଟର୍ ଏବଂ ଡେଡ୍‌କାଇଣ୍ଡ୍ ଏପରି କହିଥିଲେ : " *ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ଏବଂ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର ଅନୁରୂପ, ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଥାଏ*" ।

ଆର୍.ଡେଡ୍‌କାଇଣ୍ଡ (1831-1916)

ଚିତ୍ର 1.4

ଜି. କାଣ୍ଟର୍ (1845-1918)

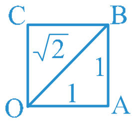
ଚିତ୍ର 1.5

APSCERT

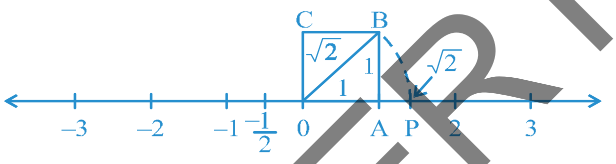
ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କେତୋଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କିପରି ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ଆସ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 3 : $\sqrt{2}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଚିହ୍ନଟକର ।

ସମାଧାନ : ଗ୍ରୀକ୍ ମାନେ $\sqrt{2}$ କୁ କିପରି ଆବିଷ୍କାର କଲେ ଜାଣିବା ସହଜ । ଧରିନିଅ OABC ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ଏକକ (ଚିତ୍ର 1.6 ଦେଖ) । ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ କିନ୍ତୁ $\sqrt{2}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କିପରି ଚିହ୍ନଟ କରିବା ? ଏହା ସହଜ କାମ । ଚିତ୍ର 1.6 ର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ '0' କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଥିବା O ସହ ଏକୀଭୂତ ହେବାପରି ରଖ (ଚିତ୍ର 1.7 ଦେଖ) ।



ଚିତ୍ର 1.6

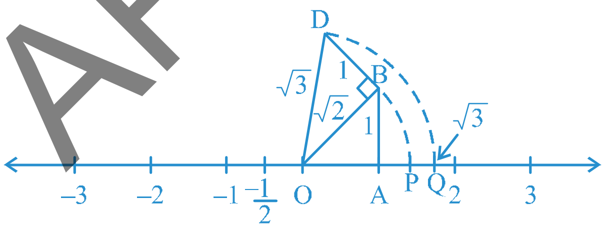


ଚିତ୍ର 1.7

ଆମେ ଜାଣୁଯେ, $OB = \sqrt{2}$ । ବୃତ୍ତଲେଖନୀ ସାହାଯ୍ୟରେ O କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି OB ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଚାପ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଛେଦନ ହେବାପରି ଅଙ୍କନକର । ତେବେ P ବିନ୍ଦୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ $\sqrt{2}$ କୁ ସୂଚିତ କରେ ।

ଉଦାହରଣ 4 : $\sqrt{3}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଚିହ୍ନଟକର ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 1.7 କୁ ପୁଣି ଥରେ ଦେଖ ।



ଚିତ୍ର 1.8

OB ପ୍ରତି 1 ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ **BD** ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର(ଚିତ୍ର 1.8 ପରି) । ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ

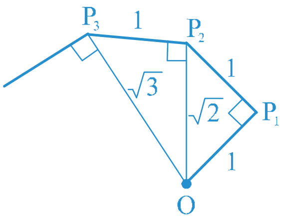
$OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, ବୃତ୍ତଲେଖନୀ ସାହାଯ୍ୟରେ **O** କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି **OD** ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଚାପ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ **Q** ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଛେଦନ ହେବାପରି ଅଙ୍କନକର । ତେବେ **Q** ବିନ୍ଦୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ $\sqrt{3}$ କୁ ସୂଚିତ କରେ ।

AP SCERT

ସେହିପରି, କୌଣସି ଏକ ଧନପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା n ହେଲେ, $\sqrt{n-1}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଚିହ୍ନଟ କରିବାପରେ ହିଁ $\sqrt{n}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1.2

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ନା ଅସତ୍ୟ ଜଣାଅ । ତୁମ ଉତ୍ତରର କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।
   (i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।
   (ii) ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ $\sqrt{m}$ ରୂପେ ଥାଏ, ଯେଉଁଠି m ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।
   (iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।
2. ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧନପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ଅପରିମେୟ ଅଟେ କି ? ଯଦି ନାହିଁ, ବର୍ଗମୂଳ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବାପରି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଏକ ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।
3. $\sqrt{5}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କିପରି ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ଦର୍ଶାଅ ।
4. **ଶ୍ରେଣୀଗୃହ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ: ("ବର୍ଗମୂଳ ସର୍ପିଳ" ଅଙ୍କନ କରିବା):**



ଚିତ୍ର 1.9 : ବର୍ଗମୂଳ ସର୍ପିଳ ଅଙ୍କନ

ଗୋଟିଏ ମୋଟା ବଡ଼ ଧରଣର କାଗଜ ନେଇ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୋପାନକୁ ଅନୁସରଣ କରି ବର୍ଗମୂଳ ସର୍ପିଳକୁ ଅଙ୍କନକର । 'O' ଠାରୁ ଆରମ୍ଭକରି 1 ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ OP_1 ଅଙ୍କନକର । OP_1 କୁ ଲମ୍ବରେ 1 ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ P_1P_2 ଅଙ୍କନକର (ଚିତ୍ର 1.9) । ବର୍ତ୍ତମାନ OP_2 କୁ ଲମ୍ବ ଭାବେ ରେଖାଖଣ୍ଡ P_2P_3 ଅଙ୍କନକର । ସେହିପରି OP_3 କୁ ଲମ୍ବ ଭାବେ ରେଖାଖଣ୍ଡ P_3P_4 ଅଙ୍କନକର । ଏହିପରି ଚାଲୁରଖି ଏକ ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ OP_{n-1} କୁ ଲମ୍ବ ଭାବେ ଅଙ୍କନ କଲେ ଆମେ $P_{n-1}P_n$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପାଇବା । ଏପରି $P_2P_3....P_n....$, ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଚିହ୍ନଟକରି ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକଲେ ଆମେ ଏକ ସୁନ୍ଦର ସର୍ପିଳ ପାଇବା, ଯାହା $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...$ କୁ ସୂଚିତ କରେ ।

1.3 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ଦଶମିକ ରୂପ

ଏହି ବିଭାଗରେ ଆମେ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ଭିନ୍ନ ଦିଗରୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା । ଆମେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣ ରୂପକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ଏବଂ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟସଂଖ୍ୟାକୁ ପୃଥକ୍ କରିବାକୁ ଏହି ବିସ୍ତାରଣ ରୂପ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବାକି ନାହିଁ ଦେଖିବା । ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣ ରୂପକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ କିପରି ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା । ଯେହେତୁ ଆମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ଅଧିକ ପରିଚିତ, ସେଗୁଡ଼ିକ ସହିତ ଆରମ୍ଭ କରିବା । ତିନୋଟି ଉଦାହରଣ ନେବା: $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$ ଏଗୁଡ଼ିକର ଭାଗଶେଷକୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଧ୍ୟାନ ଦେଇ ଦେଖ, କୌଣସି ସଂରଚନା ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲ କି!

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ ଏବଂ $\frac{1}{7}$ ଗୁଡ଼ିକର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ :

$10 \div 3$	$7 \div 8$	$1 \div 7$
3.333...	0.875	0.142857...
3 | 10	8 | 7.0	7 | 1.0
9	64	7
10	60	30
9	56	28
10	40	20
9	40	14
10	0	60
9		56
1		40
		35
		50
		49
		1
ଭାଗଶେଷ : 1, 1, 1, 1, 1... ଭାଜକ : 3	ଭାଗଶେଷ : 6, 4, 0 ଭାଜକ : 8	ଭାଗଶେଷ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1,... ଭାଜକ: 7

AP SCERT

ତୁମେ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲ ? ଅନ୍ତତଃ ତିନୋଟି ବିଷୟ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିଥିବ ।

(i) କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପର୍ଯ୍ୟାୟ ପରେ ଭାଗଶେଷ '0' ହୁଏ ନତୁବା ସେହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ହିଁ ପୁନରାବୃତ୍ତି ହୁଏ ।

(ii) ଭାଗଶେଷର ପୁନରାବୃତ୍ତି କ୍ରମରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଭାଜକ ଠାରୁ କମ୍ ହୋଇଥାଏ ।
(ଭାଜକ 3 ହେବାରୁ $\frac{10}{3}$ ରେ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଛି ଏବଂ ଭାଜକ 7 ହେବାରୁ $\frac{1}{7}$ ରେ ଏହାର ଭାଗଶେଷ ପୁନରାବୃତ୍ତି କ୍ରମରେ ଛଅଟି ସଂଖ୍ୟା ରହିଛି 326451).

(iii) ଭାଗଶେଷ ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଲେ ଭାଗଫଳରେ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସାମୂହିକ ପୁନରାବୃତ୍ତି ଘଟେ । ($\frac{10}{3}$ ର ଭାଗଫଳରେ 3 ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଛି ଏବଂ $\frac{1}{7}$ ର ଭାଗଫଳରେ 142857 ଗୁଡ଼ିକ ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଛି ।)

ଉପରିସ୍ଥ କେବଳ କେତୋଟି ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ଏହି ସଂରଚନା ଅଧ୍ୟୟନ କଲେ ମଧ୍ୟ ଏହା $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ରୂପରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ଅଟେ । p କୁ q ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରିବା ସମୟରେ ଆମେ ମୁଖ୍ୟତଃ ଦୁଇଟି ବିଷୟ ଲକ୍ଷ୍ୟକରୁ । ଭାଗଶେଷ ଶୂନ ହୁଏ କିମ୍ବା ଶୂନ ନହୋଇ ଏବଂ ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା କ୍ରମମିଳେ । ବିଭିନ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ନେଇ ଏହାକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଆସ ।

ପରିସ୍ଥିତି (i) : ଭାଗଶେଷ ଶୂନ ହେବା

$\frac{7}{8}$ ର ଉଦାହରଣରେ କେତେକ ସୋପାନ ପରେ ଭାଗଶେଷ ଶୂନ ହୁଏ ଏବଂ $\frac{7}{8}$ ଏହାର ଦଶମିକ ରୂପ $\frac{7}{8} = 0.875$ । ଅନ୍ୟ ଉଦାହରଣ $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ । ଏହି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣ କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୋପାନ ପରେ ସମାପ୍ତ ହୁଏ । ଏପରି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଦଶମିକ ରୂପକୁ *"ସସୀମ ଦଶମିକ"* କୁହାଯାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି (ii) : ଭାଗଶେଷ ଶୂନ ନହେବା

$\frac{10}{3}$ ଏବଂ $\frac{1}{7}$ ର ଉଦାହରଣରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୋପାନପରେ ଭାଗଶେଷଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ପୁନରାବୃତ୍ତି ହୋଇ ଏହାର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣ ମଧ୍ୟ ଚାଲୁ ରହୁଥାଏ । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରେ କହିଲେ, ଭାଗଫଳଟି ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସମୂହ ଅଟେ । ଏହିପରି ଦଶମିକ ରୂପକୁ *"ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ"* କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: $\frac{10}{3} = 3.3333...$ ଏବଂ $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$

ସାଧାରଣତଃ $\frac{10}{3}$ ର ଭାଗଫଳରେ 3 ଆବର୍ତ୍ତି ହେଉଥିବାରୁ ଏହାକୁ $3.\bar{3}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି $\frac{1}{7}$ ର ଭାଗଫଳରେ 142857 ଅଙ୍କ ସମୂହ ଆବର୍ତ୍ତ ହେଉଅଛି । ତେଣୁ $\frac{1}{7}$ କୁ $0.\overline{142857}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ସଂଖ୍ୟା ଉପରେ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ(ବାର୍) ଟାଣୁ, ଏହା ଆବର୍ତ୍ତ ହେଉଥିବା ଅଙ୍କ ସମୂହକୁ ସୂଚାଏ । ସେହିପରି $3.57272...$ କୁ $3.5\overline{72}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ତେଣୁ ଏହିସବୁ ଉଦାହରଣ ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକକୁ ସୂଚାଏ ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ କେବଳ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ହୋଇପାରେ । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା ସସୀମ ଦଶମିକ କିମ୍ବା ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ ।

ଅନ୍ୟପକ୍ଷରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ 3.142678 ସଂଖ୍ୟାଟି ଯାହାର ଦଶମିକ ରୂପ ସସୀମ ଅଟେ ଏବଂ 1.272727... ସଂଖ୍ୟାଟି $1.\overline{27}$ ଯାହାର ଦଶମିକ ରୂପ ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତ ଅଟେ । ତୁମେ ଏହାକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କହିପାରିବ କି ? ନିଶ୍ଚୟ ହଁ!

AP SCERT

ଏହାକୁ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ନାହିଁ, କିନ୍ତୁ କେତୋଟି ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ବୁଝିପାରିବା । ଏହା ସସୀମ ଦଶମିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 6 : 3.142678 କୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି ପ୍ରମାଣକର । ଅନ୍ୟପକ୍ଷରେ 3.142678 କୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶକର । ଯେଉଁଠି p, q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ।

ସମାଧାନ : ଆମେଜାଣୁ $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, ତେଣୁ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ7 : p , q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ହେଲେ $0.3333... = 0.\bar{3}$ କୁ $\frac{p}{q}$, ରୂପରେ ପ୍ରକାଶକର ।

ସମାଧାନ : $0.\bar{3}$ ର ମୂଲ୍ୟ ଆମେଜାଣିନାହୁଁ, ତେଣୁ ମନେକର ଏହା 'x' । ତେବେ

$$x = 0.\bar{3} = 0.3333...$$

$$10\,x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $3.3333... = 3 + x,\ x = 0.3333...$ତେଣୁ

ତେଣୁ, $10\,x = 3 + x$

$$9x = 3,\ \text{ଅର୍ଥାତ୍},\ x = \frac{1}{3}$$

ଉଦାହରଣ 8 : p , q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ହେଲେ $1.272727... = 1.\overline{27}$ କୁ $\frac{p}{q}$, ରୂପରେ ପ୍ରକାଶକର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $x = 1.272727...$ । ଏଠାରେ ଦୁଇଟି ଅଙ୍କ ଆବର୍ତ୍ତନ ହେଉଛି । ତେଣୁ x କୁ 100 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନକଲେ, $100\,x = 127.2727...$

ତେବେ, $100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

$$100\,x - x = 126,\ \text{i.e.},\ 99\,x = 126$$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

AP SCERT

ସେହିପରି ଏହାର ବିପରୀତ $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ ର ସଠିକତା ମଧ୍ୟ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ 9 : p, q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ହେଲେ $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ କୁ $\frac{p}{q}$, ରୂପେ ପ୍ରକାଶକର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $x = 0.2\overline{35}$ । ଲକ୍ଷ୍ୟକର, ଏଠାରେ 2 ଆବର୍ତ୍ତନ ହେଉନାହିଁ । କିନ୍ତୁ 35 ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଛି, ଆବର୍ତ୍ତନରେ ଦୁଇଟି ଅଙ୍କ ଅଛି । ତେଣୁ x କୁ 100 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ।

$$100\,x = 23.53535...$$

ତେବେ, $$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

ତେଣୁ, $$99\,x = 23.3$$

$$99\,x = \frac{233}{10},\quad x = \frac{233}{990}$$

ସେହିପରି ଏହାର ବିପରୀତ $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ ର ସଠିକତା ମଧ୍ୟ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବ ।

ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିପାରିଲେଯେ, ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ ଗୁଡ଼ିକୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ, ଯେଉଁଠି p, q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ । ଏହାର ଫଳାଫଳକୁ ନିମ୍ନମତେ କହିପାରିବା ।

"ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ସମୀମ ଦଶମିକ କିମ୍ବା ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ ହୁଏ । ସେହିପରି ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ସମୀମ କିମ୍ବା ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତିଦଶମିକ ହୁଏ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।"

ଆମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ସମ୍ପର୍କରେ ଜାଣିଲେ । ତେବେ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ କ'ଣ? । ଉପରିସ୍ଥ ନିୟମ ଅନୁସାରେ, ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ ବୋଲି ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିପାରିବା ।

"ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତି ଅଟେ । ସେହିପରି ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତି ହୁଏ ତାହା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।"

AP SCERT

ପୂର୍ବ ବିଭାଗରୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ ଯେ, $s = 0.10110111011110...$ ଏକ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ ଅଟେ । ତେଣୁ ଉପରିସ୍ଥ ନିୟମ ଅନୁସାରେ ଏହା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି s ଭଳି ଅସଂଖ୍ୟ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଇପାରିବ ।

ଆମ ସୁପରିଚିତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\sqrt{2}$ ଏବଂ π ର ବିଷୟରେ କ'ଣ କହିବା? ଏଠାରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପର୍ଯ୍ୟାୟ ଯାଏଁ ଏଗୁଡ଼ିକରେ ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣ ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଅଛି ।

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

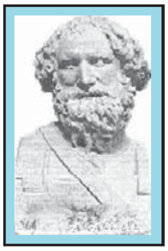
(**ମନେରଖ:** ସାଧାରଣତଃ $\frac{22}{7}$ କୁ π ର ଆସନ୍ନମାନ ରୂପେ ନିଆଯାଏ, କିନ୍ତୁ $\pi \neq \frac{22}{7}$)

ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣରେ ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ଅଙ୍କ ଯୋଡ଼ିବାକୁ ଗଣିତଜ୍ଞ ମାନେ ବିଭିନ୍ନ କୌଶଳ ବିକାଶ କରି ବହୁ ବର୍ଷରୁ ଚେଷ୍ଟାକରି ଆସୁଛନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଭାଗକ୍ରିୟା ପଦ୍ଧତିରେ $\sqrt{2}$ ର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ନିର୍ଣ୍ଣୟ ତୁମେ ଜାଣିଥିବ । ଆସକ୍ତିକର ବିଷୟ ଏହାଯେ, 800 BC - 500 BC ସମୟର ଏକ ବେଦ ଗାଣିତିକ ଗ୍ରନ୍ଥ ସୁଲ୍ଭ ସୂତ୍ର (ଜ୍ୟାର ନିୟମ)ରେ $\sqrt{2}$ ର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପଦ୍ଧତି ଦିଆଯାଇଛି ।

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ମୂଲ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପାଞ୍ଚଟି ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଠିକ୍ ଥିବା ଲକ୍ଷ୍ୟକର । π ର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାର ରୂପରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ ଏକ ଅତି ଚମତ୍କାର ଇତିହାସ ।

ସର୍ବ ପ୍ରଥମେ ଗ୍ରୀକ୍‌ର ମେଧା ସମ୍ପନ୍ନ ବ୍ୟକ୍ତି ଆର୍କମେଡ଼ିସ୍ π ର ଦଶମିକ ମାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣନା କରିଥିଲେ । ସେ ଦର୍ଶାଇଥିଲେଯେ, $3.140845 < \pi < 3.142857$ । ଭାରତୀୟ ବିଖ୍ୟାତ ଗଣିତଜ୍ଞ ଏବଂ ଖଗୋଳବିତ୍ ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟ (476 – 550 C.E.) π ର ମାନକୁ ଦଶମିକ ଚାରି ସ୍ଥାନ(3.1416) ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଶୋଧନ କରି ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିଥିଲେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଦ୍ରୁତଗତିରେ କାମ କରୁଥିବା କମ୍ପ୍ୟୁଟର ସାହାଯ୍ୟରେ π ର ମାନକୁ 1.24 ଟ୍ରିଲିଅନ୍ ଦଶମିକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରାଗଲା !



ଆର୍କମେଡ଼ିସ୍ (287 BCE – 212 BCE)

ଚିତ୍ର 1.10

ବର୍ତ୍ତମାନ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କିପରି ପାଇବା ଦେଖିବା ଆସ ।

ଉଦାହରଣ 10 : $\frac{1}{7}$ ଏବଂ $\frac{2}{7}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ । ତେଣୁ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ବୋଲି ଗଣନା କରିପାରିବା ।

$\frac{1}{7}$ ଏବଂ $\frac{2}{7}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାପାଇଁ ଆମେ ଏକ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା

AP SCERT

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । କିନ୍ତୁ ପ୍ରକୃତରେ ସେହିପରି ଅସଂଖ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ।
ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 0.150150015000150000...

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1.3

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଗୁଡ଼ିକୁ ଦଶମିକ ରୂପେ ଲେଖି ସେଗୁଡ଼ିକ କିପ୍ରକାର ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା ଜଣାଅ ।

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ବୋଲି ଆମେ ଜାଣୁ । $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ଗୁଡ଼ିକର ଦଶମିକ ରୂପକୁ ଭାଗକ୍ରିୟା ପଦ୍ଧତିରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆନ୍ଦାଜ କରି ଜାଣିପାରିବ କି ? ହେଲେ କିପରି ?
   (**ସୂଚନା :** $\frac{1}{7}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମୟରେ ପାଇବା ଭାଗଶେଷଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।)

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଗୁଡ଼ିକୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶକର, ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999 ....କୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର । ତୁମ ଉତ୍ତର ଦେଖି ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟ ହେଲ କି? ତୁମ ଉତ୍ତରଟି ଅର୍ଥପୂର୍ଣ୍ଣ କି ନୁହେଁ, ତୁମ ଶିକ୍ଷକ ଓ ସହପାଠୀଙ୍କ ସହ ଆଲୋଚନା କର ।

5. $\frac{1}{17}$ ର ଦଶମିକ ବିସ୍ତାରଣରେ ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଥିବା ଅଙ୍କ ସମୂହରେ ସର୍ବାଧିକ କେତୋଟି ଅଙ୍କ ଥାଏ ? ଭାଗକ୍ରିୟା ପ୍ରଣାଳୀରେ ତୁମ ଉତ୍ତରର ସଠିକତା ପରୀକ୍ଷାକର ।

6. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ରୂପରେ ଥିବା ବିଭିନ୍ନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଉଦାହରଣକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର, ଯେଉଁଠି p, q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ p, q ର 1 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନଥାଇ ଏହା ସସୀମ ଦଶମିକ ରୂପରେ ଥାଏ । ତେବେ କହିପାରିବ କି, q କେଉଁ ନିୟମକୁ ନିଶ୍ଚୟ ସଂତୃପ୍ତ କରୁଥିବ?

7. ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ଯାହାର ଦଶମିକ ରୂପ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତୀ ଅଟେ ।

8. $\frac{5}{7}$ ଏବଂ $\frac{9}{11}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ 3ଟି ପୃଥକ୍ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

9. ନିମ୍ନସ୍ଥଗୁଡ଼ିକୁ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ପୃଥକ୍ କରି ଲେଖ ।

   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

AP SCERT

1.4 ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା

ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରୁ ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଉଭୟ ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମ ବିନିମୟୀ, ସହଯୋଗୀ ଏବଂ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି । ଅଧିକନ୍ତୁ, ଯଦି ଆମେ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ କିମ୍ବା ଭାଗ(ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ)କଲେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହିଁ ପାଇଥାଉ(ଅର୍ଥାତ୍, ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ) । ସେହିପରି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମ ବିନିମୟୀ, ସହଯୋଗୀ ଏବଂ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପାଳନକରେ ବୋଲି କହିପାରିବା କି ? ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି, ପାର୍ଥକ୍ୟ, ଭାଗଫଳ ଏବଂ ଗୁଣଫଳଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏନାହିଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $(\sqrt{6})+(-\sqrt{6}), (\sqrt{2})-(\sqrt{2}), (\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3})$ ଏବଂ $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସହ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କିମ୍ବା ଗୁଣନ କଲେ କ'ଣ ହୁଏ ଦେଖିବା ଆସ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: $\sqrt{3}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ $2+\sqrt{3}$ ଏବଂ $2\sqrt{3}$ ଗୁଡ଼ିକ କ'ଣ ହେବ ? ଯେହେତୁ $\sqrt{3}$ ଏକ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା, $2+\sqrt{3}$ ଏବଂ $2\sqrt{3}$ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ତେଣୁ $2+\sqrt{3}$ ଏବଂ $2\sqrt{3}$ ଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 11: $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ ଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ କି ନାହିଁ, ପରୀକ୍ଷାକର ।

ସମାଧାନ: $\sqrt{5} = 2.236...,\ \sqrt{2} = 1.4142...,\ \pi = 3.1415...$

ତେବେ, $7\sqrt{5} = 15.652...,\ \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$

$\sqrt{2}+21 = 22.4142...,\ \pi-2 = 1.1415...$

ଏଗୁଡ଼ିକ ସମସ୍ତ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି । ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ, ହରଣ, ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ nତମ ମୂଳର ଗଣନାରେ ('n' କୌଣସି ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା) ସାଧାରଣତଃ କ'ଣ ହୁଏ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଦେଖିବା ଆସ ।

ଉଦାହରଣ 12 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ ଏବଂ $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ ଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକର ।

ସମାଧାନ : $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2}+\sqrt{2})+(5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 13 : $6\sqrt{5}$ କୁ $2\sqrt{5}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କର ।

ସମାଧାନ : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

ଉଦାହରଣ 14 : $8\sqrt{15}$ କୁ $2\sqrt{3}$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକର ।

ସମାଧାନ : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ଏହି ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ବାସ୍ତବ ତଥ୍ୟକୁ ବିଶ୍ୱାସ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟକରେ, **ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକସତ୍ୟ ଅଟେ** ।

(i) ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ଓ ପ୍ରଭେଦ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

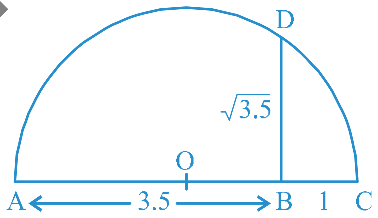
(ii) ଅଣ ଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ କିମ୍ବା ଭାଗଫଳ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

(iii) ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି, ପ୍ରଭେଦ, ଗୁଣଫଳ ଏବଂ ଭାଗଫଳ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଉପରେ ଦୃଷ୍ଟିଦେବା । ମନେପକାଅ, a ଏକ S~[ÿÓÓQ¿æ ÆBÔ $\sqrt{a} = b$ ହେଲେ $b^2 = a$ ଏବଂ $b > 0$ ହୁଏ । ଏହି ସଂଜ୍ଞା ସମସ୍ତ ଧନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇପାରେ ।

$a > 0$ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $\sqrt{a} = b$ ଅର୍ଥାତ୍ $b^2 = a$ ଏବଂ $b > 0$ ହୁଏ ।

1.2 ବିଭାଗରେ, n ଏକ ଧନପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $\sqrt{n}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ଶିଖିଲେ । ବର୍ତ୍ତମାନ x ଏକ ଧନ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $\sqrt{x}$ ର ମୂଲ୍ୟ ଜ୍ୟାମିତିକ ଭାବେ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଶିଖିବା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x = 3.5$ ହେଲେ $\sqrt{3.5}$ ର ମୂଲ୍ୟ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

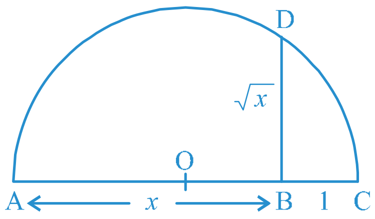


ଚିତ୍ର 1.11

ଦତ୍ତ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ସ୍ଥିରବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ 3.5 ଏକକ ଦୂରରେ B ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରିକି AB = 3.5 ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ହେବ (ଚିତ୍ର 1.11) । B ଠାରୁ 1 ଏକକ ଦୂରରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ନୂତନ ବିନ୍ଦୁ C ଚିହ୍ନଟକର । AC ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରି ତାହାକୁ O ରୂପେ ନାମିତକର । O କୁ କେନ୍ଦ୍ରରୂପେ ନେଇ OC ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନକର । AC ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଓ B ଦେଇ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ D ଠାରେ ଛେଦନ କରୁଥିବା ଏକ ଲମ୍ବରେଖା ଅଙ୍କନକର । ତେବେ BD = $\sqrt{3.5}$ ।

AP SCERT

ସାଧାରଣତଃ କୌଣସି ଏକ ଧନ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା x ର $\sqrt{x}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାପାଇଁ $AB = x$ ହେବାପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ B ଚିହ୍ନଟକର, ଚିତ୍ର 1.12 ଦର୍ଶାଇଲାଭଳି $BC = 1$ ଏକକ ନେଇ C ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟକର । $x = 3.5$ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟରଖି $BD = \sqrt{x}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରିବା (ଚିତ୍ର 1.16 ଦେଖ) । ଏହାର ମୂଲ୍ୟକୁ ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣକରିବା ।



ଚିତ୍ର 1.12

1.12 ଚିତ୍ର ଅନୁଧ୍ୟାନକଲେ ΔOBD ଏକ ସମକୋଣ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ବୃତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\frac{x+1}{2}$ ଏକକ ।

ତେଣୁ, $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ ଏକକ

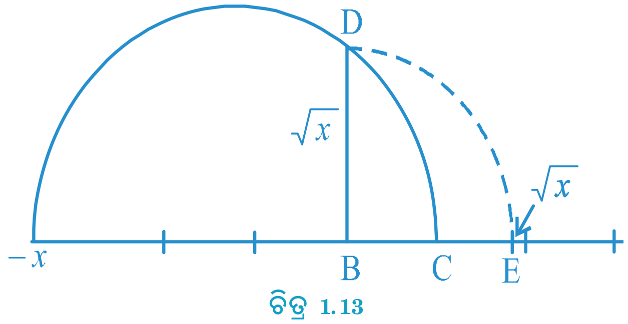
ବର୍ତ୍ତମାନ, $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

ତେଣୁ ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

ଏହା $BD = \sqrt{x}$ କୁ ସୂଚାଉଛି ।

ଏହି ଅଙ୍କନଟି $x > 0$ ହେଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାର $\sqrt{x}$ ଥାଏ ବୋଲି ଚିତ୍ର ଓ ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରିବାର ପ୍ରମାଣ କରୁଛି । ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ $\sqrt{x}$ ର ସ୍ଥାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାପାଇଁ BC କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ରୂପେ ନିଅ, ଯେଉଁଠି B ଶୂନ ଓ C ଏକଠାରେ ଚିହ୍ନଟ ହେବ । B କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି BD ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନକର ଯାହା ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦନକରିବ । (ଚିତ୍ର 1.13 ଦେଖ) । ବର୍ତ୍ତମାନ E ବିନ୍ଦୁଟି $\sqrt{x}$ ସୂଚିତ କରେ ।



ଚିତ୍ର 1.13

AP SCERT

ବର୍ତ୍ତମାନ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରିବା ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଆମେ ଘନମୂଳ, ଚତୁର୍ଥମୂଳ ଏବଂ ସେହିପରି ସାଧାରଣତଃ nତମ ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରିବା । ଯେଉଁଠି n ଏକ ଧନପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଥିବା ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ମନେପକାଅ ।

$\sqrt[3]{8}$ ର ଅର୍ଥ କ'ଣ? 8 କୌଣସି ଏକ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ହୋଇଥିବା ବିଷୟ ଆମେ ଜାଣିଛୁ ଏବଂ ତୁମେ ଅନୁମାନ କରିପାରିଥିବ ଯେ $\sqrt[3]{8} = 2$ ହୁଏ । $\sqrt[5]{243}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟାକର । ତୁମେ ଜାଣ କି, କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟା b ପାଇଁ $b^5 = 243$ ହୁଏ ବୋଲି? ସମାଧାନ 3, ତେଣୁ $\sqrt[5]{243} = 3$ ହୁଏ ।

ଏହି ଉଦାହରଣରୁ ତୁମେ, କୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା $a > 0$ ଏବଂ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $\sqrt[n]{a}$ କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ କି?

ମନେକର $a > 0$ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ n ଏକ ଧନପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । $\sqrt[n]{a} = b$ ହେଲେ $b^n = a$ ଏବଂ $b > 0$ ହୁଏ । ମନେରଖ $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ ଇତ୍ୟାଦିରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥିବା '$\sqrt{\ }$' ସଙ୍କେତକୁ *ରାଡ଼ିକାଲ୍ ସଙ୍କେତ* କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ବର୍ଗମୂଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତୋଟି ଅଭେଦ ଦେଖିବା ଯାହା ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବହୁ ଉପଯୋଗୀ ଅଟେ । କେତେକ ଅଭେଦ ତୁମେ ନିମ୍ନଶ୍ରେଣୀରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛ । ଅବଶିଷ୍ଟ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗକ୍ରିୟା ଉପରେ ଗୁଣନର ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ଏବଂ $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ଅଭେଦରୁ ଜାଣିପାରିବା, ଯେଉଁଠି x, y ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା । ମନେକର a, b ଗୁଡ଼ିକ କୌଣସି ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା । ତେବେ

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

ଏହି ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 15 : ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର ।

(i) $\left(5 + \sqrt{7}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)$

AP SCERT

ସମାଧାନ : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

ସୂଚନା: ଏହି ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରେ "ସରଳକରିବା" ଅର୍ଥ ଏହାଯେ, ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ଲେଖିବା ।

ନିମ୍ନ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରି ଏହି ବିଭାଗ ସମାପ୍ତକରିବା । $\frac{1}{\sqrt{2}}$ କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର । ଏହାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ କେଉଁଠାରେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ କହିପାରିବ କି? ତୁମେ ଜାଣିଛଯେ, ଏହା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଏହାର ହର ଯଦି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଏହା ସହଜ ହୋଇପାରେ । ଆମେ ଏହାର ହରକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିପାରିବା କି? ଅର୍ଥାତ୍ ହରକୁ ପରିମେୟ କରିବା । ଏଥିପାଇଁ ଆମେ ବର୍ଗମୂଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରିବା । କିପରି ? ଆସ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 16 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ର ହରକୁ ପରିମେୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବର୍ତ୍ତମାନେ ଆମେ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ସହ ସମାନ ହେବା ସମତୁଲ ପରିପ୍ରକାଶ ଲେଖିବା ଯାହାର ହର ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ଆମେ ଜାଣୁ, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମୟ ସଂଖ୍ୟା । $\frac{1}{\sqrt{2}}$ କୁ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ସହ ଗୁଣନ କଲେ ଆମେ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ର ସମତୁଲ ପରିପ୍ରକାଶ ପାଇବା । ଯେହେତୁ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ । ତେବେ , ଏହି ଦୁଇଟି ସତ୍ୟ ତଥ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$$

ଏହି ରୂପେ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିବା ସହଜ । ଏହା 0 ଏବଂ $\sqrt{2}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହୋଇଥାଏ ।

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 17 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ର ହରକୁ ପରିମେୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଅଭେଦ (iv) ବ୍ୟବହାର କରି $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ କୁ $2-\sqrt{3}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ ଏବଂ ଭାଗକଲେ

$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$ ପାଇବା ।

ଉଦାହରଣ 18 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ର ହରକୁ ପରିମେୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଅଭେଦ (iii) ବ୍ୟବହାର କରି

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ଉଦାହରଣ 19 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ହରକୁ ପରିମେୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

ଯଦି ଗୋଟିଏ ପରିପ୍ରକାଶରେ ଏକ ବର୍ଗମୂଳ (କିମ୍ବା ରାଡ଼ିକାଲ୍ ସଙ୍କେତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟା) ପଦ ହୋଇଥିଲେ, ଏହାର ହରକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ଲେଖି ସମତୁଲ ପରିପ୍ରକାଶରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଯିବା ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ପରିମେୟକରଣ(ହରକୁ ପରିମେୟ କରିବା) କୁହାଯାଏ ।

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1.4

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ପୃଥକ୍ କରିଲେଖ ।

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ ସରଳକର ।

(i) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$ (ii) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ (iv) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

3. ମନେପକାଅ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ପରିଧି(c) ଏବଂ ଏହାର ବ୍ୟାସ (d) ର ଅନୁପାତକୁ π ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇଛି । ଅର୍ଥାତ୍ $\pi = \frac{c}{d}$ । ତେବେ π କୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କହିବା ଏକ ବିରୋଧାଭାସ । ଏହି ବିରୋଧତାକୁ ତୁମେ କିପରି ସମାଧାନ କରିବ ?

4. $\sqrt{9.3}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଦର୍ଶାଅ ।

5. ହରଗୁଡ଼ିକୁ ପରିମେୟ କର ।

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାର ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ :

ନିମ୍ନସ୍ଥଗୁଡ଼ିକୁ କିପରି ସରଳକରିବା କହିପାରିବ କି?

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

ତୁମେ ଏହି ସମାଧାନ ପାଇଲକି?

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

ଏହି ସମାଧାନ ପାଇବାକୁ ତୁମେ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଥିବା ନିମ୍ନ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରିଥିବ । (ମନେରଖ, ଯେଉଁଠି a, n ଏବଂ m ଗୁଡ଼ିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, 'a' କୁ ଆଧାର, m ଓ n ଘାତ କୁହାଯାଏ ।)

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

AP SCERT

$(a)^0$ ର ଅର୍ଥ କ'ଣ? ହଁ, ଏହା 1 ଅଟେ! ତେଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ ଯେ $(a)^0 = 1$ । ତେଣୁ (iii)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ପାଇବା । ଏହି ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ଋଣ ଘାତବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ କରିପାରିବା ।

ତେବେ, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

ମନେକର ଆମେ ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣନା କରିବା ।

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ଏଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କିପରି କରାଯିବ ? ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ଅନୁସରଣ କରି ସମାଧାନ କରାଯାଏ । ଯେଉଁଠି ଆଧାର ଏକ ଧନ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଘାତ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ(ଘାତ ମଧ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଏହି ନିୟମ କିପରି ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହେବ ତାହା ପରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ) । ଏହି ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ କହିବା ଏବଂ ବ୍ୟବହାର କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ପ୍ରଥମେ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । କ'ଣ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ? ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $4^{\frac{3}{2}}$ । ଏଠାରେ ଆମେ କିଛି କରିବାକୁ ହେବ?

ଆମେ ଏକ ଧନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ପାଇଁ $\sqrt[n]{a}$ କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିଥିଲେ ।

ମନେକର $a > 0$, a ଏକ ଧନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ n ଏକ ଧନ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, $b > 0$ ଏବଂ $b^n = a$ ହେଲେ $\sqrt[n]{a} = b$ ହୁଏ ।

ଘାତାଙ୍କ ଭାଷାରେ, ଏହାକୁ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରୁ । ତେଣୁ, ଏହାକୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ରୂପେ ଲେଖୁ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $4^{\frac{3}{2}}$ କୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ବ୍ୟକ୍ତ କରିଥାଉ ।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

AP SCERT

ତେବେ, ନିମ୍ନସ୍ଥ ଆମର ଦୁଇଟି ସଂଜ୍ଞା ଯଥା:

ମନେକର $a > 0$ ଏକ ଧନ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଉଭୟ m ଓ n ର 1 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଉତ୍ପାଦକ ନଥିବା ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $n > 0$ ହେଲେ

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଅନ୍ୟ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖିବା ।

$a > 0$ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ଏବଂ p ଓ q ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ପୂର୍ବ କେତୋଟି ପ୍ରଶ୍ନକୁ ଏହି ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ଅନୁସରଣକରି ସମାଧାନ କରିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ 20 : ସରଳକର (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ସମାଧାନ :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1.5

1. (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

2. (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

3. ସରଳକର : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

4. $8^{7} - 8^{-7}$

(A) 0 (B) 8^{14} (C) 8^{-49} (D) କୌଣସିଟି ନୁହେଁ

AP SCERT

5. ନିମ୍ନ କେଉଁ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ?

