CLASS - 8

MATHEMATICS

SEMESTER - 1

A5T8I3

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2026

DISCLAIMER

Any form of copying of the content, information and illustrations from this textbook is a punishable offence.

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published. Without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser. The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 GSM, SS Maplitho, Title Page 220 GSM, White Artcard.

Published by Samagra Shiksha & SCERT - Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

AP SCERT

Vande Mataram

Vande Mataram!

Sujalam, suphalam, malayaja shitalam,

Shasyashyamalam, Mataram!

Vande Mataram!

Shubhrajyotsna pulakitayaminim,

Phullakusumita drumadala shobhinim,

Suhasinim sumadhura bhashinim,

Sukhadam varadam, Mataram!

Vande Mataram, Vande Mataram!

- Bankimchandra Chatterji

వందేమాతరం

వందేమాతరం!
సుజలాం సుఫలాం మలయజ శీతలాం,
సస్యశ్యామలాం మాతరం!
వందేమాతరం!

శుభ్రజ్యోత్స్న పులకితయామినీం,
ఫుల్లకుసుమిత ద్రుమదళ శోభినీం
సుహాసినీం సుమధుర భాషిణీం,
సుఖదాం వరదాం మాతరం!
వందేమాతరం!

- బంకించంద్ర ఛటర్జీ

AP SCERT

Printed in India
at the A.P. Govt., Textbook Press,
Amaravati, Andhra Pradesh.

Our National Anthem | జాతీయ గీతం

Jana-gana-mana-adhinayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata
Panjaba-Sindhu-Gujarata-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
uchchala-jaladhi-taranga
Tava Subha name jage,
tava subha asisa mage,
gahe tava jaya-gatha.
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

- Rabindranath Tagore

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్చల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాంగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

AP SCERT

Pledge | ప్రతిజ్ఞ

"India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.

I shall always strive to be worthy of it.

I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.

To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness."

- Pydimarri Venkata Subba Rao

"భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం.
దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను.
జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం."

- పైడిమర్రి వెంకట సుబ్బారావు

National Education Policy - 2020

The National Education Policy 2020 (NEP 2020) envisions a holistic, flexible, and learner-centred education system. It emphasizes competency-based learning and experiential approaches that make education meaningful and engaging. NEP 2020 highlights the importance of 21st-century skills such as critical thinking, creativity, communication, and problem-solving. It encourages the integration of real-life learning, innovation, and technology-enabled pedagogies. Overall, the policy aims to build an inclusive and future-ready education system that empowers every learner to thrive in a rapidly changing world.

NCF (SE) 2023 - Curricular Goals

Mathematics education in the middle stage (Grades 6–8) aims to nurture holistic development by building logical thinking, sound reasoning, and confident problem-solving skills in every learner. In alignment with NCF 2023, the focus shifts from rote memorization to deep conceptual understanding, encouraging students to explore, question, and connect mathematical ideas meaningfully. The Curriculum Goals and Competencies outlined in each chapter guide this journey by linking mathematical learning to real-world contexts, preparing students to apply their knowledge thoughtfully in everyday life.

AP SCERT

Curricular Goal	Description	Competencies
CG - 1	Understands numbers and sets of numbers (whole numbers, fractions, integers, rational numbers, and real numbers), looks for patterns, and appreciates relationships between numbers.	C-1.1: Develops a sense for and an ability to manipulate (e.g., read, write, form, compare, estimate, and apply operations) and name (in words) large whole numbers of up to 20 digits, and expresses them in scientific notation using exponents and powers. C-1.2: Discovers, identifies, and explores patterns in numbers and describes rules for their formation (e.g., multiples of 7, powers of 3, prime numbers), and explains relations between different patterns. C-1.3: Learns about the inclusion of zero and negative quantities as numbers, and the arithmetic operations on them, as given by Brahmagupta. C-1.4: Explores and understands sets of numbers, such as whole numbers, fractions, integers, rational numbers, and real numbers, and their properties, and visualises them on the number line. C-1.5: Explores the idea of percentage and applies it to solve problems. C-1.6: Explores and applies fractions (both as ratios and in decimal form) in daily-life situations.
CG - 2	Understands the concepts of variable, constant, coefficient, expression, and (one-variable) equation, and uses these concepts to solve meaningful daily-life problems with procedural fluency.	C-2.1: Understands equality between numerical expressions and learns to check arithmetical equations. C-2.2: Extends the representation of a number in the form of a variable or an algebraic expression using a variable. C-2.3: Forms algebraic expressions using variables, coefficients, and constants and manipulates them through basic operations. C-2.4: Poses and solves linear equations to find the value of an unknown, including to solve puzzles and word problems. C-2.5: Develops own methods to solve puzzles and problems using algebraic thinking.
CG - 3	Understands, formulates, and applies properties and theorems regarding simple geometric shapes (2D and 3D).	C-3.1: Describes, classifies, and understands relationships among different types of two- and three-dimensional shapes using their defining properties/attributes. C-3.2: Outlines the properties of lines, angles, triangles, quadrilaterals, and polygons and applies them to solve related problems. C-3.3: Identifies attributes of three-dimensional shapes (cubes, parallelepipeds, cylinders, cones), works hands-on with material to construct these shapes, and also uses two-dimensional representations of three-dimensional objects to visualise and solve problems. C-3.4: Draws and constructs geometric shapes, such as lines, parallel lines, perpendicular lines, angles, and simple triangles, with specified properties using a compass and straightedge. C-3.5: Understands congruence and similarity as it applies to geometric shapes and identifies similar and congruent triangles.

AP SCERT

Curricular Goal	Description	Competencies
CG - 6	Develops mathematical thinking and the ability to communicate mathematical ideas logically and precisely.	C-6.1: Applies both inductive and deductive logic to formulate definitions and conjectures, evaluate and produce convincing arguments/proofs to turn these definitions and conjectures into theorems or correct statements, particularly in the areas of algebra, elementary number theory, and geometry.
CG - 7	Engages with puzzles and mathematical problems and develops own creative methods and strategies to solve them.	C-7.1: Demonstrates creativity in discovering one's own solutions to puzzles and other problems, and appreciates the work of others in finding their own, possibly different, solutions. C-7.2: Engages in and appreciates the artistry and aesthetics of puzzle-making and puzzle-solving.
CG - 8	Develops basic skills and capacities of computational thinking, namely, decomposition, pattern recognition, data representation, generalisation, abstraction, and algorithms in order to solve problems where such techniques of computational thinking are effective.	C-8.1: Approaches problems using programmatic thinking techniques such as iteration, symbolic representation, and logical operations and reformulates problems into series of ordered steps (i.e., algorithmic thinking). C-8.2: Learns systematic counting and listing, systematic reasoning about counts and iterative patterns, and multiple data representations; learns to devise and follow algorithms, with an eye towards understanding correctness, effectiveness, and efficiency of algorithms.
CG - 9	Knows and appreciates the development of mathematical ideas over a period of time and the contributions of past and modern mathematicians from India and across the world.	C-9.1: Recognises how concepts (like counting numbers, whole numbers, negative numbers, rational numbers, zero, concepts of algebra, geometry) evolved over a period of time in different civilisations. C-9.2: Knows and appreciates the contributions of specific Indian mathematicians (such as Baudhayana, Pingala, Aryabhata, Brahmagupta, Virahanka, Bhaskara, and Ramanujan).
CG - 10	Knows about and appreciates the interaction of Mathematics with each of their other school subjects.	C-10.1: Recognizes how Mathematics interacts with Science, Social Science, Visual Arts, Music, Vocational Education, and Sports.