A) $3^{40} + 3^{20} = 3^{40+20}$

B) $3^{12} \times 3^{10} = 3^{12\times10}$

C) $3^{14} + 4^{14} = (3+4)^{14}$

D) $3^{20} \times 3^{2} = (3^{2})^{11}$

1.6 ମୁଖ୍ୟାଂଶ :

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ନିମ୍ନ ଅଂଶଗୁଡ଼ିକ ଅଧ୍ୟୟନ କଲ ।

1. 'r' କୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ, ଯେଉଁଠି 'r' କୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ।

2. ଏକ ସଂଖ୍ୟା 's' କୁ ଅପରିମୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ, ଯେଉଁଠି ସେହି ସଂଖ୍ୟାକୁ $\frac{p}{q}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେନାହିଁ, ଯେଉଁଠି p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ।

3. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ସସୀମ ଦଶମିକ କିମ୍ବା ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ ହୁଏ । ସେହିପରି ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ସସୀମ ଦଶମିକ କିମ୍ବା ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତ ଦଶମିକ ହୁଏ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

4. ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତ ଅଟେ । ସେହିପରି ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ ଅସୀମ ଅଣଆବର୍ତ୍ତ ହୁଏ ତାହା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

5. ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସମୁଦାୟ ହେଉଛି ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ।

6. r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ s ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, $r + s$ ଏବଂ $r - s$ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ rs ଏବଂ $\frac{r}{s}$ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ଯେଉଁଠି $r \neq 0$ ।

7. a ଏବଂ b ଧନ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ନିମ୍ନ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ଲାଗୁହୁଏ ।

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

8. $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$ ର ହରକୁ ପରିମେୟ କରିବାପାଇଁ ଏହାକୁ ଆମେ $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନକରୁ । ଯେଉଁଠି a ଏବଂ b ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ।

9. $a > 0$ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ p , q ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

AP SCERT

ଅଧ୍ୟାୟ 2

ବହୁପଦୀ

2.1 ଉପକ୍ରମ

ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବିଷୟରେ ଶିକ୍ଷା ଲାଭ କରିଅଛ । ଏହା ବ୍ୟତୀତ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଲାଭ କରିଅଛ । କେତୋଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦକୁ ମନେ ପକାଅ ।

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

ଏବଂ $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିର ବ୍ୟବହାରକୁ ମନେ ପକାଅ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପ୍ରକାର ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଏବଂ ତତ୍‌ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପଦାବଳୀର ଶିକ୍ଷା ଲାଭ କରିବା ଯାହାକୁ ବହୁପଦୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ବହୁପଦୀ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଏବଂ ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟର ବ୍ୟବହାର ସମ୍ପର୍କୀୟ ଜ୍ଞାନ ଆମେ ଲାଭ କରିବା । ତତ୍‌ସଙ୍ଗେସଙ୍ଗେ ଉପରୋକ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କେତୋଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଏବଂ ମୂଲ୍ୟାୟନର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ପର୍କୀୟ ଜ୍ଞାନ ଅର୍ଜନ କରିବା ।

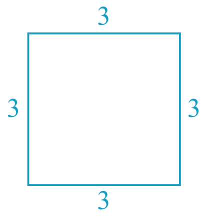
2.2 ଏକ ଚଳରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ

ଆମେ ଜାଣୁଯେ ଗୋଟିଏ ଚଳରାଶିକୁ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ ଏକ ସଂକେତ (ଅକ୍ଷର) ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ଚଳରାଶି ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ଧାରଣ କରିଥାଏ । ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ଚଳରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ x, y, z ଅକ୍ଷର ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ ଇତ୍ୟାଦି ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଅଟେ । ସମସ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (ଗୋଟିଏ ସ୍ଥିରରାଶି) $\times x$ ରୂପେ ରହିଥାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଗୋଟିଏ ପରିପ୍ରକାଶ ଲେଖିବା ଯାହାକି (ଗୋଟିଏ ସ୍ଥିରରାଶି) $\times$ (ଗୋଟିଏ ଚଳରାଶି) ରୂପେ ରହିଥାଏ । ଏଥିରେ ସ୍ଥିରରାଶିଟି କ'ଣ ହୋଇପାରେ ଆମେ ଜାଣିନଥାଉ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ ଆମେ ସ୍ଥିରରାଶି ବଦଳରେ a, b, c ଲେଖିଥାଉଁ । ତେଣୁ ପରିପ୍ରକାଶଟି ax ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ତଥାପି ସ୍ଥିରରାଶି ଓ ଚଳରାଶିକୁ ସୂଚାଉଥିବା ଅକ୍ଷର ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ରହିଥାଏ । ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିସ୍ଥିତିରେ ସ୍ଥିରରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୋଇନଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ସମସ୍ୟାରେ ସ୍ଥିରରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ । କିନ୍ତୁ ଚଳରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୋଇପାରେ ।

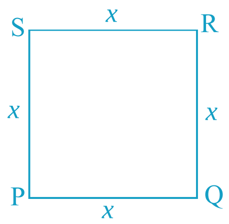
APSCERT

ବର୍ତ୍ତମାନ 3 ଏକକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ନିଆଯାଉ । (ଚିତ୍ର 2.1ଦେଖ) । ଏହାର ପରିସୀମା କେତେ ? ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ଚାରୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ପରିସୀମାକୁ ସୂଚାଏ ବୋଲି ତୁମେ ଜାଣ । ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ 3 ଏକକ ବିଶିଷ୍ଟ ଏଣୁ ପରିସୀମା 4×3, ଅର୍ଥାତ୍ 12 ଏକକ । 10 ଏକକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା କେତେ ହେବ ? 4×10 ଏକକ ଅର୍ଥାତ୍ 40 ଏକକ । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏକକ ହୁଏ (ଚିତ୍ର 2.2), ତେବେ ପରିସୀମା $4x$ ଏକକ । ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଲେ ପରିସୀମା ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର 2.1

PQRS ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ କି ? ଏହା $x \times x = x^2$ ବର୍ଗ ଏକକ । x^2 ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ । ସେହିଭଳି $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ଇତ୍ୟାଦି ଆମେ ଜାଣିଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ପରିପ୍ରକାଶ । ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସବୁ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଚଳରାଶିର ଘାତ ଅଖଣ୍ଡସଂଖ୍ୟା ହିଁ ଅଟେ । ଏହି ରୂପେ ଥିବା ସମସ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ ଏକଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ । ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରେ ଚଳରାଶି ହେଉଛି x । $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ହେଉଛି x ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ । ସେହିପରି $3y^2 + 5y$ ହେଉଛି y ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ ଏବଂ $t^2 + 4$ ହେଉଛି t ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ ।



ଚିତ୍ର 2.2

$x^2 + 2x$ ବହୁପଦୀରେ x^2 ଏବଂ $2x$ କୁ **ପଦ** କୁହାଯାଏ । ସେହିଭଳି $3y^2 + 5y + 7$ ବହୁପଦୀରେ ତିନୋଟି ପଦ $3y^2$, $5y$ ଓ 7 ଅଛି । ତୁମେ $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ବହୁପଦୀରେ ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖିପାରିବ କି ? ଏହି ବହୁପଦୀରେ 4ଟି ପଦ $-x^3$, $4x^2$, $7x$ ଏବଂ -2 ରହିଛି ।

ବହୁପଦୀରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ **ସହଗ** ରହିଥାଏ । $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ରେ x^3 ର ସହଗ -1, x^2 ର ସହଗ 4, x ର ସହଗ 7, x^0 ର ସହଗ -2 ଅଟେ । ($x^0 = 1$ ବୋଲି ମନେରଖ) । $x^2 - x + 7$ ରେ x ର ସହଗ କେତେ ? -1 ଅଟେ ।

2 ମଧ୍ୟ ଏକ ବହୁପଦୀ ଅଟେ । ବାସ୍ତବରେ 2, -5, 7... ଇତ୍ୟାଦି ସ୍ଥିର ବହୁପଦୀର ଉଦାହରଣ । ସ୍ଥିର ବହୁପଦୀ '0' କୁ **ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀ** କୁହାଯାଏ । ସମସ୍ତ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକର ସମୂହରେ ଏହା ମୁଖ୍ୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରେ । ଏହି ବିଷୟରେ ତୁମେ ଉଚ୍ଚ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ ଓ $\sqrt[3]{y}+y^2$ କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର । ତୁମେ ଜାଣ ଯେ $x+\frac{1}{x} = x + x^{-1}$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ଏଠାରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦର ଅର୍ଥାତ୍ x^{-1} ର ଘାତ -1, ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ, ତେଣୁ ଏହି ପରିପ୍ରକାଶଟି ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ପୁଣି $\sqrt{x} + 3$ କୁ $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ଏଠାରେ x ର ଘାତ $\frac{1}{2}$, ଯାହା ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ । ତେଣୁ $\sqrt{x} + 3$ ବହୁପଦୀ କି ? ନା, ନୁହେଁ । ତେବେ $\sqrt[3]{y} + y^2$ କଣ ହେବ ? ଏହା ମଧ୍ୟ ବହୁପଦୀ ହେବ ନାହିଁ । (କାହିଁକି ?)

AP SCERT

ଯଦି ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ x ଚଳରାଶିକୁ ନେଇ ଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ବହୁପଦୀଟିକୁ $p(x)$ କିମ୍ବା $q(x)$ କିମ୍ବା $r(x)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : ଆମେ ଏହିଭଳି ଲେଖିପାରିବା ।

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ଏକ ବହୁପଦୀରେ ଯେକୌଣସି(ସୀମିତ) ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ରହିପାରେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ ଏହା ଏକ ବହୁପଦୀ ଯାହାର 151ଟି ପଦ ରହିଛି ।

$2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ ଏବଂ u^4 ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଧରିନିଆଯାଉ । ଏହି ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ପଦ ରହିଥିବାର ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲ କି ? କେବଳ ଏକମାତ୍ର ପଦ ରହିଥିବା ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଏକପଦୀ (monomials) କୁହାଯାଏ । (mono) ମାନେ 1 କୁ ବୁଝାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$p(x) = x + 1,\quad q(x) = x^2 - x,\quad r(y) = y^9 + 1,\quad t(u) = u^{15} - u^2$

ଏହି ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକରେ କେତୋଟି ଲେଖାଏଁ ପଦ ଅଛି ? ପ୍ରତି ବହୁପଦୀରେ କେବଳ ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ପଦ ଅଛି । ଏହିଭଳି ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ପଦ ରହୁଥିବା ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଦ୍ୱିପଦୀ (ଦ୍ୱି ମାନେ ଦୁଇ) କୁହାଯାଏ ।

ସେହିଭଳି ତିନୋଟି ଲେଖାଏଁ ପଦ ରହିଥିବା ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ତ୍ରିପଦୀ (ତ୍ରି ମାନେ ତିନି) କୁହାଯାଏ । କେତୋଟି ତ୍ରିପଦୀର ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

$p(x) = x + x^2 + \pi,\quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2,$

$r(u) = u + u^2 - 2,\quad t(y) = y^4 + y + 5.$

ବର୍ତ୍ତମାନ $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ବହୁପଦୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର । x ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତ ଥିବା ପଦଟି କଣ ? ଏହା $3x^7$ । ଏହି ପଦରେ x ର ଘାତ 7 । ସେହିପରି $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ ରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତ ଥିବା ପଦଟି $5y^6$ । ଏଠାରେ y ର ଘାତ 6 । ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀର ଚଳରାଶିର ସର୍ବାଧିକ ଘାତକୁ ସେହି ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ 7 ଏବଂ $5y^6 - 4y^2 - 6$ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ 6 । **ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସ୍ଥିର ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ ଶୂନ ଅଟେ ।**

ଉଦାହରଣ 1 : ନିମ୍ନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

ସମାଧାନ : (i) ଚଳରାଶିର ସର୍ବାଧିକ ଘାତ 5 । ତେଣୁ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ 5 ।

(ii) ଚଳରାଶିର ସର୍ବାଧିକ ଘାତ 8 । ତେଣୁ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ 8 ।

(iii) ଏଠାରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ପଦ 2 ଦତ୍ତ ଅଛି । ଯାହାକୁ $2x^0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ତେଣୁ x ର ଘାତ 0 । ତେଣୁ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ '0' ।

AP SCERT

ବର୍ତ୍ତମାନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର । $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ ଏବଂ $s(u) = 3 - u$ । ଏଗୁଡ଼ିକରେ ତୁମେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଲକ୍ଷଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲ କି ? ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ ହେଉଛି 1 । ପରିମାଣ 1 ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ରୈଖିକ ବା ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ । କେତୋଟି ରୈଖିକ ବହୁପଦୀ ଯଥା : $2x - 1$, $\sqrt{2}\,y + 1$, $2 - u$ । ବର୍ତ୍ତମାନ x ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ତିନୋଟି ପଦ ରହୁଥିବା ଏକ ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର । ତୁମେ ପାରିବ ନାହିଁ । କାରଣ x କୁ ନେଇ ଗୋଟିଏ ରୈଖିକ ପଦର ସର୍ବାଧିକ ଦୁଇଟି ପଦ ରହିଥାଏ । ତେଣୁ x ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରୈଖିକ ବହୁପଦୀର ସାଧାରଣ ରୂପ $ax + b$ ରୂପେ ରହିଥାଏ । ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b ସ୍ଥିରପଦ, $a \neq 0$ (କାହିଁକି ?) ସେହିଭଳି $ay + b$, y ର ଗୋଟିଏ ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀ ।

ନିମ୍ନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଧରିନିଆଯାଉ :

$2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 ଏବଂ $x^2 + \frac{2}{5}x$

ଏଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ '2' ବୋଲି କହିପାରିବ କି ? ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ 2 ତାହାକୁ ବର୍ଗ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ । କେତେକ ବର୍ଗ ବହୁପଦୀର ଉଦାହରଣ ଯଥା : $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ ଏବଂ $6 - y - y^2$ । ଚାରୋଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ପଦ ରହିଥିବା ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ବହୁପଦୀକୁ ତୁମେ ଲେଖିପାରିବ କି ? ତୁମେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ବହୁପଦୀର ସର୍ବାଧିକ ତିନୋଟି ପଦ ହିଁ ରହିଥାଏ । ତୁମେ ଯଦି କେତୋଟି ବର୍ଗ ବହୁପଦୀର ତାଲିକା ପ୍ରସ୍ତୁତ କର, ତୁମେ ପାଇବ ଯେ x ଚଳରାଶିର ଯେକୌଣସି ବର୍ଗ ବହୁପଦୀ $ax^2 + bx + c$ ରୂପେ ରହିଥାଏ । ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ ଏବଂ a, b, c ସ୍ଥିରପଦ । ସେହିଭଳି y ଚଳରାଶିର ଯେକୌଣସି ବର୍ଗ ବହୁପଦୀ $ay^2 + by + c$ ରୂପେ ରହିଥାଏ । ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ ଏବଂ a, b, c ସ୍ଥିରପଦ ।

ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ 3 ତାହାକୁ ଘନ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ । x ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଘନ ବହୁପଦୀର ଉଦାହରଣ ଯଥା : $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ । ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଘନ ବହୁପଦୀର କେତୋଟି ପଦ ରହିଥାଏ ବୋଲି ତୁମେ ଭାବୁଛ ? ଏହାର ସର୍ବାଧିକ 4ଟି ପଦ ରହିପାରିବ । ଏହାକୁ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବ । ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$, a, b, c, d ସ୍ଥିରପଦ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ଦେଖିଲ ଯେ ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ 1,ପରିମାଣ 2,ପରିମାଣ 3 ର ରୂପ କିଭଳି ଥାଏ? ଗୋଟିଏ ଚଳରାଶିକୁ ନେଇ n ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ତୁମେ ଲେଖିପାରିବ କି ? (ଯେଉଁଠାରେ n ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।) x କୁ ନେଇ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ n କୁ ନିମ୍ନ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ଏଠାରେ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ଇତ୍ୟାଦି ସ୍ଥିରପଦ ଏବଂ $a_n \neq 0$ ।

ଯଦି $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (ସମସ୍ତ ସ୍ଥିରରାଶି '0') ତେବେ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀ ପାଇବା । ଯାହାକୁ '0' ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ କଣ ହୋଇପାରେ ? ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ଅଟେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କେବଳ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ ବିଷୟରେ ଆମେ ଶିଖିଲେ । ଏକାଧିକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ ମଧ୍ୟ ଆମେ ଦେଖିବାକୁ ପାଇବା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $x^2 + y^2 + xyz$ (ଏଠାରେ x, y, z ଚଳରାଶି) ଯାହା 3 ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ । ସେହିପରି $p^2 + q^{10} + r$ (ଏଠାରେ p, q, r ଚଳରାଶି), $u^3 + v^2$ (ଏଠାରେ u, v ଚଳରାଶି) ଯଥାକ୍ରମେ 3 ଏବଂ 2 ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ । ଏହିଭଳି ବହୁପଦୀ ବିଷୟରେ ତୁମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ପ୍ରାଞ୍ଜଳଭାବେ ଶିକ୍ଷା ଲାଭ କରିପାରିବ ।

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.1

1. ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ ଏବଂ କେଉଁଟି ନୁହେଁ ? ତୁମ ଉତ୍ତର ସପକ୍ଷରେ କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁପଦୀରେ x^2 ର ସହଗ ଲେଖ ।

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିପଦୀ ଏବଂ 100 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଏକପଦୀର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

4. ନିମ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ ଲେଖ ।

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. ନିମ୍ନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ରୈଖିକ, ବର୍ଗ ଏବଂ ଘନ ବହୁପଦୀ ରୂପେ ବର୍ଗୀକରଣ କର ।

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

6. ଯଦି $P(x) = 2x^6 + 7x^5 + 3$ ଏବଂ $Q(x) = 7x^5 + x^3 + 1$ ଗୁଡ଼ିକ ବହୁପଦୀ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $P(x) + Q(x)$ର ପରିମାଣ ହେଉଛି

(A) 11 (B) 6 (C) 8 (D) 19

2.3 ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ

ଧରିନିଅ ବହୁପଦୀ $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

ଯଦି $p(x)$ ର ସମସ୍ତ ପଦରେ x ବଦଳରେ 1 ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ତେବେ ଆମେ ପାଇବା

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

ତେବେ ଆମେ କହିବା ଯେ $x = 1$ ଠାରେ $p(x)$ ର ମୂଲ୍ୟ 4 ।

ସେହିପରି, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$$= -2$$

ତୁମେ $p(-1)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ କି ?

ଉଦାହରଣ 2: ନିମ୍ନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକରେ ଚଳରାଶିର ସୂଚିତ ମୂଲ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ବହୁପଦୀର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7,\ x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11},\ y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6,\ t = a$

AP SCERT

ସମାଧାନ : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

x ବଦଳରେ 1 ସ୍ଥାପନ କଲେ $p(x)$ ର ମୂଲ୍ୟ

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

y ବଦଳରେ 2 ସ୍ଥାପନ କଲେ $q(y)$ ର ମୂଲ୍ୟ

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

t ବଦଳରେ a ସ୍ଥାପନ କଲେ $p(t)$ ର ମୂଲ୍ୟ

$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

ବର୍ତ୍ତମାନ $p(x) = x - 1$ନିଆଯାଉ ।

$p(1)$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେବ ? ଟିପିରଖ $p(1) = 1 - 1 = 0$ ।

ଯେହେତୁ $p(1) = 0$, ତେବେ ଆମେ କହୁ $p(x)$ ର 1 ହେଉଛି ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ।
ସେହିପରି ତୁମେ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବ ଯେ, ଯଦି $q(x) = x - 2$ ତେବେ 2, $q(x)$ର ଏକ ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ।

ସାଧାରଣତଃ ଆମେ କହୁ ଯେ $p(x)$ ରେ $p(c) = 0$ ହେଲେ c କୁ $p(x)$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ବହୁପଦୀ $x - 1$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ପାଇବାକୁ ହେଲେ $x - 1$ କୁ 0 ସହ ସମାନ କରିବା ଉଚିତ । ଅର୍ଥାତ୍ $x - 1 = 0$ ହେଲେ $x = 1$। ଏଠାରେ ଆମେ $p(x) = 0$ କୁ ବହୁପଦୀର ସମୀକରଣ ବୋଲି ଏବଂ 1 କୁ ଏହାର ଉପାଦାନ ବା ମୂଳ ବୋଲି କହିଥାଉଁ । ତେଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ 1କୁ $x - 1$ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ କିମ୍ବା $x - 1 = 0$ ବହୁପଦୀ ସମୀକରଣର ମୂଳ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସ୍ଥିର ବହୁପଦୀ 5କୁ ନିଆଯାଉ । ଏହାର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ କ'ଣ ହୁଏ କହିପାରିବ କି ? ଏହାର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନଥାଏ । କାରଣ x ର ଯେକୌଣସି ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $5x^0$ ର ମୂଲ୍ୟ 5 ହିଁ ହୁଏ । ବାସ୍ତବରେ ଯେକୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସ୍ଥିର ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନଥାଏ । ହେଲେ ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ କଣ ହୁଏ ? ଅତଏବ ପ୍ରତି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 3: $x + 2$ ବହୁପଦୀର -2 ଏବଂ 2 ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୁଏ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x + 2$

ତେବେ $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

ତେଣୁ $x + 2$ ବହୁପଦୀର -2 ଏକ ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ଅଟେ କିନ୍ତୁ 2 ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 4 : $p(x) = 2x + 1$ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $p(x)$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ପାଇବାକୁ ହେଲେ $p(x) = 0$ କୁ ସମାଧାନ କରିବା ଯଥୋଚିତ ହେବ ।

AP SCERT

ବର୍ତ୍ତମାନ $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$

ତେଣୁ $-\frac{1}{2}$ ହେଉଛି $2x + 1$ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଯଦି $p(x) = ax + b, a \neq 0$ ଗୋଟିଏ ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀ, ତେବେ $p(x)$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ? ଉଦାହରଣ 4 ରୁ ଆମେ କିଛି ଧାରଣା ପାଇବା । $p(x)$ ର ଗୋଟିଏ ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେଲେ $p(x) = 0$ ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କରିବା ଯଥୋଚିତ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $p(x) = 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $ax + b = 0, a \neq 0$

ଏଣୁ $ax = -b$

ଅର୍ଥାତ୍ $x = -\frac{b}{a}$

ତେଣୁ, $x = -\frac{b}{a}$, $p(x)$ ର ଏକମାତ୍ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀର ଏକମାତ୍ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ରହିଥାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ $x - 1$ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ 1 ଏବଂ $x + 2$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ -2 ।

ଉଦାହରଣ 5 : $x^2 - 2x$ ବହୁପଦୀର 2 ଏବଂ 0 ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୁଏ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^2 - 2x$

ତେବେ, $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

ଏବଂ $p(0) = 0 - 0 = 0$

ଅତଏବ, $x^2 - 2x$ ର 2 ଏବଂ 0 ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୁଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣର ତାଲିକା ପ୍ରସ୍ତୁତ କର :

(i) ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ଶୂନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ନାହିଁ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ 0 ହୋଇପାରେ ।

(iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀର ଏକମାତ୍ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ରହିଥାଏ ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀର ଏକାଧିକ ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ରହିଥାଏ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.2

1. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ମୂଲ୍ୟ ଠାରେ $5x - 4x^2 + 3$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. ନିମ୍ନ ପ୍ରତି ବହୁପଦୀର $p(0), p(1)$ ଏବଂ $p(2)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

AP SCERT

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁପଦୀର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସୂଚାଇଥିବା ମୂଲ୍ୟ, ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୁଏ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $p(x) = 3x + 1,\ x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi,\ x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1,\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2),\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2,\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m,\ x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1,\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1,\ x = \frac{1}{2}$

4. ନିମ୍ନ ପ୍ରତି ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c,\ d$ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

2.4 ବହୁପଦୀର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ

ପୂର୍ବ ଉଦାହରଣ 10 କୁ ଭଲଭାବେ ନିରୀକ୍ଷଣ କର । ଏଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଯେହେତୁ ଭାଗଶେଷ $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ତେବେ $(2t + 1)$, $q(t)$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ । ଅର୍ଥାତ୍ $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$

କେତେକ ବହୁପଦୀ $g(t)$ ପାଇଁ । ଏହା ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି ଅଟେ ।

ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ : ଯଦି $p(x)$ ଏକ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ $n \geq 1$ ଏବଂ a ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

(i) ଯଦି $p(a) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $(x - a)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହୋଇଥାଏ ।

(ii) ଯଦି $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ $(x - a)$ ହୁଏ, ତେବେ $p(a) = 0$ ହେବ।

ପ୍ରମାଣ : ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$$

(i) ଯଦି $p(a) = 0$ ତେବେ $p(x) = (x - a)\, q(x)$ ଯାହା $p(x)$ ର $x - a$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ବୋଲି ଦର୍ଶାଏ ।

(ii) ଯେହେତୁ $p(x)$ ର $x - a$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ, ତେବେ $p(x) = (x - a)\, g(x)$ । ସେହି ଏକା ବହୁପଦୀ $g(x)$ ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ

$$\therefore\ p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$$

ଉଦାହରଣ 6 : ବହୁପଦୀ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ଏବଂ $2x + 4$ ର $x + 2$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : $x + 2$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ -2 । ମନେକର $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ଏବଂ $s(x) = 2x + 4$ ।

ତେବେ,
$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ଅତଏବ, ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ଦତ୍ତ ବହୁପଦୀ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ର $x + 2$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ ।

AP SCERT

ପୁଣି, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

ତେଣୁ $2x + 4$ ର $(x + 2)$ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ । ତୁମେ ଏହାକୁ ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର ନକରି ମଧ୍ୟ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବ । ଯେହେତୁ $2x + 4 = 2(x + 2)$ ।

ଉଦାହରଣ 7 : ଯଦି $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ର $(x - 1)$ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $(x - 1)$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ର ଉତ୍ପାଦକ ତେବେ $p(1) = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

ତେଣୁ, $4 + 3 - 4 + k = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $k = -3$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି 2 କିମ୍ବା 3 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ବହୁପଦୀର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ପୂର୍ବରୁ $x^2 + lx + m$ ଭଳି ବର୍ଗ ବହୁପଦୀର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସହ ତୁମେ ସୁପରିଚିତ । ଏହାର ମଧ୍ୟପଦ lx କୁ $ax + bx$ ରୂପେ ଭଙ୍ଗାଯାଏ । ଯାହାଫଳରେ $ab = m$ ହୁଏ । ଏହିପରି ମଧ୍ୟ ପଦକୁ ଭାଙ୍ଗି ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରିବା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ବହୁପଦୀ $ax^2 + bx + c$ (ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ ଏବଂ a, b, c ସ୍ଥିରପଦ) ।

ବର୍ଗବହୁପଦୀ $ax^2 + bx + c$ ର **ମଧ୍ୟପଦକୁ ଭାଙ୍ଗି** ନିମ୍ନମତେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରାଯାଇଥାଏ ।

ମନେକର ଏହାର ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱୟ $(px + q)$ ଏବଂ $(rx + s)$

ତେବେ $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$

ଉଭୟପଟର x^2 ର ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ପାଉ, $a = pr$

ସେହିପରି x ର ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ତୁଳନା କରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ $b = ps + qr$

ଏବଂ ସ୍ଥିରପଦଗୁଡ଼ିକୁ ତୁଳନା କରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ $c = qs$ ପାଉ ।

ଏହା ଦର୍ଶାଏ ଯେ ps ଏବଂ qr ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ b ଏବଂ ଗୁଣଫଳ $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$

ତେଣୁ $ax^2 + bx + c$ କୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରିବା ସମୟରେ b କୁ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ରୂପେ ଲେଖିବାକୁ ପଡ଼ିଥାଏ । ଯାହାଫଳରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ac ସହ ସମାନ ହୁଏ । ଏହା ବିଷୟରେ ଆମେ ଉଦାହରଣ 13 ରୁ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଧାରଣା ପାଇପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ 8 : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ଆଧାର କରି $6x^2 + 17x + 5$ ର ମଧ୍ୟପଦକୁ ଭାଙ୍ଗି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ 1: (ମଧ୍ୟପଦକୁ ଭାଙ୍ଗିବା ଦ୍ୱାରା) **:** p,q ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $p + q = 17$ ଏବଂ $pq = 6 \times 5 = 30$ ହେବ । ତେବେ ଆମେ ଉତ୍ପାଦକ ସମୂହ ପାଇପାରିବା ।

30 ର ଉତ୍ପାଦକ ଯୋଡ଼ି ଖୋଜି ବାହାର କର । (1,30), (2,15), (3,10) (5,6) ଇତ୍ୟାଦି । ଏଥିରୁ (2,15) ଯୋଡ଼ିଟି $p + q = 17$ ର ସମାଧାନ ହୁଏ ।

AP SCERT

ତେଣୁ $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$

$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

ସମାଧାନ 2 : (ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$ (ମନେକର) ଯଦି a ଓ b ଦ୍ୱୟ $p(x)$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୁଏ,

ତେବେ $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$ । ତେଣୁ $ab = \frac{5}{6}$ । a ଓ b ନିମନ୍ତେ ଯଥାସମ୍ଭବ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ଦେଖିନିଅ । ସେଗୁଡ଼ିକ $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ ହୋଇପାରେ । ବର୍ତ୍ତମାନ $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0.$ କିନ୍ତୁ $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$, ତେଣୁ, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$, $p(x)$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ । ସେହିପରି $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ବୋଲି ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଦ୍ୱାରା ତୁମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ଅତଏବ, $6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ ମଧ୍ୟପଦ ଭାଙ୍ଗିବା ପଦ୍ଧତିଟି ଅଧିକ ଉପଯୋଗୀ ବୋଲି ପରିଲକ୍ଷିତ ହେଉଛି । ତଥାପି ଆଉ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ନିଆଯାଉ ।

ଉଦାହରଣ 9 : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି $y^2 - 5y + 6$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଧରିନିଅ $p(y) = y^2 - 5y + 6$ । ବର୍ତ୍ତମାନ, ଯଦି $p(y) = (y - a)(y - b)$ ହେଲେ $ab = 6$ ଏଠାରେ a ଓ b ସ୍ଥିରାଙ୍କ । ତେଣୁ ଆମେ $p(y)$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଖୋଜିବାକୁ ହେଲେ 6 ର ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ 1,2,3 ଓ 6 ପାଇବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

ତେଣୁ $(y - 2)$, $p(y)$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ।

AP SCERT

ସେହିଭଳି, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

ଅତଏବ, $(y - 3)$ ମଧ୍ୟ $y^2 - 5y + 6$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ତେଣୁ, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

ମନେରଖ $y^2 - 5y + 6$ ର ମଧ୍ୟପଦ $-5y$ କୁ ଭାଙ୍ଗିବା ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ବାହାର କରାଯାଇପାରିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଘନ ବହୁପଦୀଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରିବା । ଏଠାରେ ମଧ୍ୟପଦ ଭାଙ୍ଗିବା ପଦ୍ଧତିର ବ୍ୟବହାର ଉପଯୁକ୍ତ ହେବ ନାହିଁ । ଆମେ ଏହାର ପ୍ରଥମେ ଅନ୍ୟୁନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ।

ଉଦାହରଣ 10 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ କୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଧରିନିଅ $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

-120 ର ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ ଖୋଜି ବାହାର କର । ସେଗୁଡ଼ିକ ଯଥା : $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$ ।

ପ୍ରଯତ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଇବା $p(1) = 0$ ଅତଏବ $(x - 1)$, $p(x)$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (କାହିଁକି ?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ (ଏଠାରେ $x - 1$ଏକ ସାଧାରଣ ପଦ)

$p(x)$ କୁ $x - 1$ ରେ ଭାଗକରି ମଧ୍ୟ ଆମେ ଏହା ପାଇପାରିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $x^2 - 22x + 120$ କୁ ମଧ୍ୟପଦ ଭାଙ୍ଗିବା ଦ୍ୱାରା କିମ୍ବା ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହୁଏ । ମଧ୍ୟପଦ ଭାଙ୍ଗିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଇବା

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 10)$$

ତେଣୁ, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.3

1. ନିମ୍ନ କେଉଁ ବହୁପଦୀର $(x + 1)$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି $p(x)$ ର $g(x)$ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ କି ନାହିଁ ଜଣାଅ ।

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 3$

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯଦି $p(x)$ ର $x - 1$ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

AP SCERT

2.5 ବୀଜୀଗାଣିତିକ ଅଭେଦ

ତୁମେ ମନେପକାଅ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦ ମାନେ, ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ ଯାହାର ଚଳରାଶିର ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ହୋଇଥାଏ । ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦ ବିଷୟରେ ଶିଖିଅଛ ।

ଅଭେଦ I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ଅଭେଦ II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ଅଭେଦ III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ଅଭେଦ IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଉପରୋକ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର ତୁମେ କରିଥାଇପାର । ବିଭିନ୍ନ ଗଣନାରେ ଏହାର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ତୁମେ ଦେଖିବାକୁ ପାଇବ ।

ଉଦାହରଣ 11 : ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

ସମାଧାନ : (i) ଏଠାରେ ଆମେ ଅଭେଦ I ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବା ।

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ରେ y ସ୍ଥାନରେ 3 ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) ଏଠାରେ ଆମେ ଅଭେଦ IV ଅର୍ଥାତ୍ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବା ।

ଆମେ ପାଇବା $(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$$= x^2 + 2x - 15$$

ଉଦାହରଣ 12 : ପ୍ରକୃତ ଗୁଣନ ନକରି 105×106 ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$, (ଅଭେଦ IVରୁ)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟନ ତୁମେ ଦେଖିବାକୁ ପାଇଲ । ଏଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହାର କରି ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମଧ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ 13 : ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

ସମାଧାନ : (i) ଏଠାରେ ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ

$49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$

ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ $x^2 + 2xy + y^2$ ସହ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ପାଇବା $x = 7a$ ଏବଂ $y = 5b$ ।

ଅଭେଦ I ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

ଅଭେଦ III ସହ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟବହୃତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ଦ୍ୱିପଦୀର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମ୍ପର୍କିତ ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଅଭେଦ I ର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିପଦୀ $x + y + z$ ଏବଂ $(x + y + z)^2$ କୁ ବିସ୍ତାର କରିବା ।

ଧରିନିଅ $x + y = t$

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (ଅଭେଦ I)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t ର ମୂଲ୍ୟକୁ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ)

AP SCERT

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (ଅଭେଦ I ରୁ)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନଃ ସଜାଇବା ଦ୍ୱାରା)

ତେଣୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ଅଭେଦଟି ପାଇବା

ଅଭେଦ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

ଟିପ୍ପଣୀ: ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱର ବିସ୍ତାର ରୂପ ବୋଲି କହୁ । ମନେରଖ $(x+y+z)^2$ର ବିସ୍ତାରରେ ତିନୋଟି ବର୍ଗ ପଦ ଏବଂ ତିନୋଟି ଗୁଣଫଳ ପଦ ବିଦ୍ୟମାନ ।

ଉଦାହରଣ 14 : $(3a + 4b + 5c)^2$ କୁ ବିସ୍ତାର କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ $(x + y + z)^2$ ସହ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$x = 3a, y = 4b, z = 5c$

ଅଭେଦ V ରୁ

$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$

$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$

ଉଦାହରଣ15: $(4a – 2b – 3c)^2$ କୁ ବିସ୍ତାର କର ।

ସମାଧାନ : ଅଭେଦ V ରୁ

$(4a – 2b – 3c)^2 = [4a + (–2b) + (–3c)]^2$

$= (4a)^2 + (–2b)^2 + (–3c)^2 + 2(4a)(–2b) + 2(–2b)(–3c) + 2(–3c)(4a)$

$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 – 16ab + 12bc – 24ac$

ଉଦାହରଣ16 : $4x^2 + y^2 + z^2 – 4xy – 2yz + 4xz$ କୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

ସମାଧାନ : $4x^2 + y^2 + z^2 – 4xy – 2yz + 4xz = (2x)^2 + (–y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(–y) + 2(–y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (–y) + z]^2$ (ଅଭେଦ Vରୁ)

$= (2x – y + z)^2 = (2x – y + z)(2x – y + z)$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର ସମ୍ପର୍କରେ ଜାଣିଲେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଅଭେଦ I କୁ ବ୍ୟବହାର କରି $(x + y)^3$ କୁ ବିସ୍ତାର କରିବା ।

$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$

$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$

$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

AP SCERT

ତେଣୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ଅଭେଦ ପାଇବା

ଅଭେଦ VI : $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y)$

ଅଭେଦ VI ରେ y ବଦଳରେ $-y$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

ଅଭେଦ VII : $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ଉଦାହରଣ 17 : ନିମ୍ନ ଘନଗୁଡ଼ିକୁ ବିସ୍ତାର କର ।

(i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(5p-3q)^3$

ସମାଧାନ : (i) ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ $(x+y)^3$ ସହ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$x = 3a$ ଏବଂ $y = 4b$

ଅଭେଦ VI କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$(3a+4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) ନିମ୍ନ ପରିପ୍ରକାଶକୁ $(x-y)^3$ ସହ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$x = 5p,\ y = 3q.$

ଅଭେଦ VII ବ୍ୟବହାର କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

ଉଦାହରଣ 18 : ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

ସମାଧାନ : (i)

$$(104)^3 = (100+4)^3$$
$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$$

(ଅଭେଦ VI ରୁ)

$$= 1000000 + 64 + 124800$$
$$= 1124864$$

(ii)

$$(999)^3 = (1000-1)^3$$
$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$

(ଅଭେଦ VII ରୁ)

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$
$$= 997002999$$

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 19 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ କୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା ।

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$

$$= (2x + 3y)^3 \quad \text{(ଅଭେଦ VI ରୁ)}$$

$$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ କୁ ଧରିନିଅ

ବିସ୍ତାର କରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳ ପାଇବା

$$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y$$

$$+ y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \text{ (ସରଳୀକରଣ ଦ୍ୱାରା)}$$

ତେବେ ଆମେ ନିମ୍ନ ଅଭେଦଟି ପାଇବା

ଅଭେଦ VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ଉଦାହରଣ 20 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ କୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଆମେ ପାଇବା

$$8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$$

$$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$$

$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$

$$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.4

1. ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

   (iv) $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. ପ୍ରକୃତ ଗୁଣନ ନକରି ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ବିସ୍ତାର କର ।

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. ନିମ୍ନ ଘନଗୁଡ଼ିକୁ ବିସ୍ତାର କର ।

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. ଉପଯୁକ୍ତ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ମୂଲ୍ୟାୟନ କର ।

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. ସଠିକତା ପରୀକ୍ଷା କର ।: (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର ।

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[ସୂଚନା : ପ୍ରଶ୍ନ 9 କୁ ଦେଖ]

11. ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କର: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. ସଠିକତା ପରୀକ୍ଷା କର : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$

13. ଯଦି $x + y + z = 0$, ତେବେ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ ।

14. ନିମ୍ନ ଘନଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରକୃତ ଗଣନା ନକରି ମୂଲ୍ୟାୟନ କର ।

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. ନିମ୍ନ ପ୍ରଦତ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳଗୁଡ଼ିକୁ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ସମ୍ଭାବ୍ୟ ପରିପ୍ରକାଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ : $25a^2 - 35a + 12$

(ii) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ : $35y^2 + 13y - 12$

AP SCERT

16. ନିମ୍ନ ଘନଗୁଡ଼ିକର ଘନଫଳ ନିମନ୍ତେ ମାପଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟ ପରିପ୍ରକାଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଆୟତନ: $3x^2 - 12x$ (i) ଆୟତନ : $12ky^2 + 8ky - 20k$ (ii)

17. ଗୋଟିଏ ଝିଅ ବିଲ୍ଡିଙ୍ଗ୍ ବ୍ଲକ୍ ସହିତ ଖେଳୁଛି, ସେହି ବ୍ଲକ୍‌ର ଆୟତନ/ଘନଫଳ/ଘନ ପରିମାଣ

$$V(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$$

ତେବେ ସେହି ବ୍ଲକ୍‌ର ତିନୋଟି ମାପଗୁଡ଼ିକ କ'ଣ?

2.6 ମୁଖ୍ୟାଂଶ :

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଯାହାସବୁ ଶିଖିଲେ ।

1. ଏକଚଳରାଶି x କୁ ନେଇ n ତମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ $p(x)$ କୁ

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

   ଏଠାରେ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ସ୍ଥିରାଙ୍କ ଏବଂ $a_n \neq 0$

   $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ଯଥାକ୍ରମେ $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ ର ସହଗ ଅଟନ୍ତି, ଏବଂ n କୁ ଦତ୍ତ ବହୁପଦୀର ପରିମାଣ କୁହାଯାଏ । $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_0$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ବହୁପଦୀର ପଦ କୁହାଯାଏ ।
2. ଗୋଟିଏ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀକୁ ଏକପଦୀ କୁହାଯାଏ ।
3. ଦୁଇଟି ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀକୁ ଦ୍ୱିପଦୀ କୁହାଯାଏ ।
4. ତିନୋଟି ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀକୁ ତ୍ରିପଦୀ କୁହାଯାଏ ।
5. ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ ଏକ ତାହାକୁ ରେଖୀୟ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ ।
6. ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ ଦୁଇ ତାହାକୁ ବର୍ଗ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ ।
7. ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀ ଯାହାର ପରିମାଣ ତିନି ତାହାକୁ ଘନ ବହୁପଦୀ କୁହାଯାଏ ।
8. ବହୁପଦୀ $p(x)$ ର ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ପାଇଁ $p(a) = 0$ ହେଲେ, a, ବହୁପଦୀ $p(x)$ ର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ହୁଏ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ a କୁ ସମୀକରଣ $p(x) = 0$ ର ମୂଳ ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।
9. ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ଅନନ୍ୟ ଅଟେ । ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସ୍ଥିରରାଶି ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନଥାଏ । ପ୍ରତି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଶୂନ୍ୟ ବହୁପଦୀର ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।
10. ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ : ଯଦି $p(a) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $p(x)$ ର $x - a$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ଅଟେ । ବିପରୀତ କ୍ରମରେ ଯଦି $x - a$, $p(x)$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ $p(a) = 0$ ।
11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

AP SCERT

Q7Z5X9

ଅଧ୍ୟାୟ 3

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି

ମେର୍କେଟର୍‌ଙ୍କ ଉତ୍ତରମେରୁ ଏବଂ ବିଷୁବରେଖା, କ୍ରାନ୍ତିରେଖା, ଜଳବାୟୁ ମଣ୍ଡଳ ଏବଂ ମଧ୍ୟାହ୍ନ ରେଖାଗୁଡ଼ିକର ଉପକାର କ'ଣ? ବୋଲି ବେଲ୍‌ମ୍ୟାନ୍ ଚିତ୍କାର କରି କହିଲେ । 'ସେଗୁଡ଼ିକ କେବଳ ପାରମ୍ପରିକ ଚିହ୍ନ !' ବୋଲି କର୍ମଚାରୀମାନେ ଉତ୍ତର ଦେଲେ ।

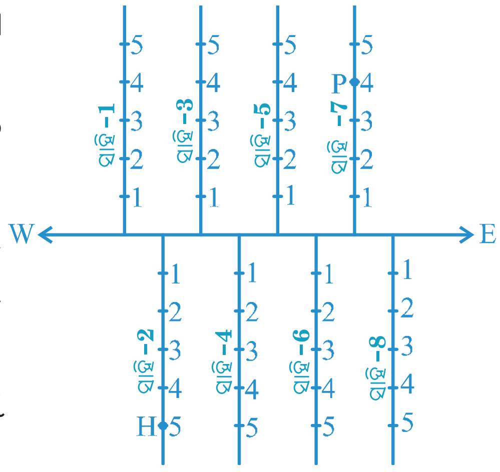
ଲୁଇ କେରୋଲ୍, *The Hunting of the Snark*

AP SCERT

3.1 ଉପକ୍ରମ

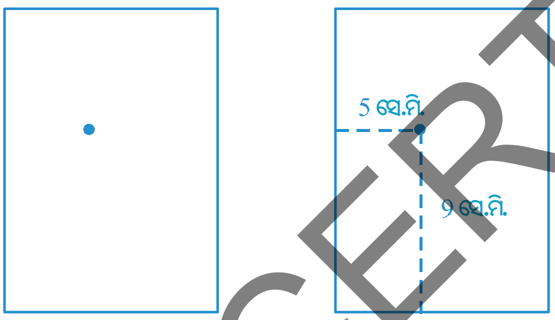
ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ କିପରି ସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ ତୁମେ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ଶିଖିଛ । ରେଖାରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଉପସ୍ଥିତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ମଧ୍ୟ ଶିଖିଛ । କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ନିର୍ଣ୍ଣୟକରିବା ପାଇଁ ଏକାଧିକ ରେଖାର ଆବଶ୍ୟକ ରହିଥାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାରକୁ ନିଅ ।

I. ଚିତ୍ର 3.1 ରେ ଦର୍ଶାଗଲା ଭଳି ପୂର୍ବ–ପଶ୍ଚିମ ଦିଗରେ ଚାଲୁଥିବା ଏକ ମୁଖ୍ୟରାସ୍ତା ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ପଶ୍ଚିମରୁ ପୂର୍ବକୁ ନମ୍ବର ଦିଆଯାଇଥିବା ସାହିଗୁଡ଼ିକ ରହିଛି । ଏହା ବ୍ୟତୀତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାହିର ଘରଗୁଡ଼ିକୁ ମଧ୍ୟ ନମ୍ବର ଦିଆଯାଇଛି । ଜଣେ ବନ୍ଧୁଙ୍କର ଘର ଠାବ କରିବାପାଇଁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରେଫେରେନ୍ସ(ନିର୍ଦ୍ଦେଶ) ବିନ୍ଦୁ ଯଥେଷ୍ଟ କି? ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ସେ ଦ୍ୱିତୀୟ ସାହିରେ ରହିବା କଥା କୁହାଗଲେ, ଆମେ ସେହି ବନ୍ଧୁଙ୍କର ଘର ଖୋଜିପାରିବା କି? ସେତେ ସହଜରେ ନୁହେଁ ଯେପରି କି, ସେ ବାସ କରୁଥିବା ସାହି ନମ୍ବର ଏବଂ ଘର ନମ୍ବର ଦିଆଗଲେ ଖୋଜିପାରିବା । ଦ୍ୱିତୀୟ ସାହି ପଞ୍ଚମ ଘରକୁ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ପ୍ରଥମେ ଆମେ ଦ୍ୱିତୀୟ ସାହିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ସେଥିରେ ଥିବା ପଞ୍ଚମ ଘର ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବା । ଚିତ୍ର 3.1ରେ ସେହି ଘରଟିକୁ H ରୂପେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇଛି । ସେହିପରି P, ସପ୍ତମ ସାହିର ଚତୁର୍ଥ ଘରକୁ ସୂଚାଏ ।



ଚିତ୍ର **3.1**

II. ମନେକର ତୁମେ ଏକ କାଗଜ ଉପରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟକଲ । [ଚିତ୍ର 3.2 (a)] ଯଦି ତୁମକୁ କାଗଜରେ ସେହି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି କହିବାକୁ କୁହାଯାଏ, ତେବେ ଏହା କିପରି କହିବ? ହୁଏତ କିଛି ଏଭଳି ଉପାୟରେ ଚେଷ୍ଟା କରିବ : 'ବିନ୍ଦୁଟି କାଗଜର ଉପର ଅଧାଭାଗରେ ଅଛି", କିମ୍ବା " ଏହା କାଗଜର ବାମ ଧାର ପାଖରେ ଅଛି", କିମ୍ବା "ଏହା କାଗଜର ଉପର ବାମ କୋଣକୁ ଅତି ନିକଟରେ ଅଛି"। ଏହି ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ହେଲେ ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରକୃତ ଅବସ୍ଥିତିକୁ ସୂଚାଇପାରୁଛି କି? ନା! କିନ୍ତୁ, ଯଦି ତୁମେ କହୁଛ "ବିନ୍ଦୁଟି କାଗଜର ବାମଧାର ଠାରୁ ପ୍ରାୟ 5 ସେ.ମି ଦୂରରେ ଅଛି", ଏହା କିଛି ଧାରଣା ଦେବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ ତଥାପି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥିତିକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ କହିପାରେ ନାହିଁ । ଯଦି ଟିକିଏ ଚିନ୍ତାକରି, "ବିନ୍ଦୁଟି ନିମ୍ନ ରେଖା(ଧାର)ଠାରୁ ୨ ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଅଛି" ବୋଲି କୁହ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବାରେ ସହାୟକ ହେବ । ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଠିକ୍ ଭାବେ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିକୁ କହିପାରିବା ।



(a) **ଚିତ୍ର 3.2** (b)

AP SCERT

ଏହି ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ, ଆମେ ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ(ସ୍ଥିର) ରେଖା ଯଥା, କାଗଜର ବାମଧାର ଏବଂ କାଗଜର ନିମ୍ନରେଖା ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତାକୁ ଉଲ୍ଲେଖ କରି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ସ୍ଥିରକଲୁ । [ଚିତ୍ର 3.2 (b)] । ଅନ୍ୟ ଅର୍ଥରେ କହିବାକୁ ଗଲେ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ଆମକୁ **ଦୁଇଟି** ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସୂଚନା ଦରକାର ।

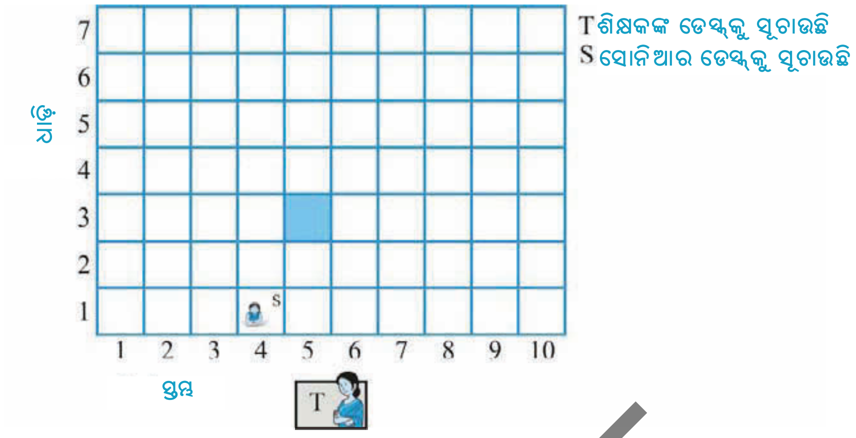
ବର୍ତ୍ତମାନ, 'ସିଟିଂ ପ୍ଲାନ୍' ଭାବରେ ଜଣାଶୁଣା ନିମ୍ନ ଶ୍ରେଣୀଗୃହ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ ସମ୍ପାଦନ କର ।

କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ 1: (ସିଟିଂ ପ୍ଲାନ୍): ତୁମେ ଶ୍ରେଣୀଗୃହରେ ସମସ୍ତ ଡେସ୍କକୁ ଏକାଠି କରି ବସିବାର ଏକ ଯୋଜନା(ସିଟିଂ ପ୍ଲାନ୍) ଅଙ୍କନକର । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଡେସ୍କକୁ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଅ । ପ୍ରତି ବର୍ଗଚିତ୍ରରେ ଡେସ୍କ ଦଖଲ କରୁଥିବା ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀର ନାମ ଲେଖ । ଶ୍ରେଣୀଗୃହରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀର ସ୍ଥାନକୁ ଦୁଇଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସୂଚନା ବ୍ୟବହାର କରି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ଲେଖାଯିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(i) ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ବସିବା ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ବସିବା ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ।

ଯଦି ତୁମେ 5ମ ସ୍ତମ୍ଭ ଏବଂ 3ୟ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ଡେସ୍କ ଉପରେ ବସିଛ(ଚିତ୍ର 3.3 ରେ ଦର୍ଶାଇଲାପରି ଛାୟାଙ୍କିତ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର), ତେବେ ତୁମ ସ୍ଥାନକୁ (5,3) ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ପ୍ରଥମେ ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପରେ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଲେଖାଯାଏ । ଏହା କ'ଣ (3,5) ସହିତ ସମାନ? ତୁମେ ଶ୍ରେଣୀରେ ଥିବା ଅନ୍ୟ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ନାମ ଓ ସ୍ଥାନ ଲେଖ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଯଦି ସୋନିଆ 4ର୍ଥ ସ୍ତମ୍ଭ ଓ 1ମ ଧାଡ଼ିରେ ବସେ, ତେବେ S (4,1) ଲେଖ । ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ଡେସ୍କ ତୁମ ସିଟିଂ ପ୍ଲାନ୍‌ର ଅଂଶ ନୁହେଁ । ଶିକ୍ଷକଙ୍କୁ ଆମେ କେବଳ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷକ ଭଳି ବିଚାର କରୁ ।



ଚିତ୍ର 3.3

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଯେ, ସମତଳରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବସ୍ତୁର ସ୍ଥିତିକୁ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଲମ୍ବରେଖା ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରିବ । 'ବିନ୍ଦୁ' କ୍ଷେତ୍ରରେ, କାଗଜର ନିମ୍ନରେଖାରୁ ଏବଂ ବାମଧାରରୁ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ଆବଶ୍ୟକ କରୁ । ସିଟିଂ ପ୍ଲାନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମକୁ ସ୍ତମ୍ଭର ସଂଖ୍ୟା ଓ ଧାଡ଼ିର ସଂଖ୍ୟା ଆବଶ୍ୟକ ହୋଇଥାଏ । ଏହି ସରଳ ବିଚାରର ସୁଦୂରପ୍ରସାରୀ ପରିଣାମ ରହିଛି ଏବଂ ଏହା ଗଣିତରେ ଏକ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଶାଖାର ଉନ୍ମୋଚନ କରିଛି, ଯାହାକୁ *ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି/ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି* (*Co-ordinate Geometry*) କୁହାଯାଏ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର କେତେକ ମୌଳିକ ଧାରଣାର ପ୍ରଚଳନକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ଏହି ବିଷୟରେ ଅଧିକ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ । ଏହି ଅଧ୍ୟୟନ ପ୍ରଥମେ ଫରାସୀ ଦାର୍ଶନିକ ତଥା ଗଣିତଜ୍ଞ ରେନେ ଡେକାର୍ଟେଙ୍କ (*Rene Descartes*) ଦ୍ୱାରା ବିକଶିତ ହୋଇଥିଲା ।

AP SCERT

ସପ୍ତଦଶ ଶତାବ୍ଦୀର ମହାନ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ରେନେ ଡେକାର୍ଟେ ବିଛଣାରେ ଶୋଇରହି ଭାବିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରୁଥିଲେ ! ଦିନେ ବିଛଣାରେ ବିଶ୍ରାମ ନେବା ସମୟରେ ସେ ସମତଳର ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥିତି ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରିଥିଲେ । ଅକ୍ଷାଂଶ ଓ ଦ୍ରାଘିମାର ପୁରାତନ ଧାରଣାର ବିକାଶ ହିଁ ତାଙ୍କ ପଦ୍ଧତି ଥିଲା । ଡେକାର୍ଟେଙ୍କ ସମ୍ମାନାର୍ଥେ, ଏକ ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥିତି ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବାପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ପ୍ରଣାଳୀକୁ *କାର୍ଟେସିଆନ୍ ପ୍ରଣାଳୀ* ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ରେନେ ଡେକାର୍ଟେ (1596 -1650)

ଚିତ୍ର 3.4

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3.1

1. ତୁମ ଷ୍ଟଡ଼ି ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ଥିବା ଟେବୁଲ୍ ଲ୍ୟାମ୍ପ୍‌ର ସ୍ଥିତିକୁ ତୁମେ ଅନ୍ୟ ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତିକୁ କିପରି ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବ?
2. **ସାହି ଯୋଜନା** (Street Plan): ଗୋଟିଏ ସହରର ଦୁଇଟି ମୁଖ୍ୟରାସ୍ତା ସହରର କେନ୍ଦ୍ରରେ ପରସ୍ପରକୁ ଅତିକ୍ରମ କରି ରହିଛି । ଏହି ଦୁଇଟି ରାସ୍ତା ଉତ୍ତର-ଦକ୍ଷିଣ ଦିଗ ଏବଂ ପୂର୍ବ-ପଶ୍ଚିମ ଦିଗରେ ଅବସ୍ଥିତ । ସହରର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ସାହିଗୁଡ଼ିକ ଏହି ମୁଖ୍ୟ ରାସ୍ତା ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ ଏବଂ 200 ମିଟର ବ୍ୟବଧାନରେ ଥାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିଗରେ 5 ଟି ଲେଖାଏଁ ସାହି ରହିଛି । ପ୍ରତି 200 ମିଟର ଦୂରତାକୁ 1 ସେ.ମି. ରୂପେ ନେଇ ତୁମ ନୋଟ୍‌ଖାତାରେ ସହରର ଏକ ନମୂନା(ମଡ଼େଲ୍) ଅଙ୍କନ କର । ସାହି/ରାସ୍ତାକୁ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କର ।

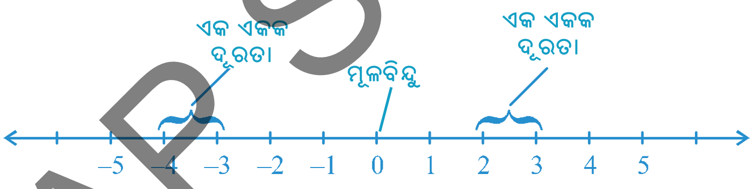
ତୁମ ମଡ଼େଲ୍‌ରେ ଅନେକ ଆଡୁଆ ସାହି(cross- streets) ଅଛି । ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆଡୁଆ ସାହି ଦୁଇଟି ସାହିର ମିଳନରୁ ଗଠିତ ହୋଇଛି, ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତର-ଦକ୍ଷିଣ ଦିଗରେ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି ପୂର୍ବ-ପଶ୍ଚିମ ଦିଗରେ ଚାଲିଥାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆଡୁଆ ସାହିକୁ ନିମ୍ନମତେ ଉଲ୍ଲେଖ କରାଯାଇଛି: ଯଦି ଉତ୍ତର-ଦକ୍ଷିଣ ଦିଗରେ ଥିବା ଦ୍ୱିତୀୟ ସାହି ଏବଂ ପୂର୍ବ-ପଶ୍ଚିମ ଦିଗରେ ଥିବା ପଞ୍ଚମ ସାହି କୌଣସି କ୍ରସିଂରେ ମିଳନହୁଏ, ତେବେ ଆମେ ସେହି ଆଡୁଆ ସାହିକୁ (2, 5) କହିବା । ଏହି ପ୍ରଚଳନକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ସମାଧାନକର:

(i) କେତୋଟି ଆଡୁଆ ସାହିକୁ (4, 3) ରୂପରେ ଉଲ୍ଲେଖ(ଚିହ୍ନଟ) କରାଯାଇପାରେ?

(ii) କେତୋଟି ଆଡୁଆ ସାହିକୁ (3, 4) ରୂପରେ ଉଲ୍ଲେଖ(ଚିହ୍ନଟ) କରାଯାଇପାରେ?

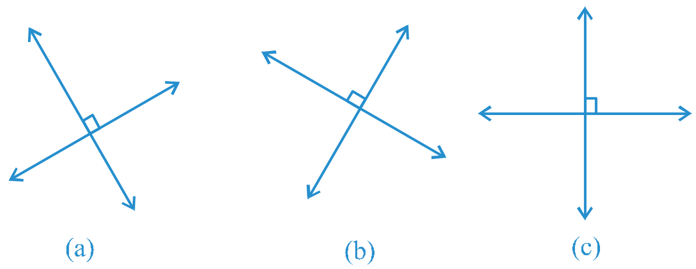
3.2 କାର୍ଟିଜୀୟ ପ୍ରଣାଳୀ :

ତୁମେ "ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଣାଳୀ" ଅଧ୍ୟାୟରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛ । ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ, ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରୁ ବିଭିନ୍ନ ଦୂରତାକୁ ଗୋଟିଏ ଦିଗରେ ଧନାତ୍ମକ ଭାବେ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦିଗରେ ଋଣାତ୍ମକ ଭାବେ ସମାନ ଏକକରେ ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଏ । ଯେଉଁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରୁ ଦୂରତା ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ତାକୁ 'ମୂଳବିନ୍ଦୁ/ଆଦିବିନ୍ଦୁ' *(origin)* କୁହାଯାଏ । ସମାନ ଦୂରତାରେ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାପାଇଁ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ବ୍ୟବହାର କରିଥାଉ । ଯଦି '1' ସଂଖ୍ୟାଟି ଏକ ଏକକ ଦୂରତାକୁ ଦର୍ଶାଏ, ତେବେ '3' ସଂଖ୍ୟାଟି ତିନି ଏକକ ଦୂରତାକୁ ଦର୍ଶାଏ, ଯେଉଁଠି '0' ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦର୍ଶାଏ । ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ r ଦୂରତାରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି r ସଂଖ୍ୟା କୁ ଦର୍ଶାଇଥାଏ । ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ r ଦୂରତାରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି –r ସଂଖ୍ୟା କୁ ଦର୍ଶାଇଥାଏ । ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନ 3.5 ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 3.5

ଡେକାର୍ଟେ ଏପରି ଦୁଇଟି ରେଖାକୁ ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ରଖି, ଏହି ରେଖାଗୁଡ଼ିକୁ ଉଲ୍ଲେଖକରି ସେହି ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ଧାରଣାର ଉଦ୍ଭାବନ କରିଥିଲେ । ଚିତ୍ର 3.6 ରେ ଦର୍ଶାଇଲା ଭଳି ଲମ୍ବ ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ଯେକୌଣସି ଦିଗରେ ଥାଇପାରେ । କିନ୍ତୁ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ, ଯେତେବେଳେ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ

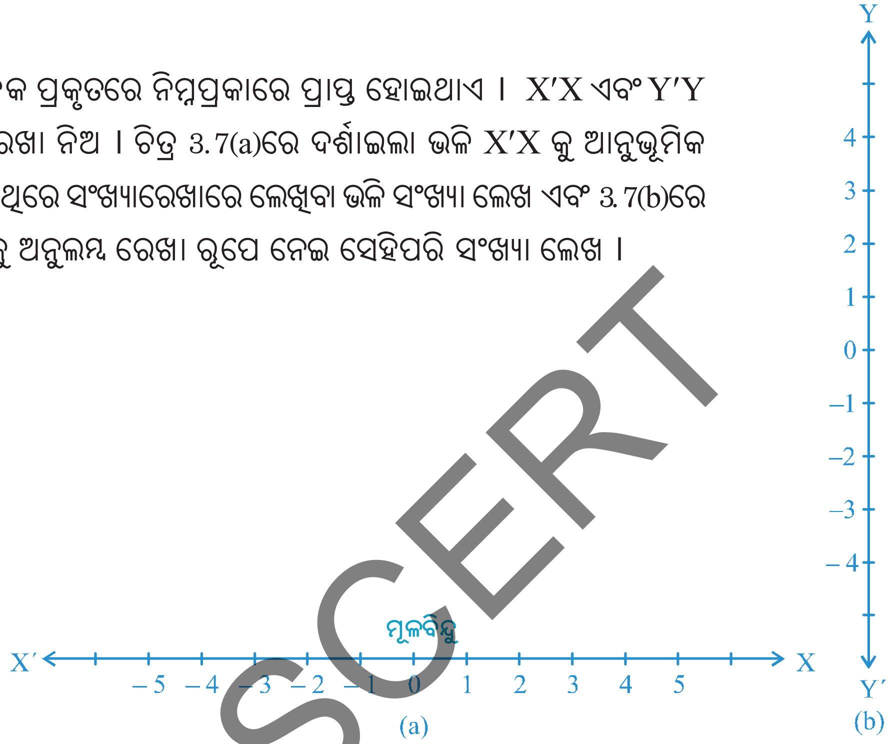


ଚିତ୍ର 3.6

AP SCERT

ଥିବା କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ପାଇଁ ଏହି ଦୁଇଟି ରେଖାକୁ ଏପରି ବ୍ୟବହାର କରିଥାଉଁ ଯେ 3.6(c) ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଇଲା ଭଳି ଗୋଟିଏ ରେଖା ଆନୁଭୂମିକ ହେବାବେଳେ ଅନ୍ୟଟି ଅନୁଲମ୍ବ ହୁଏ ।

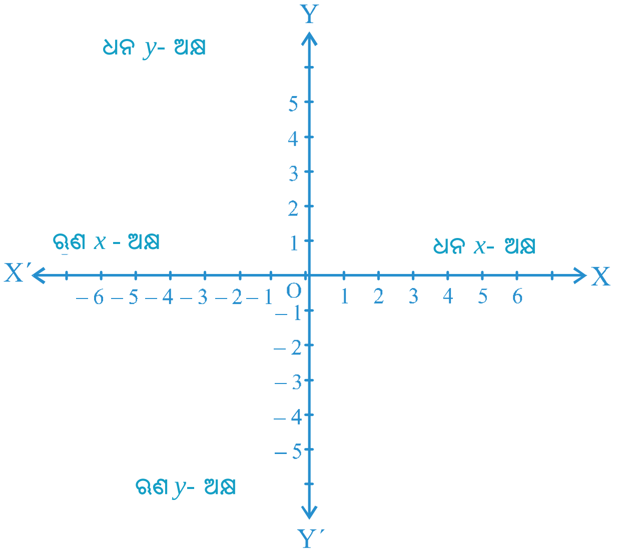
ଏହି ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରକୃତରେ ନିମ୍ନପ୍ରକାରେ ପ୍ରାପ୍ତ ହୋଇଥାଏ । X′X ଏବଂ Y′Y ନାମକ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ନିଅ । ଚିତ୍ର 3.7(a)ରେ ଦର୍ଶାଇଲା ଭଳି X′X କୁ ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାରୂପେ ନିଅ ଏବଂ ଏଥିରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଲେଖିବା ଭଳି ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ଏବଂ 3.7(b)ରେ ଦର୍ଶାଇଲା ଭଳି Y′Y କୁ ଅନୁଲମ୍ବ ରେଖା ରୂପେ ନେଇ ସେହିପରି ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।



ଚିତ୍ର 3.7

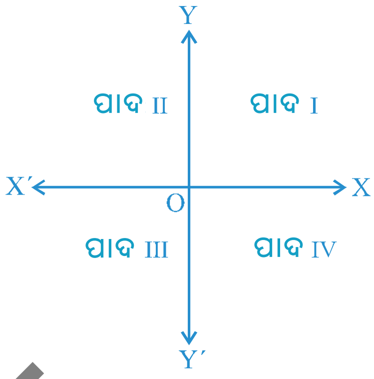
AP SCERT

ଉଭୟ ରେଖାକୁ ଏପରି ଭାବରେ ମିଳାଅ ଯେପରିକି ସେହି ଦୁଇ ରେଖା ପରସ୍ପରର ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଅତିକ୍ରମ କରିବେ (ଚିତ୍ର 3.8)। ଆନୁଭୂମିକ ରେଖା X′X କୁ X-ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଅନୁଲମ୍ବ ରେଖା Y′Y କୁ Y-ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ । 'X′X' ଏବଂ Y′Y ର ଛେଦନ ବିନ୍ଦୁକୁ ***ମୂଳବିନ୍ଦୁ*** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ତାହାକୁ O ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଯେହେତୁ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ OX ଏବଂ OY ଦିଗରେ ରହିଥାଏ, ତେଣୁ OX ଏବଂ OY ଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x–ଅକ୍ଷ ଏବଂ y–ଅକ୍ଷର ***ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ*** କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି OX′ ଏବଂ OY′ ଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x–ଅକ୍ଷ ଏବଂ y–ଅକ୍ଷର ***ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ*** କୁହାଯାଏ ।



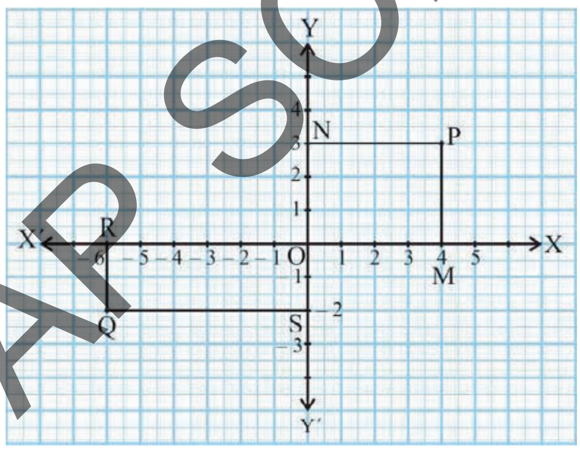
ଚିତ୍ର 3.8

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକ ସମତଳକୁ ଚାରୋଟି ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । ଏହି ଚାରୋଟି ଭାଗକୁ ପାଦ(ଚତୁର୍ଥକ) କୁହାଯାଏ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ OX ରୁ ବାମାବର୍ତ୍ତରେ I, II, III ଏବଂ IV ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ (ଚିତ୍ର 3.9 ଦେଖ) । ତେଣୁ ସମତଳଟି ଅକ୍ଷ ଏବଂ ପାଦକୁ ନେଇ ଗଠିତ । ଆମେ ଏହି ସମତଳକୁ *କାର୍ଟେସିଆନ୍ ସମତଳ* କିମ୍ବା *ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ* କିମ୍ବା *xy ସମତଳ* ବୋଲି ମଧ୍ୟ କହିଥାଉ । ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକୁ *ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ* କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 3.9

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀଟି ଗଣିତ ପାଇଁ ଏତେ ମୁଖ୍ୟ କାହିଁକି ଏବଂ ଏହା କିପରି ଉପଯୋଗୀ ଦେଖିବା ଆସ । ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରଟିକୁ ବିଚାରକୁ ନିଅ, ଯେଉଁଠାରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଆସ ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକ ଠାରୁ P ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ବିଷୟରେ ଦେଖିବା । ଏଥିପାଇଁ ଆମେ X-ଅକ୍ଷରେ PM ଲମ୍ବରେଖା ଏବଂ Y-ଅକ୍ଷରେ PN ଲମ୍ବରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା । ସେହିପରି ଆମେ ଚିତ୍ର 3.10 ରେ ଦର୍ଶାଇଲା ଭଳି QR ଏବଂ QS ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନକରିବା ।



ଚିତ୍ର 3.10

ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକରୁ:

(i) X-ଅକ୍ଷର ଧନଦିଗରେ ମପାଯାଇଥିବା, Y-ଅକ୍ଷରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା ହେଉଛି PN=OM=4 ଏକକ ।

(ii) Y-ଅକ୍ଷର ଧନଦିଗରେ ମପାଯାଇଥିବା, X-ଅକ୍ଷରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା ହେଉଛି PM=ON=3 ଏକକ ।

AP SCERT

(iii) X-ଅକ୍ଷର ଋଣଦିଗରେ ମପାଯାଇଥିବା Y-ଅକ୍ଷରୁ Q ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା ହେଉଛି OR = SQ = 6 ଏକକ ।

(iv) Y-ଅକ୍ଷର ଋଣଦିଗରେ ମପାଯାଇଥିବା X-ଅକ୍ଷରୁ Q ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା ହେଉଛି OS = RQ = 2 ଏକକ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଏହି ଦୂରତାଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ କିପରି ବର୍ଣ୍ଣନା କରିପାରିବା, ଯାହା ଫଳରେ କୌଣସି ଦ୍ୱନ୍ଦ୍ୱ ସୃଷ୍ଟି ହେବନାହିଁ?

ଆମେ ନିମ୍ନ ସମ୍ମେଳନଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖିବା:

(i) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର X - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି X-ଅକ୍ଷ ଦେଇ ମପାଯାଇଥିବା Y-ଅକ୍ଷ ଠାରୁ ଏହାର ଲମ୍ବ ଦୂରତା (X-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହିତ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ X-ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ ସହିତ ଋଣାତ୍ମକ) । P ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଏହା + 4 ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଏହା -6 । X-ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ପ୍ରଥମ *ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ଭୁଜ (Abscissa)* ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର Y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି Y-ଅକ୍ଷ ଦେଇ ମପାଯାଇଥିବା X-ଅକ୍ଷ ଠାରୁ ଏହାର ଲମ୍ବ ଦୂରତା(Y-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହିତ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ Y-ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ ସହିତ ଋଣାତ୍ମକ) । P ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଏହା + 3 ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଏହା -2 । Y-ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ *ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/କଟି(Ordinate)* ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(iii) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କହିବାରେ ପ୍ରଥମେ X-ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ପରେ Y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଆସେ । ଆମେ ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ରଖିଥାଉ ।

ତେଣୁ, P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (4,3) ଏବଂ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (-6, -2) ହୁଏ । ଧ୍ୟାନଦିଅ ଯେ, ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ଅନନ୍ୟ(*unique*) ଭାବରେ ବର୍ଣ୍ଣନା କରେ । (3,4) ବିନ୍ଦୁ ଓ (4,3) ବିନ୍ଦୁ ସମାନ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 1: ଚିତ୍ର 3.11 ଦେଖି ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣକର ।

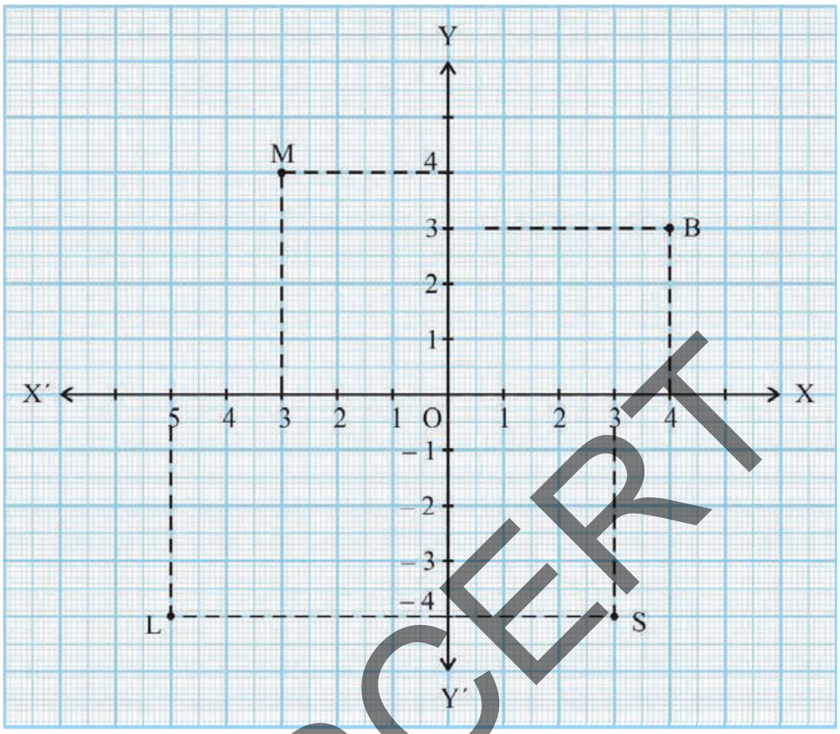
(i) B ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ(ଭୁଜ) ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ(କଟି) ଯଥାକ୍ରମେ ___ ଏବଂ___ , ହେଲେ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ B (__, __).

(ii) M ବିନ୍ଦୁର X- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ Y-- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ___ ଏବଂ___, ହେଲେ M ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ M (__, __).

(iii) L ବିନ୍ଦୁର X- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ Y-- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ___ ଏବଂ___, ହେଲେ Lର ସ୍ଥାନାଙ୍କ L (__, __).

(iv) S ବିନ୍ଦୁର X- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ Y-- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ___ ଏବଂ___, ହେଲେ S ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ S(__, __)

AP SCERT



ଚିତ୍ର 3.11

AP SCERT

ସମାଧାନ : (i) ଯେହେତୁ *y* –ଅକ୍ଷରୁ B ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା 4 ଏକକ, ତେଣୁ B ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ କିମ୍ବା X–ସ୍ଥାନାଙ୍କ 4 । X – ଅକ୍ଷରୁ B ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା 3 ଏକକ । ତେଣୁ B ବିନ୍ଦୁର ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ କିମ୍ବା Y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 3 । ତେବେ B ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (4, 3) ।

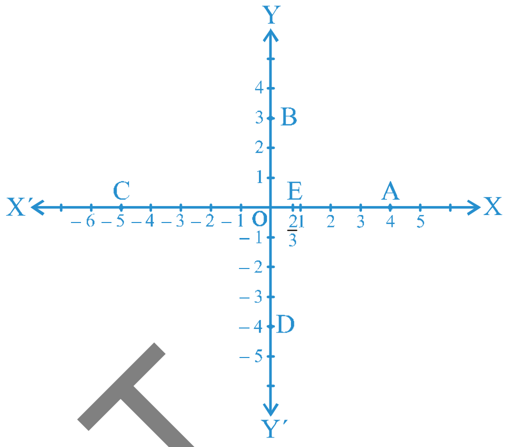
ଉପରୋକ୍ତ (i) ପରି :

(ii) M ବିନ୍ଦୁର x – ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ y – ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଏବଂ 4 । ତେଣୁ, M ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–3,4) ।

(iii) L ବିନ୍ଦୁର x – ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ y – ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –5 ଏବଂ –4 । ତେଣୁ, L ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–5,–4) ।

(iv) S ବିନ୍ଦୁର x – ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ y – ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ 3 ଏବଂ –4 । ତେଣୁ, S ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (3, –4) ।

ଉଦାହରଣ 2: ଚିତ୍ର 3.12 ର ଅକ୍ଷରେ ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖ ।



ଚିତ୍ର 3.12

ସମାଧାନ:

(i) A ବିନ୍ଦୁ Y - ଅକ୍ଷ ଠାରୁ + 4 ଏକକ ଦୂରରେ ଏବଂ X- ଅକ୍ଷରୁ ଶୂନ ଦୂରରେ ଥାଏ । ତେଣୁ A ର X- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 4 ଏବଂ Y - ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 । ତେଣୁ A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (4, 0) ।

(ii) B ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,3) । କାହିଁକି ?

(iii) C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (-5, 0) । କାହିଁକି ?

(iv) D ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,− 4) । କାହିଁକି?

(v) E ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ । କାହିଁକି ?

X − ଅକ୍ଷରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ X- ଅକ୍ଷରୁ କୌଣସି ଦୂରତାରେ ନଥିବା ଯୋଗୁଁ (ଶୂନ୍ୟ ଦୂରତା), X − ଅକ୍ଷରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର Y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସର୍ବଦା ଶୂନ । ତେଣୁ, X- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ରୂପ (x,0) ହୋଇଥାଏ, ଯେଉଁଠାରେ X ହେଉଛି Y−ଅକ୍ଷରୁ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା । ସେହିପରି Y −ଅକ୍ଷରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ରୂପ (0,y) ହୋଇଥାଏ । ଯେଉଁଠାରେ y ହେଉଛି X- ଅକ୍ଷରୁ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା । କାହିଁକି ?

ମୂଳବିନ୍ଦୁର O ସ୍ଥାନାଙ୍କ କ'ଣ ? *ଏହା ଉଭୟ ଅକ୍ଷରୁ ଶୂନ୍ୟ ଦୂରତାରେ ଥାଏ, ଯାହାଫଳରେ ଏହାର X- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ Y ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ହୁଏ । ତେଣୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 0) ।*

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ଗୁଡ଼ିକରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଚିହ୍ନ ଏବଂ କେଉଁ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ, ଏହି ସମ୍ପର୍କକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକରି ପାରିବ ।

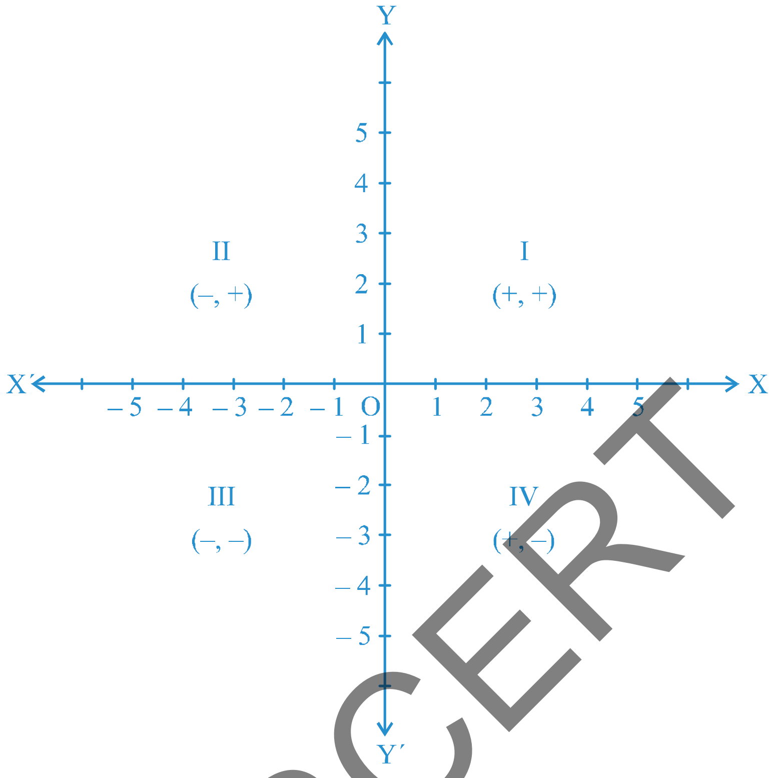
(i) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଥିଲେ, ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଚିହ୍ନ (+, +) ରୂପରେ ଥାଏ । ଯେହେତୁ ପ୍ରଥମ ପାଦଟି X- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଏବଂ Y- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଥାଏ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ ଥିଲେ, ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଚିହ୍ନ (−, +) ରୂପରେ ଥାଏ । ଯେହେତୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦଟି X- ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଏବଂ Y- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଥାଏ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ତୃତୀୟ ପାଦରେ ଥିଲେ, ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଚିହ୍ନ (−, −) ରୂପରେ ଥାଏ । ଯେହେତୁ ତୃତୀୟ ପାଦଟି X- ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଏବଂ Y- ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଥାଏ ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଚତୁର୍ଥ ପାଦରେ ଥିଲେ, ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଚିହ୍ନ (+, −) ରୂପରେ ଥାଏ । ଯେହେତୁ ଚତୁର୍ଥ ପାଦଟି X- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଏବଂ Y- ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଥାଏ । (ଚିତ୍ର 3.13 ଦେଖ)

AP SCERT



ଚିତ୍ର 3.13

AP SCERT

ମନ୍ତବ୍ୟ : ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁର ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ପାଇଁ ଉପର ଆଲୋଚିତ ପ୍ରଣାଳୀଟି କେବଳ ଏକ ପ୍ରଚଳନ, ଯାହା ସାରା ପୃଥିବୀରେ ଗ୍ରହଣୀୟ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଏହି ପ୍ରଣାଳୀଟି ଏପରି ମଧ୍ୟ ହୋଇଥାଇପାରେ ଯେ, ପ୍ରଥମେ କଟି(ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ଅର୍ଡିନେଟ୍) ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟରେ ଭୁଜ(ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ଏବ୍‌ସିସା) ନିଆଯାଇପାରେ । ତେବେ କୌଣସି ବି ଦ୍ୱନ୍ଦ୍ୱକୁ ଏଡ଼ାଇବା ପାଇଁ ଆମେ ଯେଉଁ ପ୍ରଣାଳୀଟି ଗ୍ରହଣ କରିଛୁ, ତା'ଉପରେ ସାରା ବିଶ୍ୱ ଅଟଳ ରହିଛି ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3.2

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଲେଖ ।
   (i) ଗୋଟିଏ କାର୍ଟୀଜିୟ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନକୁ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବାକୁ ଅଙ୍କନ କରାଯିବା ଆନୁଭୂମିକ ରେଖା ଏବଂ ଅନୁଲମ୍ବ ରେଖାର ନାମଲେଖ ।
   (ii) ଏହି ଦୁଇଟି ରେଖା ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସମତଳର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଂଶର ନାମ କ'ଣ ?
   (iii) ଏହି ଦୁଇଟି ରେଖା ପରସ୍ପର ଛେଦନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ନାମ ଲେଖ ।
2. ଚିତ୍ର 3.14 ଦେଖି ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଲେଖ ।
   (i) B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ
   (ii) C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ
   (iii) (–3, –5) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ ହୋଇଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି ।

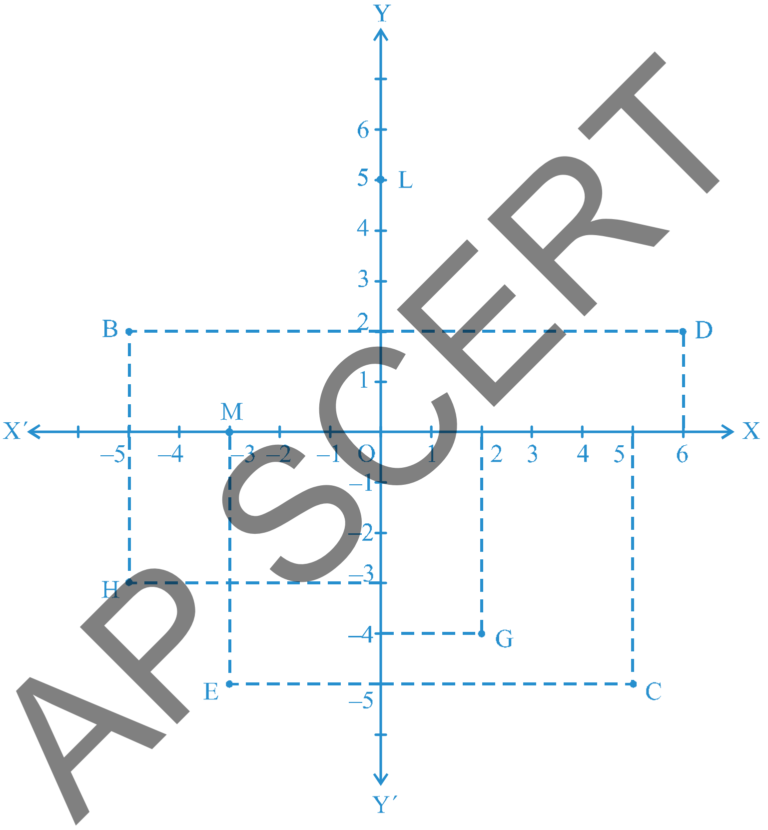
(iv) (2, −4) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ ହୋଇଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି ।

(v) D ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ଭୁଜ

(vi) H ବିନ୍ଦୁର ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/କୋଟି

(vii) L ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

(viii) M ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ



ଚିତ୍ର 3.14

3. ମ୍ୟାପ୍‌ର P(2,5) ବିନ୍ଦୁ ଉପରେ ଗୋଟିଏ କାର ଥିଲା । ଏହା P ବିନ୍ଦୁରୁ 3 ଏକକ ପୂର୍ବକୁ ଗତିକରି Q ବିନ୍ଦୁରେ ପହଁଞ୍ଚିଲା । ତେବେ Q ବିନ୍ଦୁଠାରେ କାର୍‌ର ନୂତନ ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ କ'ଣ?