AP SCERT

CLASS - 8
MATHEMATICS
SEMESTER - 1
CONTENTS

S.No	Chapter Name	Month	Page.No
	Readiness Programme సంసిద్ధత కార్యక్రమం	June జూన్	2 - 57
1	A Square and A Cube వర్గము మరియు ఘనము	July జూలై	58 - 93
2	Power Play ఘాతాలతో ఆట	July జూలై	94 - 155
3	A Story of Numbers సంఖ్యల కథ	July - August జూలై - ఆగష్టు	156 - 209
4	Quadrilaterals చతుర్భుజాలు	August ఆగష్టు	210 - 273
5	Number Play సంఖ్యలతో ఆట	August - September ఆగష్టు - సెప్టెంబర్	274 - 325
6	We Distribute, Yet Things Multiply విభాగ న్యాయం - రాశుల గుణకారం	September సెప్టెంబర్	326 - 375
7	Proportional Reasoning-1 అనుపాత తార్కికత-1	September - October సెప్టెంబర్ - అక్టోబర్	376 - 421
	Answers		422 - 457
	Integrating Artificial Intelligence (AI) కృత్రిమ మేధతో అనుసంధానం	October అక్టోబర్	458 - 473
	Mind Map		474

AP SCERT

Icons

Math Talk - Questions for Dicussion

Try This

Try This - Out of box thinking

Main Question
Sub- Question } **Concept - Clarity**

Owl - Some important processes in the learning of Mathematics

Q9H4B8
Teacher Corner

U3F5I7
Student Corner

DAY 1 1. A SQUARE AND A CUBE

Teacher Corner

M7G6L5

- **Key Terms :** Factor, Prime Number, Square Number, Perfect Square, Square Root, Prime Factorisation, Perfect Cube, Cube Root, Triangular Number
- **Concept Explaination-Know the term :**
  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Factor	A number that divides another number exactly, leaving no remainder.	Factors of 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12
Prime Number	A number greater than 1 that has exactly two factors: 1 and itself.	2, 3, 5, 7, 11,.. are prime numbers.
Square Number	A number obtained by multiplying any number by itself. Written as n^2.	$-5 \times -5 = (-5)^2 = 25$; $3\times3 = 3^2 = 9$ $2.5\times2.5 = (2.5)^2 = 6.25$
Perfect Square	The square of a natural number. It has an odd number of factors.	1, 4, 9, 16, 25, 36 ... are perfect squares.
Square Root ($\sqrt{\ }$)	The inverse process of squaring. $x^2 = y$, then $\sqrt{y} = x$. x is an integer	$\sqrt{49} = 7$, because $7\times7 = 49$
Prime Factorisation	Writing a number as a product of its prime factors only.	$36 = 2\times2\times3\times3$; factors pair up → perfect square!
Perfect Cube	A number obtained by multiplying a number by itself three times (n^3).	$8 = 2^3$; $27 = 3^3$; $64 = 4^3$
Cube Root ($\sqrt[3]{\ }$)	The inverse process of cubing. If $x^3 = y$, then x is the cube root of y $\sqrt[3]{y} = x$	$\sqrt[3]{27} = 3$, because $3\times3\times3 = 27$
Triangular Number	The number of points that can be formed as a triangle: sume of any two consecutive triangular numbers is a perfect square.	Ex:1, 3, 6, 10, 15, ... $1+3=4=2^2$; $3+6=9=3^2$; $6+10=16=4^2$

AP SCERT

DAY 1 — 1. వర్గము మరియు ఘనము

W8K6T4

- **ముఖ్య పదాలు :** కారణాంకం, ప్రధాన సంఖ్య, వర్గ సంఖ్య, పరిపూర్ణ వర్గం, వర్గమూలం, ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం, ఘన సంఖ్య, ఘనమూలం, త్రిభుజ సంఖ్య.
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

  సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

కీలక పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
కారణాంకం	ఒక సంఖ్యను శేషం సున్నా వచ్చేలా ఖచ్చితంగా భాగించే సంఖ్య.	12 యొక్క కారణాంకాలు: 1, 2, 3, 4, 6, 12
ప్రధాన సంఖ్య	1 కంటే పెద్దదై, కేవలం 2 కారణాంకాలు (1 మరియు అదే సంఖ్య) కలిగిన సంఖ్య.	2, 3, 5, 7, 11,... ప్రధాన సంఖ్యలు
వర్గ సంఖ్య	ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించినప్పుడు వచ్చే సంఖ్య. దీనిని (n^2)గా వ్రాస్తారు.	$3 \times 3 = 3^2 = 9$, $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$ $(2.5) \times (2.5) = (2.5)^2 = 6.25$
ఖచ్చిత వర్గం/ పరిపూర్ణ వర్గం	ఒక సహజ సంఖ్య యొక్క వర్గం. దీనికి కారణాంకాల సంఖ్య బేసి సంఖ్యగా ఉంటుంది.	1, 4, 9, 16, 25, 36... లు పరిపూర్ణ వర్గాలు
వర్గమూలం ($\sqrt{\ }$)	వర్గానికి విరుద్ధ ప్రక్రియ. $x^2 = y$ అయితే, $\sqrt{y} = x$, x ఒక పూర్ణ సంఖ్య	$\sqrt{49} = 7$, ఎందుకంటే $7\times7 = 49$
ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం	ఒక సంఖ్యను కేవలం ప్రధానసంఖ్యల కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయడం.	$36 = 2\times2\times3\times3$; కారణాంకాలు జంటలుగా వస్తాయి → ఖచ్చిత వర్గం
ఘన సంఖ్య	ఒక సంఖ్యను మూడు సార్లు అదే సంఖ్యతో గుణించినప్పుడు వచ్చే సంఖ్య (n^3).	$8 = 2^3$; $27 = 3^3$; $64 = 4^3$
ఘనమూలం ($\sqrt[3]{\ }$)	ఘనానికి విరుద్ధ ప్రక్రియ. $x^3 = y$ అయితే, $\sqrt[3]{y} = x$	$\sqrt[3]{27} = 3$, ఎందుకంటే $3\times3\times3 = 27$
త్రిభుజ సంఖ్య	త్రిభుజాకారంలో అమర్చగలిగే బిందువుల సంఖ్య, ఏ రెండు వరుస త్రిభుజ సంఖ్యల మొత్తం అయినా ఒక ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య	ఉదా: 1,3,6,10,15,.... $1+3=4=2^2$, $3+6=9=3^2$, $6+10=16=4^2$

AP SCERT

Note : All perfect squares are square numbers. But not all square numbers are perfect squares.

- **Real-Life Connection:**

Side of a square tile whose area is $81 cm^2 = \sqrt{81} = 9$ cm.

Edge of a cube-shaped gift box whose volume is $125 cm^3 = \sqrt[3]{125} = 5$ cm.

Squares and cubes help architects, designers, and engineers every day!

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read all key terms carefully. Attempt all questions independently. Check your understanding using examples.

A. Fill in the blanks.

1. The square root of 144 is _____, because _____× _____= 144.
2. A perfect square always has_____ number of factors, and it never ends with the digits 3, 7, _____ or _____.
3. $\sqrt[3]{512}$ = _____, and 5^3 = _____. A number is a perfect cube if its prime factors can be split into identical groups.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

1. Which of the following numbers is definitely NOT a perfect square?

   (i) 196 (ii) 238 (iii) 441 (iv) 625

2. The prime factorisation of 216 is $2^3 \times 3^3$. What is $\sqrt[3]{216}$?

   (i) 4 (ii) 6 (iii) 8 (iv) 12

C. Match the following.

	Column A		Column B
1.	$\sqrt{64}$	( )	(a) 125
2.	5^3	( )	(b) 8
3.	Factors of 9	( )	(c) 10
4.	1 + 3 + 5 + 7	( )	(d) 1, 3, 9 (odd number of factors)
5.	$\sqrt[3]{1000}$	( )	(e) $16 = 4^2$ (sum of first 4 odd numbers)

AP SCERT

గమనిక: అన్ని ఖచ్చిత వర్గాలు వర్గసంఖ్యలే కాని అన్ని వర్గ సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గాలు కావు.