A) (5,8) B) (5,5)

C) (-1,5) D) (-1, 8)

3.3 ମୁଖ୍ୟାଂଶ :

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ନିମ୍ନ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକ ଜାଣିବାକୁ ପାଇଲ ।:

1. ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁ ବା ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାପାଇଁ ଆମକୁ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଲମ୍ବରେଖା ଆବଶ୍ୟକ ହୋଇଥାଏ । ସେଥି ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଆନୁଭୂମିକ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି ଅନୁଲମ୍ବ ହୁଏ ।
2. ଏହି ସମତଳକୁ କାର୍ଟୀଜିୟ/କାର୍ଟେସିଆନ/ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ରେଖାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ।
3. ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାକୁ X - ଅକ୍ଷ ଏବଂ ଅନୁଲମ୍ବ ରେଖାକୁ Y - ଅକ୍ଷ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।
4. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକ ସମତଳକୁ ଚାରୋଟି ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ପାଦ କୁହାଯାଏ ।
5. ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକର ଛେଦନ ବିନ୍ଦୁକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।
6. y-ଅକ୍ଷଠାରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତାକୁ ସେହି ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ଭୁଜ/ଏବ୍‌ସିସା କୁହାଯାଏ ।
   x -ଅକ୍ଷଠାରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତାକୁ ସେହି ବିନ୍ଦୁର y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ/ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ/କୋଟି/ଅର୍ଡ଼ିନେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।
7. ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ x, ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ y ହେଲେ (x,y)କୁ ସେହି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।
8. x – ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, 0)$ ଏବଂ y – ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(0,y)$ ରୂପରେ ଥାଏ ।
9. ମୂଳବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(0, 0)$ ।
10. ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ

ପ୍ରଥମ ପାଦରେ (+, +) ରୂପରେ, ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ (–, +) ରୂପରେ,

ତୃତୀୟ ପାଦରେ (–,. –) ରୂପରେ ଏବଂ ଚତୁର୍ଥ ପାଦରେ (+,–) ରୂପରେ ଥାଏ ।

[+ ହେଉଛି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା, – ହେଉଛି ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା]

11. $x \neq y$ ହେଲେ $(x, y) \neq (y, x)$, ଏବଂ $x = y$ ହେଲେ $(x, y) = (y, x)$

AP SCERT

ଅଧ୍ୟାୟ 4

ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ

ବିଶ୍ଳେଷଣ କୌଶଳର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ହେଉଛି ଗାଣିତିକ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣରେ ପରିଣତ କରିବା ଏବଂ ସେହି ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସବୁଠୁ ସରଳ ରୂପରେ ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା ।

–ଏଡ୍‌ମଣ୍ଡ୍ ହେଲି

4.1 ଉପକ୍ରମ :

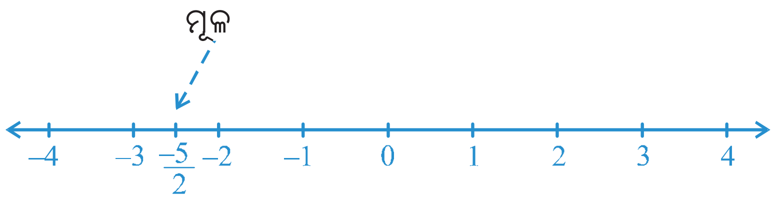
ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ ବିଷୟରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଅଛ । ତୁମେ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖି ପାରିବ କି ? ତୁମେ କହିପାରିବ ଯେ $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ ଏବଂ $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ ଇତ୍ୟାଦି ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ । ଏହିଭଳି ରେଖୀୟ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଅନନ୍ୟ (unique) ସମାଧାନ ରହିଥାଏ ବୋଲି ତୁମେ ଜାଣ । ସେହି ସମାଧାନଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କିପରି ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ ମଧ୍ୟ ତୁମେ ଜାଣ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଧାରଣାକୁ ମନେପକାଇବା ଏବଂ ଏହାକୁ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣକୁ ବିସ୍ତାରିତ କରିବା । ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଥାଏ କି ? ହଁ, ତେବେ ଏହା ଅନନ୍ୟ କି ? କାର୍ଟିଜିୟନ୍ ସମତଳରେ ଏହାର ସମାଧାନ କିପରି ଥାଏ ? ଏହିଭଳି ଅନେକ ପ୍ରଶ୍ନ ଉପୁଜିଥାଏ । ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ତୁମେ ଅଧ୍ୟାୟ 3 ରେ ଶିଖିଥିବା ଧାରଣାଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ ।

4.2 ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ :

ତୁମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁଦ୍ଧା ଯାହାସବୁ ଶିଖିଲ ଥରେ ମନେପକାଇବା ଆସ । ନିମ୍ନ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

$$2x+5=0$$

ଏହାର ସମାଧାନ ହେଉଛି ସମୀକରଣର ମୂଳ ଅର୍ଥାତ୍ $-\frac{5}{2}$ । ଏହାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ନିମ୍ନଭଳି ଦର୍ଶାଯାଇପାରିବ



ଚିତ୍ର 4.1

APSCERT

ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କଲାବେଳେ, ନିମ୍ନ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକ ମନେରଖିବା ଉଚିତ୍ :

ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପ୍ରଭାବିତ ହୁଏ ନାହିଁ ।

1. ସମୀକରଣର ଉଭୟପଟେ ଏକା ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ (କିମ୍ବା ବିୟୋଗ) କଲେ ।

2. ସମୀକରଣର ଉଭୟପଟେ ଏକା ଅଣଶୂନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କିମ୍ବା ହରଣ କଲେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ନାଗପୁରରେ ଭାରତ ଓ ଶ୍ରୀଲଙ୍କା କ୍ରିକେଟ୍ ଦଳ ମଧ୍ୟରେ ହୋଇଥିବା ଏକ ଦିନିକିଆ ଅନ୍ତର୍ଜାତୀୟ କ୍ରିକେଟ୍ ମ୍ୟାଚ୍‌ରେ ଦୁଇଜଣ ଭାରତୀୟ ଖେଳାଳୀ ମିଶି ହାସଲ କରିଥିବା ରନ୍ 176 । ଏହି ତଥ୍ୟର ସମୀକରଣ ରୂପ ପ୍ରକାଶ କର ।

ଏଠାରେ ଦୁଇଜଣ ଖେଳାଳୀଙ୍କ ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ରନ୍ ଆମେ ଜାଣିନାହୁଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ରହିଛି । ଏହି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ପାଇଁ x ଏବଂ y କୁ ବ୍ୟବହାର କରିବା । ଏଥିରୁ ଜଣେ ଖେଳାଳୀ କରିଥିବା ରନ୍‌କୁ x ରୂପେ ଏବଂ ଅନ୍ୟଜଣ ଖେଳାଳୀ କରିଥିବା ରନ୍‌କୁ y ରୂପେ ନେବା । ଆମେ ଜାଣୁ

$$x + y = 176,$$

ଏହା ହିଁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମୀକରଣ ।

ଏହା ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଏକ ଉଦାହରଣ । ଏହିଭଳି ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକରେ x ଏବଂ y କୁ ଚଳରାଶି ରୂପେ ନିଆଯାଇଥାଏ ତଥାପି ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଅକ୍ଷରଗୁଡ଼ିକୁ ମଧ୍ୟ ଆମେ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବା । ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର କେତେକ ଉଦାହରଣ ହେଲା :

$1.2s + 3t = 5$, $p + 4q = 7$, $\pi u + 5v = 9$ ଏବଂ $3 = \sqrt{2}\,x - 7y$.

ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣକୁ ଯଥାକ୍ରମେ $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ ଏବଂ $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ ରୂପେ ଲେଖି ପାରିବ ।

ଅତଏବ, ଯେକୌଣସି ସମୀକରଣକୁ $ax + by + c = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିଲେ, ତାହାକୁ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ a, b ଓ c ସ୍ଥିରରାଶି ଏବଂ a, b ଏକା ସମୟରେ ଶୂନ ହେବା ଅନୁଚିତ । ଏଥିରୁ ତୁମେ ଏହିଭଳି ଅନେକ ସମୀକରଣ ଚିନ୍ତା କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ 1: ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ $ax + by + c = 0$ ରୂପରେ ଲେଖ । ପ୍ରତି ସମୀକରଣରେ a,b,c ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

ସମାଧାନ :

(i) ସମୀକରଣ $2x + 3y = 4.37$ କୁ $2x + 3y - 4.37 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।
ଏଠାରେ $a = 2, b = 3$ ଏବଂ $c = -4.37$

(ii) ସମୀକରଣ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ କୁ $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।
ଏଠାରେ $a = 1, b = -\sqrt{3}$ ଏବଂ $c = -4$

(iii) ସମୀକରଣ $4 = 5x - 3y$ କୁ $5x - 3y - 4 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।
ଏଠାରେ $a = 5, b = -3$ ଏବଂ $c = -4$
ଏହାକୁ $-5x + 3y + 4 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ତୁମେ ଏଥିରେ ଏକମତ କି ?
ଏଠାରେ $a = -5, b = 3$ ଏବଂ $c = 4$

AP SCERT

(iv) ସମୀକରଣ $2x = y$ କୁ $2x - y + 0 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ଏଠାରେ $a = 2, b = -1$ ଏବଂ $c = 0$ ।

$ax + b = 0$ ରୂପରେ ଥିବା ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ । କାରଣ ଏହାକୁ ଏହିଭଳି ଲେଖିପାରିବା ।

$$ax + 0.y + b = 0$$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: $4 - 3x = 0$ କୁ $-3x + 0.y + 4 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ 2 : ନିମ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ ରୂପେ ଲେଖ ।

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ସମାଧାନ : (i) $x = -5$ କୁ $1.x + 0.y = -5$, କିମ୍ବା $1.x + 0.y + 5 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

(ii) $y = 2$ କୁ $0.x + 1.y = 2$, କିମ୍ବା $0.x + 1.y - 2 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

(iii) $2x = 3$ କୁ $2x + 0.y - 3 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

(iv) $5y = 2$ କୁ $0.x + 5y - 2 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 4.1

1. ଗୋଟିଏ ଖାତାର ମୂଲ୍ୟ, ଗୋଟିଏ କଲମର ମୂଲ୍ୟର ଦୁଇଗୁଣ । ଏହି ଉକ୍ତିକୁ ନେଇ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ ଲେଖ ।

   (ଧରିନିଅ ଖାତାରମୂଲ୍ୟ ₹x ଏବଂ କଲମର ମୂଲ୍ୟ ₹y)

2. ନିମ୍ନ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ $ax + by + c = 0$ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ଏବଂ ପ୍ରତି ସନ୍ଦର୍ଭରେ a, b, c ର ମୂଲ୍ୟ ଚିହ୍ନଟ କର ।

   (i) $2x + 3y = 9.3\bar{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ

ତୁମେ ଦେଖିଲ ଯେ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଅଦ୍ୱିତୀୟ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ । ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବିଷୟରେ ତୁମେ କଣ କହିପାରିବ ? ଏଠାରେ ଦୁଇଟି ଚଳରାଶି ଥିବା ଯୋଗୁଁ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣକୁ ସଂତୁଷ୍ଟ କରୁଥିବା ଭଳି x ଏବଂ y ର ମୂଲ୍ୟ ଯୋଡ଼ିକୁ ଏହାର ସମାଧାନ କୁହାଯାଏ । ଧରିନିଅ ସମୀକରଣ $2x + 3y = 12$ । ଏଠାରେ $x = 3$ ଏବଂ $y = 2$ ହେଉଛି ଏହାର ସମାଧାନ । କାରଣ $x = 3$ ଏବଂ $y = 2$ ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

ଏହି ସମାଧାନକୁ ପ୍ରଥମେ x ର ମୂଲ୍ୟ, ପରେ y ର ମୂଲ୍ୟକୁ ନେଇ (3,2) କ୍ରମଯୋଡ଼ି ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ସେହିଭଳି (0, 4) ମଧ୍ୟ ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହୁଏ ।

AP SCERT

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରେ $(1, 4)$ କ୍ରମଯୋଡ଼ି $2x + 3y = 12$ ର ସମାଧାନ ହୁଏ ନାହିଁ । $x = 1$ ଏବଂ $y = 4$ କୁ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ ଆମେ $2x + 3y = 14$ ପାଇବା । ଏହା 12 ସହ ସମାନ ନୁହେଁ । ମନେରଖ ଯେ $(0, 4)$ ହେଉଛି ଏହାର ସମାଧାନ କିନ୍ତୁ $(4, 0)$ ନୁହେଁ ।

$2x + 3y = 12$ ର ଅନ୍ତତଃ ଦୁଇଟି ସମାଧାନ ଦେଖିଲ ଅର୍ଥାତ୍ (3,2) ଏବଂ (0,4) । ତୁମେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ କି ? (6,0) ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ହୁଏ ବୋଲି ତୁମେ ଏକମତ କି ? ଉପରୋକ୍ତ ଭାବେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର । ବାସ୍ତବରେ ଏହି ପଦ୍ଧତି ଅନୁଯାୟୀ ଅନେକ ସମାଧାନ ପାଇବା । $2x + 3y = 12$ ରେ x ପାଇଁ କୌଣସି ଏକ ମୂଲ୍ୟ ନିଅ । (ଧରିନିଅ $x = 2$), ତେବେ ତାହା ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ $4 + 3y = 12$ ରୂପେ ପରିଣତ ହୁଏ । ଏହାର ସମାଧାନ $y = \frac{8}{3}$ ହୁଏ । ତେଣୁ $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ କ୍ରମଯୋଡ଼ି $2x + 3y = 12$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ହୁଏ । ସେହିଭଳି $x = -5$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି $-10 + 3y = 12$ ରୂପେ ପରିଣତ ହୁଏ । ତେବେ $y = \frac{22}{3}$ ହୁଏ । ତେଣୁ $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ କ୍ରମଯୋଡ଼ି $2x + 3y = 12$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ହୁଏ । ତେଣୁ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ବିଭିନ୍ନ ଅସୀମ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 3 : $x + 2y = 6$ ର ଚାରୋଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ $x = 2$ ଏବଂ $y = 2$ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ହୁଏ ।
କାରଣ $x = 2, y = 2$ ପାଇଁ

$$x + 2y = 2 + 4 = 6 \text{ ହୁଏ ।}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଧରିନିଅ $x = 0$ । ତେବେ ସମୀକରଣଟି $2y = 6$ ରୂପେ ରୂପାନ୍ତର ହୁଏ । $y = 3$ ହେଉଛି ଏହାର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ । ତେଣୁ, $x = 0, y = 3$ ହେଉଛି $x + 2y = 6$ ର ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ । ସେହିଭଳି $y = 0$ ହେଲେ $x = 6$ ହୁଏ । ତେଣୁ $x = 6, y = 0$ ହେଉଛି $x + 2y = 6$ ର ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ । $y = 1$ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $x + 2 = 6$ ରୂପେ ରୂପାନ୍ତର ହୁଏ,ଏଣୁ $x = 4$ ଆସେ । ଅତଏବ $(4, 1)$ ମଧ୍ୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହେବ । ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଚାରୋଟି ସମାଧାନ ହେଲା

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ ଏବଂ } (4, 1)$$

AP SCERT

ସୂଚନା : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଯୋଡ଼ି ସହଜରେ ପାଇବା ପାଇଁ $x = 0$ ନେଇ ଅନୁରୂପ y ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ $y = 0$ ନେଇ ଅନୁରୂପ x ର ମୂଲ୍ୟ ପାଇପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ 4 : ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପ୍ରତି ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

ସମାଧାନ : (i) $x = 0$ ଧରିନେଲେ ଆମେ $3y = 12$ ପାଉ, ଅର୍ଥାତ୍ $y = 4$ । ତେଣୁ $(0, 4)$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହୁଏ । $y = 0$ ନେଲେ ଆମେ $x = 3$ ପାଇବା । ତେଣୁ $(3, 0)$ ମଧ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ।

(ii) $x = 0$ ନେଲେ ଆମେ $5y = 0$ ପାଇବା । ଅର୍ଥାତ୍ $y = 0$ ତେଣୁ $(0, 0)$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହୁଏ । ସେହିଭଳି $y = 0$ ନେଲେ ଆମେ $x = 0$ ପାଉ । ଏଠାରେ $(0,0)$ ପୂର୍ବ ଭଳି ଏକ ସମାଧାନ ଅଟେ । ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ପାଇଁ $x = 1$ ନିଅ । ତୁମେ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବ ଯେ y ର ଅନୁରୂପ ମୂଲ୍ୟ $-\frac{2}{5}$ ହୁଏ । ତେଣୁ ସମୀକରଣ $2x + 5y = 0$ ର $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ଅଟେ ।

(iii) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $3y + 4 = 0$ କୁ $0.x + 3y + 4 = 0$ ରୂପେ ଲେଖିଲେ x ର ଯେକୌଣସି ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $y = -\frac{4}{3}$ ହୁଏ । ତେବେ $\left[0, -\frac{4}{3}\right]$ ଏବଂ $\left[1, -\frac{4}{3}\right]$ ଦୁଇଟି ସମାଧାନ ହୁଏ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 4.2

1. ନିମ୍ନରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ଓ କାହିଁକି ?

ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ $y = 3x + 5$ ର

(i) ଅଦ୍ୱିତୀୟ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ (ii) କେବଳ ଦୁଇଟି ସମାଧାନ ରହିଥାଏ (iii) ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ

2. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣର ଚାରୋଟି ଲେଖାଏଁ ସମାଧାନ ଲେଖ ।

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. ନିମ୍ନରୁ କେଉଁଟି $x - 2y = 4$ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହୁଏ ? ଏବଂ କେଉଁଟି ନୁହେଁ ?

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. $2x + 3y = k$ ର $x = 2, y = 1$ ସମାଧାନ ହେଲେ k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4.4 ମୁଖ୍ୟାଂଶ :

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଯାହାସବୁ ଶିଖିଲେ :

1. ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ $ax + by + c = 0$ । ଏଠାରେ a, b ଓ c ସ୍ଥିରରାଶି ଏବଂ a, b ଏକା ସମୟରେ ଶୂନ ହେବା ଅନୁଚିତ ।

2. ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ ।

3. ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣ ଲେଖଚିତ୍ରରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହୁଏ । ସେଇଭଳି ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖୀୟ ସମୀକରଣର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାଧାନ ଲେଖଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ ।

AP SCERT

E8I3P7

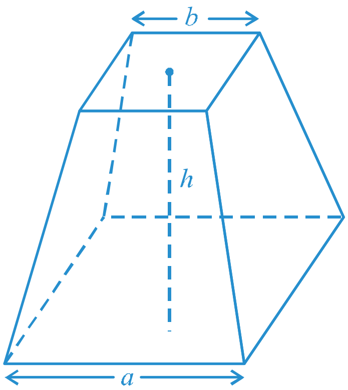
ଅଧ୍ୟାୟ 5

ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ପରିଚୟ

5.1 ଉପକ୍ରମ

ଜ୍ୟାମିତି (geometry) ନାମକ ପଦଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଭାଷାରୁ ଉଦ୍ଧୃତ । "ଜିୟୋ" (geo) ମାନେ ଭୂମି ଏବଂ "ମେଟ୍ରିନ୍" (metrein) ମାନେ ମାପିବା । ଜମି ମାପିବାର ଆବଶ୍ୟକତାକୁ ନେଇ ଜ୍ୟାମିତିର ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଜଣାଯାଏ । ଗଣିତର ଏହି ଶାଖା ଇଜିପ୍ଟ, ବାବିଲୋନିଆ, ଚୀନ, ଭାରତ, ଗ୍ରୀସ୍, ଇନ୍‌କାସ୍ ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରାଚୀନ ସଭ୍ୟତାରେ ବିଭିନ୍ନ ରୂପରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରାଯାଉଥିଲା । ଏହି ସଭ୍ୟତାର ଲୋକମାନେ ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ଅନେକ ପ୍ରକାର ସମସ୍ୟାର ସମ୍ମୁଖୀନ ହେଉଥିଲେ । ଉକ୍ତ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଜ୍ୟାମିତିର ବିକାଶ ଘଟିଥିଲା ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଅନେକ ସମୟରେ ନୀଳନଦୀର ବନ୍ୟାଜଳ ପ୍ଲାବନ ଯୋଗୁଁ ଏହାର ଉପକୂଳବର୍ତ୍ତୀ ଜମିଗୁଡ଼ିକର ସୀମା ଉଭେଇ ଯାଉଥିଲା । ଉକ୍ତ ସୀମାଗୁଡ଼ିକୁ ପୁଣି ଚିହ୍ନଟ କରିବାକୁ ହେଉଥିଲା । ଏହି କାରଣରୁ ଇଜିପ୍ଟବାସୀ(ମିଶରବାସୀ) ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନେକ ସରଳ ଗଣନା ପଦ୍ଧତି ବାହାର କରି ସୀମାଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନଃନିର୍ମାଣ କରୁଥିଲେ । ଜ୍ୟାମିତୀୟ ଜ୍ଞାନ କୌଶଳ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଶସ୍ୟ ଭଣ୍ଡାର ଗୃହଗୁଡ଼ିକର ଆୟତନ ଗଣନା କରୁଥିଲେ ଏବଂ କେନାଲ ଓ ପିରାମିଡ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ନିର୍ମାଣ ମଧ୍ୟ କରୁଥିଲେ । ଏହା ସହିତ ସଠିକ୍ ସୂତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଟ୍ରାନ୍‌କେଟଡ୍ (ଶୀର୍ଷଖଣ୍ଡିତ/ଅଗ୍ର ବିହୀନ) ପିରାମିଡ୍‌ର(ଚିତ୍ର 5.1 ଦେଖ) ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରିବା ଜାଣିଥିଲେ । ତୁମେ ଜାଣ ଯେ ପିରାମିଡ୍ ହେଉଛି ଏକ ଘନାକାର ବସ୍ତୁ, ଯାହାର ଭୂମି ତ୍ରିଭୁଜାକାର କିମ୍ବା ବର୍ଗାକାର କିମ୍ବା ବହୁଭୁଜ ଆକାରରେ ରହି ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱ ଧାରଗୁଡ଼ିକ ତ୍ରିଭୁଜାକାରରେ ରହି ଏକ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଶିଥାଏ ।



ଚିତ୍ର 5.1 : ଶୀର୍ଷଖଣ୍ଡିତ ପିରାମିଡ୍

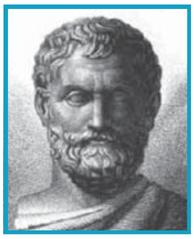
AP SCERT

ଭାରତ ଉପମହାଦେଶରେ ହରପ୍ପା, ମହେଞ୍ଜୋଦାର୍ ଆଦି ଅଞ୍ଚଳରେ କରାଯାଇଥିବା ଖନନରୁ ସେଠାରେ ବସବାସକରୁଥିବା ସିନ୍ଧୁ ଉପତ୍ୟକା ସଭ୍ୟତା (ଖ୍ରୀ.ପୂ.3000) ଦ୍ୱାରା ଜ୍ୟାମିତିର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୋଇଥିବା ଜଣାଯାଉଛି । ଏହି ସଭ୍ୟତା ଏକ ସୁସଂଗଠିତ ସମାଜ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିଥିବା ମଧ୍ୟ ଜଣାଯାଏ ଏବଂ ସେଠାକାର ସହରଗୁଡ଼ିକ ଯୋଜନାବଦ୍ଧ ଏବଂ ବହୁ ବିକଶିତ ଥିଲା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ରାସ୍ତାଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପରକୁ ସମାନ୍ତରରେ ରହି ଭୂଗର୍ଭ ଜଳ ନିଷ୍କାସନ ବ୍ୟବସ୍ଥାଯୁକ୍ତ କେନାଲଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ମାଣ ହୋଇଥିଲା । ବିଭିନ୍ନ ଆକାରର କକ୍ଷଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗୃହଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ମାଣ ହୋଇଥିବା ଦେଖାଯାଏ । ଏଥିରୁ ସହର ବାସିନ୍ଦାଙ୍କର ପାଟୀଗଣିତ ଓ ପରିମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ଞାନ କୌଶଳ ବିଶେଷ ଭାବରେ ଥିବା ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ । ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା 4:2:1 ଅନୁପାତରେ ଥିବା ଇଟାଗୁଡ଼ିକ ଭାଟିରେ ପୋଡ଼ି ବିଭିନ୍ନ ନିର୍ମାଣରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଉଥିଲା ।

ପ୍ରାଚୀନ ଭାରତରେ ଶୁଲ୍ବସୂତ୍ର (ଖ୍ରୀ.ପୂ. 300 ରୁ ଖ୍ରୀ.ପୂ. 500) କୁ ଆଧାର କରି ଜ୍ୟାମିତୀୟ ନିର୍ମାଣଗୁଡ଼ିକ କରାଯାଉଥିଲା । ବୈଦିକ ଯୁଗର ନୀତିକାନ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ସମ୍ପନ୍ନ କରିବା ପାଇଁ କରାଯାଉଥିବା ଯଜ୍ଞବେଦି ଏବଂ ହୋମକୁଣ୍ଡ ନିର୍ମାଣ କାର୍ଯ୍ୟରୁ ବୈଦିକ ଯୁଗରେ ଜ୍ୟାମିତିର ଅୟମାରମ୍ଭ ହୋଇଥିଲା । ବୈଦିକ କର୍ମଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଭାବଶୀଳ ହେବାପାଇଁ ଯଜ୍ଞସ୍ଥାନ, ହୋମକୁଣ୍ଡର ଆକାର,ପରିମାଣ ବେଦରେ ସ୍ପଷ୍ଟ ରୂପେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ସୂଚନା ଅନୁଯାୟୀ ରହିବା ଆବଶ୍ୟକ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥିଲା । ଗୃହରେ ନିଷ୍ଠାରସହ ପୂଜା ଉପସନା ଚଳାଇବା ପାଇଁ ବର୍ଗାକାର ଏବଂ ବୃତ୍ତାକାର ବେଦିର ବ୍ୟବହାର କରିବାବେଳେ ଜନସାଧାରଣଙ୍କ ସାମୂହିକ ପୂଜାର୍ଚ୍ଚନା ପାଇଁ ଆୟତାକାର, ତ୍ରିଭୁଜାକାର, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ମିଳିତ ଆକୃତିର ବେଦି ଆବଶ୍ୟକ କରୁଥିଲେ । ଶ୍ରୀଯନ୍ତ୍ର (ଅଥର୍ବ ବେଦରେ ଦିଆଯାଇଛି) ପରସ୍ପର ମଧ୍ୟରେ ଛନ୍ଦି ହୋଇ ଥିବା ୨ଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜକୁ ନେଇ ଗଠିତ । ଏହି ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକ ଏମିତି ସଜ୍ଜିତ ହୋଇଥାଏ ଯେ,ସେଥିରେ 43ଟି ଉପ ତ୍ରିଭୁଜ ରହିଥାଏ । ଯଦିଓ ଯଜ୍ଞବେଦିଗୁଡ଼ିକର ନିର୍ମାଣ ପାଇଁ ସଠିକ୍ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରାଯାଉଥିଲା ସେଗୁଡ଼ିକର ନେପଥ୍ୟରେ ଥିବା ମୂଳନୀତିଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉନଥିଲା ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରୁ ଜାଣିହୁଏ ଯେ,ଜ୍ୟାମିତିର କ୍ରମ ବିକାଶଘଟି ସାରା ପୃଥିବୀରେ ଏହା ଖେଳିଯାଇଥିଲା। କିନ୍ତୁ ଏହା ଅନିୟମିତ ଭାବରେ ହେଉଥିଲା । ଏଠାରେ ଆସକ୍ତିକର ବିଷୟ ହେଉଛି ଜ୍ୟାମିତିର ଏହି ବିକାଶଧାରା ପ୍ରାଚୀନ ଜଗତରେ ଗୋଟିଏ ପୀଢ଼ିରୁ ଅନ୍ୟ ପୀଢ଼ିକୁ ଧାରାବାହିକ ଭାବେ ମୌଖିକ କିମ୍ବା ତାଳପତ୍ର ବାର୍ତ୍ତା କିମ୍ବା ଅନ୍ୟ ଉପାୟରେ ପ୍ରେରଣ ହେଉଥିଲା । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ପ୍ରତୀତ ହୁଏ ଯେ ଭାରତ ଏବଂ ରୋମ୍ ସଦୃଶ ବାବିଲୋନିଆ ଭଳି କେତେକ ସଭ୍ୟତାରେ ଜ୍ୟାମିତି ବାସ୍ତବ ଜୀବନର ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଅବିଚ୍ଛେଦ୍ୟ ବିଷୟ ରୂପେ ରହିଥିଲା । ମିଶର ସଭ୍ୟତା ଦ୍ୱାରା ବିକଶିତ ଜ୍ୟାମିତିକୁ ମୁଖ୍ୟତଃ ପ୍ରମାଣଯୋଗ୍ୟ ସାମାନ୍ୟକଥନ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଉଥିଲା । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାର କୌଣସି ସାଧାରଣ ନିୟମ ନଥିଲା । ପ୍ରକୃତରେ ବାବିଲୋନିୟା ଓ ଇଜିପ୍ଟର ଲୋକେ ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରୁଥିଲେ କିନ୍ତୁ ଏହାକୁ ଏକ ବିଜ୍ଞାନର ରୂପ ଦେବାକୁ ସେମାନଙ୍କର ଅବଦାନ ଅତିକମ୍ ଥିଲା । କିନ୍ତୁ ଗ୍ରୀକ୍ ଲୋକେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କେତେକ ନିର୍ମାଣ ବା ଅଙ୍କନ ଉପଯୋଗୀ ହେବା ପଛରେ ଥିବା କାରଣକୁ ବିଶେଷ ଗୁରୁତ୍ୱ ପ୍ରଦାନ କରୁଥିଲେ । ନିଜେ ଗ୍ରୀକ୍‌ମାନେ ନିଗମନ ପ୍ରଣାଳୀ ଯୁକ୍ତି ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କାର କରିଥିବା ସାମାନ୍ୟ କଥନଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ପାଇଁ ସର୍ବଦା ଉତ୍ସାହୀ ଥିଲେ (ପରିଶିଷ୍ଟ 1 ଦେଖ) ।

ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଥାଲେସ୍‌ଙ୍କୁ ସର୍ବପ୍ରଥମ ପ୍ରମାଣ କରିଥିବା ଶ୍ରେୟ ଦିଆଯାଏ । ଏହି ପ୍ରମାଣର ସାମାନ୍ୟକଥନ ହେଲା "ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ତାର ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ଭାଗରେ (ସମାନ ଦୁଇ ଭାଗରେ) ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । ଥାଲେସ୍‌ଙ୍କ ଖ୍ୟାତନାମା ଅନ୍ୟତମ ଶିଷ୍ୟ ପିଥାଗରସ୍ (ଖ୍ରୀ.ପୂ.572) ବିଷୟରେ ତୁମେ ଶୁଣିଥିବ । ପିଥାଗୋରସ୍ ଏବଂ ତାଙ୍କ ଦଳ ମିଶି ଅନେକ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ନିୟମ ଲୋକଲୋଚନକୁ ଆଣିଥିଲେ ଏବଂ ବହୁ ସଂଖ୍ୟକ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ବିକଶିତ କରିଥିଲେ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ଖ୍ରୀ.ପୂ. 300 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରନ୍ତରଭାବେ ଚାଲୁରହିଥିଲା । ସେହି ସମୟରେ ଇଜିପ୍ଟ୍‌ର ଆଲେକଜାଣ୍ଡ୍ରିୟାରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ରୂପେ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଥିବା ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ତତ୍‌କାଳୀନ ସମସ୍ତ ଜ୍ୟାମିତି ତଥ୍ୟକୁ ସଂଗ୍ରହ କରି ତାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ରଚନା କରାଯାଇଥିବା "ଏଲୀମେଣ୍ଟ୍‌ସ" ନାମକ ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ ଗ୍ରନ୍ଥରେ ସ୍ଥାନିତ କରିଥିଲେ ।



ଥେଲସ୍

(ଖ୍ରୀ.ପୂ.**640**– ଖ୍ରୀ.ପୂ.**546**)

ଚିତ୍ର **5.2**

AP SCERT

ସେ 'ଏଲିମେଣ୍ଟ୍‌ସ' ନାମକ ଗ୍ରନ୍ଥକୁ 13ଟି ଅଧ୍ୟାୟରେ ବିଭକ୍ତ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଧ୍ୟାୟକୁ ଗୋଟିଏ ବହିର ରୂପ ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ । ଏହି ବହିଗୁଡ଼ିକ ସାରା ପୃଥିବୀରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପୀଢ଼ିର ଲୋକମାନେ ଜ୍ୟାମିତିକୁ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରିବାରେ ପ୍ରଭାବିତ କରିଥିଲା । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ପଦ୍ଧତି ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରି ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଚଳିତ ଜ୍ୟାମିତି ସହ ଏହା ସଂଯୋଗ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ୟୁକ୍ଲିଡ୍ (ଖ୍ରୀ.ପୂ. **325** –ଖ୍ରୀ.ପୂ. **265**)

ଚିତ୍ର 5.3

5.2 ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସଂଜ୍ଞା, ଅଭିଗୃହୀତ ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ

ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସମୟର ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ 'ଜ୍ୟାମିତି' କୁ ସେମାନେ ବାସକରୁଥିବା ପୃଥିବୀର ଏକ ଅମୂର୍ତ୍ତ ନମୂନା ବୋଲି ଭାବୁଥିଲେ । ତାଙ୍କ ଚାରିପଟେ ଥିବା ପରିସରରୁ ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା, ସମତଳ (ପୃଷ୍ଠତଳ) ଭଳି ଅନେକ କାଳ୍ପନିକ ଚିନ୍ତାଧାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିଲା । ପରିବେଶରେ ଥିବା ଘନପଦାର୍ଥ ଏବଂ ଅନ୍ତରାଳ ଅଧ୍ୟୟନରୁ ଘନପଦାର୍ଥର ଅମୂର୍ତ୍ତ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ଧାରଣା ବିକଶିତ ହୋଇଥିଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନପଦାର୍ଥର ଆକାର, ପରିମାଣ ଏବଂ ଅବସ୍ଥିତି ଥାଏ, ଏବଂ ଏହା ସ୍ଥାନ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରେ । ଏହାର ସୀମାଗୁଡ଼ିକୁ **ପୃଷ୍ଠତଳ** କୁହାଯାଏ । ଏହି ପୃଷ୍ଠତଳ ଶୂନ୍ୟ ପ୍ରଦେଶର ଏକ ଅଂଶରୁ ଅନ୍ୟ ଅଂଶକୁ ଅଲଗା କରାଏ । ଏହି ପୃଷ୍ଠତଳଗୁଡ଼ିକର ବେଧ (ବହଳା) ନଥାଏ । ପ୍ରତି ପୃଷ୍ଠତଳର ସୀମାରୂପେ **ବକ୍ରରେଖା** କିମ୍ବା **ସରଳରେଖା** ରହିଥାଏ । ଏହି ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ଏକ **ବିନ୍ଦୁ**ଠାରେ ଶେଷ ହୁଏ ।

ଘନପଦାର୍ଥରୁ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ତିନୋଟି ପର୍ଯ୍ୟାୟ / ସୋପାନକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର । (ଘନ-ସମତଳ-ରେଖା-ବିନ୍ଦୁ) ପ୍ରତି ସୋପାନରେ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ମାପ ହରାଇଥାଉଁ । ତେଣୁ ଘନପଦାର୍ଥର ତିନୋଟି ମାପ ରହିଥାଏ । ସମତଳର ଦୁଇଟି ମାପ ରହିଥିବା ବେଳେ ସରଳରେଖାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମାପ ରହିଥାଏ ଏବଂ ବିନ୍ଦୁର କୌଣସି ମାପ ନଥାଏ । ଇୟୁକ୍ଲିଡ୍ ଏହି ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ କରି ସଂଜ୍ଞାର ରୂପ ଦେଇଥିଲେ । ସେ 'ଏଲିମେଣ୍ଟ୍‌ସ' ଗ୍ରନ୍ଥରେ ଥିବା ପ୍ରଥମ ବହିରେ 23ଟି ସଂଜ୍ଞା ତାଲିକାଭୁକ୍ତ କରିଥିଲେ । ସେଥିମଧ୍ୟରୁ କେତୋଟି ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

1. **ବିନ୍ଦୁ** ଏହା ଯାହାର କିଛି ଅଂଶ ନଥାଏ ।
2. **ରେଖା** ହେଉଛି ପ୍ରସ୍ଥ ବିହୀନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ
3. ଗୋଟିଏ ରେଖାର ଅନ୍ତଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି ବିନ୍ଦୁ
4. **ସରଳରେଖା** ହେଉଛି ଏକ ରେଖା ଯହିଁରେ ନିଜ ଉପରେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ସମଭାବରେ ରହିଥାଏ ।
5. **ସମତଳ** ଏହା ଯାହାର କେବଳ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ହିଁ ରହିଥାଏ ।
6. ସମତଳର ଧାରଗୁଡ଼ିକ ରେଖା ଅଟେ ।
7. **ସମତଳପୃଷ୍ଠ** ହେଉଛି ଏକ ସମତଳ ଯେଉଁଥିରେ ନିଜ ଉପରେ ସରଳରେଖାଗୁଡ଼ିକ ସହିତ ସମଭାବରେ ରହିଥାଏ ।

ତୁମେ ଧ୍ୟାନର ସହ ଏହି ସଂଜ୍ଞାଗୁଡ଼ିକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କଲେ ସ୍ପଷ୍ଟଭାବେ ଆଉ କିଛି ଅଧିକ ବିବରଣୀ ଆବଶ୍ୟକ ହେଉଥିବା ପଦ ଯଥା ଅଂଶ, ପ୍ରସ୍ଥ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସମ ଭାବେ ଇତ୍ୟାଦି ଦେଖି ପାରିବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 'ବିନ୍ଦୁ' ର ସଂଜ୍ଞାକୁ ଧରିନିଅ । ବିନ୍ଦୁର ସଂଜ୍ଞାକୁ ଧରିନେଲେ ଏଥିରେ ଥିବା 'ଅଂଶ' କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । 'ଅଂଶ' ପଦଟିର ସଂଜ୍ଞା ଦେବାକୁ ହେଲେ ସେଥିରୁ ଅଂଶ ଦଖଲ କରିଥିବା କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସଂଜ୍ଞା ଦେବାକୁ ହୁଏ । ଏହିଭଳି ଗୋଟିଏ ପଦର ସଂଜ୍ଞା ଦେବାକୁ ହେଲେ କ୍ରମାଗତ ଭାବେ ଅନେକ ପଦର ସଂଜ୍ଞା ଅସୀମ ଭାବେ ଦେବାର ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଥାଏ । ଏହି କାରଣରୁ କେତେକ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ପଦକୁ ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ଭାବେ ଛାଡ଼ି ଦେବା ପାଇଁ ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ ମତ ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ ।

AP SCERT

କେତେକ ଜ୍ୟାମିତୀୟ ପଦ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ଅଟେ । ଉପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଜ୍ଞା ଅପେକ୍ଷା ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଜ୍ୟାମିତିକ ଧାରଣା ପାଇବା ପାଇଁ ଆମର ଏକ ଅନ୍ତର୍ନିହିତ ଅନୁଭବ ଅଛି । ତେଣୁ ଆମେ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ଏକ ଟୋପା ଭାବରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରୁ, ଯେହେତୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର କିଛି ପରିମାଣ ଥାଏ ।

ଉପରୋକ୍ତ 2ୟ ସଂଜ୍ଞାରେ ମଧ୍ୟ ଏହିଭଳି ସମସ୍ୟା ରହିଛି । ସେହି ସଂଜ୍ଞାରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଉଭୟ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇନାହିଁ । ଏହି କାରଣରୁ କୌଣସି ଅଧ୍ୟାୟରେ ସୀମିତ ଭାବେ କେତେକ ପଦକୁ ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦରୂପେ ବାଦ ଦିଆଯାଇଛି । ଆମେ ଜ୍ୟାମିତିରେ 'ବିନ୍ଦୁ,ରେଖା ଓ ସମତଳ' (ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ପଦରେ ଥିବା ସମତଳ ପୃଷ୍ଠତଳ) କୁ ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରୁ । ଅର୍ଥାତ୍ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଅନ୍ତର୍ନିହିତ ଭାବେ କିମ୍ବା ଭୌତିକ ନମୁନା ସାହାଯ୍ୟରେ ବୁଝାଇପାରିବା ।

ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସଂଜ୍ଞାକୁ ସେ ପ୍ରମାଣ ବିହୀନ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କେତୋଟି ଧର୍ମ ପରିକଳ୍ପନା କରିଥିଲେ । ଏହି ପରିକଳ୍ପନାଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରକୃତରେ ସାର୍ବଜନୀନ ଅଟେ । ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରିଥିଲେ ଯଥା : ଅଭିଗୃହୀତ ଓ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ । ବିଶେଷ କରି ସେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ପରିକଳ୍ପନାଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ **ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ** ଶବ୍ଦଟି ବ୍ୟବହାର କରୁଥିଲେ । ଅନ୍ୟପକ୍ଷରେ କେବଳ ଜ୍ୟାମିତି ସହ ଏହା ସଂଶ୍ଲିଷ୍ଟ ନହୋଇ ସମସ୍ତ ଗଣିତ ବିଷୟରେ ପରିକଳ୍ପାଗୁଡ଼ିକୁ ସାଧାରଣ ଧାରଣା (**ଅଭିଗୃହୀତ**) ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଉଥିଲା । ଅଭିଗୃହୀତ ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ବିବରଣୀ ପାଇଁ ପରିଶିଷ୍ଟ –1 ଦେଖ ।

ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସାଧାରଣ ଧାରଣା (ଅଭିଗୃହୀତ)ରୁ କେତୋଟି ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

(1) ଏକା ରାଶ ସହ ସମାନ ହେବା ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ ।

(2) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ସହ ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

(3) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକରୁ ସମାନ ରାଶିମାନ ବିୟୋଗକଲେ ବିୟୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

(4) ପରସ୍ପର ଏକୀଭୂତ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

(5) ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବସ୍ତୁ, ଆଂଶିକ ବସ୍ତୁ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

(6) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଦ୍ୱିଗୁଣ ମାନ ପରସ୍ପର ସମାନ ।

(7) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଅର୍ଦ୍ଧାଂଶଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ ।

ଏହି 'ସାଧାରଣ ଧାରଣାଗୁଡ଼ିକ' ଏକ ପ୍ରକାର ପରିମାଣକୁ ସୂଚିତ କରେ । ପ୍ରଥମ ସାଧାରଣ ଧାରଣା ସମତଳ ଚିତ୍ରକୁ ସୂଚାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ଏବଂ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ ।

ସମାନ ପ୍ରକାର ପରିମାଣଗୁଡ଼ିକୁ ତୁଳନା କରାଯାଇପାରିବ ଏବଂ ଯୋଗ କରାଯାଇପାରିବ କିନ୍ତୁ ଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ପରିମାଣଗୁଡ଼ିକୁ ତୁଳନା କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : ଗୋଟିଏ ରେଖାକୁ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ସହ ତୁଳନା କରିପାରିବା ନାହିଁ କି କୋଣକୁ ପଞ୍ଚଭୂଜି ସହ ତୁଳନା କରିପାରିବା ନାହିଁ ।

ଉପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା 4ର୍ଥ ଅଭିଗୃହୀତରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଦୁଇଟି ବସ୍ତୁ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ । ଅର୍ଥାତ୍ 'ପ୍ରତି ବସ୍ତୁ ନିଜକୁ ନିଜେ ସମାନ' ବୋଲି କହିପାରିବା । ଏହା ଅଧାରୋପଣ ନୀତିର ଯଥାର୍ଥତା । ଏହା ଅଭିଗୃହୀତ 5 ରୁ 'ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର' ର ସଂଜ୍ଞାର ଆମକୁ ମିଳେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ B ବସ୍ତୁଟି A ବସ୍ତୁର ଅଂଶ । ତେବେ A ବସ୍ତୁକୁ B ବସ୍ତୁ ଏବଂ 3ୟ ବସ୍ତୁ C ର ଯୋଗଫଳ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ସଙ୍କେତ ରୂପେ $A > B$ ହେଲେ $A = B + C$ ହେବାଭଳି ଅନ୍ୟ ଏକ ବସ୍ତୁ C ରହିଛି ।

AP SCERT

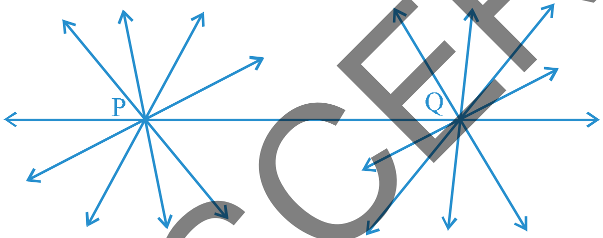
ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ **ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ 5ଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ** ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା :

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-1 : ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଟଣାଯାଇପାରେ।

ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିହୁଏ ବୋଲି ଆମେ ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ଜାଣିପାରିବା, କିନ୍ତୁ ଏକାଧିକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କରିହୁଏ ନାହଁ ବୋଲି ମଧ୍ୟ ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରେ କୁହାଯାଇନାହିଁ । ଅବଶ୍ୟ, ତାଙ୍କ କାର୍ଯ୍ୟରେ ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ବାରମ୍ବାର ଅନୁମାନ କରିଛନ୍ତି, ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖା ଅଦ୍ୱିତୀୟ ଅଟେ । ଆମେ ଏହି ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ଏକ ଅଭିଗୃହୀତ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରୁ ।

ଅଭିଗୃହୀତ 5.1: ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗତିକରେ ।

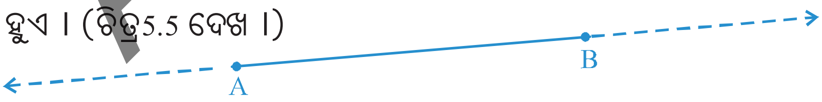
P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତିକରୁଥିବା ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେତୋଟି ରେଖା Q ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତିକରୁଛି (5.4 ଚିତ୍ର ଦେଖ) ? କେବଳ ଗୋଟିଏ, ତାହା ହେଉଛି PQ ରେଖା । Q ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତିକରୁଥିବା ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେତୋଟି ରେଖା P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତିକରୁଛି ? କେବଳ ଗୋଟିଏ, ତାହା ହେଉଛି PQ ରେଖା । ଏହିପରି ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ସ୍ୱତଃସ୍ପଷ୍ଟ ଏବଂ ଏହାକୁ ଏକ ଅଭିଗୃହୀତ ଭାବରେ ନିଆଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 5.4

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-2: ଗୋଟିଏ ଖଣ୍ଡିତ ରେଖାକୁ ଅସୀମଭାବେ ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇପାରିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ କହୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ପଦଟିକୁ ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ଖଣ୍ଡିତରେଖା ବୋଲି କହୁଥିଲେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ବ୍ୟବହାର କରୁଥିବା ପଦ ଅନୁଯାୟୀ 2ୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ଅର୍ଥ ହେଲା ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଅସୀମ ଭାବେ ବୃଦ୍ଧି କଲେ ତାହା ସରଳରେଖା ହୁଏ । (ଚିତ୍ର 5.5 ଦେଖ ।)



ଚିତ୍ର 5.5

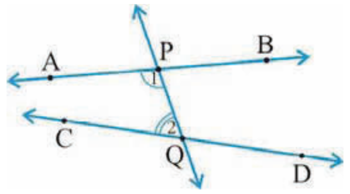
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-3: ଯେକୌଣସି କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-4: ସମସ୍ତ ସମକୋଣ ପରସ୍ପର ସମାନ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-5: ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦତ୍ତ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦନ କଲାବେଳେ ଛେଦନ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ଦୁଇ ସମକୋଣ ଅପେକ୍ଷା କମ୍ ରହେ ତେବେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରୂପେ ବୃଦ୍ଧି କରାଗଲେ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଦୁଇ ସମକୋଣ ଅପେକ୍ଷା କମ୍ ଥିବା ପଟେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦନ କରନ୍ତି ।

AP SCERT

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଚିତ୍ର 5.6 ରେ PQ ରେଖା AB ଏବଂ CD ରେଖାକୁ ନିଜର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା 1 ଏବଂ 2 ଅନ୍ତସ୍ଥଃ କୋଣର ସମଷ୍ଟି 180° (ଦୁଇ ସମକୋଣ) ଅପେକ୍ଷା କମ୍ ଥିବା ଭଳି ଛେଦନ କରେ । ତେଣୁ AB ଏବଂ CD ରେଖା PQ ରେଖାର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ପଟେ ଛେଦନ ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର 5.6

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଏହି 5ଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ 5ମ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା ଜଟିଳତର । 1 ରୁ 4 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ଖୁବ୍ ସରଳ ଏବଂ ସ୍ପଷ୍ଟ । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକୁ 'ସ୍ୱତଃ ସ୍ପଷ୍ଟ ସତ୍ୟ' ରୂପେ ଧରିନିଆଯାଇଛି । କିନ୍ତୁ ଏହାର ପ୍ରମାଣ କରିବା ଅସାଧ୍ୟ । ଏଣୁ କୌଣସି ପ୍ରମାଣ ନଥାଇ ଏହି ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସ୍ୱୀକୃତ ହୋଇଛି । (ପରିଶିଷ୍ଟ-1 ଦେଖ) 5ମ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ଜଟିଳତା ଯୋଗୁଁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ବିଭାଗରେ ଅଧିକ ସାବଧାନତା ନିଆଯିବ ।

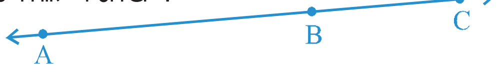
ଆଜିକାଲି 'ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ' ଏବଂ 'ଅଭିଗୃହୀତ' ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ପରସ୍ପର ସମାନ ଅର୍ଥବୋଧକ ପଦ ଭାବେ ବ୍ୟବହୃତ କରାଯାଉଛି । ବାସ୍ତବରେ 'ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ' ହେଉଛି ଏକ କ୍ରିୟା । "ବିଶ୍ୱରେ କୌଣସି ଅପୂର୍ବ ଘଟଣାର ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣକୁ ଭିତ୍ତିକରି କିଛି ଉକ୍ତି ତିଆରି କରିହୁଏ" । ଏହାର ସତ୍ୟତା/ ବିଶ୍ୱାସନୀୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଯଦି ତାହା ସତ୍ୟ ହୁଏ ତେବେ ଏହି ଅପୂର୍ବ ଘଟଣାଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗୃହୀତ ହୁଏ ।

ଅଭିଗୃହୀତଗୁଡ଼ିକର ଏକ ବ୍ୟବସ୍ଥାକୁ ସେତେବେଳେ **ସୁସଙ୍ଗତ** ବୋଲି ଧରାଯାଏ(ପରିଶିଷ୍ଟ-1 ଦେଖ), ଯଦି ଏଗୁଡ଼ିକରୁ ଏକ ଉକ୍ତିକୁ କୌଣସି ଏକ ଅଭିଗୃହୀତ କିମ୍ବା ପୂର୍ବ ପ୍ରମାଣିତ ଉକ୍ତିର ବିରୋଧାଭାଷ ରୂପେ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବାରେ ଅସମ୍ଭବ ହୁଏ । ତେଣୁ ଅଭିଗୃହୀତ ବ୍ୟବସ୍ଥା ଦତ୍ତ ଥିବାବେଳେ ତାହା ସୁସଙ୍ଗତ ବୋଲି ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ସୁନିଶ୍ଚିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ତାଙ୍କ ଅଭିଗୃହୀତ ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପରେ ସେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଅନ୍ୟକ୍ଷେତ୍ରରେ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରୁଥିଲେ । ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ନେଇ ସେ ନିଗମନ ଯୁକ୍ତି ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆଉ କିଛି ଫଳାଫଳର ପ୍ରମାଣ କରିଥିଲେ । ଏହି ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ **ପ୍ରସ୍ତାବନା** ବା **ଉପପାଦ୍ୟ** କୁହାଯାଏ । ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ନିଜେ ପୂର୍ବରୁ କ୍ରମାଗତ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରିଥିବା ଅଭିଗୃହୀତ, ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ସଂଜ୍ଞା ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ଏକ ତାର୍କିକ ଶୃଙ୍ଖଳା ବ୍ୟବହାର କରି 465ଟି ପ୍ରସ୍ତାବନା ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିଥିଲେ । ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଥିବା କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଏହି ଅଭିଗୃହୀତଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଅଭିଗୃହୀତ ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକର କିପରି ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ ଏହି ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରେ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 1 : A, B ଏବଂ C ଏକ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁ A ଓ C ର ମଧ୍ୟରେ ଥିଲେ (ଚିତ୍ର 5.7 ଦେଖ) ତେବେ AB + BC = AC ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ ।



ଚିତ୍ର 5.7

AP SCERT

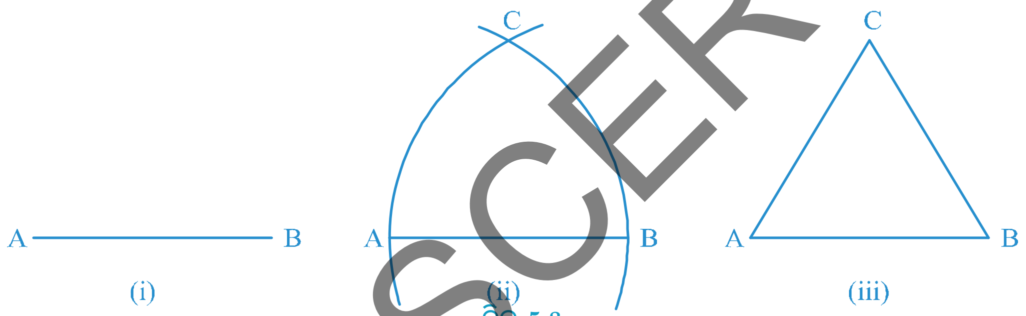
ସମାଧାନ : ଉପରୋକ୍ତ ଚିତ୍ରରୁ AC ଏବଂ AB + BC ଏକୀଭୂତ ହୁଏ ।

ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ 4ର୍ଥ ଅଭିଗୃହୀତ ଅନୁଯାୟୀ ପରସ୍ପର ଏକୀଭୂତ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ସମାନ । ତେଣୁ AB + BC = AC ବୋଲି ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ହୁଏ ।

ଏହି ସମାଧାନକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଆମେ କଳ୍ପନା କରିପାରିବା ଯେ, ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଗତିକରେ।

ଉଦାହରଣ 2 : ଦତ୍ତ ଯେକୌଣସି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉପରେ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିହୁଏ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିରେ ଯେକୌଣସି ମାପର ରେଖାଖଣ୍ଡ AB ଦିଆଯାଇଛି । (ଚିତ୍ର 5.8 (i) ଦେଖ)



ଚିତ୍ର 5.8

AP SCERT

ଏଠାରେ ତୁମେ କିଛି ଅଙ୍କନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ୩ୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ଦତ୍ତ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ । ତେଣୁ କେନ୍ଦ୍ର A ଏବଂ AB ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଥିବା ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର [ଚିତ୍ର 5.8(ii) ଦେଖ] । ସେହିଭଳି କେନ୍ଦ୍ର B ଏବଂ BA ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର । ଏହି ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ C ଠାରେ ଛେଦନ ହୁଏ । C କୁ A ଏବଂ B ସହ ଯୋଗକଲେ Δ ABC ଗଠନ ହୁଏ । [ଚିତ୍ର 5.8 (iii) ଦେଖ]

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହିଭଳି ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । ଅର୍ଥାତ୍ AB = AC = BC ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ AB = AC, ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (1)

ସେହିଭଳି AB=BC (ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) (2)

ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି କାରଣ ଏବଂ ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଅଭିଗୃହୀତ "ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ସହ ସମାନ ହୋଇଥିବା ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ" ଅନୁଯାୟୀ AB = BC = AC

ଅତଏବ Δ ABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ମନେରଖ ଯେ ଏଠାରେ ୟୁକ୍ଲିଡ୍,A ଏବଂ B କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପର କୌଣସି ଠାରେ ଛେଦିତ ହେବା ପ୍ରସ୍ତାବିତ କରିନାହାନ୍ତି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରିବା, ଯାହା ବିଭିନ୍ନ ଫଳାଫଳରେ ବାରମ୍ବାର ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 5.1: ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ରେଖାର ଏକାଧିକ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ରହିପାରିବ ନାହିଁ ।

ପ୍ରମାଣ : ଏଠାରେ ଦୁଇଟି ରେଖା l ଏବଂ m ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ଦୁଇଟି ରେଖାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ।

ମନେକର ସେହି ଦୁଇଟି ରେଖା ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ Q ଠାରେ ଛେଦନ ହୁଏ । ତେଣୁ, ତୁମେ P ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଦୁଇଟି ରେଖା ପାଇବ । ଏହା 'ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଗତିକରେ' ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ବିରୋଧାଭାଷ ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ରେଖା ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତିକରେ ବୋଲି ଧରିନେବା ଆମର ପରିକଳ୍ପନାଟି ଭୁଲ୍ ।

ଏଥିରୁ ଆମେ କେଉଁ ଶେଷ ନିଷ୍କର୍ଷରେ ପହଞ୍ଚି ପାରିବା ? ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ରେଖାର ଏକାଧିକ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନଥାଏ ବୋଲି ଆମେ ମାନିବାକୁ ବାଧ ହେବା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 5.1

1. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ଓ କେଉଁଟି ଅସତ୍ୟ ? କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ?

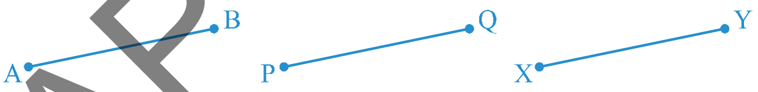
(i) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଗତିକରେ ।

(ii) ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରି ଅସଂଖ୍ୟ ରେଖା ଗତିକରେ ।

(iii) ଏକ ଖଣ୍ଡିତରେଖାକୁ ଉଭୟ ପଟେ ଅସୀମଭାବେ ବୃଦ୍ଧି କରିପାରିବା ।

(iv) ଯଦି ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ସମାନ ତେବେ ସେହି ଦୁଇଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ।

(v) ଚିତ୍ର 5.9 ରୁ AB = PQ ଏବଂ PQ = XY ହେଲେ AB = XY ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର 5.9

2. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ଲେଖ । ଏହି ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା ପାଇଁ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ପଦ ଆବଶ୍ୟକ କି ? ତାହା କଣ ? ସେଗୁଡ଼ିକୁ ତୁମେ କିପରି ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ?

(i) ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତରରେଖା (ii) ପରସ୍ପର ଲମ୍ବରେଖା (iii) ରେଖାଖଣ୍ଡ

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (v) ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର

3. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଦୁଇଟି 'ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ'କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

(i) ଦତ୍ତ A ଏବଂ B ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ, ଏଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ C ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ଏକା ରେଖା ଉପରେ ଅନ୍ତତଃ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ରହିପାରେ ନାହିଁ । ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକରେ କୌଣସି ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦ ଅଛିକି ? ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ସଂଗତ ଅଟେ କି ?

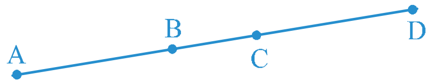
ଏହା ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ଅନୁସରଣ କରୁଛି କି ? ବର୍ଣ୍ଣନା କର ।

AP SCERT

4. AC = BC ହେବାଭଳି C ବିନ୍ଦୁ A ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁର ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ । ତେବେ AC = $\frac{1}{2}$AB ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ । ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ବର୍ଣ୍ଣନା କର ।

5. ପ୍ରଶ୍ନ 4 ରେ C ବିନ୍ଦୁ AB ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଖାଖଣ୍ଡର କେବଳ ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ରହିଥାଏ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କର ।

6. ଚିତ୍ର 5.10 ରେ AC = BD ହେଲେ AB = CD ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ ।



ଚିତ୍ର 5.10

7. ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଅଭିଗୃହୀତ ତାଲିକା ମଧ୍ୟରୁ 5ମ ଅଭିଗୃହୀତଟିକୁ କାହିଁକି ସାର୍ବଜନୀନ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଧରିନିଆଗଲା ? (ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ୟା 5ମ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ପାଇଁ ନୁହେଁ ବୋଲି ଧ୍ୟାନଦିଅ।)

5.3 ମୁଖ୍ୟାଂଶ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେ ନିମ୍ନ ବିଷୟମାନ ଅଧ୍ୟୟନ କଲ ।

1. ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳକୁ ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିଥିଲେ ମଧ୍ୟ, ଏହି ସଂଜ୍ଞାଗୁଡ଼ିକ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗୃହୀତ ହୋଇନଥିଲା । ତେଣୁ ଏହି ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦ ରୂପେ ଧରିନିଆଗଲା ।
2. ଅଭିଗୃହୀତ ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି ସାର୍ବଜନୀନ ସତ୍ୟ ହୋଇଥିବା ପରିକଳ୍ପନା । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଏ ନାହିଁ ।
3. ସଂଜ୍ଞା, ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ପ୍ରମାଣିତ ଉକ୍ତି ଏବଂ ନିଗମନ ଯୁକ୍ତି ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଥିବା ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।
4. ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ କେତେକ ଅଭିଗୃହୀତ ହେଲା :
   (1) ଏକା ରାଶି ସହ ସମାନ ହେବା ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ ।
   (2) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ସହ ସମାନ ରାଶିମାନ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।
   (3) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକରୁ ସମାନ ରାଶିମାନ ବିୟୋଗକଲେ ବିୟୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।
   (4) ପରସ୍ପର ଏକୀଭୂତ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।
   (5) ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବସ୍ତୁ ଆଂଶିକ ବସ୍ତୁ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।
   (6) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଦ୍ୱିଗୁଣ ପରସ୍ପର ସମାନ ।
   (7) ସମାନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଅର୍ଦ୍ଧାଂଶଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ ।
5. **ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ:**

   ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 1 : ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଟଣାଯାଇପାରେ ।

   ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 2 : ଗୋଟିଏ ଖଣ୍ଡିତରେଖାକୁ ଅସୀମଭାବେ ବୃଦ୍ଧି କରିପାରିବା ।

   ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 3 : ଯକୌଣସି କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ ନେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା ।

   ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 4 : ସମସ୍ତ ସମକୋଣ ପରସ୍ପର ସମାନ ।

AP SCERT

ଅଧ୍ୟାୟ 6

ରେଖା ଓ କୋଣ

6.1 ଉପକ୍ରମ

ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେ ଶିଖିଅଛ ଯେ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଅଙ୍କନ ନିମନ୍ତେ ଅନ୍ୟୁନ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଆବଶ୍ୟକ ହୁଏ । ବିଭିନ୍ନ ସ୍ୱୀକୃତି ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ସହାୟତାରେ ଅନେକ ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟାସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରିବା ମଧ୍ୟ ଶିଖିଅଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଦୁଇଟି ରେଖାର ପରସ୍ପର ଛେଦନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମ ବିଷୟରେ ଶିଖିବ । ଏହାଛଡ଼ା ଦୁଇ କିମ୍ବା ତତୋଧିକ ସମାନ୍ତର ରେଖାକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ରେଖା ଏକାଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମ ବିଷୟରେ ଅବଗତ ହେବ । ପୁଣି ଏହି ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର ସହାୟତାରେ ତାର୍କିକ ନିଗମନ ପଦ୍ଧତିର ପ୍ରୟୋଗ କରି ବିଭିନ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ କିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଏ ଶିଖିପାରିବ (ପରିଶିଷ୍ଟ- 1ଦେଖ)। ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଭିନ୍ନ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ (ପ୍ରୟୋଗ) ଦ୍ୱାରା କେତୋଟି ଉକ୍ତିର ସଠିକତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଶିଖିଛ ।

ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠ ଧାରଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର କୋଣ ଗଠିତ ହେବା ଦୃଶ୍ୟ ପରିଲକ୍ଷିତ ହୋଇଥାଏ । ବିଭିନ୍ନ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠର ସହାୟତାରେ କେତୋଟି ସଦୃଶ୍ୟ ନମୂନା ବା ପ୍ରତିକୃତି ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବାକୁ ହେଲେ ଆମକୁ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଗଭୀର ଜ୍ଞାନର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ଧରିନିଅ ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଗଣିତ ମେଳା (Mathematics Exibition)ର ଆୟୋଜନ ନିମନ୍ତେ ଗୋଟିଏ ଘରର ନମୂନା ବାଉଁଶ କାଠିରେ ତିଆରି କରିବାକୁ ଚାହୁଁଛ । ଏହା କିପରି ତିଆରି କରିବ କଳ୍ପନା କର । କେତୋଟି କାଠିକୁ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ଅନ୍ୟ କେତୋଟିକୁ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ବା ଗଡ଼ାଣିଆରେ ରଖାଯାଏ । ଜଣେ ଶିଳ୍ପୀ ଗୋଟିଏ ବହୁମହଲା କୋଠାଘରର ନକ୍ସା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ସମୟରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ କୋଣର ସମାନ୍ତର ରେଖା, ଛେଦନରେଖାମାନ ଅଙ୍କନ କରିଥାଏ । ରେଖା ଓ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପଯୁକ୍ତ ଜ୍ଞାନର ଅଭାବରେ ଏଭଳି ନକ୍ସା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ତା ପାଇଁ ସମ୍ଭବ କି ?

ସାଧାରଣ ବିଜ୍ଞାନରେ ଆଲୋକର ଧର୍ମ ଅଧ୍ୟୟନ କଲାବେଳେ ଆମେ ବିଭିନ୍ନ ରଶ୍ମି ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରୁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଆଲୋକ ରଶ୍ମିର ପ୍ରତିସରଣ ଧର୍ମ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ସମୟରେ ଆମେ ଛେଦନ ରେଖା, ସମାନ୍ତର ରେଖା ଏବଂ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧର୍ମ ବ୍ୟବହାର କରି ଆଲୋକ ରଶ୍ମିର ଗୋଟିଏ ମାଧ୍ୟମରୁ ଅନ୍ୟ ମାଧ୍ୟମର ପ୍ରବେଶକୁ ରଶ୍ମି ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଦର୍ଶାଇଥାଉ । ଯଦି ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁ ଉପରେ ଦୁଇଟି କିମ୍ବା ତାଠାରୁ ଅଧିକ ବଳ ପ୍ରୟୋଗ ହୁଏ ତେବେ ଏହି ବଳଗୁଡ଼ିକୁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇ ତୁଲ୍ୟ ପ୍ରଭାବୀ ବଳର ଅଧ୍ୟୟନ କରିଥାଉଁ । ଏହି ସମୟରେ ରଶ୍ମି (ରେଖାଖଣ୍ଡ)ଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପରକୁ ସମାନ୍ତର ବା ଛେଦନ କରନ୍ତି,ତାଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମ୍ୟକ୍ ଜ୍ଞାନର ଆବଶ୍ୟକତା ହୋଇଥାଏ । ଗୋଟିଏ ସୁଉଚ୍ଚ ଗମ୍ବୁଜର ଉଚ୍ଚତା କିମ୍ବା ବତୀଘରରୁ ଗୋଟିଏ ଜାହାଜର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମୟରେ ଭୂସମାନ୍ତର ଏବଂ ଦୃଶ୍ୟ ରେଖା ମଧ୍ୟସ୍ଥ କୋଣକୁ ଜାଣିବାକୁ ହୁଏ ।

AP SCERT

ସେହିପରି ରେଖା ଏବଂ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନେକ ଦୃଷ୍ଟାନ୍ତ ଦିଆଯାଇପାରେ । ତୁମେ ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଗାମୀ ଅଧ୍ୟାୟଗୁଡ଼ିକରେ ରେଖା, କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ଞାନର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ଜ୍ୟାମିତି ଉପଯୋଗୀ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ରେଖା ଓ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ସଜ୍ଞା ଏବଂ ପଦାବଳୀର ପର୍ଯ୍ୟାଲୋଚନା କରିବା ଆସ ।

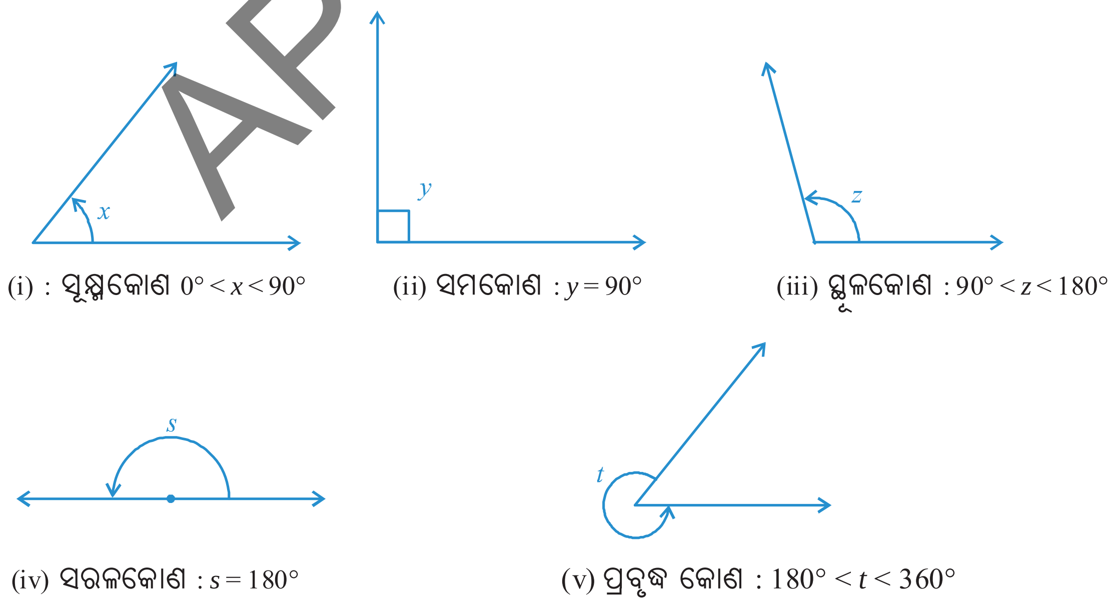
6.2 ଜ୍ୟାମିତିର ମୌଳିକ ପଦ ଏବଂ ସଜ୍ଞା

ମନେପକାଅ ଯେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର କିଛି ଅଂଶ ଯାହାର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ ବା ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ରହିଥାଏ ତାହାକୁ **ରେଖାଖଣ୍ଡ** କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାର କିଛି ଅଂଶକୁ **ରଶ୍ମି** କୁହାଯାଏ । ଧ୍ୟାନଦେବା ଉଚିତ୍ ଯେ ରେଖାଖଣ୍ଡ **AB** କୁ $\overline{AB}$ ରୂପେ ସୂଚାଯାଏ ଏବଂ ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ **AB** ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । **AB** ରଶ୍ମିକୁ $\overrightarrow{AB}$ ରୂପେ ଏବଂ **AB** ସରଳରେଖାକୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ରୂପେ ସୂଚାଯାଏ । ତଥାପି **ଉପରିସ୍ଥ ସଙ୍କେତଗୁଡ଼ିକ ସାଧାରଣତଃ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏନାହିଁ** । ସାଧାରଣତଃ ରେଖାଖଣ୍ଡ **AB**, ରଶ୍ମି **AB** , ରେଖା **AB** ଏବଂ ଦୈର୍ଘ୍ୟ **AB**କୁ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ହିଁ ସୂଚାଯାଇଥାଏ । ପୂର୍ବାପର ପ୍ରସଙ୍ଗ (Context) ରୁ ଏହା ଆମେ ସହଜରେ ବୁଝିପାରିବା । ବେଳେବେଳେ ରେଖାଗୁଡ଼ିକୁ ***l, m, n...*** ଇତ୍ୟାଦି ଅକ୍ଷରରେ ମଧ୍ୟ ସୂଚାଯାଇପାରେ ।

ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ତିନି କିମ୍ବା ତାଠାରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁ ସମୂହକୁ **ସରଳରୈଖିକ ବିନ୍ଦୁ** କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟଥା ସେଗୁଡ଼ିକୁ **ଅଣ ସରଳରୈଖିକ ବିନ୍ଦୁ** କୁହାଯାଏ ।

ମନେପକାଅ ଯେ, ଏକା ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ଦ୍ୱାରା **କୋଣ** ଗଠିତ ହୁଏ । କୋଣ ଗଠନ କରୁଥିବା ରଶ୍ମିଗୁଡ଼ିକୁ କୋଣର **ବାହୁ** କୁହାଯାଏ । ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟିକୁ କୋଣର ଶୀର୍ଷ କୁହାଯାଏ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀଗୁଡ଼ିକରେ ତୁମେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର କୋଣ ଯଥା : ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, ସମକୋଣ, ସ୍ଥୂଳକୋଣ, ସରଳକୋଣ ଏବଂ ପ୍ରବୃଦ୍ଧ କୋଣ **(Reflex Angle)** ଇତ୍ୟାଦି ବିଷୟରେ ଶିଖିଅଛ । ଚିତ୍ର 6.1 ଦେଖ ।

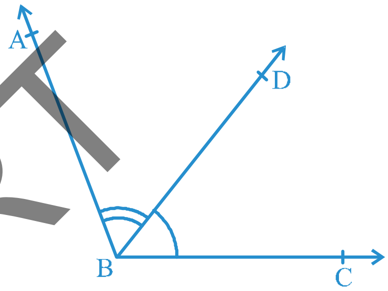
AP SCERT



ଚିତ୍ର **6.1 :** କୋଣର ପ୍ରକାର

$0°$ ଏବଂ $90°$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣକୁ **ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ**, $90°$ ସହ ଠିକ୍ ସମାନ କୋଣକୁ **ସମକୋଣ** ଏବଂ $90°$ ରୁ ଅଧିକ ଏବଂ $180°$ ରୁ କମ୍ କୋଣକୁ **ସ୍ଥୂଳକୋଣ** କୁହାଯାଏ । **ସରଳକୋଣ** ଠିକ୍ $180°$ ଅଟେ । $180°$ ରୁ ଅଧିକ $360°$ ରୁ କମ୍ କୋଣକୁ **ପ୍ରବୃଦ୍ଧ କୋଣ** କୁହାଯାଏ । କୋଣ ଦ୍ୱୟ ଯାହାର ସମଷ୍ଟି $90°$ ସେଗୁଡ଼ିକୁ **ଅନୁପୂରକ** ଏବଂ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ଯାହାର ସମଷ୍ଟି $180°$ ସେଗୁଡ଼ିକୁ **ପରିପୂରକ** କୁହାଯାଏ ।

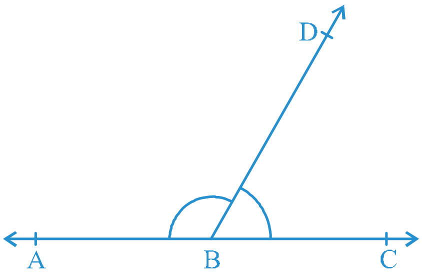
ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ବିଷୟରେ ଶିଖିଅଛ । (ଚିତ୍ର 6.2 ଦେଖ) । ଯେଉଁ କୋଣଯୋଡ଼ିର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷ, ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ବାହୁ ସାଧାରଣ ବାହୁର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିଥାଏ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ **ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ି** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 6.2 ଦେଖ । $\angle ABD$ ଏବଂ $\angle DBC$ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ, ରଶ୍ମି BD ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବାହୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ B । BA ରଶ୍ମି ଏବଂ BC ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟ ଅଣସାଧାରଣ ବାହୁ । ଯଦି କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଅଣସାଧାରଣ ବାହୁ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣ ସହ ସମାନ । ତେଣୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା ଯେ



ଚିତ୍ର 6.2 : ସନ୍ନିହିତ କୋଣ

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$

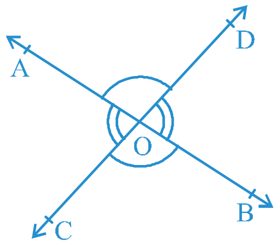
ମନେରଖ ଯେ $\angle ABC$ ଏବଂ $\angle ABD$ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ନୁହନ୍ତି , କାହିଁକି ? କାରଣ ଅଣସାଧାରଣ ବାହୁ ଦ୍ୱୟ BD ଏବଂ BC, ସାଧାରଣ ବାହୁ BA ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



ଚିତ୍ର 6.3 : ସରଳରୈଖିକ ଯୋଡ଼ି

ଯଦି ଅଣସାଧାରଣ ବାହୁ BA ଏବଂ BC (ଚିତ୍ର 6.2) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗଠନ କରନ୍ତି, ତେବେ ଏହା ଚିତ୍ର 6.3 ଭଳି ଦେଖାଯାଏ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ $\angle ABD$ ଏବଂ $\angle DBC$ କୁ **ସରଳରୈଖିକ କୋଣ ଯୋଡ଼ି** କହନ୍ତି ।

ମନେ ପକାଅ ଯେ ଦୁଇଟି ରେଖା (ମନେକର AB ଏବଂ CD) ପରସ୍ପର O ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଛେଦିତ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 6.4 ଦେଖ), **ପ୍ରତୀପ କୋଣ** ଗଠିତ ହୁଏ । ଏଠାରେ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଗଠିତ ହୋଇଛି ।



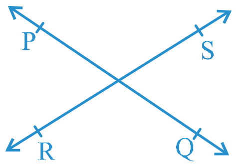
ଚିତ୍ର 6.4 : ପ୍ରତୀପ କୋଣ

$\angle AOD$ ଏବଂ $\angle BOC$ ଗୋଟିଏ ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଯୋଡ଼ି । ଅନ୍ୟ ଯୋଡ଼ିଟିକୁ ତୁମେ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ କି ?

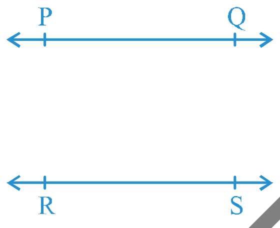
AP SCERT

6.3 ଛେଦିତ ରେଖା ଏବଂ ଅଣଛଛେଦୀ ରେଖା

ଗୋଟିଏ କାଗଜରେ PQ ଏବଂ RS ରେଖା ଦୁଇଟି ଅଙ୍କନ କର । ତୁମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଦୁଇଟି ଉପାୟରେ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବ । ଚିତ୍ର 6.5 (i) ଏବଂ ଚିତ୍ର 6.5 (ii)



(i) ଛେଦିତ ରେଖା



(ii) ଅଣଛେଦୀ ରେଖା (ସମାନ୍ତର ରେଖା)

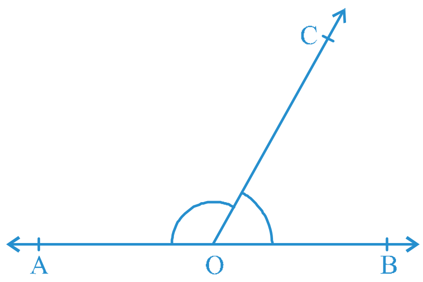
ଚିତ୍ର 6.5 : ଦୁଇଟି ରେଖାକୁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଦୁଇଟି ଉପାୟରେ ଅଙ୍କନ କରିବା

AP SCERT

ମନେ ପକାଅ ଯେ ଗୋଟିଏ ରେଖାକୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ଵରେ ଅସୀମଭାବେ ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇପାରେ । PQ ଏବଂ RS ଦ୍ଵୟ ଚିତ୍ର 6.5 (i) ରେ ଛେଦିତ ରେଖା ଏବଂ ଚିତ୍ର 6.5 (ii) ରେ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଅଟେ । ମନେରଖ ଯେ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଦ୍ଵୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ସାଧାରଣ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଏହି ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ସମାନ୍ତର ରେଖା ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୈର୍ଘ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

6.4 କୋଣଯୋଡ଼ି

ବିଭାଗ **6.2** ରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ କୋଣ ଯୋଡ଼ି ଯଥା : ଅନୁପୂରକ କୋଣ, ପରିପୂରକ କୋଣ, ସନ୍ନିହିତ କୋଣ, ସରଳରୈଖିକ କୋଣ ଯୋଡ଼ି ଆଦି କୋଣ ଯୋଡ଼ିର ସଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିବା ଶିଖିଲେ । ଏଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ନିହିତ ସମ୍ପର୍କ ଚିନ୍ତାକର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଯଦି ଦଣ୍ଡାୟମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଗଠିତ କୋଣ ଦ୍ଵୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଗୋଟିଏ ରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଦଣ୍ଡାୟମାନ ହେଲାଭଳି ଏକ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କର । ଚିତ୍ର 6.6 ଦେଖ । ଦତ୍ତ ରେଖାକୁ AB ଓ ରଶ୍ମିକୁ OC ରୂପେ ନାମକରଣ କର । ‘O’ ଠାରେ ଗଠିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ କଣ ? ସେଗୁଡ଼ିକ $\angle AOC$, $\angle BOC$ ଏବଂ $\angle AOB$ ।



ଚିତ୍ର 6.6 : ରୈଖିକ କୋଣ ଯୋଡ଼ି

$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ ଅଟେ କି ? (1)

ହଁ, କାହିଁକି ? ବିଭାଗ 6.2 ର ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ି ଦେଖ ।

$\angle AOB$ କୋଣର ମାପ କଣ ହୁଏ ? ଏହା $180°$ ହୁଏ । (କାହିଁକି ?) (2)

(1) ଏବଂ (2) ରୁ $\angle AOC + \angle BOC = 180°$ ବୋଲି ତୁମେ କହିପାରିବ କି ? ହଁ, କାହିଁକି ?

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ନିମ୍ନ ସ୍ଵୀକାର୍ଯ୍ୟ ସଜ୍ଞାକରଣ କରିପାରିବା ।

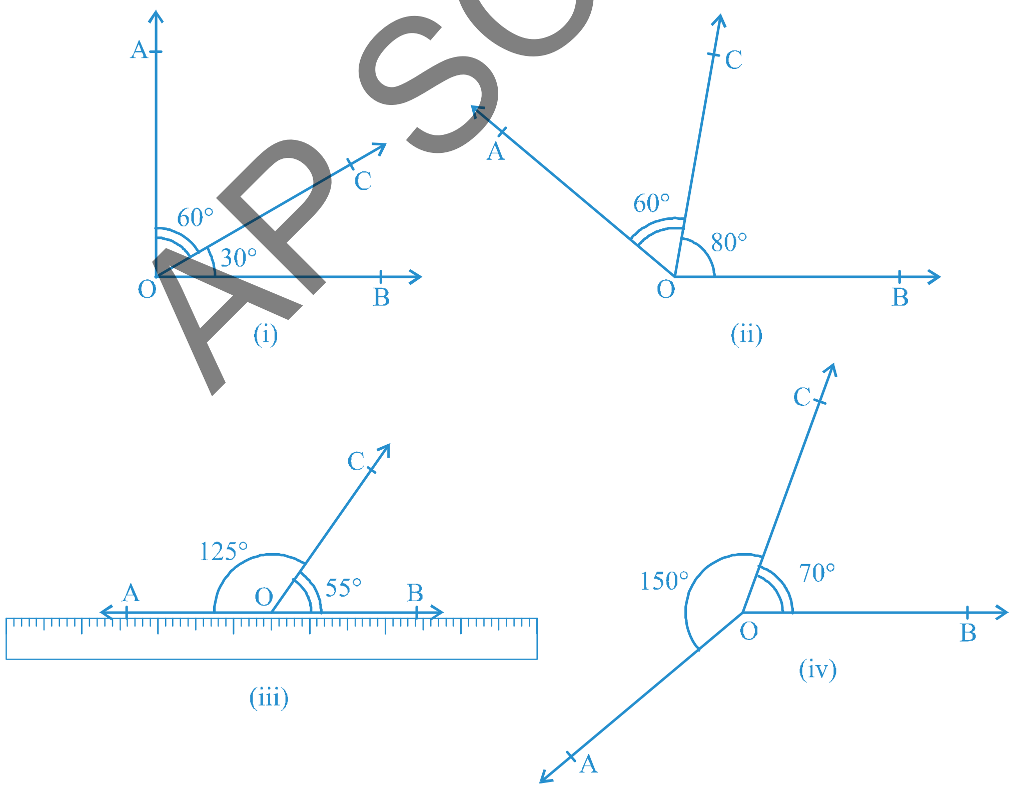
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 6.1 : ଯଦି ଗୋଟିଏ ରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଦଣ୍ଡାୟମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଏହି ରୂପେ ଗଠିତ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ିର ସମଷ୍ଟି 180° ।

ମନେପକାଅ ଯଦି ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ସମଷ୍ଟି 180° ହୁଏ ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ **ସରଳରୈଖିକ ଯୋଡ଼ି** କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 6.1ରେ ଏହା ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଦଣ୍ଡାୟମାନ । ଏହି ଦତ୍ତ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ନିରୂପଣ କରୁଯେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ିର ସମଷ୍ଟି 180° । ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 6.1 କୁ ଅନ୍ୟ ଉପାୟରେ ଲେଖ । ଅର୍ଥାତ୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 6.1 ର ଉପସଂହାରକୁ ଦତ୍ତ ରୂପେ ନିଅ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଦତ୍ତକୁ ଉପସଂହାର ରୂପେ ନିଅ । ଏଥିରୁ ଆମେ ପାଇବା

(A) ଯଦି ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ିର ସମଷ୍ଟି 180° ହୁଏ, ତେବେ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଦଣ୍ଡାୟମାନ । (ଅର୍ଥାତ୍ ଅଣସାଧାରଣ ବାହୁ ଦ୍ୱୟ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗଠନ କରନ୍ତି ।)

ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 6.1 ଏବଂ ଉକ୍ତି (A) ଉଭୟ ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ । ଉଭୟକୁ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଉକ୍ତି ବୋଲି କହୁ । ଉକ୍ତି (A) ସତ୍ୟ କି ନୁହେଁ ଆମେ ଜାଣି ନାହୁଁ । ଏହାର ସଠିକତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା । ଚିତ୍ର 6.7 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହେଲାଭଳି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମାପର ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ି ଅଙ୍କନ କର । ପ୍ରତି ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ଅଣ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରୁଲର୍‌କୁ ସଂପାତ କର । ଅନ୍ୟ ବାହୁଟି ମଧ୍ୟ ରୁଲର୍ ସହ ସଂପାତ ହୁଏ କି ?