- **నిజ జీవిత సంబంధం:** 81 చదరపు సెంటీమీటర్ల వైశాల్యం గల ఒక చతురస్రాకారపు ఫ్లోర్ టైల్ యొక్క భుజం = $\sqrt{81}$ = 9 సెంటీమీటర్లు.

  125 ఘనపు సెంటీమీటర్ల ఘనపరిమాణం గల ఒక ఘనాకారపు బహుమతి పెట్టె యొక్క అంచు = $\sqrt[3]{125}$ = 5 సెంటీమీటర్లు.

  చతురస్రాలు మరియు ఘనాలు వాస్తుశిల్పులకు, డిజైనర్లకు మరియు ఇంజనీర్లకు ప్రతిరోజూ సహాయపడతాయి!

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు అభ్యాసం

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. 144 యొక్క వర్గమూలం _____ ,ఎందుకనగా _____ × _____ = 144.
2. ఒక ఖచ్చిత వర్గానికి ఎల్లప్పుడూ _____ సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉంటాయి మరియు అది ఎప్పుడూ 3,7 _____ లేదా _____ అంకెలతో అంతమవదు.
3. $\sqrt[3]{512}$ = _____ , మరియు 5^3 = _____ . ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంతో ప్రధాన కారణాంకాలను సమాన సమూహాలుగా విభజించగలిగితే అది ఖచ్చిత ఘనం అగును.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు – సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

1. కింది సంఖ్యలలో ఏది ఖచ్చితంగా పరిపూర్ణ వర్గం కాదు?

   (i) 196 (ii) 238 (iii) 441 (iv) 625

2. 216 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2^3 \times 3^3$. అయితే $\sqrt[3]{216}$ ఎంత?

   (i) 4 (ii) 6 (iii) 8 (iv) 12

C. జతపరచండి.

	వరుస A		వరుస B
1.	$\sqrt{64}$	( )	(a) 125
2.	5^3	( )	(b) 8
3.	9 యొక్క కారణాంకాలు	( )	(c) 10
4.	1 + 3 + 5 + 7	( )	(d) 1, 3, 9 (బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు)
5.	$\sqrt[3]{1000}$	( )	(e) $16 = 4^2$ (మొదటి 4 బేసి సంఖ్యల మొత్తం)

AP SCERT

DAY 2 — 2. POWER PLAY

Teacher Corner

- **Key Terms :** Exponential Form, Base, Scientific Notation, Negative Exponent, Exponent, Power, Exponential Growth, Zero Exponent, Prime Factorisation
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Exponential Form	The symboilc form of representation the repeated multiplication	e.g. $5 \times 5 \times 5 = 5^3$
Base	The number that is repeatedly multiplied.	e.g. In 3^4, the base is 3.
Scientific Notation	Writing a number as $x \times 10^y$, where $1 \leq x < 10$.	e.g. $5900 = 5.9 \times 10^3$
Negative Exponent	$n^{-a} = 1/n^a$; it means the reciprocal of its power.	e.g. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
Exponent (Power)	The number of times a base is multiplied by itself.	e.g. In 2^5, the exponent is 5
Exponential Growth	Growth where a quantity multip -lies (doubles, triples) in each step.	e.g. Paper thickness doubles each fold.
Zero Exponent	For any non-zero number its power raised to 0 equals to 1.	e.g. $7^0 = 1$; $100^0 = 1$
Prime Factorisation	Expressing a number as a product of its prime factors.	e.g. $12 = 2^2 \times 3$

AP SCERT

DAY 2 ౨. ఘాతాలతో ఆట

- **ముఖ్య పదాలు :** ఘాతాంకరూపం, ఆధారం(భూమి), శాస్త్రీయ సంకేత రూపం, ఋణాత్మక ఘాతాంకము, ఘాతాంకం (ఘాతం), ఘాతాంక వృద్ధి, సున్నా ఘాతాంకము, ప్రధాన కారణాంకాల విభజన
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
ఘాతాంకరూపం	పునరావృత గుణకారాన్ని సూచించు సాంకేతిక రూపం.	ఉదాహరణకు: $5 \times 5 \times 5 = 5^3$
ఆధారం	పదే పదే గుణించబడే సంఖ్య.	ఉదాహరణకు: 3^4 లో, భూమి 3.
శాస్త్రీయ సంకేత రూపం	ఒక సంఖ్యను $x \times 10^y$ రూపంలో రాయటం , ఇచ్చట $1 \le x < 10$.	ఉ .దా. $5900 = 5.9 \times 10^3$
ఋణాత్మక ఘాతాంకము	$n^{-a} = 1/n^a$; దీని అర్థం ఆ ఘాతానికి విలోమం.	ఉ.దా. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
ఘాతాంకము (ఘాతం)	ఒక ఆధారం/భూమి తనతో తాను ఎన్నిసార్లు గుణించబడుతుందో తెలిపే సంఖ్య.	ఉదాహరణకు: 2^5 లో ఘాతాంకం5
ఘాతాంక వృద్ధి	ఒక పరిమాణం ప్రతి దశలోనూ తనతో తాను గుణించుకుంటూ (రెట్టింపు లేదా మూడురెట్లు అవుతూ) పెరిగే వృద్ధి.	ఉదాహరణకు: కాగితం మందం ప్రతి మడతకు రెట్టింపు అవుతుంది.
సున్న ఘాతాంకము	సున్నా కాని ఏ సంఖ్యనైనా ఘాతం 0 కి పెంచితే, అది 1కి సమానమవుతుంది.	ఉ.దా. $7^0 = 1$; $100^0 = 1$
ప్రధాన కారణాంకాల విభజన	ఒక సంఖ్యను దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచడం.	ఉదాహరణకు: $12 = 2^2 \times 3$

AP SCERT

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. In 4^3, the base is _____ and the exponent is _____.
2. 5^0 = _____ and 3^{-2} = _____.
3. The scientific notation of 45,000 is _____.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

4. The value of $2^3 \times 2^2$ is:

   (a) 2^6 (b) 2^5 (c) 4^6 (d) 2^{10}

5. Which of these is in scientific notation?

   (a) 54×10^3 (b) 0.9×10^5 (c) 3.7×10^2 (d) 12×10^4

C. Match the following :

1.

Column A		Column B
i. $2 \times 2 \times 2 \times 2$	( )	a. 65,000
ii. 10^{-2}	( )	b. 1 $(n \neq 0)$
iii. 6.5×10^4	( )	c. $2^4 = 16$
iv. n^0	( )	d. 0.01

2.

Column A		Column B
i. $n^a \times n^b =$	( )	a. n^{a-b}
ii. $(n^a)^b =$	( )	b. n^{ab}
iii. $n^a \div n^b =$	( )	c. n^{a+b}

AP SCERT

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు అభ్యాసం

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు రాయండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. 4^3 లో ఆధారం _____ మరియు ఘాతాంకము _____.
2. 5^0 = _____ మరియు 3^{-2} = _____
3. 45,000 యొక్క శాస్త్రీయ సంకేత రూపం = _____

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

4. $2^3 \times 2^2$ విలువ :

   (a) 2^6 (b) 2^5 (c) 4^6 (d) 2^{10}

5. క్రింది వానిలో ఏది శాస్త్రీయ సంకేత రూపంలో ఉన్నది ?

   (a) 54×10^3 (b) 0.9×10^5 (c) 3.7×10^2 (d) 12×10^4

C. జతపరచండి.

1.

వరుస A		వరుస B
i. $2 \times 2 \times 2 \times 2$	( )	a. 65,000
ii. 10^{-2}	( )	b. 1 $(n \neq 0)$
iii. 6.5×10^4	( )	c. $2^4 = 16$
iv. n^0	( )	d. 0.01

2.