ଚିତ୍ର 6.7 : ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମାପବିଶିଷ୍ଟ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ି

AP SCERT

ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ କେବଳ ଚିତ୍ର 6.7 (iii) ରେ ହିଁ ସାଧାରଣ ଭାବେ ରହୁନଥିବା ବାହୁ ଦ୍ୱୟ ରୁଲର୍ ସହ ସଂପାତ ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ବିନ୍ଦୁ A, O ଏବଂ B ଏକା ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ । OC ରେଖା, AB ରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ । ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ $\angle AOC+\angle COB = 125°+55°=180°$ । ଏଥିରୁ ଉକ୍ତି (A) ସତ୍ୟ ବୋଲି ନିରୂପଣ କରିପାରିବ । ତେଣୁ ନିମ୍ନ ମତେ ଏହାକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

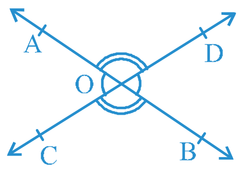
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 6.2 : ଯଦି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ିର ସମଷ୍ଟି 180° ତେବେ ଅଣ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ସରଳ ରେଖା ଗଠନ ହୁଏ ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ଉଭୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ଏକାଠି କରି **ସରଳ ରୈଖିକ ଯୋଡ଼ି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ଛେଦିତ ରେଖା ନିଆଯାଉ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ଶିଖିଛ ଯେ ଦୁଇଟି ରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦନ କଲେ ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସମାନ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଏହାକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା । ପ୍ରମାଣର ମୌଳିକ ତତ୍ତ୍ୱ ପାଇଁ ପରିଶିଷ୍ଟ – 1କୁ ଦେଖ । ପ୍ରମାଣର ମୌଳିକ ତତ୍ତ୍ୱଗୁଡ଼ିକୁ ଆଖି ଆଗରେ ରଖି ନିମ୍ନ ଦତ୍ତ ପ୍ରମାଣକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କର ।

ଉପପାଦ୍ୟ 6.1 : ଯଦି ଦୁଇଟି ରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦନ କରନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରତୀପ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

ପ୍ରମାଣ : ପାର୍ଶ୍ୱ ଚିତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଛେଦିତ ରେଖା ଦିଆଯାଇଛି । ମନେକର AB ଏବଂ CD ରେଖା ଦ୍ୱୟ 'O' ବିନ୍ଦୁଠାରେ ପରସ୍ପର ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚିତ୍ର 6.8 ଦେଖ । ଆମେ ଦୁଇଯୋଡ଼ା ପ୍ରତୀପ କୋଣ ପାଇବା ।



ଚିତ୍ର 6.8 : ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଯୋଡ଼ି

(i) $\angle AOC$ ଏବଂ $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ ଏବଂ $\angle BOC$

ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ଯେ $\angle AOC = \angle BOD$ ଏବଂ $\angle AOD = \angle BOC$

ବର୍ତ୍ତମାନ OA ରଶ୍ମି, CD ରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ।

ଏଣୁ, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (ରେଖୀୟ ଯୋଡ଼ି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (1)

ଆମେ ଲେଖିପାରିବା $\angle AOD + \angle BOD = 180°$? (କାହିଁକି ?) (2)

(1) ଓ (2) ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

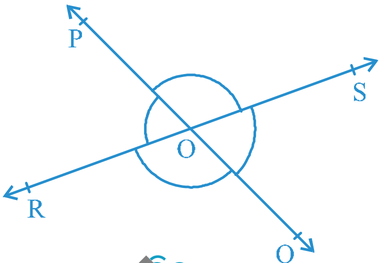
$$\Rightarrow \angle AOC = \angle BOD$$ (ବିଭାଗ 5.2 ଓ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 3 ଦେଖ)

ସେହିଭଳି ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ $\angle AOD = \angle BOC$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ରେଖୀୟ ଯୋଡ଼ି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟ 6.1 ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତୋଟି ଉଦାହରଣ ଦେଖିବା ।

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 1 : ପାର୍ଶ୍ୱ ଚିତ୍ର 6.9 ରେ PQ ଏବଂ RS ରେଖା ଦ୍ୱୟ O ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଛେଦନ କରନ୍ତି । ଯଦି $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ ତେବେ ସମସ୍ତ କୋଣର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.9

ସମାଧାନ : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (ରେଖୀୟ କୋଣ ଯୋଡ଼ି)

କିନ୍ତୁ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (ଦତ୍ତ)

ଅତଏବ, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

ସେହିପରି, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

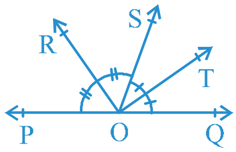
ବର୍ତ୍ତମାନ, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

ଏବଂ $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 2 : ଚିତ୍ର 6.10 ଦେଖ । OS ରଶ୍ମି, POQ ରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ । OR ରଶ୍ମି ଏବଂ OT ରଶ୍ମି ଯଥାକ୍ରମେ $\angle POS$ ଓ $\angle SOQ$ ର କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଟନ୍ତି । ଯଦି $\angle POS = x$, ତେବେ $\angle ROT$ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : OS ରଶ୍ମି POQ ରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ।



ଚିତ୍ର 6.10

ଅତଏବ, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

କିନ୍ତୁ, $\angle POS = x$

ତେଣୁ, $x + \angle SOQ = 180°$

ତେଣୁ, $\angle SOQ = 180° - x$

ବର୍ତ୍ତମାନ OR ରଶ୍ମି $\angle POS$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡନ କରେ

ତେଣୁ, $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

ସେହିଭଳି, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

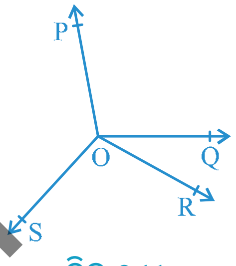
$= 90° - \frac{x}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90°$$

ଉଦାହରଣ 3: ପାର୍ଶ୍ୱ ଚିତ୍ର 6.11ଦେଖ । OP, OQ, OR ଏବଂ OS ଚାରୋଟି ରଶ୍ମି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ ।



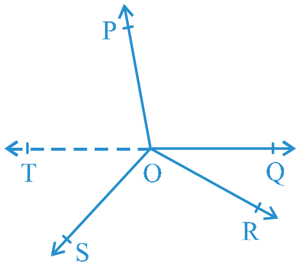
ଚିତ୍ର 6.11

ସମାଧାନ : ପାର୍ଶ୍ୱ ଚିତ୍ର 6.11ଦେଖ । OP, OQ, OR କିମ୍ବା OS ରଶ୍ମି ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିକୁ ପଛକୁ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । ମନେକର OQ ରଶ୍ମିକୁ T ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପଛପଟକୁ ବୃଦ୍ଧିକର ଯେପରିକି TOQ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗଠନ କରିବ । (ଚିତ୍ର 6.12 ଦେଖ)

ବର୍ତ୍ତମାନ, OP ରଶ୍ମି TOQ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ।

ଅତଏବ, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (1)

(ରେଖୀୟ ଯୋଡ଼ି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)



ଚିତ୍ର 6.12

ସେହିପରି ସରଳରେଖା TOQ ଉପରେ OS ରଶ୍ମି ଦଣ୍ଡାୟମାନ

ଅତଏବ, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

କିନ୍ତୁ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

ତେଣୁ (2) କୁ ଏମିତି ଲେଖିବା

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ (3)

ବର୍ତ୍ତମାନ (1) ଓ (3) କୁ ଯୋଗକରିବା ଦ୍ୱାରା

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ (4)

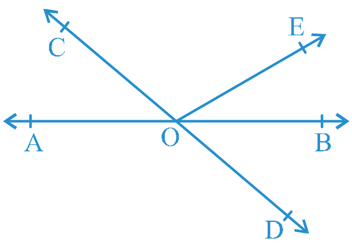
କିନ୍ତୁ $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

ତେଣୁ (4) କୁ ଏମିତି ଲେଖିପାରିବା

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

ଅନୁଶୀଳନୀ 6.1

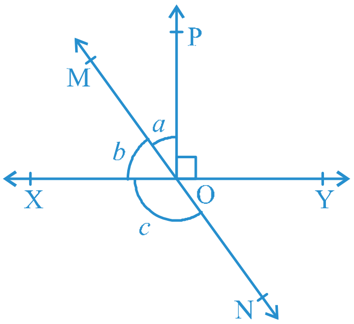
1. ଚିତ୍ର 6.13 ଦେଖ । AB ଏବଂ CD ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ 'O' ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଯଦି $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ ଏବଂ $\angle BOD = 40°$ । ହେଲେ $\angle BOE$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ $\angle COE$ ର ପ୍ରବୃଦ୍ଧ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.13

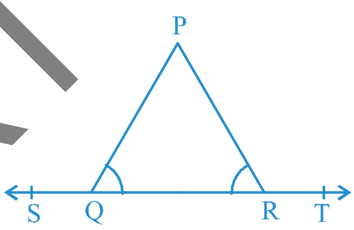
AP SCERT

2. ଚିତ୍ର 6.14 ଦେଖ । XY ଏବଂ MN ରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର 'O' ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଯଦି $\angle POY = 90°$ ଏବଂ $a : b = 2 : 3$ ତେବେ c ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.14

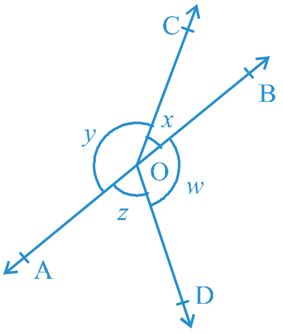
3. ଚିତ୍ର 6.15 ଦେଖ । $\angle PQR = \angle PRQ$ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle PQS = \angle PRT$



ଚିତ୍ର 6.15

4. ଚିତ୍ର 6.16 ଦେଖ । ଯଦି $x + y = w + z$ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AOB ଏକ ସରଳରେଖା ।

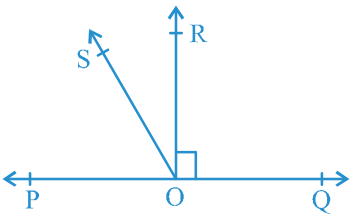
AP SCERT



ଚିତ୍ର 6.16

5. ଚିତ୍ର 6.17 ଦେଖ । POQ ଗୋଟିଏ ସରଳ ରେଖା । OR ରଶ୍ମି, PQ ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । OP ଏବଂ OR ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ OS ରଶ୍ମି ବିଦ୍ୟମାନ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$



ଚିତ୍ର 6.17

6. ଦତ୍ତ $\angle XYZ = 64°$ ଏବଂ XY କୁ P ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିକର । ଦତ୍ତ ସମାଚାରକୁ ନେଇ ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଯଦି YQ, $\angle ZYP$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡନ କରେ ତେବେ $\angle XYQ$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ $\angle QYP$ ର ପ୍ରବୃଦ୍ଧ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6.5 ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ସହ ସମାନ୍ତରରେ ଅଙ୍କିତ ଏକାଧିକ ସରଳରେଖା

ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ସହ ଦୁଇଟି ରେଖା ସମାନ୍ତର ତେବେ ସେମାନେ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି କି ?ଆସ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା । ଚିତ୍ର 6.18 ଦେଖ । m ରେଖା $\parallel l$ ରେଖା ଏବଂ n ରେଖା $\parallel l$ ରେଖା ।

l, m ଏବଂ n ରେଖା ନିମନ୍ତେ ଏକ ଛେଦକ ବା ତୀର୍ଯ୍ୟକରେଖା 't' ଟଣାଯାଉ । ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ରେଖା $m \parallel$ ରେଖା l ଏବଂ ରେଖା $n \parallel$ ରେଖା l ।

ଅତଏବ, $\angle 1 = \angle 2$ ଏବଂ $\angle 1 = \angle 3$

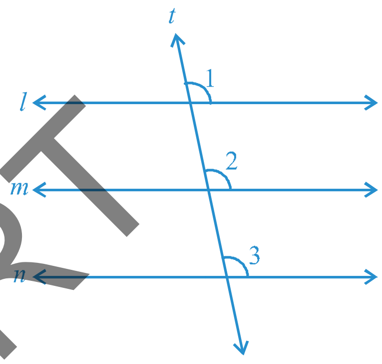
(ଅନୁରୂପକୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

ତେଣୁ, $\angle 2 = \angle 3$ (କାହିଁକି ?)

କିନ୍ତୁ $\angle 2$ ଏବଂ $\angle 3$ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

ଏଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ

ରେଖା $m \parallel$ ରେଖା n



ଚିତ୍ର 6.18

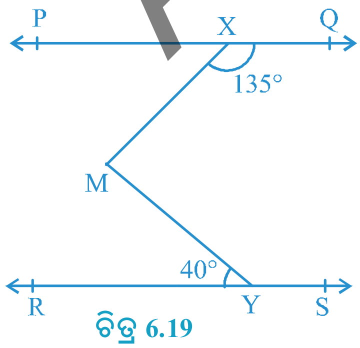
(ଅନୁରୂପକୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ବିପରୀତ)

ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରେ ।

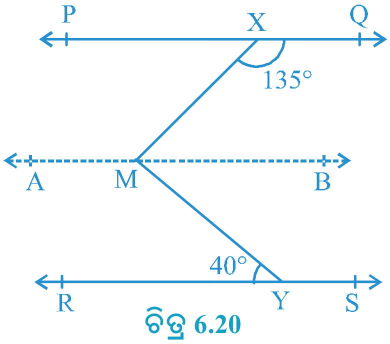
ଉପପାଦ୍ୟ 6.6 : ଦତ୍ତ ଗୋଟିଏ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତରରେ ଅଙ୍କିତ ଏକାଧିକ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ।

ଟିପ୍ପଣୀ : ଉପରିସ୍ଥ ଧର୍ମକୁ ଦୁଇଠାରୁ ଅଧିକ ରେଖାରେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ସମାନ୍ତରରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧିତ କେତୋଟି ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 4 : ଚିତ୍ର 6.19 ଦେଖ । ଯଦି $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135°$ ଏବଂ $\angle MYR = 40°$, ତେବେ $\angle XMY$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.19



ଚିତ୍ର 6.20

ସମାଧାନ : M ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ PQ ସହ ସମାନ୍ତରରେ ଏକରେଖା AB ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ଚିତ୍ର 6.20 ଦେଖ । ବର୍ତ୍ତମାନ $AB \parallel PQ$ ଏବଂ $PQ \parallel RS$ ।

AP SCERT

ଅତଏବ, $AB \parallel RS$ (କାହିଁକି ?)

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

(AB || PQ,ଛେଦକ XM ର ଏକା ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଅନ୍ତସ୍ଥଃ କୋଣ)

କିନ୍ତୁ, $\angle QXM = 135°$

ତେଣୁ, $135° + \angle XMB = 180°$

ଅତଏବ, $\angle XMB = 45°$ (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, ଏକାନ୍ତର କୋଣ)

ଅତଏବ, $\angle BMY = 40°$ (2)

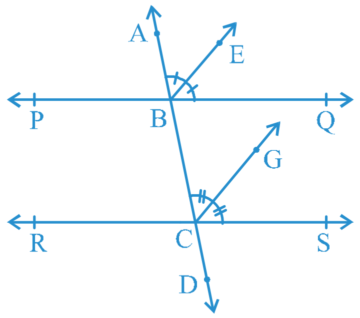
(1) ଏବଂ (2) କୁ ଯୋଗକରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଇବା

$$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$$

ଅର୍ଥାତ୍, $\angle XMY = 85°$

ଉଦାହରଣ 5: ଦୁଇଟି ରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ବା ତୀର୍ଯ୍ୟକରେଖା ଛେଦନ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଏକ ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱୟ ଯଦି ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ ରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

ସମାଧାନ: ଚିତ୍ର 6.21ଦେଖ । AD ଛେଦକ, PQ ଏବଂ RS ରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ B ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । BE ରଶ୍ମି ଏବଂ CG ରଶ୍ମି ଯଥାକ୍ରମେ $\angle ABQ$ ଏବଂ $\angle BCS$ ର କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ $BE \parallel CG$ । ଆମକୁ $PQ \parallel RS$ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ।



ଚିତ୍ର 6.21

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ BE ରଶ୍ମି $\angle ABQ$ ର କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

ଅତଏବ, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

ସେହିଭଳି CG ରଶ୍ମି $\angle BCS$ ର କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ

ଅତଏବ, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

କିନ୍ତୁ $BE \parallel CG$ ଏବଂ AD ଛେଦକ

ଅତଏବ, $\angle ABE = \angle BCG$ (3)

(ଅନୁରୂପକୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

ସମୀକରଣ (3) ରେ (1) ଓ (2) କୁ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

ଅର୍ଥାତ୍, $\angle ABQ = \angle BCS$

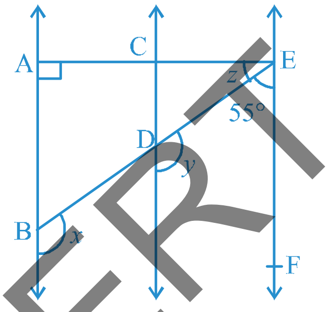
AP SCERT

କିନ୍ତୁ ଏହି କୋଣ ଦ୍ୱୟ PQ ,RS ରେଖା ଦ୍ୱୟ ଉପରେ AD ଛେଦକ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଯାହା ପରସ୍ପର ସମାନ ।

ଅତଏବ, PQ || RS

(ଅନୁରୂପକୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ବିପରୀତ)

ଉଦାହରଣ 6: ଚିତ୍ର 6.22 ଦେଖ । AB || CD, CD || EF ଏବଂ EA ⊥ AB । ଯଦି ∠BEF = 55° ତେବେ x, y, z ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.22

ସମାଧାନ : $y + 55° = 180°$

(ଛେଦକ ED ର ଏକା ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଅନ୍ତସ୍ଥଃ କୋଣ)

ଅତଏବ, $y = 180° - 55° = 125°$

ପୁଣି $x = y$

(AB || CD, ଅନୁରୂପକୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

ଅତଏବ, $x = 125°$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଯେହେତୁ AB || CD ଏବଂ CD || EF, ଅତଏବ, AB || EF

ଅତଏବ, ∠EAB + ∠FEA = 180° (ଛେଦକ EA ର ଏକା ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଅନ୍ତସ୍ଥଃ କୋଣ)

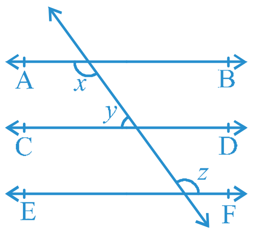
ତେଣୁ, $90° + z + 55° = 180°$

ଏଥିରୁ $z = 35°$

AP SCERT

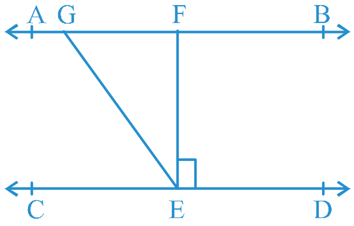
ଅନୁଶୀଳନୀ 6.2

1. ଚିତ୍ର 6.23 ଦେଖ । ଯଦି AB || CD, CD || EF ଏବଂ $y : z = 3 : 7$ ହେଲେ x ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.23

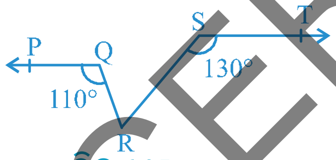
2. ଚିତ୍ର 6.24 ଦେଖ । ଯଦି AB || CD, EF ⊥ CD ଏବଂ ∠ GED = 126°, ତେବେ ∠ AGE, ∠ GEF ଏବଂ ∠FGE ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.24

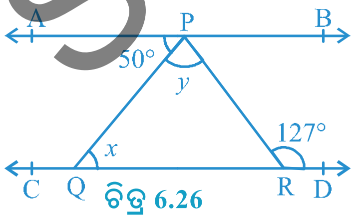
3. ଚିତ୍ର 6.25 ଦେଖ । ଯଦି PQ || ST, ∠ PQR = 110° ଏବଂ ∠ RST = 130° ତେବେ ∠ QRS ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

[**ସୂଚନା :** R ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ST ସହ ସମାନ୍ତରରେ ଏକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର ।]



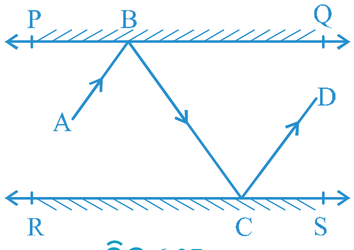
ଚିତ୍ର 6.25

4. ଚିତ୍ର 6.26 ଦେଖ । ଯଦି AB || CD, ∠ APQ = 50° ଏବଂ ∠ PRD = 127° ତେବେ x ଏବଂ y ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 6.26

5. ଚିତ୍ର 6.27ଦେଖ । PQ ଏବଂ RS ଦୁଇଟି ସମତଳ ଦର୍ପଣ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତରରେ ରଖାଯାଇଛି । ଆପତନ ରଶ୍ମି AB, ଦର୍ପଣ PQ ର B ଠାରେ ପାତିତ ହୁଏ । ପ୍ରତିଫଳନ ରଶ୍ମି BC ମାର୍ଗରେ ଗତିକରି ଦର୍ପଣ RS ର C ଠାରେ ପାତିତ ହୋଇ ପୁଣି CD ମାର୍ଗରେ ପ୍ରତିଫଳିତ ହୁଏ । ପ୍ରମାଣ କରଯେ AB || CD ।



ଚିତ୍ର 6.27

AP SCERT

6. ଯଦି ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିପୂରକ କୋଣ ଏବଂ ଅନୁପୂରକ କୋଣ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁପାତ 8:3 ହେଲେ କୋଣଟି:
   A) 36^0
   B) 45^0
   C) 54^0
   D) 60^0

7. ଗୋଟିଏ କୋଣର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ଏବଂ ପରିପୂରକ କୋଣର ମୋଟ 200^0 ହେଲେ କୋଣଟି:
   A) 30^0
   B) 35^0
   C) 70^0
   D) 140^0

6.6 ମୁଖ୍ୟାଂଶ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ନିମ୍ନ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକ ଅଧ୍ୟୟନ କଲ :

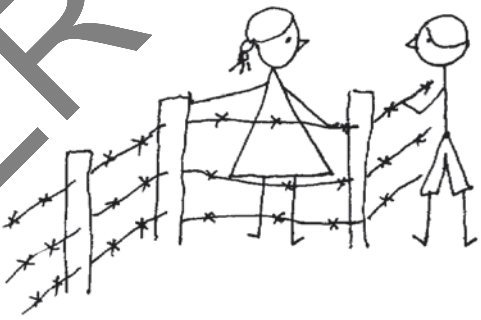
1. ଯଦି ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି, ଗୋଟିଏ ରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଗଠିତ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ିର ସମଷ୍ଟି 180° ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମରେ ଯଦି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣର ସମଷ୍ଟି 180° ହୁଏ ତେବେ ଦତ୍ତ ରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଦଣ୍ଡାୟମାନ ।
2. ଯଦି ଦୁଇଟି ରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତେବେ ଗଠିତ ପ୍ରତୀପ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସମାନ ।
3. ଦତ୍ତ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତରରେ ଟଣାଯାଇଥିବା ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପରକୁ ସମାନ୍ତର ।

AP SCERT

ପରିଶିଷ୍ଟ – I

ଗଣିତରେ ପ୍ରମାଣ

A1.1 ଉପକ୍ରମ



ମନେକର ତୁମ ପରିବାରର ଏକ ଜମି ଅଛି ଏବଂ ଏହାର ଚାରିପାଖରେ କୌଣସି ବାଡ଼ ନାହିଁ । ତୁମର ପଡ଼ୋଶୀ ଦିନେ ତାଙ୍କର ଜମି ଚାରିପଟେ ବାଡ଼ ଦେବାକୁ ଇଚ୍ଛା କଲେ । ସେ ନିଜ ଜମି ଚାରିପଟେ ବାଡ଼ ଦେବା ପରେ ତୁମେ ଦେଖିଲ ଯେ ତୁମ ପରିବାରର ଜମିର କିଛି ଅଂଶ ତାଙ୍କ ବାଡ଼ ଅଧୀନରେ ରହିଛି । ତୁମର ପଡ଼ୋଶୀ ତୁମର ଜମିର କିଛି ଅଂଶ ଦଖଲ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିଛନ୍ତି ବୋଲି ତୁମେ କିପରି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ? ତୁମର ପ୍ରଥମ ପଦକ୍ଷେପ ଏପରି ହୋଇପାରେ ଯେ ତୁମର ଜମିର ସୀମା ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବା ପାଇଁ ତୁମେ କେତେ ଜଣ ଗ୍ରାମର ଭଦ୍ରବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କୁ ଡାକି ଆଲୋଚନା କରିପାର । କିନ୍ତୁ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ମତଭେଦ ଦେଖାଦେଇଛି । କେତେଜଣ ଭାବନ୍ତି ଯେ ତୁମେ ଠିକ୍ ଏବଂ ଆଉ କେତେ ଜଣ ତୁମ ପଡ଼ୋଶୀ ଠିକ୍ ବୋଲି ଅଭିମତ ପ୍ରଦାନ କରିପାରନ୍ତି । ତୁମେ କ'ଣ କରିପାରିବ ? ତୁମ ପାଖରେ ଏକ ମାତ୍ର ବିକଳ୍ପ ହେଉଛି ଯେ ତୁମ ଜମିର ସୀମା ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବା ପାଇଁ ସମସ୍ତଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗ୍ରହଣ ଯୋଗ୍ୟ ହେବାଭଳି ଏକ ପନ୍ଥା ବାଛିବା । ଯଥା ସରକାରଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସ୍ୱୀକୃତିପ୍ରାପ୍ତ ତୁମ ଗ୍ରାମର ଏକ ସର୍ଭେ ମାନଚିତ୍ର ନେଇ ଆବଶ୍ୟକ ହେଲେ ଅଦାଲତରେ ଆବେଦନ କରିବ । ଯେପରିକି ତୁମର ଦାବି ଠିକ୍ ଏବଂ ତୁମ ପଡ଼ୋଶୀର ଦାବି ଭୁଲ ।

ଆମେ ଆଉ ଏକ ପରିସ୍ଥିତି ବିଚାର କରିବା । ଧରାଯାଉ ତୁମର ମାଆଁ ଅଗଷ୍ଟ 2005 ର ବିଦ୍ୟୁତ୍ ବିଲ୍ ପୈଠ କରିସାରିଛନ୍ତି । ସେପ୍ଟେମ୍ବର 2005 ର ବିଲ୍ ଦର୍ଶାଉଛି ଯେ ତୁମେ ଅଗଷ୍ଟ ମାସର ବିଲ୍ ପୈଠ କରିନାହଁ । ବିଦ୍ୟୁତ୍ ବିଭାଗ ନିକଟରେ ଏହା ଭୁଲ୍ ବୋଲି ତୁମେ କିପରି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ? ତୁମେ ତୁମର ଅଗଷ୍ଟ ମାସର ବିଲ୍ ପୈଠ କରିସାରିଥିବା ଭଳି ଏକ ରସିଦ ଦେଖାଇବାକୁ ହେବ ।

କିଛି ଉଦାହରଣରୁ ତୁମେ ଜାଣିଲ ଯେ, ଆମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଆମକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବକ୍ତବ୍ୟ କିମ୍ବା ଦାବି ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ମିଥ୍ୟା ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ କିଛି ଆହ୍ୱାନର ସମ୍ମୁଖୀନ ହେବାକୁ ପଡ଼େ । ତଥାପି ଏମିତି କିଛି ମନ୍ତବ୍ୟ ବା ଦାବୀକୁ ଆମେ ବିନା ପ୍ରମାଣରେ ଗ୍ରହଣ କରିନେଉ । କିନ୍ତୁ ଗଣିତରେ ଆମେ ଏଭଳି ବକ୍ତବ୍ୟକୁ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରିଥାଉଁ । ଯାହାକି ଗଣିତର ମାଧ୍ୟମରେ (କିଛି ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟ ବ୍ୟତୀତ) ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଥାଏ ।

AP SCERT

ବାସ୍ତବରେ ଗଣିତରେ ପ୍ରମାଣ ହଜାର ହଜାର ବର୍ଷ ଧରି ରହି ଆସିଛି ଏବଂ ଏହା ଗଣିତର ଯେ କୌଣସି ଶାଖାର ମୁଖ୍ୟ ଆଧାର ହୋଇ ରହିଛି । ବିଶ୍ୱାସ କରାଯାଏ ଯେ, ଗଣିତରେ ପ୍ରମାଣ ଦେଇଥିବା ସର୍ବ ପ୍ରଥମ ବ୍ୟକ୍ତି ଥିଲେ ବିଶିଷ୍ଟ ଗ୍ରୀକ୍ ଦାର୍ଶନିକ ତଥା ଗଣିତଜ୍ଞ ଥାଲସ୍ । ଅନେକ ପୁରାତନ ସଭ୍ୟତା ଯଥା ମେସୋପୋଟାମିଆ, ଇଜିପ୍ଟ୍, ଚୀନ ଓ ଭାରତ ଭଳି ଦେଶର ବିକାଶରେ ଗଣିତ ପ୍ରମୁଖ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥିଲା । କିନ୍ତୁ ଏହାର ସ୍ପଷ୍ଟ ପ୍ରମାଣ ନାହିଁ ଯେ ଏବେ ଆମେ ଗଣିତରେ ପ୍ରମାଣ ଯେଉଁଭଳି ବ୍ୟବହାର କରୁଛୁ, ତାହା ପୂର୍ବେ ସେହିଭଳି ବ୍ୟବହାର ହେଉଥିଲା ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଏକ ବକ୍ତବ୍ୟ, ବିବୃତ୍ତି କ'ଣ, ଗଣିତରେ କେଉଁ ପ୍ରକାର ଯୁକ୍ତି ରହିଛି ଏବଂ କେଉଁ ପ୍ରକାର ଗାଣିତିକ ପ୍ରମାଣ ରହିଛି ଜାଣିବା ।

A1.2 ଗାଣିତିକ ଦୃଷ୍ଟିକୋଣରୁ ଗ୍ରହଣଯୋଗ୍ୟ ବିବୃତ୍ତି (ମନ୍ତବ୍ୟ)

ଏହି ବିଭାଗରେ ଆମେ ଗାଣିତିକ ଦୃଷ୍ଟିକୋଣରୁ ଗ୍ରହଣୀୟ ବିବୃତ୍ତ କ'ଣ ବୁଝିବା ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା । ଗୋଟିଏ ବିବୃତ୍ତି ହେଉଛି ଏକ ବାକ୍ୟ ଯାହା ଆଦେଶ କିମ୍ବା ବିସ୍ମୟ ସୂଚକ ହୋଇନଥିବ । ଏବଂ ଅବଶ୍ୟ ଏହା ଏକ ପ୍ରଶ୍ନ ମଧ୍ୟ ହୋଇନଥିବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

"ତୁମ କେଶର ରଙ୍ଗ କ'ଣ ?" ଏକ ବିବୃତ୍ତି ନୁହେଁ, ଏହା ଏକ ପ୍ରଶ୍ନ ।

"ଦୟାକରି ମୋ ପାଇଁ ଗିଲାସେ ପାଣି ଆଣ ।" ଏକ ଅନୁରୋଧ କିମ୍ବା ଏକ ଆଦେଶ, କିନ୍ତୁ ବିବୃତ୍ତି ନୁହେଁ ।

"କେଡ଼େ ଅଦ୍ଭୁତ ସୂର୍ଯ୍ୟାସ୍ତ !" ଏକ ବିସ୍ମୟ ବାକ୍ୟ, କିନ୍ତୁ ବିବୃତ୍ତି ନୁହେଁ ।

ବରଂ, "ତୁମ କେଶର ରଙ୍ଗ କଳା ଅଟେ ।" ଏକ ବିବୃତ୍ତି ଅଟେ ।

ସାଧାରଣତଃ, ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ହୋଇପାରେ ।

- ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ
- ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ
- ଅସ୍ପଷ୍ଟ

'ଅସ୍ପଷ୍ଟ' ଶବ୍ଦଟି ବୁଝିବା ପାଇଁ କିଛି ବ୍ୟାଖ୍ୟା ଆବଶ୍ୟକ । ଗୋଟିଏ ବିବୃତ୍ତି ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି ଦ୍ୱାରା ଅସ୍ପଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ । ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି ହେଉଛି ବିବୃତ୍ତିଟି ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ ସଠିକ୍ ଭାବେ ସ୍ଥିର କରିନପାରିବା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, "ଆସନ୍ତାକାଲି ଗୁରୁବାର ଅଟେ" ଏହା ଅସ୍ପଷ୍ଟ ଅଟେ, କାରଣ ଏହି ବିବୃତ୍ତି ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ସ୍ଥିର କରିବା ପାଇଁ ଆଉ ଅଧିକ କିଛି ପ୍ରସଙ୍ଗ ଦିଆଯାଇ ନାହିଁ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅସ୍ପଷ୍ଟତାର ପରିସ୍ଥିତି ହେଉଛି ବିବୃତ୍ତି ବ୍ୟକ୍ତି ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବା, ଅର୍ଥାତ୍ ଏହା କିଛି ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହୋଇଥିବା ବେଳେ ଆଉ କିଛି ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ପାଇଁ ଅସତ୍ୟ ହୋଇଥାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, "କୁକରଗୁଡ଼ିକ ବୁଦ୍ଧିମାନ ଅଟନ୍ତି ।" ଏହା ଅସ୍ପଷ୍ଟ, କାରଣ କିଛି ବ୍ୟକ୍ତି ଏହା ସତ୍ୟ ବୋଲି ବିଶ୍ୱାସ କରୁଥିବା ବେଳେ ଆଉ କିଛି ବ୍ୟକ୍ତି ଏହା ସତ୍ୟ ବୋଲି ମାନନ୍ତି ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 1 : ନିମ୍ନ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ, ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ସପ୍ତାହରେ ୫ ଦିନ ଥାଏ ।

(ii) ଏଠାରେ ଏବେ ବର୍ଷା ପଡୁଛି ।

(iii) ସୂର୍ଯ୍ୟ, ପଶ୍ଚିମ ଦିଗରେ ଅସ୍ତ ହୁଅନ୍ତି ।

AP SCERT

(iv) ଗୌରୀ ଜଣେ ଦୟାଳୁ ସ୍ୱଭାବର ଝିଅ ।

(v) ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

(vi) ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ:

(i) ବିବୃତିଟି ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ, କାରଣ ସପ୍ତାହକ 7 ଦିନ ।

(ii) ଏକ ବିବୃତିଟି ଅସ୍ପଷ୍ଟ, କାରଣ ଏଠାରେ କହିବା ସ୍ଥାନଟି ଅସ୍ପଷ୍ଟ ।

(iii) ଏହି ବିବୃତିଟି ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ, କାରଣ ଆମେ ଯେଉଁ ସ୍ଥାନରେ ରହିଲେ ବି, ସୂର୍ଯ୍ୟ ପଶ୍ଚିମ ଦିଗରେ ହିଁ ଅସ୍ତ ହୁଅନ୍ତି ।

(iv) ବିବୃତିଟି ଅସ୍ପଷ୍ଟ, କାରଣ ଗୌରୀ କିଛି ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ପାଇଁ ଦୟାଳୁ ସ୍ୱଭାବର ହୋଇପାରେ ଆଉ କିଛି ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ପାଇଁ ନୁହେଁ ।

(v) ବିବୃତି ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ । କାରଣ ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ସର୍ବଦା ଅଯୁଗ୍ମ ।

(vi) ବିବୃତିଟି ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ । ଅବଶ୍ୟ ଏହାକୁ ସତ୍ୟାପିତ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ କିଛି ଅଧିକା କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ବିଭାଗ A1.4 ରେ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଅଛି ।

ପୂର୍ବରୁ କହିବାଭଳି ଆମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ବିଭିନ୍ନ ବିବୃତିର ସତ୍ୟାସତ୍ୟ ଉପରେ ଧ୍ୟାନ ଦେଇ ନଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ତୁମର ସାଙ୍ଗ ତୁମକୁ କହିଲେ ଯେ, ଜୁଲାଇ ମାସରେ କେରଳର ମାନାନ୍ତାୱାଡ଼ିରେ ପ୍ରତିଦିନ ବର୍ଷା ପଡ଼ିଥାଏ । ସମ୍ଭବତଃ ତୁମେ ତା' କଥାରେ ସମ୍ମତ ହେବ ଯଦିଓ ମଝିରେ ମଝିରେ ଦିନେ ବା ଦୁଇଦିନ ସେଠାରେ ବର୍ଷା ହୋଇ ନଥାଇପାରେ । ତୁମେ ଜଣେ ଓକିଲ ହୋଇନଥିଲେ ତୁମେ କଦାପି ତା ସହିତ ଯୁକ୍ତି କରିବ ନାହିଁ ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦାହରଣ ନେଲେ, ଆମେ ପରସ୍ପର ମଧ୍ୟରେ ଏଭଳି ବାର୍ତ୍ତାଳାପ କରିଥାଉଁ "ଆଜି ଦିନଟି ଖୁବ୍ ଗରମ ।" ଆମେ ଏଭଳି ବିବୃତିଗୁଡ଼ିକୁ ସହଜରେ ଗ୍ରହଣ କରି ନେଇଥାଉଁ । କାରଣ ଯଦିଓ ଏଭଳି ବିବୃତିଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ଅସ୍ପଷ୍ଟ । 'ଆଜି ଦିନଟି ଖୁବ୍ ଗରମ ।' ଏହା ବିଭିନ୍ନ ସ୍ଥାନର ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ହୋଇପାରେ କାରଣ କୁମାୟୁନ୍‌ରେ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କୁ ଏହି ଦିନଟି ଗରମ ହୋଇଥିବା ବେଳେ ଚେନ୍ନାଇରେ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କୁ ଏହା ଗରମ ଦିନ ନ ହୋଇପାରେ ।

କିନ୍ତୁ ଗୋଟିଏ ଗାଣିତିକ ବିବୃତି କଦାପି ଅସ୍ପଷ୍ଟ ହୋଇନପାରେ । ଗଣିତରେ ଗୋଟିଏ ବିବୃତି ସେତେବେଳେ ଗ୍ରହଣୀୟ ବା ବୈଧ ହେବ ଯେତେବେଳେ ଏହା ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ହୋଇଥିବ । ଆମେ କହିବା ଯେ ଏକ ବିବୃତି ସତ୍ୟ, ଯଦି ଏହା ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ଏବଂ ଅନ୍ୟଥା ଏହା ଅସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $5 + 2 = 7$ ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ, ତେଣୁ '$5 + 2 = 7$' ଏକ ସତ୍ୟ ବିବୃତି ଏବଂ $5 + 3 = 7$ ଏକ ଅସତ୍ୟ ବିବୃତି ।

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 2 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଷ୍ଟି $180°$ ।

(ii) 1 ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସମସ୍ତ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

(iii) ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ $4x + x = 5x$ ।

(iv) ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ $2x > x$ ।

(v) ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ $x^2 \geq x$ ।

(vi) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁ ସମାନ ହେଲେ ତାହା ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ।

ସମାଧାନ :

(i) ଏହା ସତ୍ୟ । ତୁମେ ଏହାକୁ 6ଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପ୍ରମାଣିତ କରିସାରିଛ ।

(ii) ଏହା ଅସତ୍ୟ; ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 9 ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(iii) ଏହା ସତ୍ୟ ।

(iv) ଏହା ଅସତ୍ୟ; ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $2 \times (-1) = -2$, ଏବଂ -2, -1 ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ନୁହେଁ ।

(v) ଏହା ଅସତ୍ୟ; ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, ଏବଂ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ନୁହେଁ ।

(vi) ଏହା ଅସତ୍ୟ, କାରଣ ଏକ ରମ୍ବସ୍‌ର ସମସ୍ତ ବାହୁ ସମାନ କିନ୍ତୁ ଏହା ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ନାହିଁ ।

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଥିବ ଯେ ଗଣିତରେ ଗୋଟିଏ ବିବୃତ୍ତି ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ଏହି ନିୟମ ଭଙ୍ଗ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ଯଥେଷ୍ଟ । ତେଣୁ ବିବୃତ୍ତି (ii) ରେ 9 ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ହେଉଛି ଏକ ଉଦାହରଣ ଯାହା "1 ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସମସ୍ତ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା" କୁ ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଏ । ଏକ ବିବୃତ୍ତିକୁ ବିରୋଧ କଲାଭଳି ଏକ ଉଦାହରଣକୁ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ କୁହାଯାଏ । ଆମେ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଭାଗ A1.5 ରେ ସବିଶେଷ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ତୁମେ ଆହୁରି ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଥିବ ଯେ ବିବୃତ୍ତି (iv), (v) ଓ (vi) ଗୁଡ଼ିକ ଅସତ୍ୟ । କିନ୍ତୁ କେତେକ ସର୍ତ୍ତରେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନର୍ବାର ସତ୍ୟ ବିବୃତ୍ତିରେ ପରିଣତ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ 3 : ଉପଯୁକ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ସାହାଯ୍ୟରେ ନିମ୍ନ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ହେବାଭଳି ପୁନଃଲିଖନ କର ।

(i) ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ $2x > x$ ।

(ii) ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ $x^2 \geq x$ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ତୁମେ ସର୍ବଦା 1 ପାଇବ ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଏହାର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $90°$ ।

(v) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁ ସମାନ ହୋଇଥିଲେ ତାହା ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ।

AP SCERT

ସମାଧାନ :

(i) ଯଦି $x > 0$, ତେବେ $2x > x$ ।

(ii) ଯଦି $x \leq 0$ କିମ୍ବା $x \geq 1$, ତେବେ $x^2 \geq x$.

(iii) ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ ଯେ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାକୁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ତୁମେ ସର୍ବଦା 1 ପାଇବ ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁଠାରେ $90°$ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ।

(v) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁ ଏବଂ ସମସ୍ତ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ସମାନ ହେଲେ ତାହା ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.1

1. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ, ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଅ । ତୁମ ଉତ୍ତରର ଯଥାର୍ଥତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

(i) ବର୍ଷକୁ 13 ମାସ ।

(ii) ଦୀପାବଳୀ ଶୁକ୍ରବାର ଦିନ ପଡ଼େ ।

(iii) ମାଗାଡ଼ିରେ ତାପମାତ୍ରା 26^0 C ।

(iv) ପୃଥିବୀର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଚନ୍ଦ୍ର ଅଛି ।

(v) କୁକୁରଗୁଡ଼ିକ ଉଡ଼ିପାରନ୍ତି ।

(vi) ଫେବୃଆରୀ ମାସରେ କେବଳ 28 ଦିନ ଥାଏ ।

2. ନିମ୍ନ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ଜଣାଅ । ତୁମ ଉତ୍ତର ସପକ୍ଷରେ କାରଣ ଲେଖ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି $350°$ ।

(ii) ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ $x^2 \geq 0$ ।

(iii) ରମ୍ବସ୍ ଏକ ସାମନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ର ଅଟେ ।

(iv) ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

(v) ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

3. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ହେବାଭଳି ଉପଯୁକ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ସହିତ ପୁନରୁଲ୍ଲେଖ କର ।

(i) ସମସ୍ତ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅଯୁଗ୍ମ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୁଣ ସର୍ବଦା ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

(iii) ଯେ କୌଣସି x ପାଇଁ $3x + 1 > 4$ ।

(iv) ଯେ କୌଣସି x ର ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $x^3 \geq 0$ ।

(v) ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଏକ ମଧ୍ୟମା ଏକ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟ ଅଟେ ।

A1.3 ନିଗମନ ତର୍କ

ଗୋଟିଏ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ବିବୃତ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର ହେଉଥିବା ମୁଖ୍ୟ ସାଧନ ହେଉଛି ନିଗମନ ତର୍କ । ନିଗମନ ତର୍କ ବିଷୟରେ ପୁଙ୍ଖାନୁପୁଙ୍ଖଭାବେ ବୁଝିବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ପ୍ରହେଳିକା ଓ ତାର ସମାଧାନ ଦ୍ୱାରା ଆରମ୍ଭ କରିବା ।

AP SCERT

ତୁମକୁ ଚାରୋଟି କାର୍ଡ଼ ଦିଆଯାଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ କାର୍ଡ଼ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୋଟିଏ ଇଂରାଜୀ ଅକ୍ଷର ଛପାଯାଇଛି ।

A	V	6	5

ମନେକର ତୁମକୁ କୁହାଗଲା ଯେ ଏହି କାର୍ଡ଼ଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ନିୟମ ଅନୁଯାୟୀ ରଖାଯିବ ।

"ଗୋଟିଏ କାର୍ଡ଼ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଲେଖାଥିଲେ ଏହାର ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ ଥିବ ।"

ତେବେ ଏହି ନିୟମକୁ ଯାଞ୍ଚ କରିବା ପାଇଁ ତୁମକୁ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି କାର୍ଡ଼ ଓଲଟାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ ?

ଅବଶ୍ୟ ତୁମେ ସମସ୍ତ କାର୍ଡ଼ ଓଲଟାଇ ଯାଞ୍ଚ କରିପାର । କିନ୍ତୁ ଅତି କମ୍ ସଂଖ୍ୟକ କାର୍ଡ଼ ଓଲଟାଇ ଏହି କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପାଇଁ ତୁମର ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଧ୍ୟାନଦିଅଯେ ବିବୃତ୍ତିରେ କୁହାଯାଇଛି ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଥିବା କାର୍ଡ଼ର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ ରହିବା ଆବଶ୍ୟକ । କିନ୍ତୁ ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ ଥିବା କାର୍ଡ଼ର ଆରପଟେ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ରହିଥିବା ନିହାତି ଆବଶ୍ୟକ ନାହିଁ ।ଏହା ସେହିଭଳି ହୋଇପାରେ କିମ୍ୱା ନହୋଇପାରେ । ନିୟମରେ ଏହା ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଇନାହିଁ ଯେ କାର୍ଡ଼ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଥିଲେ ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ନିଶ୍ଚିତଭାବେ ବ୍ୟଞ୍ଜନ ବର୍ଣ୍ଣ ରହିବ । ଏହା ହୋଇପାରେ ଏବଂ ନହୋଇପାରେ ମଧ୍ୟ ।

ତେଣୁ, ଆମକୁ 'A' କାର୍ଡ଼କୁ ଓଲଟାଇବାକୁ ହେବ କି ? ନୁହେଁ । ଏହାର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଥାଉ କିମ୍ୱା ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଥାଉ ଏହା ନିୟମ ଭଙ୍ଗ କରୁନାହିଁ ।

'5' ବିଷୟରେ କ'ଣ କହିପାରିବା ? ପୁନର୍ବାର ଆମକୁ ଏହାକୁ ଓଲଟାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ ନାହିଁ , କାରଣ ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ କିମ୍ୱା ବ୍ୟଞ୍ଜନ ବର୍ଣ୍ଣ ଅଛି, ଏହି ନିୟମ ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

କିନ୍ତୁ ତୁମେ V ଓ 6 ଥିବା କାର୍ଡ଼ଗୁଡ଼ିକୁ ଓଲଟାଇବାକୁ ହେବ । V ର ଅପରପାର୍ଶ୍ୱରେ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଥିଲେ ନିୟମ ଭଙ୍ଗ ହେଉଛି । ସେହିଭଳି 6 ର ଅପରପାର୍ଶ୍ୱରେ ବ୍ୟଞ୍ଜନ ବର୍ଣ୍ଣ ଥିଲେ ମଧ୍ୟ ନିୟମ ଭଙ୍ଗ ହେଉଛି ।

ଏହି ପ୍ରହେଳିକାକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ବ୍ୟବହାର କରୁଥିବା ତର୍କକୁ ନିଗମନ ତର୍କ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ ନିଗମନ ପ୍ରଣାଳୀ ଏଥିପାଇଁ କୁହାଯାଇଛି ଯେ, ଆମେ ଏକ ପୂର୍ବ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଫଳାଫଳ ବା ବିବୃତ୍ତିରୁ ଏହି ନିଷ୍ପତ୍ତିରେ ପହଞ୍ଚିଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରହେଳିକାରେ କେତେକ କ୍ରମିକ ତାର୍କିକ ସୋପାନ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହି ନିଷ୍ପତ୍ତିରେ ପହଞ୍ଚିଲୁ ଯେ ଆମକୁ କେବଳ V ଓ 6 କୁ ଓଲଟାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ ।

ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିବୃତ୍ତି ସତ୍ୟ ବୋଲି ନିଷ୍ପତ୍ତି ନେବାପାଇଁ ମଧ୍ୟ ନିଗମନ ତର୍କ ସହାୟକ ହୋଇଥାଏ, କାରଣ ଅନେକ ସାଧାରଣ ବିବୃତ୍ତି ଯାହା ସତ୍ୟ ବୋଲି ଜଣାଯାଇଥାଏ । ତା' ମଧ୍ୟରୁ ଏହା ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଯଦି ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ବୋଲି ଥରେ ପ୍ରମାଣ କଲାପରେ ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା (ଗଣନା କରିବା ବିନା) ଯେ 70001×134563 ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । କାରଣ ଉଭୟ 70001 ଓ 134563 ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

AP SCERT

ଶହ ଶହ ବର୍ଷ ଧରି ନିଗମନ ତର୍କ ମାନବ ବିଚାରଧାରାର ଏକ ଅଂଶ ବିଶେଷ ହୋଇ ରହିଛି ଏବଂ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଏହା ନିରନ୍ତର ବ୍ୟବହାର ହୋଇ ଚାଲିଛି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଏହି ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ଯଦି "ପୂର୍ବ ଦିନର ସର୍ବାଧିକ ତାପମାତ୍ରା 28° C ରୁ ଅଧିକ ହୁଏ, ତେବେ ସୋଲାରିସ୍ ଫୁଲ ଫୁଟେ ଏବଂ ସେପ୍ଟେମ୍ବର 15, 2005 ରେ ଇମାଜିନେରି ଉପତ୍ୟକାରେ ସୋଲାରିସ୍ ଫୁଲ ଫୁଟିଲା" ସତ୍ୟ ଅଟେ । ତେବେ ନିଗମନ ତର୍କ ସାହାଯ୍ୟରେ ଆମେ ଏହି ନିଷ୍ପତ୍ତିରେ ପହଞ୍ଚିବା ଯେ ସେପ୍ଟେମ୍ବର 14, 2005 ଦିନ ଇମାଜିନେରି ଉପତ୍ୟକାର ସର୍ବାଧିକ ତାପମାତ୍ରା 28°C ରୁ ଅଧିକ ଥିଲା ।

ଦୁର୍ଭାଗ୍ୟବଶତଃ ଆମେ ଆମର ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ସଠିକ୍ ତର୍କ ବ୍ୟବହାର କରୁନାହୁଁ । ଆମେ ଅନେକ ସମୟରେ ତୃଟିପୂର୍ଣ୍ଣ ଯୁକ୍ତି ସାହାଯ୍ୟରେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହୋଇଥାଉଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଦିନେ ତୁମ ବନ୍ଧୁ ତୁମକୁ ଦେଖି ହସିଲେ ନାହିଁ, ତେବେ ତୁମେ ଏହା ଭାବିନେଲ ଯେ, ସେ ତୁମ ଉପରେ ରାଗିଛନ୍ତି । ସେ ସମୟରେ ଏହା ସତ୍ୟ ହୋଇପାରେ ଯେ "ସେ ମୋ ଉପରେ ରାଗିଥିବା ଯୋଗୁଁ ହସିଲେ ନାହିଁ " ତୁମେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ନେଇଥିବା କେତେକ ନିଷ୍ପତ୍ତି ସଠିକ୍ ତର୍କ ଉପରେ ଆଧାରିତ କି ନୁହେଁ ତୁମେ କାହିଁକି ପରୀକ୍ଷା କରିନାହଁ ?

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.2

1. ନିଗମନ ତର୍କ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ମନୁଷ୍ୟ ସ୍ତନ୍ୟପାୟୀ ପ୍ରାଣୀ ଅଟେ । ସମସ୍ତ ସ୍ତନ୍ୟପାୟୀ ପ୍ରାଣୀ ମେରୁଦଣ୍ଡୀ ଅଟନ୍ତି । ଏହି ଦୁଇଟି ବିବୃତ୍ତି ସାହାଯ୍ୟରେ ତୁମେ ମନୁଷ୍ୟମାନଙ୍କ ବିଷୟରେ କି ନିଷ୍ପତ୍ତି ନେବ ?

(ii) ଆନ୍ଥୋନୀ ଜଣେ ଭଣ୍ଡାରୀ । ଦିନେଶ ତାର କେଶ କଟାଇଲା । ଆନ୍ଥୋନୀ, ଦୀନେଶର କେଶ କାଟିଲା ବୋଲି ତୁମେ କହିପାରିବ କି ?

(iii) ମାର୍ସିଆନଗୁଡ଼ିକର ଜିଭ ଲାଲ । ଗୁଲାଗ ଗୋଟିଏ ମାର୍ସିଆନ । ଏହି ଦୁଇ ବିବୃତ୍ତିରୁ ଗୁଲାଗ ବିଷୟରେ ତୁମେ କେଉଁ ନିଷ୍ପତ୍ତି ନେଇପାରିବ ?

(iv) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦିନ ଚାରି ଘଣ୍ଟାରୁ ଅଧିକ ସମୟ ଧରି ବର୍ଷା ହେଲେ ପରଦିନ ନାଳଗୁଡ଼ିକୁ ନିଶ୍ଚୟ ସଫା କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ଆଜି 6 ଘଣ୍ଟା ବର୍ଷା ହେଲା ଆସନ୍ତା କାଲି ନାଳଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ତୁମେ କେଉଁ ନିଷ୍ପତ୍ତିରେ ପହଞ୍ଚିବ ?

(v) ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ବ୍ୟଙ୍ଗ ଚିତ୍ରରେ ଗାଈର ଯୁକ୍ତିରେ କେଉଁ ଭ୍ରମ ରହିଛି ?

2. ପୁଣି ତୁମକୁ ଚାରୋଟି କାର୍ଡ଼ ଦିଆଗଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ କାର୍ଡ଼ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୋଟିଏ ଇଂରାଜୀ ଅକ୍ଷର ଛପାଯାଇଛି । ତେବେ ନିମ୍ନ ନିୟମ ଅନୁସରଣ କରିବା ପାଇଁ ତୁମେ କେବଳ କେଉଁ ଦୁଇଟି କାର୍ଡ଼ ଓଲଟାଇବ ?

"ଯଦି ଗୋଟିଏ କାର୍ଡ଼ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବ୍ୟଞ୍ଜନ ବର୍ଣ୍ଣ ଥାଏ, ତେବେ ଏହାର ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଥିବ ।"

A1.4 ଉପପାଦ୍ୟ, ପରିକଳ୍ପନା ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ

ବର୍ତ୍ତମାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ବିବୃତ୍ତି ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ବୈଧତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିଛେ । ଏହି ବିଭାଗରେ ତୁମେ ତିନୋଟି ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତି ଯଥା ଉପପାଦ୍ୟ, ପରିକଳ୍ପନା ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ କି ପ୍ରଭେଦ ଅଛି ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

ଏହା ପୂର୍ବରୁ ତୁମେ ଅନେକ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ସୁପରିଚିତ । ତେଣୁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ କହିଲେ କ'ଣ ? ଗାଣିତିକ ଭାବେ ସତ୍ୟତା ପ୍ରମାଣିତ (ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ) ବିବୃତ୍ତିକୁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ନିମ୍ନ ଲିଖିତ କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟର ଉଦାହରଣ ବିଭାଗ A1.5 ରେ ଦିଆଗଲା ।

ଉପପାଦ୍ୟ A1.1 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଷ୍ଟି 180° ।

ଉପପାଦ୍ୟ A1.2 : ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ଉପପାଦ୍ୟ A1.3 : ଯେକୌଣସି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 16 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏକ ପରିକଳ୍ପନା ହେଉଛି ଏକ ବିବୃତ୍ତି ଯାହାକୁ ଆମର ଗାଣିତିକ ଅବବୋଧ ଅଭିଜ୍ଞତା ଏବଂ ଅନ୍ତଃଜ୍ଞାନ ଦ୍ୱାରା ସତ୍ୟ ବୋଲି ଧରି ନେଉଥାଉ । ପରବର୍ତ୍ତି ସମୟରେ ଏହା ସତ୍ୟ ହୋଇପାରେ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ମଧ ହୋଇପାରେ । ଏହାକୁ ପ୍ରମାଣିତ କରିପାରିଲେ ଏହା ଉପପାଦ୍ୟରେ ପରିଣତ ହୋଇଥାଏ । ବହୁ ସମୟରେ ଗଣିତ ଅନେକ ସଂରଚନା ଓ ବୁଦ୍ଧିମାନ ଗାଣିତିକ ଅନୁମାନଯୁକ୍ତ ସ୍ପଷ୍ଟ ପରିକଳ୍ପନାରୁ ଆରମ୍ଭ ହୋଇଥାଏ । ଆମେ କେତେକ ସୁନ୍ଦର ସଂରଚନା ଏବଂ ସେଥିରେ ରହିଥିବା ବୁଦ୍ଧିମାନ ଅନୁମାନଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 4 : ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକର । ମନେକର

$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, 20 + 22 + 24 = 66.$

ଏହି ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକରେ ତୁମେ କୌଣସି ସଂରଚନା ଥିବା ଅନୁମାନ କରିପାରୁଛ କି ? ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ତୁମର ପରିକଳ୍ପନା କ'ଣ ହୋଇପାରିବ ?

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ପରିକଳ୍ପନା ଏପରି ହୋଇପାରେ ।

(i) ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ମୋଟ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିକଳ୍ପନା:

(ii) ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

AP SCERT

ଉଦାହରଣ 5 : ପାସ୍କାଲ୍‌ଙ୍କ ତ୍ରିଭୁଜ ନାମକ ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ସଂରଚନାକୁ ଦେଖ :

ଧାଡ଼ି		ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

7ମ ଓ 8ମ ଧାଡ଼ିର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ବିଷୟରେ ତୁମର ପରିକଳ୍ପନା କ'ଣ ହେବ ? 21ତମ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମର ପରିକଳ୍ପନା କ'ଣ ? ତୁମେ ଏଠାରେ କୌଣସି ସଂରଚନା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ କି ? n ତମ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି କେତେ ହୋଇପାରିବ ଅନୁମାନ କର ।

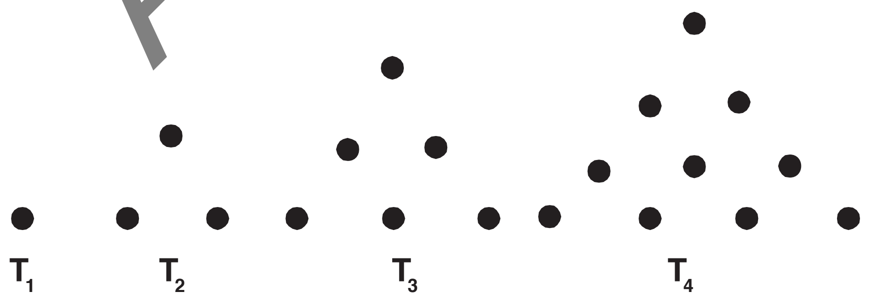
ସମାଧାନ : 7ମ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମୋଟ $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8ମ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମୋଟ $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21ଶ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମୋଟ $= 2^{20}$

nତମ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମୋଟ $= 2^{n-1}$

ଉଦାହରଣ 6 : ତ୍ରିଭୁଜାକାର ସଂଖ୍ୟା T_n ଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କର :



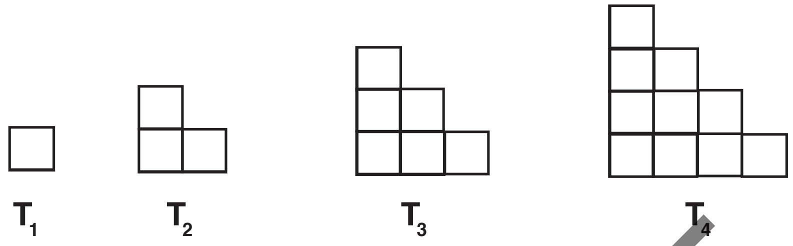
ଚିତ୍ର A1.1

ଏଠାରେ ଟୋପାଗୁଡ଼ିକ ଏପରି ସଜ୍ଜିତ ହୋଇଛି ଯେ ତାହା ଏକ ତ୍ରିଭୁଜଭଳି ଦେଖାଯାଉଛି । ଏଠାରେ $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, ଇତ୍ୟାଦି । ତେବେ T_5 କେତେ ହେବ ଅନୁମାନ କରିପାରିବ କି ? T_6 ଓ T_n ବିଷୟରେ ତୁମେ କଣ କହିପାରିବ ?

AP SCERT

T_n ପାଇଁ ଏକ ପରିକଳ୍ପନା ତିଆରି କର ।

ତୁମେ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରେ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନଃଲିଖନ କଲେ ତାହା ସହାୟକ ହୋଇପାରେ ।



ଚିତ୍ର A1.2

ସମାଧାନ : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଉନ୍ମୁକ୍ତ ଥିବା (ଅର୍ଥାତ୍ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇପାରିନଥିବା) ଏକ ସୁନ୍ଦର ପରିକଳ୍ପନାର ଉଦାହରଣ ହେଉଛି ଗୋଲ୍ଡବାକଙ୍କ ପରିକଳ୍ପନା । ଏହା ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ ଗଣିତଜ୍ଞ ଖ୍ରୀଷ୍ଟିଅନ୍ ଗୋଲ୍ଡବାକ୍ (1690 – 1764) ଙ୍କ ନାମରେ ନାମିତ । ଏହି ପରିକଳ୍ପନା ହେଉଛି "4 ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୁଗ୍ମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାକୁ ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ।" ବୋଧହୁଏ ତୁମେ ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରି ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ ହୋଇପାରିବ!

ତୁମେ ହୁଏତ ଭାବୁଥିବ ଯେ, ଗଣିତରେ ଆମେ ସାମ୍ନା କରୁଥିବା ସମସ୍ତ ବିଷୟକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ କି ? ଏବଂ ଯଦି ନୁହେଁ, କାହିଁକି ନୁହେଁ ?

APSCERT

ବାସ୍ତବରେ ଗଣିତରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏମିତି କିଛି ବିବୃତ୍ତି ରହିଛି ଯାହାକୁ ବିନା ପ୍ରମାଣରେ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଛି । ଏଗୁଡ଼ିକ 'ନିଜେ ନିଜେ ସତ୍ୟ', ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ ବିନା ସତ୍ୟ ବୋଲି ନିଆଯାଇଛି । ଏହି ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟ ବା ଏକ୍ସିଅମ୍ କୁହାଯାଏ । ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେ ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟ ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ପଢ଼ିଛ । (ଏବେ ଆମେ ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟ ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ପ୍ରଭେଦ ଦେଖୁନାହୁଁ ।) ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ପ୍ରଥମ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି:

ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଟଣାଯାଇପାରେ ।

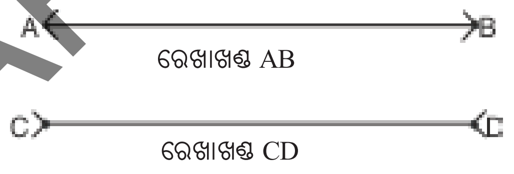
ଏବଂ ତୃତୀୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି:

ଯେ କୌଣସି କେନ୍ଦ୍ରକୁ ନେଇ ଏବଂ ଯେ କୌଣସି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଏହି ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ନିଶ୍ଚିତ ସତ୍ୟଭଳି ମନେହୁଏ ଏବଂ ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ସତ୍ୟବୋଲି କଳ୍ପନା କରିଥିଲେ । ଆମେ କେତେକ ବିବୃତ୍ତିକୁ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଧରିନେଇ ସେଗୁଡ଼ିକର ନିୟମ ଓ ତର୍କକୁ ଆଧାର କରି ଆମର ଜ୍ଞାନ ବିକଶିତ କରିଥାଉଁ ।

ତୁମେ ହୁଏତ ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟ ହେବ ଯେ ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବିବୃତ୍ତି ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟ ବୋଲି ମନେ ହୁଏ, ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରିପାରୁ ନାହୁଁ । ଏହାର ଅନେକ କାରଣ ଅଛି । ଅନେକ ସମୟରେ ଛବିଗୁଡ଼ିକ ଏବଂ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକ ଆମର ଅନ୍ତଃକରଣକୁ ଭ୍ରମରେ ପକାଇଥାଏ, ଯାହା ଫଳରେ ଆମେ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଖୋଜିବା ପାଇଁ ବାଧ୍ୟ ହୋଇଥାଉଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଆମ ମଧ୍ୟରୁ ଅଧିକାଂଶ ଭାବିଥାଉଁ ଯେ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି ଆମେ ଉକ୍ତ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସଂଖ୍ୟାଟିଏ ପାଇବା । କିନ୍ତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଏହା ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $5 \times 0.2 = 1$, ଯାହାକି 5 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ।

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର A1.3 କୁ ଦେଖ । AB ଓ CD ରେଖାଖଣ୍ଡ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଦୀର୍ଘତର ?



ଚିତ୍ର A1.3

ବାସ୍ତବରେ ଉଭୟ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ, ଯଦିଓ AB କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଭଳି ମନେହେଉଛି !

ତୁମେ ସେତେବେଳେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ବୈଧତା ବିଷୟରେ ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟ ହୋଇପାର । ଆମର ଅନ୍ତଃକରଣ ଓ ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ଭାବେ ସତ୍ୟ ଭଳି ମନେ ହେଉଥିବା ତଥ୍ୟକୁ ଆଧାର କରି ସ୍ୱିକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଚୟନ କରାଯାଉଥାଏ । ଅତଏବ, ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଧରିନେଉ । ପରବର୍ତ୍ତି ସମୟରେ ହୁଏତ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ବୋଲି ଆମେ ଆବିଷ୍କାର କରିଥାଉଁ । ଏହି ସମ୍ଭାବନା ବିରୁଦ୍ଧରେ କୌଣସି ସୁରକ୍ଷା ବ୍ୟବସ୍ଥା ଅଛି କି ? ଆମେ ନିମ୍ନ ସୋପାନ ଦେଇ ଗତି କରିବା :

(i) ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସର୍ବନିମ୍ନଭାବେ ଖୋଲା ରଖ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, କେବଳ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ପାଞ୍ଚଟି ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟକୁ ଆଧାର କରି ଆମେ ଶହ ଶହ ଉପପାଦ୍ୟ ପାଇପାରିବା ।

AP SCERT

(ii) ନିଶ୍ଚିତ ହୁଅଯେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର(ସଙ୍ଗତ) ଅଟେ ।
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ଏକ ସମୂହକୁ ଅସ୍ଥିର (ଅସଙ୍ଗତ) କୁହାଯାଇପାରିବ ଯେତେବେଳେ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ନିମ୍ନ ଦୁଇଟି ବିବୃତ୍ତି ଦେଖ । ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକ ଅସଙ୍ଗତ ବୋଲି ଦେଖାଇବା ।

ବିବୃତ୍ତି1: କୌଣସି ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଏହାର ପରବର୍ତ୍ତି ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ସମାନ ନୁହେଁ ।

ବିବୃତ୍ତି2: ଗୋଟିଏ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଶୂନ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ମିଳେ ।

(ମନେପକାଅ ଯେ, ଶୂନ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜନ ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ । କିନ୍ତୁ କିଛି ସମୟ ପାଇଁ ଆମେ ଧରିନେବା ଯେ ଏହା ସମ୍ଭବ ଏବଂ ଏହା ଦ୍ୱାରା କଣ ହେଉଛି ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।)

ବିବୃତ୍ତି 2 ରୁ ଆମେ ପାଇବା $\frac{1}{0} = a$, ଯେଉଁଠି a କୌଣସି ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା । ଏହା ସୂଚିତ କର ଯେ $1 = 0$, କିନ୍ତୁ ଏହା ପ୍ରଥମ ବିବୃତ୍ତିକୁ କୌଣସି ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଏହାର ପରବର୍ତ୍ତି ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ନୁହେଁକୁ ଖଣ୍ଡନ କରୁଛି ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଭୁଲ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ କିମ୍ବା ଆଉ କିଛି ସମୟ ପରେ ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ ଉତ୍ପନ୍ନ କରିଥାଏ । ଗୋଟିଏ ବିବୃତ୍ତି ଏବଂ ଏହାର ନକାରାତ୍ମକ ଉକ୍ତି ଉଭୟ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଫଳାଫଳ ପାଇଲେ ଏହାକୁ ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଉପରୋକ୍ତ ବିବୃତ୍ତି 1 ଓ ବିବୃତ୍ତି 2 କୁ ପୁଣି ବିଚାରକୁ ନେବା ।

ବିବୃତ୍ତି 1 ରୁ, ଆମେ ପାଇପାରିବା ଯେ $2 \neq 1$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $x^2 - x^2$ କୁ ଦେଖ । ଏହାକୁ ଆମେ ଦୁଇଟି ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରିବା:

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ ଏବଂ

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

ତେଣୁ, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

ବିବୃତ୍ତି 2 ରୁ ଆମେ ଉଭୟ ପକ୍ଷରୁ $(x - x)$ କୁ ହଟେଇଦେବା ।

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା $x = 2x$, ଅର୍ଥାତ୍ $2 = 1$

ତେଣୁ ଉଭୟ ବିବୃତ୍ତି $2 \neq 1$ ଏବଂ ଏହାର ନକାରାତ୍ମକ ଉକ୍ତି $2 = 1$ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଫଳାଫଳ ଆସିଲା । ଏହା ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ । ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ଭୁଲ୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଶୂନ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ମିଳେ ତେଣୁ ଏପରି ବିରୋଧାଭାଷ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଲା ।

ତେଣୁ ଆମେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ନେଇଥିବା ବିବୃତ୍ତି ବହୁତ ଚିନ୍ତା ଓ ଅନ୍ତଃଦୃଷ୍ଟି ପ୍ରୟୋଗ କରି ନେବା ଆବଶ୍ୟକ । ସେଗୁଡ଼ିକ ଅଧିକ ସଙ୍ଗତ ଓ ତାର୍କିକ ବିରୋଧାଭାଷ ବିହୀନ ହେବା ଭଳି ଯତ୍ନ ନେବା ଆବଶ୍ୟକ । ବେଳେ ବେଳେ କେତେକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଏଭଳି ଚୟନ କରାଯାଇଥାଏ, ଯାହା ନୂତନ ଆବିଷ୍କାର ଆଡ଼କୁ ବାଟ କଢ଼ାଏ । ଅଧ୍ୟାୟ 5 ରେ ତୁମେ ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ପଞ୍ଚମ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ଅଣ ୟୁକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି ବିଷୟରେ ସୁପରିଚିତ । ତୁମେ ଦେଖିଲ ଯେ ପଞ୍ଚମ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ ବାସ୍ତବରେ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ ବୋଲି ଧରି ନେଇଛନ୍ତି କାରଣ ପ୍ରଥମ ଚାରୋଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହାକୁ ସହଜରେ ପ୍ରମାଣିତ କରାଯାଇପାରୁଛି । ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟଜନକ ଭାବେ ଏଭଳି ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଦ୍ୱାରା ଅଣୟୁକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତିର ଆବିଷ୍କାର ହୋଇପାରିଛି ।

ଏକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ପରିକଳ୍ପନା ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ସହିତ ଆମେ ଏହି ବିଭାଗର ପରିସମାପ୍ତି କରିବା । **ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ** ହେଉଛି ଏକ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତି ଯାହା ବିନା ପ୍ରମାଣରେ ସତ୍ୟ ବୋଲି କଳ୍ପନା କରାଯାଇଥାଏ ।

AP SCERT

ପରିକଳ୍ପନା ଏକ ବିବୃତ୍ତି ଯାହାର ସତ୍ୟତା କିମ୍ବା ଅସତ୍ୟତା ଏବେ ସୁଦ୍ଧା ପ୍ରମାଣ ହୋଇପାରି ନାହିଁ । **ଉପପାଦ୍ୟ** ହେଉଛି ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତ ଭାବେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ଏକ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତି ।

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.3

1. ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ସେଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର; ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ଇତ୍ୟାଦି । ଏହି ଗୁଣଫଳ ବିଷୟରେ ତିନୋଟି ପରିକଳ୍ପନା ତିଆରି କର।

2. ପୁନଃ ପାସ୍କଲଙ୍କ ତ୍ରିଭୁଜକୁ ଦେଖ ।

   ଧାଡ଼ି 1 : $1 = 11^0$

   ଧାଡ଼ି 2 : $1 \quad 1 = 11^1$

   ଧାଡ଼ି 3 : $1 \quad 2 \quad 1 = 11^2$

   4 ର୍ଥ ଓ 5 ମ ଧାଡ଼ି ପାଇଁ ଏକ ପରିକଳ୍ପନା ପ୍ରସ୍ତୁତ କର । ତୁମର ପରିକଳ୍ପନା ସ୍ଥିର ଅଟେ କି ? 6 ଷ୍ଠ ଧାଡ଼ି ପାଇଁ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ଅଟେ କି ?

3. ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନଃ ଅନୁଧାନ କରିବା (ଚିତ୍ର A1.2 ଦେଖ) । ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କର । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$ ତେବେ $T_4 + T_5$ ବିଷୟରେ ତୁମେ କ'ଣ କହିପାରିବ ? $T_{n-1} + T_n$ ପାଇଁ ତୁମେ ଏକ ପରିକଳ୍ପନା ତିଆରି କର ।

4. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

   ତଳେ ଦିଆଯାଇଥିବା ବିବୃତ୍ତି ପାଇଁ ଏକ ପରିକଳ୍ପନା ତିଆରି କର:

   $111111^2 =$

   $1111111^2 =$

   ତୁମର ପରିକଳ୍ପନା ସତ୍ୟ କି ନୁହେଁ ଯାଞ୍ଚ କର ।

5. ଏହି ବହିରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥିବା 5 ଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଲେଖ ।

A1.5 ଗାଣିତିକ ପ୍ରମାଣ କ'ଣ?

ଚାଲ ଏବେ ପ୍ରମାଣର ବିଭିନ୍ନ ଦିଗକୁ ଦେଖିବା । ଆମେ ଯାଞ୍ଚ କରିବା ଏବଂ ପ୍ରମାଣ କରିବା ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ସହିତ ଆରମ୍ଭ କରିବା । ତୁମେ ଗଣିତରେ ପ୍ରମାଣ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ତମକୁ ପ୍ରଥମେ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ଯାଞ୍ଚ କରିବା ପାଇଁ କୁହାଗଲା ।

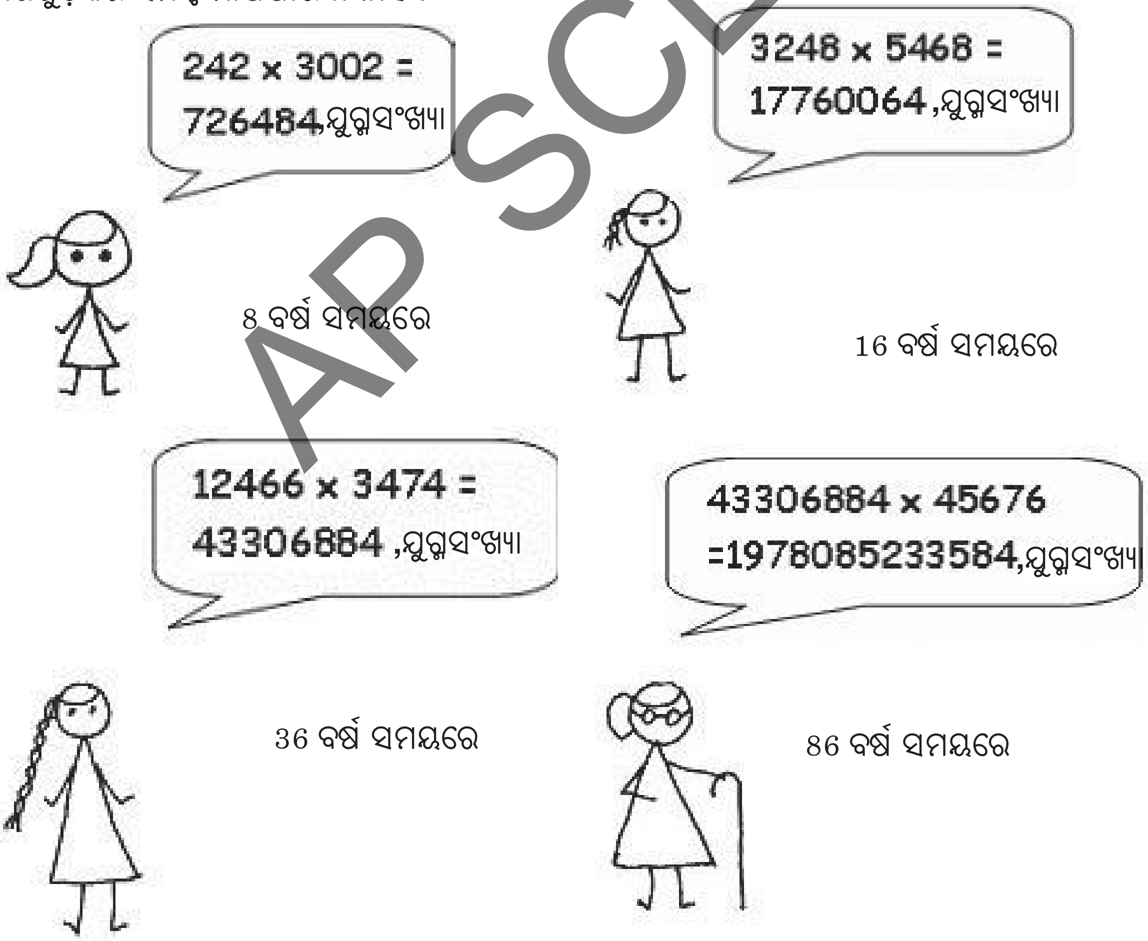
ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, "ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା" ର ସତ୍ୟତା ଯାଞ୍ଚ କରିବା ପାଇଁ ତୁମକୁ କୁହାଗଲା । ତୁମେ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଭାବେ ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ବାଛିଲ ।

AP SCERT

ମନେକର 24 ଓ 2006 ଏବଂ ପରୀକ୍ଷା କଲ ଯେ $24 \times 2006 = 48144$ ଯାହା ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ତୁମେ ଆହୁରି ଅଧିକ ଉଦାହରଣ ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରିଥିବ ।

ପୁନଶ୍ଚ ତୁମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମକୁ ଏକ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ ପାଇଁ ଅନେକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବା ପାଇଁ କହି ସେଗୁଡ଼ିକର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ଗଣନା କରିବା ପାଇଁ କୁହାଯାଇଥିବ । ମାପ ଜନିତ ଛୋଟ ଛୋଟ ତୃଟିକୁ ବାଦ୍‌ଦେଲେ ତୁମେ ଦେଖିଥିବ ଯେ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ମୋଟ 180° ଅଟେ ।

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ କି ତୃଟି ରହିଛି ? ଯାଞ୍ଚ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଅନେକ ସମସ୍ୟା ନିହିତ ଥାଏ । ତୁମେ ସତ୍ୟ ବୋଲି ବିଶ୍ୱାସ କରୁଥିବା ବିବୃତ୍ତିକୁ ଏହା ସମର୍ଥନ କରିପାରୁଥାଏ, କିନ୍ତୁ ଏହା ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ବୋଲି ତୁମେ ଦୃଢ଼ ନିଶ୍ଚିତ ନୁହଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଅନେକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିର ଗୁଣନ ଆମକୁ ଏହି ଅନ୍ଦାଜରେ ପହଞ୍ଚାଏ ଯେ ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା । ତୁମେ ଭୌତିକ ରୂପେ ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିର ଗୁଣଫଳ ଯାଞ୍ଚ କରିପାରିବ ନାହିଁ । ଯଦି ତୁମେ ସେପରି କର, ତେବେ ବ୍ୟଙ୍ଗଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବାଳିକାଭଳି ତୁମ ବାକି ଜୀବନ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ବିତିଯିବ । ସେହିଭଳି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳ 180° ନହେବା ଭଳି କେତେକ ତ୍ରିଭୁଜ ଥାଇପାରେ ଯାହାକି ତୁମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁଦ୍ଧା ଅଙ୍କନ କରିପାରି ନାହଁ । ଆମେ ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ମାପିପାରିବା ନାହିଁ ।



AP SCERT

ଅଧିକନ୍ତୁ ଯାଞ୍ଚକାର୍ଯ୍ୟ ଅନେକ ସମୟରେ ବିଭ୍ରାନ୍ତକାରୀ ହୋଇପାରେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ପାସ୍କଲଙ୍କ ତ୍ରିଭୁଜ (ଅନୁଶୀଳନୀ A1.3, Q.2) ର ପୂର୍ବରୁ ଯାଞ୍ଚ କରାଯାଇଥିବା ଫଳାଫଳରେ ଆକୃଷ୍ଟ ହୋଇ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ନେଇପାରୁ ଯେ $11^5 = 15101051$ । କିନ୍ତୁ ବାସ୍ତବରେ $11^5 = 161051$ ।

ତେଣୁ ତୁମର ଅନ୍ୟ ଏକ ପଦ୍ଧତି ଆବଶ୍ୟକ ଯାହା କେବଳ କେତେକ ମାମଲା ପାଇଁ ଯାଞ୍ଚ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେନାହିଁ । ଆଉ ଏକ ଉପାୟ ଅଛି ଯାହାର ନାମ 'ବିବୃତ୍ତିର ପ୍ରମାଣ' । ଏକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯାହା କେବଳ ଏକ ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତ ତର୍କ ଉପରେ ଆଧାରିତ ହୋଇ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିପାରିବ, ତାହାକୁ ଏକ ଗାଣିତିକ ପ୍ରମାଣ କୁହାଯାଏ ।

ବିଭାଗ A1.2 ରେ ଉଦାହରଣ 2 ରେ ତୁମେ ଦେଖିଲ ଯେ ଗୋଟିଏ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତିକୁ ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବାପାଇଁ ଗୋଟିଏ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ଯଥେଷ୍ଟ । ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ବିବୃତ୍ତିର ବୈଧତା ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ କରିବା ପାଇଁ ହଜାର ହଜାର ଯାଞ୍ଚ ପ୍ରକ୍ରିୟା ମଧ୍ୟ ଯଥେଷ୍ଟ ହୋଇନଥିବା ବେଳେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ଏହାକୁ ଅସ୍ୱୀକାର କରିବା ପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ ଅଟେ (ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବା) । ଏହି ନିୟମଟି ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ।

AP SCERT

ଗୋଟିଏ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତି ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏମାତ୍ର ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।

ତେଣୁ, ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଏହି ବିବୃତ୍ତିର ଏକ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ହେଉଛି $7 + 5 = 12$

ଚାଲ ଏବେ ଆମେ ଏକ ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ମୌଳିକ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକର ତାଲିକା ଦେଖିବା:

(i) ଗୋଟିଏ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେଲେ ଆମକୁ କିଭଳି ଅଗ୍ରସର ହେବାକୁ ହେବ ସେ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଏକ ସାମାନ୍ୟ ଧାରଣା ରହିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(ii) ଏକ ଉପପାଦ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୂଚନା (ଅର୍ଥାତ୍ ପରିକଳ୍ପନା) ସ୍ପଷ୍ଟଭାବେ ବୁଝି ବ୍ୟବହାର କରିବାକୁ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଉପପାଦ୍ୟ A1.2 ରେ, ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା, ଆମକୁ ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଦତ୍ତ ଅଛି । ତେଣୁ ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମ ବ୍ୟବହାର କରିବା ଉଚିତ । (ଅଧ୍ୟାୟ2) ରେ ଥିବା ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟରେ ବହୁପଦୀ $p(x)$ ଦିଆଯାଇଛି ଏବଂ $p(a)=0$ ବୋଲି କୁହାଯାଇଛି । $(x-a)$ ଏକ $p(x)$ ର ଉତ୍ପାଦକ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ତୁମେ ଏହାକୁ ବ୍ୟବହାର କରିବାକୁ ହେବ । ସେହିପରି ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ବିପରୀତ କଥନରେ $(x-a)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ବୋଲି ପ୍ରଦତ୍ତ ଅଛି ଏବଂ ତୁମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ $p(a)=0$ ପରିକଳ୍ପନା ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ତୁମେ ଅଙ୍କନ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି 180° ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷ ଦେଇ ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା ଏବଂ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ଧର୍ମ ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

(iii) ଏକ ପ୍ରମାଣ ହେଉଛି କ୍ରମାଗତ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ଏକ ଅନୁକ୍ରମ । ପ୍ରମାଣରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିବୃତ୍ତି ଏହାର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତି ବିବୃତ୍ତିର ଏକ ତାର୍କିକ ପରିଣାମ କିମ୍ୱା ପୂର୍ବ ପ୍ରମାଣିତ ଉପପାଦ୍ୟ, ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ କିମ୍ୱା ପରିକଳ୍ପନାରୁ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥାଏ ।

(iv) ଉପପାଦ୍ୟରେ ଯାହା ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଥାଏ ସେହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଉଛି ଗାଣିତିକ ଭାବେ ସତ୍ୟ ହୋଇଥିବା ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ତାର୍କିକ ଅନୁକ୍ରମ ଯାହା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ ରହିଥାଏ ।

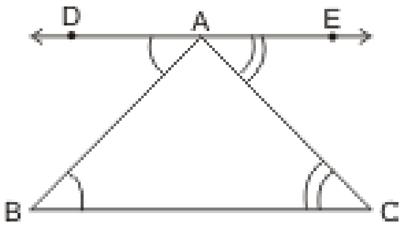
ଏହି ଉପପାଦ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ବୁଝିବା ପାଇଁ ଆମେ ଉପପାଦ୍ୟ A1.1 କୁ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା । ତୁମେ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଅଧ୍ୟାୟ 6 ରେ ପଢ଼ିସାରିଛ । କିନ୍ତୁ ପ୍ରଥମେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ପ୍ରମାଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଟିପ୍ପଣୀ ଅଛି । ଆମେ ପ୍ରାୟତଃ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ଆଙ୍କିଥାଉ ଯାହା ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ସହାୟକ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ ଏହା ଅତ୍ୟନ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ ମଧ୍ୟ। ତଥାପି ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୋପାନ କେବଳ ତାର୍କିକ ଭାବେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହୋଇଥିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଅନେକ ସମୟରେ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନେ ଏଭଳି ବିବୃତ୍ତି ଦେଇଥାନ୍ତି । "ଚିତ୍ରରେ କୋଣଦୁଇଟି ସମାନ ଦେଖାଯାଉଛି । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନ।" କିମ୍ୱା "ସେହି କୋଣଟି ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ 90° ହୋଇଥିବ, କାରଣ ରେଖା ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଭଳି ଦେଖାଯାଉଛି ।" ତୁମେ ଯାହା ଦେଖୁଛ ତାହା ଦ୍ୱାରା ଭ୍ରମିତ ହୁଅନାହିଁ (ମନେରଖ ଚିତ୍ର A1.3)!