వరుస A		వరుస B
i. $n^a \times n^b =$	( )	a. n^{a-b}
ii. $(n^a)^b =$	( )	b. n^{ab}
iii. $n^a \div n^b =$	( )	c. n^{a+b}

AP SCERT

DAY 3 — 3. A STORY OF NUMBERS

Teacher Corner

- **Key Terms :** Number System, Tally Marks, Landmark Numbers, Place Value System, One-to-One Mapping, Base-n Number System, Zero (0)
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Number System	A standard sequence of symbols or names used to represent and count quantities.	e.g. Hindu, Roman, Egyptian are number systems.
Tally Marks	Notches or marks made for each object counted; one of the oldest counting methods.	e.g. |||| = 4 objects counted.
Landmark Numbers	Special reference numbers in a system that help to represent and organise other numbers.	e.g. In Roman numberals : I=1,V=5, X=10, L=50, C=100, M=1000.
Place Value System	A positional system where the position of a digit deter mines which landmark number it represents.	e.g. In 375: 3 is in hundreds place, 7 in tens, 5 in ones.
One-to-One Mapping	Pairing each object in a collection with exactly one symbol or name, and vice versa.	e.g. Each cow paired with one stick to count a herd.
Base-n Number System	A system where each landmark number is n times the previous one; landmark numbers are powers of n.	e.g. Base-10: 1, 10, 100, 1000 - each 10× the last.

AP SCERT

DAY 3 — 3. సంఖ్యల కథ

- **ముఖ్య పదాలు :** సంఖ్యా వ్యవస్థ, గణనచిహ్నాలు, ప్రత్యేక చిహ్నం (ల్యాండ్‌మార్క్) సంఖ్యలు, స్థాన విలువ వ్యవస్థ, ఏక-ఏక జతపరచడం, n-ఆధార సంఖ్యా వ్యవస్థ, సున్నా (0)
- **విషయ వివరణ - పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
సంఖ్యా వ్యవస్థ	పరిమాణాలను సూచించడానికి మరియు లెక్కించడానికి ఉపయోగించే చిహ్నాలు లేదా పేర్ల ప్రామాణిక క్రమం.	ఉదా: హిందూ, రోమన్, ఈజిప్షియన్ సంఖ్యా వ్యవస్థలు.
గణన చిహ్నాలు	లెక్కించిన ప్రతి వస్తువు కోసం సూచించే గీతలు లేదా గుర్తులు; ఇది పురాతన గణన పద్ధతుల్లో ఒకటి.	ఉదా: |||| = 4 వస్తువులు లెక్కించబడ్డాయి.
ప్రత్యేక చిహ్నం (ల్యాండ్‌మార్క్) సంఖ్యలు	ఇతర సంఖ్యలను సూచించడానికి మరియు నిర్వహించడానికి సహాయపడే వ్యవస్థలోని ప్రత్యేక సూచన సంఖ్యలు.	ఉదా: రోమన్‌లో: I=1, V=5, X=10, L =50, C=100, M=1000.
స్థాన విలువ వ్యవస్థ	అంకె యొక్క స్థానం అది ఏ ప్రత్యేక చిహ్న సంఖ్యను సూచిస్తుందో నిర్ణయించే స్థాన ఆధారిత వ్యవస్థ.	ఉదా: 375లో: 3 వందల స్థానంలో, 7 పదుల స్థానంలో, 5 ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్నాయి.
ఏక-ఏకజతపరచడం	ఒక వస్తువును సరిగ్గా ఒక సంజ్ఞ లేదా పేరుతో జతపరచడం	ఉదా: ఒక సమూహంలోని ప్రతి ఆవు ఒక పుల్లతో జతపరచి లెక్కించడం.
n-ఆధార సంఖ్యా వ్యవస్థ	ఒక ప్రత్యేక చిహ్న సంఖ్యా వ్యవస్థలో ప్రతీ ప్రత్యేక చిహ్న సంఖ్య, దాని ముందు ప్రత్యేక చిహ్న సంఖ్య కన్నా n రెట్లు ఉంటుంది.	ఉదా: భూమి (బేస్) 10: 1,10,100, 1000 అంటే 'n' ఘాతాంకాలుగా ఉంటుంది.

AP SCERT

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The place value of 6 in 6,712 is _____, while its face value is _____.
2. In the Roman system, the numeral M stands for the number _____.
3. A number system where the position of a digit tells us its value is called a _____ system.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

4. What is the Hindu-Arabic equivalent of the Roman numeral CMXLIX?

   (a) 969 (b) 1149 (c) 949 (d) 1169

5. What makes the Hindu number system fully unambiguous?

   (a) Base 60 system (b) Use of tally marks

   (c) Using 0 as a digit (d) Roman symbols

C. Match the following :

	Column A			Column B
1.	CDXLIV	( )	a.	1900
2.	MCM	( )	b.	444
3.	DCLXVI	( )	c.	2026
4.	MMXXVI	( )	d.	990
5.	CMXC	( )	e.	666

AP SCERT

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు అభ్యాసం

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. 6,712 సంఖ్యలో 6 యొక్క స్థాన విలువ _____, దాని ముఖ విలువ _____
2. రోమన్ సంఖ్యా వ్యవస్థలో, M అనే అంకె _____ సంఖ్యను సూచిస్తుంది.
3. అంకె యొక్క స్థానం దాని విలువను తెలియజేసే సంఖ్యా వ్యవస్థను _____ వ్యవస్థ అంటారు.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

4. CMXLIX అనే రోమన్ సంఖ్యకు సమానమైన హిందూ-అరబిక్ సంఖ్య ఏది?

   (a) 969 (b) 1149 (c) 949 (d) 1169

5. హిందూ సంఖ్యా వ్యవస్థను పూర్తిగా అస్పష్టత లేకుండా చేసేది ఏమిటి?

   (a) ఆధారిత 60 (b) గణనచిహ్నాల ఉపయోగం

   (c) 0 ఒక అంకెగా వాడటం (d) రోమన్ చిహ్నాలు

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
1. CDXLIV	( )	a. 1900
2. MCM	( )	b. 444
3. DCLXVI	( )	c. 2026
4. MMXXVI	( )	d. 990
5. CMXC	( )	e. 666

AP SCERT

DAY 4 — 4. QUADRILATERALS

Teacher Corner

- **Key Terms :** Quadrilateral, Bisect, Perpendicular Lines, Transversal, Diagonal, Parallel Lines, Congruent Triangles, Angle Sum Property
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Quadrilateral	A simple closed figure formed with exactly 4 line segments.	e.g. Square, rectangle, rhombus, trapezium.
Bisect	To divide a line segment/ angle into two equal parts.	e.g. Diagonals of a rectangle bisect each other.
Perpendicular Lines	Lines that meet at exactly 90°.	e.g. Diagonals of a square are perpendicular.
Transversal	A line that intersects two or more lines at distinct points.	e.g. A side of a paralle logram acts as a transversal to its parallel sides.
Diagonal	A line segment joining two non-adjacent (opposite) vertices of a quadrilateral.	e.g. In rectangle ABCD, AC and BD are diagonals.
Parallel Lines	Lines that never meet; they are always the same distance apart.	e.g. Opposite sides of a rectangle are parallel.
Congruent Triangles	Triangles that are identical in shape and size; all corresponding sides and angles are equal.	e.g. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ means AB = PQ, BC = QR AC = PR
Angle Sum Property	The sum of all interior angles in any quadrilateral is 360°.	e.g. Quadrilateral ABCD, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

AP SCERT

DAY 4 4. చతుర్భుజాలు

- **ముఖ్య పదాలు :** చతుర్భుజం, సమద్విఖండనం, లంబ రేఖలు, తిర్యగ్రేఖ, కర్ణం, సమాంతర రేఖలు, సర్వసమాన త్రిభుజాలు, కోణాల మొత్తం ధర్మం
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
చతుర్భుజం	4 రేఖాఖండాలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటం	చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, రాంబస్, ట్రెపీజియం.
సమద్విఖండనం	ఒక రేఖాఖండాన్ని /కోణాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించడం.	ఉదాహరణకు, ఒక దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
లంబ రేఖలు	ఖచ్చితంగా 90° ఏర్పడేలా కలిసే రేఖలు.	ఉదాహరణకు, చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు లంబంగా ఉంటాయి.
తిర్యగ్రేఖ	రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఇతర రేఖలను వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించు రేఖ.	ఉదాహరణకు, ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భుజం దాని సమాంతర భుజాలకు తిర్యక్ రేఖగా పనిచేస్తుంది.
కర్ణం	ఒక చతుర్భుజంలోని ఆసన్నం కాని (ఎదురెదురుగా ఉన్న) రెండు శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండం.	ఉదాహరణకు, ABCD దీర్ఘచతురస్రంలో AC మరియు BD కర్ణాలు.
సమాంతర రేఖలు	ఎప్పటికీ కలవని రేఖలు; అవి ఎల్లప్పుడూ ఒకే దూరంలో ఉంటాయి.	ఉదాహరణకు, దీర్ఘచతురస్రంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.
సర్వసమాన త్రిభుజాలు	ఆకారం మరియు పరిమాణంలో ఒకేలా ఉండే త్రిభుజాలు; అన్ని అనురూప భుజాలు మరియు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.	ఉదాహరణకు $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అనగా $AB = PQ$, $BC = QR$ $AC = PR$, మరియు
కోణాల మొత్తం ధర్మం	చతుర్భుజంలోనైనా అన్ని అంతర కోణాల మొత్తం 360°.	ఉదాహరణకు, ABCD చతుర్భుజంలో: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

AP SCERT

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The sum of all angles in any quadrilateral is _____.
2. A quadrilateral with all sides equal and all angles 90° is called a _____.
3. The diagonals of a rectangle are _____ in length and they _____ each other.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

4. In a parallelogram, the adjacent angles:

   (a) are equal (b) sum in 90°

   (c) sum in 180° (d) sum in 360°

5. The diagonals of a square bisect each other at:

   (a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

C. Match the following :

	Column A			Column B
1.	Rectangle	( )	(a)	All sides are equal; diagonals bisect at 90°
2.	Rhombus	( )	(b)	At least one pair of parallel opposite sides are opposite
3.	Parallelogram	( )	(c)	Opposite sides are parallel; diagonals bisect each other
4.	Trapezium	( )	(d)	All angles are 90°; diagonals equal and bisect each other

AP SCERT

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు అభ్యాసం

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. ఏదైనా చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాల మొత్తం _____.
2. అన్ని భుజాలు సమానం మరియు అన్ని కోణాలు 90^0గా ఉండే చతుర్భుజాన్ని _____ అంటారు.
3. ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణాలు పొడవులు _____ మరియు అవి ఒకదానికొకటి _____ చేసుకుంటాయి.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో, ఆసన్న కోణాలు:

   (a) సమానం (b) మొత్తం 90°

   (c) మొత్తం 180° (d) మొత్తం 360°

5. ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి _____ కోణంతో సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి:

   (a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
1. దీర్ఘచతురస్రం	( )	(a) అన్ని భుజాలు సమానం; కర్ణాలు 90° వద్ద సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
2. రాంబస్	( )	(b) కనీసం ఒక జత ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరం
3. సమాంతర చతుర్భుజం	( )	(c) ఎదుటి భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి; కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి
4. ట్రెపీజియం	( )	(d) అన్ని కోణాలు 90°; కర్ణాలు సమానంగా ఉండి ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

AP SCERT

DAY 5 — 5. NUMBER PLAY

Teacher Corner

- **Key Terms :** Consecutive Numbers, Multiple, Factor, Even Number, Odd Number, Parity, Remainder, Divisibility Rule, Digital Root
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Consecutive Numbers	Numbers that follow each other in order, differing by 1.	3, 4, 5, 6 are consecutive numbers.
Multiple	A number obtained by multiplying a given number by any whole number.	Multiples of 4: 4, 8, 12, 16 ...
Factor	A number that divides another number exactly (no remainder).	Factors of 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Even Number	A number exactly divisible by 2. Leaves remainder 0 when divided by 2.	2, 6, 14, 48 are even numbers.
Odd Number	A number that is NOT exactly divisible by 2. When divided by 2 leaves remainder 1.	3, 7, 15, 31 are odd numbers.
Parity	The property of two number being with equal property.	14 and 28 have the same parity (both even).
Remainder	What is left over after dividing a number as evenly as possible.	17 ÷ 5 = 3, remainder 2.

AP SCERT

DAY 5 5. సంఖ్యలతో ఆట

- **ముఖ్య పదాలు :** వరుస సంఖ్యలు, గుణిజం, కారణాంకం, సరి సంఖ్య, బేసి సంఖ్య, సమానత్వం, శేషం, భాజనీయత సూత్రం, అంక మూలం
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

కీలక పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
వరుస సంఖ్యలు	1 తేడాతో ఒకదాని తర్వాత ఒకటి వరుసగా వచ్చే సంఖ్యలు.	3, 4, 5, 6 లు క్రమానుగత సంఖ్యలు.
గుణిజం	ఒక సంఖ్యను ఏదైనా పూర్ణాంకంతో గుణించడం ద్వారా వచ్చే సంఖ్య.	4 యొక్క గుణిజాలు: 4, 8, 12, 16 ...
కారణాంకం	మరొక సంఖ్యను నిశ్శేషంగా (శేషం లేకుండా) భాగించే సంఖ్య.	12 యొక్క కారణాంకాలు: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
సరి సంఖ్య	2 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడే సంఖ్య. దీనిని 2 తో భాగించినప్పుడు శేషం 0 వస్తుంది.	2, 6, 14, 48 లు సరి సంఖ్యలు.
బేసి సంఖ్య	2 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడని సంఖ్య. దీనిని 2 తో భాగించినప్పుడు శేషం 1 వస్తుంది.	3, 7, 15, 31 లు బేసి సంఖ్యలు.
సమానత్వం ధర్మం	రెండు సంఖ్యలు ఒకే ధర్మాన్ని కలిగియుండుట	14,28 రెండూ సరిసంఖ్యలు
శేషం	ఒక సంఖ్యను మరొక సంఖ్య భాగించిన తర్వాత మిగిలిపోయే భాగం.	17 ÷ 5 = భాగఫలం 3, శేషం 2.

AP SCERT

Divisibility Rule	A shortcut to check if a number divides another without actually dividing.	Sum of digits divisible by 9 → number is divisible by 9.
Digital Root	Add all digits of a number repeatedly until a single digit remains.	489710 → 4+8+9+7+1+0=29 → 2+9=11 → 1+1=2

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The sum of any two _____ numbers is always even.
2. A number is divisible by 9 if the _____ of its digits is divisible by 9.
3. The digital root of 729 is _____.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

1. Which of the following is always even when added?
   (a) odd + odd (b) odd + even
   (c) even + even (d) Both (a) and (c)
2. What is the digital root of 5832?
   (a) 8 (b) 9 (c) 6 (d) 3

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Parity of 14 and 28	( )	a. A shortcut - sum of digits ÷ 3
2. Digital Root of 36	( )	b. Leaves remainder 2 when divided by 5
3. Divisibility rule for 3	( )	c. Both even - same parity
4. 7 expressed as 5k + 2 (k = 1)	( )	d. Single digit = 9

APSCERT

భాజనీయత సూత్రం	అసలు భాగహారం చేయకుండానే, ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యతో భాగించబడుతుందో లేదో తనిఖీ చేసే సులభ పద్ధతి.	అంకెల మొత్తం 9 తో భాగించబడితే → ఆ సంఖ్య 9 తో భాగించబడుతుంది.
అంక మూలం	ఒక సంఖ్యలోని అంకెలన్నింటినీ ఒకే అంకె వచ్చే వరకు పదేపదే కలపడం.	489710 → 4+8+9+7+1+0=29 → 2+9=11 → 1+1=2.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. ఏవైనా రెండు _____ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది.
2. ఒక సంఖ్యలోని అంకెల _____ 9 తో భాగించబడితే, ఆ సంఖ్య 9 తో భాగించబడుతుంది.
3. 729 యొక్క అంకమూలం _____.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు – సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

1. ఈ క్రింది వాటిలో వేటిని కలిపినప్పుడు మొత్తం ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది?