ତେଣୁ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଉପପାଦ୍ୟ A1.1କୁ ଯିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ A1.1 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଷ୍ଟି 180° ।

ପ୍ରମାଣ : ତ୍ରିଭୁଜ ABC କୁ ବିଚାର କର । (ଚିତ୍ର A1.4 ଦେଖ)

ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ (1)



ଚିତ୍ର A 1.4

APSCERT

A ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ BC ସହ ସମାନ୍ତର କରି ସରଳରେଖା DE ଅଙ୍କନ କର । (2)

DE, BC ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ AB ଛେଦକ ।

ତେଣୁ, $\angle DAB$ ଏବଂ $\angle ABC$ ଏକାନ୍ତର କୋଣ । ତେଣୁ ଉପପାଦ୍ୟ 6.2, ଅଧ୍ୟାୟ 6 ଅନୁଯାୟୀ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle DAB = \angle ABC$ (3)

ସେହିପରି, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

ଅତଏବ, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

କିନ୍ତୁ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ କାରଣ ସେଗୁଡ଼ିକ ସରଳରେଖା ଗଠନ କରେ । (6)

ତେଣୁ $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$. (7)

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମେ ପ୍ରମାଣର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୋପାନର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବା ।

ସୋପାନ 1: ଆମର ଉପପାଦ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଧର୍ମ ସହିତ ସମ୍ପର୍କିତ, ତେଣୁ ଆମେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରୁ ଆରମ୍ଭ କରିବା ।

ସୋପାନ 2: ଏହା ହେଉଛି ମୁଖ୍ୟ ଧାରଣା – ଅନ୍ତର୍ନିହିତ ଲମ୍ଫ କିମ୍ବା ଉପପାଦ୍ୟଟିକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେଲେ କିପରି ଆଗକୁ ବଢ଼ିବାକୁ ହେବ ବୁଝିବା । ଅନେକ ସମୟରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ଅଙ୍କନର ଆବଶ୍ୟକ ପଡ଼ିଥାଏ ।

ସୋପାନ 3 ଓ 4: ଏଠାରେ ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ଯେ $\angle DAE = \angle ABC$ ଏବଂ $\angle CAE = \angle ACB$, କାରଣ DE ଓ BC ସମାନ୍ତର(ଆମ ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ଏବଂ ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ ଉପପାଦ୍ୟ 6.2, ହେଉଛି ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଏକ ଛେଦକ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ହେଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଏକାନ୍ତର କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

ସୋପାନ 5: ଏଠାରେ ଆମେ ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରିବା(ଅଧ୍ୟାୟ 5 ଦେଖ) ଯେଉଁଥିରେ ଅଛି ଯେ "ସମାନଗୁଡ଼ିକ ସହିତ ସମାନଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ସମାନ ।" ଓ ଏହା ନିଗମନ କରି ପାଇବା ।

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$

ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଷ୍ଟି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ ।

ସୋପାନ 6 : ଏଠାରେ ଆମେ ଅଧ୍ୟାୟ 6 ରେ ଥିବା ସରଳରୈଖିକ ଯୋଡ଼ି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରିବା ଯାହାର ବିବୃତ୍ତି ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି 180° ଓ ଏହାଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଇବା $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$

ସୋପାନ 7: ୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ "ଯେଉଁ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିଷୟ ସହିତ ସମାନ ସେଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସମାନ ।" ବ୍ୟବହାର କରି ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ଧ୍ୟାନ ଦିଅଯେ ସୋପାନ 7ରେ ଆମେ ଉପପାଦ୍ୟର ଆବଶ୍ୟକ ମନ୍ତବ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ ହେଲା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଉପପାଦ୍ୟ A1.2 ଓ A1.3 ବିନା ବିଶ୍ଳେଷଣରେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ A1.2 : ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର x ଓ y ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ xy ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

AP SCERT

x ଓ y ଯୁଗ୍ମ ହୋଇଥିବା ଯୋଗୁଁ ଉଭୟ ସଂଖ୍ୟା 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଏବଂ $x = 2m$, ଏବଂ $y = 2n$ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ଯେଉଁଠି m ଓ n ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ତେବେ $xy = 4\,mn$ । $4\,mn$, 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୋଇଥିବା ଯୋଗୁଁ xy ମଧ୍ୟ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଅତଏବ, xy ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ A1.3 : ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 16 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ପ୍ରମାଣ : ଯେ କୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନସଂଖ୍ୟା $2n$, $2n+2$ ଓ $2n+4$ ରୂପରେ ଥାଏ । ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ $2n(2n+2)(2n+4)$, 16 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$.

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମ ପାଖରେ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି ଅଛି । n ଯୁଗ୍ମ କିମ୍ବା ଅଯୁଗ୍ମ । ଉଭୟ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଆମେ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ମନେକର n ଯୁଗ୍ମ । ତେବେ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା ଯେ $n = 2m$, m ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ଏବଂ, ତେବେ $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$.

ଅତଏବ, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ପୁଣି ମନେକର n ଅଯୁଗ୍ମ । ତେବେ $n+1$ ଯୁଗ୍ମ ଏବଂ ଆମେ $n+1=2r$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା, ଯେଉଁଠି r ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ଆମେ ତେବେ ପାଇବା : $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$

$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

ଅତଏବ, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ତେଣୁ ଉଭୟ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କଲୁଯେ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 16 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ କିପରି ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକୁ ଆବିଷ୍କାର କରନ୍ତି ଏବଂ ଆନୁଷ୍ଠାନିକ ଦୃଢ଼ ପ୍ରମାଣଗୁଡ଼ିକ କିପରି ଲେଖାଯାଏ, ସେଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ବିଷୟରେ କିଛି ଟିପ୍ପଣୀ ଦେଇ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ସମାପ୍ତ କରିବା । ଉପରେ ଉଲ୍ଲେଖ କଲାଭଳି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରମାଣରେ ଏକ (ବେଳେ ବେଳେ ଏକାଧିକ) ପ୍ରମୁଖ ଅନ୍ତର୍ନିହିତ ଧାରଣା ଥାଏ । ଫଳାଫଳ ଆବିଷ୍କାର କରିବା ପାଇଁ ଜଣେ ଗଣିତଜ୍ଞର ମୁଖ୍ୟ ବିଚାରଧାରା ହେଉଛି ଅନ୍ତଃଜ୍ଞାନ । ପ୍ରାୟତଃ ଜଣେ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କ ପାଇଁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ବିଶୃଙ୍ଖଳିତ ଭାବେ ଆସିଥାଏ । ବହୁ ସମୟରେ ଗଣିତଜ୍ଞ ଅନେକ ପ୍ରକାର ଚିନ୍ତାଧାରାର ମାର୍ଗରେ ଯାଇ ଅନେକ ଯୁକ୍ତି ଓ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ସେ ସଠିକ୍ ସମାଧାନ କିମ୍ବା ପ୍ରମାଣ ପାଇବାରେ ସଫଳ ହୋଇଥାଏ । ପର୍ଯ୍ୟାୟ ହ୍ରାସ ହେବାପରେ ହିଁ ସମସ୍ତ ଯୁକ୍ତି ଏକ ସଠିକ୍ ପ୍ରମାଣ ଗଠନ ପାଇଁ ଏକତ୍ରିତ ହୁଏ ।

ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ, ମହାନ୍ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀନିବାସ ରାମାନୁଜନ୍ ଅନେକ ବିବୃତ୍ତିରେ ପହଞ୍ଚିବା ପାଇଁ ଅତି ଉଚ୍ଚସ୍ତରର ଅନ୍ତଃକରଣ ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ ।

AP SCERT

ଯାହା ସେ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଦାବି କରିଥିଲେ । ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ ଅନେକ ସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟରେ ପରିଣତ ହୋଇଛି । ତଥାପି, ଆଜି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମଗ୍ର ବିଶ୍ୱର ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ ତାଙ୍କର କିଛି ଦାବୀ (ବା ପରିକଳ୍ପନା)କୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା (କିମ୍ବା ଅସ୍ୱୀକାର କରିବା) ପାଇଁ ସଂଘର୍ଷ କରୁଛନ୍ତି ।

ଶ୍ରୀନିବାସ ରାମାନୁଜନ୍

(1887–1920)

ଚିତ୍ର A1.5

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.4

AP SCERT

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଅସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ କରିବାପାଇଁ ସଠିକ୍ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ଲେଖ:

(i) ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

(ii) ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁ ସମାନ ହୋଇଥିଲେ ତାହା ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ କୋଣ ସମାନ ହୋଇଥିଲେ ତାହା ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ।

(iv) a ଓ b ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିଲେ $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(v) ସମସ୍ତ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $2n^2 + 11$ ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

(vi) n ଯେ କୌଣସି ଧନପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $n^2 - n + 41$ ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

2. ତୁମର ପସନ୍ଦ ମୁତାବକ ଏକ ପ୍ରମାଣ ନେଇ ଏହାକୁ ସୋପାନ କ୍ରମରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର । ଯଥା: ବିଭାଗ A1.5 ରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିବା ସୋପାନଗୁଡ଼ିକ (କ'ଣ ଦତ୍ତ ଅଛି, କ'ଣ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ, କେଉଁ କେଉଁ ଉପପାଦ୍ୟ, ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଇତ୍ୟାଦି ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଛି ଇତ୍ୟାଦି) ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

3. ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କର ।

4. ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କର ।

5. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

6. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $y = 2x$ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ । (ସୂଚନା: ଯେ କୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $(n, 2n)$ ବିନ୍ଦୁ ବିଚାର କର ।)

7. ତୁମର ନିଶ୍ଚୟ ଜଣେ ସାଙ୍ଗ ଥିବେ ଯିଏ ତୁମକୁ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବା ପାଇଁ କହି ଏ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଭିନ୍ନ କ୍ରିୟା କରିବାକୁ କହିଥିବେ ଏବଂ ତୁମେ ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟା ନଜାଣି ତୁମେ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାରେ ଉତ୍ତର ଶେଷ କଲ କହିଥିବେ । ଏଠାରେ ସେଭଳି ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣ ଦିଆଗଲା । ସେଗୁଡ଼ିକ କିପରି କାର୍ଯ୍ୟକରେ ଯାଞ୍ଚକର ।

(i) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ । ଏହାକୁ ଦୁଇଗୁଣ କର । ସେଥିରେ 9 ଯୋଗକର । ସେଥିରେ ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାଟି ଯୋଗକର । 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର । 4 ଯୋଗ କର । ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାଟି ବିୟୋଗ କର । ତୁମର ଉତ୍ତର 7 ଅଟେ ।

(ii) ଯେ କୌଣସି ତିନି ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା (ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,425) ଲେଖ । ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟି ପୁଣି ଏହାର ପାଖରେ ଲେଖି ଛଅ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା (425425) ଲେଖ । ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାଟି 7, 11 ଓ 13 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

A1.6 ସାରାଂଶ

ଏହି ପରିଶିଷ୍ଟରେ ତୁମେ ନିମ୍ନ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକ ଅଧ୍ୟୟନ କଲ:

1. ଗଣିତରେ ଗୋଟିଏ ବିବୃତ୍ତି ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ସର୍ବଦା ଅସତ୍ୟ ହୋଇଥିଲେ ହିଁ ଗ୍ରହଣ ଯୋଗ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

2. ଗୋଟିଏ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତି ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ଏହାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।

3. ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଧରି ନିଆଯାଉଥିବା ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

4. ଏକ ପରିକଳ୍ପନା ହେଉଛି ଏକ ବିବୃତ୍ତି ଯାହାକୁ ଆମର ଗାଣିତିକ ଅନ୍ତଃକରଣ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ସତ୍ୟ ବୋଲି ବିଶ୍ୱାସ କରୁଁ କିନ୍ତୁ ଏହାକୁ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ବାକି ଥାଏ ।

5. ଯେଉଁ ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତି ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହୋଇଥାଏ, (ବା ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଥାଏ) ତାହାକୁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

6. ଗାଣିତିକ ବିବୃତ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ନିଗମନ ତର୍କ ଏକ ମୁଖ୍ୟ ସାଧନ ଅଟେ ।

7. ଏକ ପ୍ରମାଣ କ୍ରମାଗତ ଗାଣିତିକ ବକ୍ତବ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ଏକ ଅନୁକ୍ରମ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ । ଗୋଟିଏ ପ୍ରମାଣରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିବୃତ୍ତି ତାର୍କିକ ଭାବରେ ବିବୃତ୍ତିରୁ କିମ୍ବା ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଥିବା ସିଦ୍ଧାନ୍ତ (ଉପପାଦ୍ୟ) ରୁ କିମ୍ବା ଏକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ କିମ୍ବା ଏକ ପରିକଳ୍ପନାରୁ ଉଦ୍ଧୃତ ହୋଇଥାଏ ।

AP SCERT

ଉତ୍ତରମାଳା / ସୂଚନା

ଅନୁଶୀଳନୀ 1.1

1. ହଁ, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ ଇତ୍ୟାଦି ହର q ରେ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ନିଆଯାଇପାରିବ ।

2. 3 ଓ 4 ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିପାରିବ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପଦ୍ଧତି ହେଲା

$3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$ । ତେବେ 6 ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$ ।

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ । ପାଞ୍ଚୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$

4. (i) ଠିକ୍ (କାରଣ) ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସମୁଦାୟରେ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ରହିଥାଏ ।

(ii) ଭୁଲ୍, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ -2 ଅଖଣ୍ଡସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(iii) ଭୁଲ୍, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\frac{1}{2}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କିନ୍ତୁ ଅଖଣ୍ଡସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 1.2

1. (i) ଠିକ୍, ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି ଅପରିମେୟ ଓ ପରିମେୟସଂଖ୍ୟାର ମିଶ୍ରଣ ।

(ii) ଭୁଲ୍, କୌଣସି ଗଣନସଂଖ୍ୟାର ଋଣାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ ନଥାଏ ।

(iii) ଭୁଲ୍, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 2 ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା କିନ୍ତୁ ଅପରିମେୟ ନୁହେଁ ।

2. ନୁହେଁ, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\sqrt{4} = 2$ ଏକ ପରିମେୟସଂଖ୍ୟା ।

3. ଚିତ୍ର 1.୪ ରେ ଥିବା ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଅନେକଥର ପୁନରାବୃତ୍ତ କର । ପ୍ରଥମେ $\sqrt{4}$ ପରେ $\sqrt{5}$ ପାଇବ ।

APSCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 1.3

1. (i) 0.36 ଅସୀମ ଦଶମିକ (ii) $0.\overline{09}$, ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ

(iii) 4.125, ସସୀମ ଦଶମିକ (iv) $0.\overline{230769}$, ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ

(v) $0.1\overline{8}$ ଅସୀମ ଆବର୍ତ୍ତି ଦଶମିକ (vi) 0.8225 ସସୀମ ଦଶମିକ

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$,

$\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [ଧରିନିଅ $x = 0.666...$ ତେବେ $10x = 6.666...$ କିମ୍ବା, $10x = 6 + x$ କିମ୍ବା , $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [ଧରିନିଅ $x = 0.9999.....$ ତେବେ $10x = 9.999...$ କିମ୍ବା, $10x = 9 + x$ କିମ୍ବା, $x = 1$]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ର ମୌଳିକ ଗୁଣନୀୟକଗୁଡ଼ିକର ଘାତରେ 2 କିମ୍ବା 5 କିମ୍ବା ଉଭୟ ରହିଥାଏ ।

7. 0.01001000100001. . ., 0.202002000200002. . ., 0.003000300003. . .

8. 0.75075007500075000075. . ., 0.767076700767000767. . ., 0.808008000800008. . .

9. (i) ଓ (v) ଅପରିମେୟସଂଖ୍ୟା; (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିମେୟସଂଖ୍ୟା

ଅନୁଶୀଳନୀ 1.4

1. (i) ଅପରିମେୟସଂଖ୍ୟା (ii) ପରିମେୟସଂଖ୍ୟା (iii) ପରିମେୟସଂଖ୍ୟା

(iv) ଅପରିମେୟସଂଖ୍ୟା (v) ଅପରିମେୟସଂଖ୍ୟା

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. ଏଠାରେ କୌଣସି ବିରୋଧାଭାଷ ନାହିଁ । ମନେରଖ ଯେ ଯେତେବେଳେ କୌଣସି ଦୂରତାକୁ ସ୍କେଲ୍ କିମ୍ବା ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଉପକରଣରେ ମାପ ତେବେ ତୁମେ ପ୍ରାୟ ଯୁକ୍ତିସଂଗତ ମୂଲ୍ୟ ପାଇବ । ତେଣୁ c କିମ୍ବା d କୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରନାହିଁ ।

4. ଚିତ୍ର 1.17 କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$ 4. D 5. D

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.1

1. (i) ଓ (ii) ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ, (v) ହେଉଛି 3 ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦୀ

(iii), (iv) ବହୁପଦୀ ନୁହେଁ କାରଣ ଏହି ବହୁପଦୀରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚଳରାଶିର ଘାତ ଧନ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (ତୁମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସହଗ ନେଇ ଆଉ କେତୋଟି ବହୁପଦୀ ଲେଖିପାରିବ ।)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) ବର୍ଗ (ii) ଘନ (iii) ବର୍ଗ (iv) ରେଖୀୟ

(v) ରେଖୀୟ (vi) ବର୍ଗ (vii) ଘନ

6. B

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) ହଁ (ii) ନାହିଁ (iii) ହଁ (iv) ହଁ

(v) ହଁ (vi) ହଁ

(vii) ବହୁପଦୀର $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ଏକ ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ କିନ୍ତୁ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ଶୂନ୍ୟମୂଲ୍ୟ ନୁହେଁ (viii) ନୁହେଁ

4. (i) –5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.3

1. $(x + 1)$, (i) ର ଗୁଣନୀୟକ କିନ୍ତୁ (ii), (iii) ଓ (iv) ଗୁଣନୀୟକ ନୁହେଁ
1.

2. (i) ହଁ (ii) ନାହିଁ (iii) ହଁ

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$

5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$

(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

ଅନୁଶୀଳନୀ 2.4

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$

(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$

(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

AP SCERT

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$ (iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$

(v) $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 5z)(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$ (ii) $(4m - 7n)(16m^2 + 49n^2 + 28mn)$

11. $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

12. RHS କୁ ସରଳକର

13. ଅଭେଦ VIII ରେ $x + y + z = 0$ ନିଅ

14. (i) -1260 , ମନେକର $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$ ଏଠାରେ $a + b + c = 0$. Q13 ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଫଳାଫଳକୁ ବ୍ୟବହାର କର । (ii) 16380

15. (i) ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭବ୍ୟ ସମାଧାନ ହେଉଛି, ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 5a - 3$, ପ୍ରସ୍ଥ $= 5a - 4$

(ii) ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ ହେଉଛି, ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 7y - 3$, ପ୍ରସ୍ଥ $= 5y + 4$

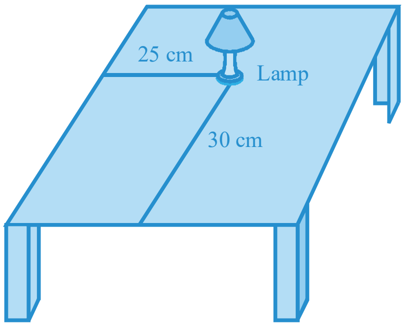
16. (i) ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭବ୍ୟ ସମାଧାନ ହେଉଛି, $3, x$ ଓ $x - 4$

(ii) ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭବ୍ୟ ସମାଧାନ ହେଉଛି, $4k, 3y + 5$ ଓ $y - 1$

17. $x, x+2$ ଏବଂ $x+2$

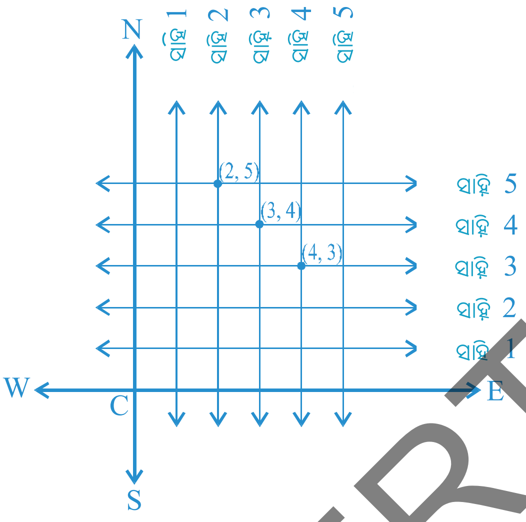
AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 3.1



1. ମନେକର ମେଜ ହେଉଛି ସମତଳ ପ୍ରଦେଶ ଏବଂ ବତୀଟି ହେଉଛି ବିନ୍ଦୁ । ମେଜ ଉପରେ ଲମ୍ବଭାବେ ଥିବା ଯକୌଣସି ଦୁଇଟି ଧାରକୁ ନିଅ । ଲମ୍ବା ଧାରରୁ ବତୀ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତାକୁ ଯୋଗକର । ଧରିନିଅ ତାହା ହେଉଛି 25 ସେ.ମି. । ପୁଣି ଛୋଟ ଧାରରୁ ବତୀ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତାକୁ ଯୋଗକର । ତାହା 30 ସେ.ମି. ବୋଲି ଭାବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ବତୀର ସ୍ଥାନକୁ (30,25) କିମ୍ବା (25,30) ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା । ଏହା ତୁମେ ନେଇଥିବା ଧାଡ଼ି ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

2. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ସାହିର ଯୋଜନା ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଉପରୋକ୍ତ ଚିତ୍ରରେ ଛକ-ସାହି (cross-streets) ଦୁଇଟି ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇଛି । ସେଗୁଡ଼ିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବରେ ମିଳିଥାଏ କାରଣ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ଦୁଇଟି ବିଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ବ୍ୟବହାର କରିଅଛୁ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 3.2

1. (i) x - ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ (ii) ପାଦ (iii) ମୂଳବିନ୍ଦୁ

2. (i) (– 5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) – 3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

3. (B)

ଅନୁଶୀଳନୀ 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0;\ a = 2,\ b = 3,\ c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0;\ a = 1,\ b = \frac{-1}{5},\ c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0;\ a = -2,\ b = 3,\ c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0;\ a = 1,\ b = -3,\ c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0;\ a = 2,\ b = 5,\ c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0;\ a = 3,\ b = 0,\ c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0;\ a = 0,\ b = 1,\ c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0;\ a = -2,\ b = 0,\ c = 5$

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ 4.2

1. (iii) କାରଣ ପ୍ରତି x ପାଇଁ y ର ଅନୁରୂପ ମୂଲ୍ୟ ରହିଥାଏ,ସେହିଭଳି ପ୍ରତି y ପାଇଁ x ର ଅନୁରୂପ ମୂଲ୍ୟ ରହିଥାଏ ।

2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1)

(ii) $(1, 9-\pi), (0, 9), (-1, 9+\pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) ନୁହେଁ (ii) ନୁହେଁ (iii) ହଁ (iv) ନୁହେଁ (v) ନୁହେଁ

4. 7

ଅନୁଶୀଳନୀ 5.1

1. (i) ଭୁଲ୍, ଏହା ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଦେଖାଯାଇ ପାରିବ ।

(ii) ଭୁଲ୍, ଏହା 5.1 ଅଭିଗୃହୀତର ବିପରୀତ

(iii) ଠିକ୍ (2ୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

(iv) ଠିକ୍, ଦୁଇଟି ଏକା ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ଉପରେ ଅନ୍ୟଟି ରଖିଲେ ସେହି ଦୁଇଟି ଏକୀଭୂତ ହୁଏ । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବୃତ୍ତ ପରିସର ମଧ୍ୟ ଏକୀଭୂତ ହୁଏ । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ମଧ୍ୟ ଏକୀଭୂତ ହୁଏ ।

(v) ଠିକ୍, ଇୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ପ୍ରଥମ ଅଭିଗୃହୀତ

3. ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀମାନେ କରିଥିବା ତାଲିକାରୁ ଆମେ ଅନେକ ଅସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦ ଦେଖିପାରିବା । ସେଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର । କାରଣ ଦୁଇଟି ବିଭିନ୍ନ ସନ୍ଦର୍ଭକୁ ଅନୁଧାନ କଲେ (i) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ରେଖା ଉପରେ A, B ର ମଧ୍ୟରେ C ବିନ୍ଦୁ ରହିଥିବା ଜଣାପଡୁଛି । (ii) ରୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ରେଖା ଉପରେ, ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହୋଇନଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁ C ନେଇପାରିବା ।

ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ଇୟୁକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ଅନୁସରଣ କରୁନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ଏହା ଅଭିଗୃହୀତ 5.1କୁ ଅନୁସରଣ କରୁଛି ।

4. $AC = BC$

ତେଣୁ, $AC + AC = BC + AC$ (ସମାନ ବସ୍ତୁକୁ ସମାନ ବସ୍ତୁ ସହ ଯୋଗକରିବା ଦ୍ୱାରା)

ଅତଏବ $2AC = AB$ ($BC + AC = AB$ ଏକୀଭୂତ ହୁଏ)

ଅତଏବ $AC = \frac{1}{2} AB$

5. C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଟି AB ଉପରେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ବୋଲି ଏକ ଅସ୍ଥାୟୀ ଅନୁମାନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ C ଓ D ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ ।

6. $AC = BD$ (ପ୍ରଦତ୍ତ) (1)

$AC = AB + BC$ (B ବିନ୍ଦୁ A ଓ C ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ) (2)

$BD = BC + CD$ (C ବିନ୍ଦୁ B ଓ D ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ) (3)

AP SCERT

(2) ଓ (3) କୁ (1) ରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ

$$AB + BC = BC + CD$$

ତେଣୁ, $AB = CD$ (ସମାନ ବସ୍ତୁରୁ ସମାନ ବସ୍ତୁ ବିୟୋଗକଲେ)

7. କାରଣ ପୃଥିବୀର ଯେକୌଣସି ଅଂଶ ପାଇଁ, ଯେକୌଣସି ବସ୍ତୁ ପାଇଁ ଏହା ସତ୍ୟ । ଏହା ସାର୍ବଜନୀନ ସତ୍ୟ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 6.1

1. 30°, 250° **2.** 126° **4.** ଏକା ବିନ୍ଦୁରେ ସମସ୍ତ କୋଣର ସମଷ୍ଟି = 360°

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ ଏବଂ $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. **6.** 122°, 302°

ଅନୁଶୀଳନୀ 6.2

1. 126° **2.** 126°, 36°, 54° **3.** 60° **4.** 50°, 77°

5. ଆପତନ କୋଣ = ପ୍ରତିଫଳନ କୋଣ । B ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ $BE \perp PQ$ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ $CF \perp RS$ ଅଙ୍କନ କର ।

6. A **7. B**

AP SCERT

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.1

1. (i) ଭୁଲ୍ : ବର୍ଷକୁ 12 ମାସ

(ii) ଅସ୍ପଷ୍ଟତା : ଗୋଟିଏ ବର୍ଷରେ ଦୀପାବଳୀ ଶୁକ୍ରବାର ପଡ଼ିପାରେ କିମ୍ବା ନପଡ଼ିପାରେ

(iii) ଅସ୍ପଷ୍ଟତା : ବର୍ଷର କେଉଁ ସମୟରେ ହେଲେ **ମଗାଧ୍**ର ତାପମାତ୍ରା 26° C ରହିପାରେ

(iv) ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ

(v) ଭୁଲ୍ : କୁକୁର ଉଡ଼ିପାରେ ନାହିଁ

(vi) ଅସ୍ପଷ୍ଟତା : ଅଧିବର୍ଷରେ ଫେବୃୟାରୀ ମାସ 29 ଦିନ ହୁଏ

2. (i) ଭୁଲ୍ : ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତସ୍ଥଃ କୋଣର ସମଷ୍ଟି 360°

(ii) ଠିକ୍ (iii) ଠିକ୍ (iv) ଠିକ୍

(v) ଭୁଲ୍ : ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 7 + 5 = 12 ଯାହା ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

3. (i) 2 ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ସମସ୍ତ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଯୁଗ୍ମ ।

(ii) ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୁଣ ସର୍ବଦା ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ।

(iii) $x > 1$ ପାଇଁ $3x + 1 > 4$ ହୁଏ ।

(iv) $x \geq 0$ ପାଇଁ $x^3 \geq 0$ ହୁଏ ।

(v) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା ଏକ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟ ଅଟେ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.2

1. (i) ମନୁଷ୍ୟ ମେରୁଦଣ୍ଡୀ (ii) ନୁହେଁ, ଦିନେଶ୍‌ର ବାଳ ଅନ୍ୟ କିଏ କାଟି ନେଇଥାଇପାରେ । (iii) ଗୁଲାଗ୍‌ର ଲାଲ ଜିଭ ଅଛି । (iv) ଆସନ୍ତା କାଲି କେନାଲ ସଫା କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ନେଲୁ (v) ଲାଞ୍ଜ ଥିବା ସମସ୍ତ ପଶୁ କୁକୁର ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ନାହିଁ । ଉଦାହରଣ ମଇଁଷି, ମାଙ୍କଡ଼, ବିରାଡ଼ି ଇତ୍ୟାଦିର ଲାଞ୍ଜ ଥାଏ ।
2. ତୁମେ B ଓ 8 କୁ ଓଲଟାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ । ଯଦି B ର ଅନ୍ୟପଟେ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ରହିଲେ ତେବେ ନିୟମ ଭଙ୍ଗ ହୁଏ। ଯଦି B ର ଅନ୍ୟପଟେ ବ୍ୟଞ୍ଜନ ବର୍ଣ୍ଣ ରହେ ତେବେ ନିୟମ ଭଙ୍ଗ ହୁଏ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.3

1. ତିନୋଟି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ପରିକଳ୍ପନା ହେଲା :

   (i) ଯେକୌଣସି 3ଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା । (ii) ଯେକୌଣସି 3ଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 4 ଦ୍ୱାରା ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । (iii) ଯେକୌଣସି 3ଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭକ୍ତ ହୁଏ ।
2. 4ର୍ଥ ଧାଡ଼ି : $1\,3\,3\,1 = 11^3$; 5ମ ଧାଡ଼ି : $1\,4\,6\,4\,1 = 11^4$; 4ର୍ଥ ଧାଡ଼ି ଏବଂ 5ମ ଧାଡ଼ି ପରିକଳ୍ପନା ଆସେ । $11^5 \neq 15101051$ ଏଣୁ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ ।
3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.
4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$
5. ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀମାନଙ୍କର ସ୍ୱତଃ ସମାଧାନ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ୟୁକ୍ଲିଡ୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ A1.4

1. (i) ତୁମେ ଯେକୌଣସି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ ଯାହାର କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ।

   (ii) ରମ୍ବସ୍‌ର ସମସ୍ତ ବାହୁ ସମାନ କିନ୍ତୁ ଏହା ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ହୋଇନପାରେ ।

   (iii) ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ କୋଣ ଥାଏ କିନ୍ତୁ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ହୋଇନପାରେ ।

   (iv) $a = 3$ ଓ $b = 4$ ପାଇଁ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ହୋଇନପାରେ ।

   (v) $n = 11$ ହେଲେ $2n^2 + 11 = 253$ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

   (vi) $n = 41$ ହେଲେ $n^2 - n + 41$ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।
2. ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ସ୍ୱୀୟ ସମାଧାନ ।
3. ଧରିନିଅ x ଏବଂ y ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା । ତେବେ ଯେକୌଣସି ଗଣନସଂଖ୍ୟା m ପାଇଁ $x = 2m + 1$ ଏବଂ ଯେକୌଣସି ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $y = 2n + 1$ ।

   $x + y = 2(m + n + 1)$ । ଅତଏବ $x + y$, 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭକ୍ତ ଏବଂ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ।
4. ପ୍ରଶ୍ନ 3 ଦେଖ $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$

   xy, '2' ଦ୍ୱାରା ଅବିଭାଜ୍ୟ ଏଣୁ ଏହା ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

AP SCERT

5. $2n$, $2n + 2$ ଓ $2n + 4$ ହେଉଛି ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା । ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳ $6(n + 1)$, '6' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

7. (i) ଧରିନିଅ ତୁମର ମୂଳ ସଂଖ୍ୟା n । ତେବେ ଆମେ ନିମ୍ନଭଳି କରିବା ।

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n + 3 \rightarrow n + 3 + 4 = n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7.$$

(ii) ମନେରଖ ଯେ $7 \times 11 \times 13 = 1001$ । ଯେକୌଣସି ୩ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଧରିନିଅ abc । ତେବେ $abc \times 1001 = abcabc$ ତେଣୁ '6' ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା $abcabc$, 7, 11 ଓ 13 ଦ୍ୱାରା ବିଭକ୍ତ ହୁଏ ।

Across

2. polygons having equal sides and angles(7)

4. simple closed polygon made up of three sides(8)

6. pair of angles which their sum of measures of angles is 90 degrees(13)

7. distance around a circular region of a circle(13)

9. numbers include positive,negative and zero(8)

10. the operation 'of'represents(14)

Down

1. a line that intersects 2 or 3 lines at distinct points(11)

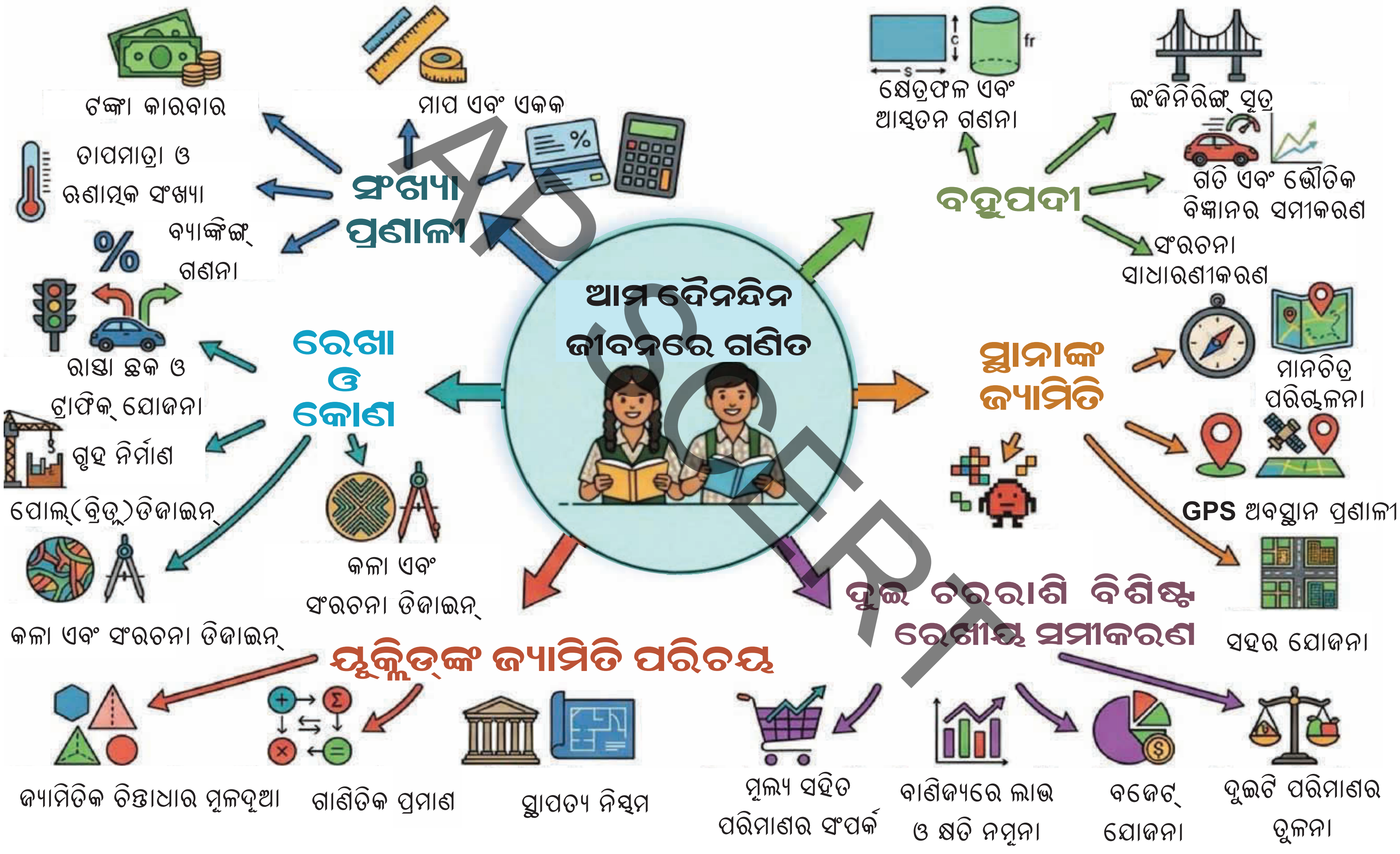
3. another name to arithmetic mean(7)

5. LHS(12)

8. part of a whole(8)

AP SCERT

ଆମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଗଣିତ - ଶ୍ରେଣୀ – 9 ଯୋଗାଯୋଗ



AP SCERT