   (a) బేసి + బేసి (b) బేసి + సరి

   (c) సరి + సరి (d) (a) మరియు (c) రెండూ

2. 5832 యొక్క అంకమూలం ఎంత?

   (a) 8 (b) 9 (c) 6 (d) 3

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
1. 14 మరియు 28 ల సమానత్వ ధర్మం	( )	a. ఒక సులభ పద్ధతి–అంకెలమొత్తం ÷ 3
2. 36 యొక్క అంకమూలం	( )	b. 5 తో భాగించినప్పుడు శేషం 2 వస్తుంది
3. 3 యొక్క భాజనీయత సూత్రం	( )	c. రెండు సరిసంఖ్యలు – అది వాటి సమాన్వత ధర్మం
4. 7 ను 5k + 2 (k = 1) గా రాయడం	( )	d. ఏక అంకె = 9

AP SCERT

DAY 6 — 6. WE DISTRIBUTE, YET THINGS MULTIPLY

Teacher Corner

- **Key Terms :** Algebraic Expression, Variable (Letter-number), Distributive Property, Identity, Terms of an Expression, Coefficient, Like Terms, Expansion, Square of a Binomial, Difference of Squares
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Algebraic Expression	A combination of numbers and letter-symbols (variables) by operations.	3a + 2b - 5 is an algebraic expression.
Variable (Letter-number)	A letter that stands for any number; its value can change.	In 4x + 7, the variable is x.
Distributive Property	Multiplying a number by a sum equals multiplying each addend separately then adding. $a(b + c) = ab + ac$.	3(4+5) = 12+15 = 27.
Identity	A mathematical statement that is true for ALL values of the variables. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ is always true	$(2+3)^2 = 2^2+2.2.3+3^2 = 25$
Terms of an Expression	The individual parts of an expression separated by + or - signs.	In $4a^2 - 3ab + b$, terms are $4a^2$, -3ab, and b.
Coefficient	The number multiplied by a variable in a term.	In 5ab the coefficient is 5.

AP SCERT

DAY 6 6. విభాగ న్యాయం - రాశుల గుణకారం

- **ముఖ్య పదాలు :** బీజీయ సమాసము, చరరాశి (అక్షర-సంఖ్య), విభాగ న్యాయం, సర్వసమీకరణం, సమాసంలోని పదాలు, గుణకం, సజాతి పదాలు, విస్తరణ, ద్విపది వర్గం, వర్గాల భేదం
- **విషయ వివరణ - పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
బీజీయ సమాసము	గణిత ప్రక్రియల ద్వారా ఏర్పడిన సంఖ్యలు మరియు అక్షర-చిహ్నాల (చరరాశుల కలయిక).	$3a + 2b - 5$ ఒక బీజగణిత సమాసము.
చరరాశి (అక్షర-సంఖ్య)	ఏదైనా సంఖ్యకు బదులుగా ఉండే అక్షరం; దాని విలువ మారవచ్చు.	$4x + 7$ లో చరరాశి x.
విభాగ న్యాయం	ఒక సంఖ్యను ఒక మొత్తంతో గుణించడం అంటే, ప్రతి సంకలనాన్ని విడివిడిగా గుణించి, ఆపై కలపడం. $a(b + c) = ab + ac$.	$3(4+5) = 12+15 = 27$
సర్వసమీకరణం	చరరాశుల యొక్క అన్ని విలువలకూ నిజమయ్యే ఒక గణిత ప్రవచనం. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ అనేది ఎల్లప్పుడూ సత్యం.	$(2+3)^2 = 2^2+2.2.3+3^2 = 25$
సమాసంలోని పదాలు	+ లేదా - గుర్తుల ద్వారా వేరు చేయబడిన సమాసంలోని విడి భాగాలు.	$4a^2 - 3ab + b$ లో పదాలు $4a^2$, $-3ab$ మరియు b.
గుణకం	ఒక పదంలోని చరరాశిని గుణించే సంఖ్య.	$5ab$ లో గుణకం 5.

AP SCERT

Like Terms	Terms that have exactly the same variables (and powers); only their coefficients differ.	$3x^2$ and $7x^2$ are like terms.
Expansion	Removing brackets by applying the distributive property to get a sum of terms.	$(x+2)(x+3)$ expands to x^2+5x+6.
Square of a Binomial	Squaring a two-term expression; key identities: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ and $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.	$(3+4)^2 = 9+24+16 = 49$. $(3-4)^2 = 9 - 24+16 = 1$.
Difference of Squares	The identity $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$, useful for fast multiplication.	$102\times98 = (100+2)(100-2) = 10000-4 = 9996$.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The distributive property states: $a \times (b + c) =$ _____ + _____.
2. In the identity $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, the middle term 2ab is called the _____ term.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

3. Which identity helps calculate 98×102 quickly?
   (a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   (c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (d) $a(b + c) = ab + ac$

C. Match the following :

Column A		Column B
1. $(a + b)(a - b)$	( )	a. $a^2 - 2ab + b^2$
2. $(a + b)^2$	( )	b. $ab + mb + an + mn$
3. $(a - b)^2$	( )	c. $a^2 - b^2$
4. $(a + m)(b + n)$	( )	d. $a^2 + 2ab + b^2$

AP SCERT

సజాతి పదాలు	ఒకే చరరాశులు (మరియు ఘాతాలు) కలిగి ఉండి, వాటి గుణకాలు మాత్రమే భిన్నంగా ఉండే పదాలు.	$3x^2$ మరియు $7x^2$ అనేవి సజాతి పదాలు.
విస్తరణ	విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి బ్రాకెట్లను తొలగించి పదాల మొత్తాన్ని పొందడం.	$(x+2)(x+3)$ అనేది x^2+5x+6 గా విస్తరిస్తుంది.
ద్విపది వర్గం	రెండు పదాల సమాసమును వర్గీకరించడం; ముఖ్యమైన సర్వసమీకరణాలు $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ మరియు $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$	$(3+4)^2 = 9+24+16 = 49.$ $(3-4)^2 = 9 - 24+16 = 1.$
వర్గాల భేదం	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ అనే సర్వసమీకరణం, వేగవంతమైన గుణకారానికి ఉపయోగపడుతుంది.	$102\times98 = (100+2)(100-2)$ $= 10000-4 = 9996.$

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు అభ్యాసం

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. విభాగ న్యాయం: $a \times (b + c)$ = _____ + _____.
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ అనే సర్వసమీకరణం, మధ్యపదం $2ab$ ను _____ పదం అంటారు.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

3. 98×102 ను త్వరగా లెక్కించడానికి ఏ సర్వసమీకరణం సహాయపడుతుంది?

   (a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   (c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (d) $a(b + c) = ab + ac$

C. జతపరచండి.

	వరుస A		వరుస B
1.	$(a + b)(a - b)$	( )	a. $a^2 - 2ab + b^2$
2.	$(a + b)^2$	( )	b. $ab + mb + an + mn$
3.	$(a - b)^2$	( )	c. $a^2 - b^2$
4.	$(a + m)(b + n)$	( )	d. $a^2 + 2ab + b^2$

AP SCERT

DAY 7 — 7. PROPORTIONAL REASONING-1

Teacher Corner

- **Key Terms :** Ratio, Terms of Ratio, Simplest Form, HCF, Proportion, Factor of Change, Cross Multiplication, Dividing in a Ratio, Proportional Quantities
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Ratio	A comparison of two quantities using division, written as a : b. For every 'a' units of the first quantity, there are 'b' units of the second.	Ex: Width 60 mm, Height 40 mm → Ratio = 60 : 40
Terms of Ratio	The two numbers in a ratio a : b are called its terms. 'a' is the first term and 'b' is the second term.	Ex: In 3 : 5, the terms are 3 and 5.
Simplest Form	Highest Common Factor - the largest number that divides both terms of the ratio exactly. Used to simplify ratios.	Ex: HCF of 72 and 96 is 24.
HCF	A ratio reduced by dividing both terms by their HCF until no common factor remains (other than 1).	Ex: 60 : 40 → HCF=20 → Simplest = 3 : 2
Proportion	Two ratios are in proportion if they have the same simplest form. Written as a : b :: c : d.	Ex: 60:40 :: 30:20, since both = 3:2
Cross Multiplication	If a:b :: c:d, then ad = bc. Used to verify proportion and find unknown terms in a ratio.	Ex: 3:4 :: 6:8 → 3 × 8 = 24 = 4 × 6 (True)

AP SCERT

DAY 7 — 7. అనుపాత తార్కికత-1

- **ముఖ్య పదాలు :** నిష్పత్తి, నిష్పత్తి పదాలు, కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం, గసాభా, అనుపాతం, మార్పు గుణకం, అడ్డగుణకారం, నిష్పత్తిలో విభజన, అనుపాత పరిమాణాలు
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
నిష్పత్తి	భాగహారం ఉపయోగించి రెండు పరిమాణాలను పోల్చడం, a : b గా రాస్తాము. మొదటి పరిమాణం యొక్క ప్రతి 'a' యూనిట్లకు రెండవ పరిమాణం 'b' యూనిట్లు ఉంటుంది.	ఉదా: వెడల్పు 60 మి.మీ., ఎత్తు 40 మి.మీ. → నిష్పత్తి = 60 : 40
నిష్పత్తి పదాలు	a : b నిష్పత్తిలో ఉన్న రెండు సంఖ్యలను దాని పదాలు అంటారు. 'a' మొదటి పదం మరియు 'b' రెండవ పదం.	ఉదా: 3 : 5 లో పదాలు 3 మరియు 5.
కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం	నిష్పత్తిలో రెండు పదాలను వాటి గసాభాతో భాగించి, ఉమ్మడి కారణాంకం (1 తప్ప) లేని నిష్పత్తి.	ఉదా: 60:40 → గసాభా=20 → కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం = 3:2
గసాభా	గరిష్ట సామాన్య భాజకం – నిష్పత్తిలోని రెండు పదాలను సరిగ్గా భాగించే అతి పెద్ద సంఖ్య. నిష్పత్తులను సూక్ష్మ రూపంలోనికి మార్చడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది.	ఉదా: 72 మరియు 96 యొక్క గసాభా 24.
అనుపాతం	రెండు నిష్పత్తులు ఒకే కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం కలిగి ఉంటే అవి అనుపాతంలో ఉంటాయి. a:b :: c:d గా రాస్తాము.	ఉదా: 60:40 :: 30:20, ఎందుకంటే రెండూ = 3:2
అడ్డ గుణకారం	a:b :: c:d అయితే ad = bc. అనుపాతాన్ని ధృవీకరించడానికి మరియు నిష్పత్తిలో తెలియని పదాలను కనుగొనడానికి ఉపయోగపడుతుంది.	ఉదా: 3:4 :: 6:8 → 3×8=24=4×6 (సత్యం)

AP SCERT

Factor of change	The number by which both terms of a ratio are multiplied or divided to obtain an equivalent proportional ratio.	Ex: (60 : 40) × 1/2 =30:20. Factor = 1/2
Dividing in a Ratio	To divide quantity 'x' in the ratio m:n, then the parts are $\frac{m \times x}{m+n}$ and $\frac{n \times x}{(m+n)}$.	Ex: Rs.4000 in ratio 3:1 → Rs.3000 & Rs.1000
Proportional Quantities	Two pairs of quantities are proportional when their ratios change by the same multipli -cative factor (NOT additive).	Ex: 6 glasses:10 spoons :: 18 glasses : 30 spoons and $30 \times \frac{6}{10} = \frac{18}{30} \times 30$ $\Rightarrow 18 = 18$

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The Simplest from of 48 : 36 is _____.
2. If 5 :8 :: 15 :_____, the missing term is _____.
3. Divide Rs. 700 in ratio 2 : 5. The larger share = Rs. _____.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

4. Which pair of ratios is in proportion?
   (A) 2:3 and 4:5 (B) 3:4 and 9:12
   (C) 5:6 and 10:13 (D) 1:2 and 2:5
5. If a:b :: c:d, then by cross multiplication:
   (A) ab = cd (B) ac = bd (C) ad = bc (D) a+d = b+c

C. Match the following :

Column A		Column B
A. 60 : 40	( )	1. Simplest form is 2 : 1
B. 40 : 20	( )	2. Simplest form is 1 : 1
C. 90 : 30	( )	3. Simplest form is 3 : 2
D. 60 : 60	( )	4. Simplest form is 3 : 1

AP SCERT

మార్పు గుణకం	సమాన అనుపాత నిష్పత్తిని పొందడానికి నిష్పత్తిలోని రెండు పదాలను గుణించే లేదా భాగించే సంఖ్య.	ఉదా: (60:40) × 1/2 = 30:20. గుణకం = 1/2
నిష్పత్తిలో విభజన	x ని m:n నిష్పత్తిలో విభజించాలంటే భాగాలు $\frac{m \times x}{m+n}$ మరియు $\frac{n \times x}{(m+n)}$.	ఉదా: రూ. 4000ని 3:1 నిష్పత్తిలో? రూ. 3000 & రూ. 1000
అనుపాత పరిమాణాలు	రెండు జతల పరిమాణాలు అవి సమానమయితే అవి అనుపాత పరిమాణాలు. వాటిని ఒకేసంఖ్యతో గుణించినప్పుడు (సంకలనం కాదు).	ఉదా: 6 గ్లాసులు : 10 చెంచాలు :: 18 గ్లాసులు : 30 చెంచాలు మరియు $30 \times \frac{6}{10} = \frac{18}{30} \times 30$ $\Rightarrow 18 = 18$

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. 48 : 36 నిష్పత్తి కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం _____.
2. 5 : 8 :: 15 : _____ అయితే మిగిలిన పదం _____.
3. రూ. 700ని 2 : 5 నిష్పత్తిలో విభజించండి. పెద్ద వాటా = రూ. _____.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

4. ఏ జత నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయి?

   (A) 2:3 మరియు 4:5 (B) 3:4 మరియు 9:12

   (C) 5:6 మరియు 10:13 (D) 1:2 మరియు 2:5

5. a:b :: c:d అయితే, అడ్డ గుణకారం ద్వారా వచ్చు సమీకరణం.

   (A) ab = cd (B) ac = bd (C) ad = bc (D) a+d = b+c

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
A. 60 : 40	( )	1. కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం 2 : 1
B. 40 : 20	( )	2. కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం 1 : 1
C. 90 : 30	( )	3. కనిష్ట లేదా సూక్ష్మరూపం 3 : 2
D. 60 : 60	( )	4. కనిష్ట లేదా సూక్ష్మ రూపం 3 : 1

AP SCERT

DAY 8 — 8. FRACTIONS IN DISGUISE

Teacher Corner

- **Key Terms :** Per Cent (%), Fraction, Equivalent Fraction, Percentage of a Quantity, Decimal, Percentage Increase, Percentage Decrease, Profit &Loss, Simple Interest.
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Per Cent (%)	Per cent means 'out of 100'. The symbol % represents a fraction with denominator 100.	Ex: 25% = $\frac{25}{100}$. 50% = $\frac{50}{100}$ = 50%
Fraction to Percentage	Multiply the fraction by 100 to get the percentage. Fraction $\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right) \times 100$ %.	Ex: $\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} \times 100\right)$% = 75%.
Equivalent Fraction	Fractions that represent the same value. Used to express fractions as percentages.	Ex: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100}$ = 75%.
Percentage of a Quantity	To find p% of a quantity Q, calculate $(\frac{p}{100}) \times Q$.	Ex: 25% of 120 = $(\frac{25}{100}) \times 120 = 30$.
Decimal & Percentage	Percentages, fractions and decimals are interchange able. Divide the percentage by 100 to get decimal.	Ex: 40% = $\frac{40}{100}$ = 0.4.
Percentage Increase	When a value grows: the percentage increase = (Increase/Original) × 100.	Ex: Price Rs.30 to Rs.42: $(\frac{12}{30}) \times 100$ = 40%.

AP SCERT

DAY 8 — 8. భిన్నాల వివిధ రూపాలు

ఉపాధ్యాయుల విభాగం

- **ముఖ్య పదాలు :** శాతం, భిన్నం, సమాన భిన్నం, రాశి యొక్క శాతం, దశాంశం, శాతం పెరుగుదల, శాతం తగ్గుదల, లాభనష్టాలు, బారు వడ్డీ.
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
శాతం (%)	శాతం అంటే 100కి అని అర్థం. % అనే గుర్తు హారము 100గా ఉన్న ఒక భిన్నాన్ని సూచిస్తుంది.	ఉదాహరణ: $25\% = \frac{25}{100}$. $= \frac{50}{100} = 50\%$
భిన్నం నుండి శాతానికి	ఒక భిన్నాన్ని శాతంగా మార్చడానికి, ఆ భిన్నాన్ని 100తో గుణించాలి. భిన్నం $\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right) \times 100\%$.	ఉదాహరణ: $\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} \times 100\right)\%$ $= 75\%$.
సమాన భిన్నం	ఒకే విలువను సూచించే భిన్నాలు. భిన్నాలను శాతాలుగా వ్యక్తపరచడానికి వీటిని ఉపయోగిస్తారు.	ఉదాహరణ: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100}$ $= 75\%$.
ఒక రాశి యొక్క శాతం	ఒక రాశి Q లో p% కనుగొనాలంటే, $(\frac{p}{100}) \times Q$ అని లెక్కించాలి.	ఉదాహరణ: 120 లో 25% $= (\frac{25}{100}) \times 120 = 30$.
దశాంశం మరియు శాతం	శాతాలు, భిన్నాలు మరియు దశాంశాలు ఒకదానికొకటి పరస్పరం మార్చుకోదగినవి. శాతాన్ని దశాంశంగా మార్చడానికి దానిని 100తో భాగించాలి.	ఉదాహరణ: $40\% = \frac{40}{100} = 0.4$.
శాతం పెరుగుదల	ఒక విలువ పెరిగినప్పుడు, పెరుగుదల శాతం = (పెరుగుదల/అసలు విలువ) × 100.	ఉదాహరణ: ధర రూ.30 నుండి రూ.42 కి పెరిగితే: $(\frac{12}{30}) \times 100 = 40\%$.

AP SCERT

Percentage Decrease	When a value falls: The percentage decrease = $\frac{\text{Decrease}}{\text{Original}} \times 100$.	Ex: decrease 160 to 100 then decrease % $\left(\frac{60}{160}\right) \times 100 = 37.5\%$.
Profit & Loss	Profit % = (Profit/Cost Price) × 100. Loss % = (Loss/CP) x Profit or loss Always calculated on CP.	Ex: CP Rs.300, SP 100. Rs.430: Profit = 43.3%.
Simple Interest (No Compounding)	Simple Interest = $\frac{p \times t \times r}{100}$ Total amount = $P\left(1 + \frac{RT}{100}\right)$ Same interest earned each period.	Ex: Rs.6000 × 10% for 3 yrs = Rs.7800.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. 25% means _____ out of every 100.
2. Express 3/5 as a percentage _____.
3. 30% of Rs. 200 = Rs. _____.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

4. A shopkeeper buys an article for Rs. 80 and sells at Rs. 100. Profit % is:
   (A) 20% (B) 25% (C) 80% (D) 125%
5. The money Rs. 5000 at 10% p.a. for 2 years without compounding gives total money:
   (A) Rs. 5500 (B) Rs. 6000 (C) Rs. 6050 (D) Rs. 5050

C. Match the following :

Column A		Column B
A. 3/4	( )	1. 0.2
B. 1/5	( )	2. 0.75
C. 50%	( )	3. 60%
D. 3/5	( )	4. 0.5

AP SCERT

శాతం తగ్గుదల	ఒక విలువ తగ్గినప్పుడు; తగ్గుదల శాతం = (తగ్గుదల/అసలు విలువ) × 100.	ఉదాహరణ: 160 నుండి 100 కి తగ్గితే: తగ్గుదల శాతం $(\frac{60}{160}) \times 100$ = 37.5%.
లాభం&నష్టం	లాభ శాతం = (లాభం/కొన్న వెల) × 100. నష్టశాతం = (నష్టం/కొన్న వెల) × 100. ఇది ఎల్లప్పుడూ కొన్న వెలపైనే లెక్కించబడుతుంది.	ఉదాహరణ: కొన్న వెల రూ.300, అమ్మిన వెల రూ.430: లాభం = 43.3%.
బారు వడ్డీ (చక్రవడ్డీ లేనిది)	వడ్డీ = $\frac{p \times t \times r}{100}$. మొత్తం = $P\left(1+\frac{RT}{100}\right)$ ప్రతి కాలపరిమితికి ఒకే వడ్డీ లభిస్తుంది.	ఉదాహరణ: రూ.6000 పై 10% వడ్డీతో 3 సంవత్సరాలకు అయ్యే మొత్తం = రూ.7800.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. 25% అంటే ప్రతి 100లో _____ అని అర్థం.
2. 3/5 ను శాతంగా వ్యక్తపరిస్తే _____ అవుతుంది.
3. రూ. 200 లో 30% = రూ. _____

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

4. ఒక దుకాణదారుడు ఒక వస్తువును రూ. 80 కి కొని, రూ. 100 కి అమ్మితే, లాభ శాతం ఎంత?
   (A) 20% (B) 25% (C) 80% (D) 125%
5. రూ. 5000 పై సంవత్సరానికి 10% వడ్డీ రేటుతో, చక్రవడ్డీ లేకుండా 2 సంవత్సరాలకు వచ్చే మొత్తం:
   (A) రూ. 5500 (B) రూ. 6000 (C) రూ. 6050 (D) రూ. 5050

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
A. 3/4	( )	1. 0.2
B. 1/5	( )	2. 0.75
C. 50%	( )	3. 60%
D. 3/5	( )	4. 0.5

AP SCERT

DAY 9 9. THE BAUDHAYANA-PYTHAGORAS THEOREM

Teacher Corner

- **Key Terms :** Right Triangle, Hypotenuse, Legs / Perpendicular Sides, Square & Area, Diagonal, Baudha yana-Pythagoras Theorem, Irrational Number, Baudhayana Triple, Square Root, Congruence
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Right Triangle	A triangle with one angle equal to exactly 90 degrees. The side opposite the right angle is always the longest side.	Ex: Triangle with sides 3, 4, 5 - angle is between sides 3 and 4 is right angle.
Hypotenuse	The side opposite the right angle in a right triangle. It is always the longest side of a right triangle.	Ex: In a 3-4-5 triangle, the hypotenuse is the side of length 5.
Legs (Shorter Sides)	The two sides of a right triangle that form the right angle. Also called perpendicular sides or 'a' and 'b' in the theorem.	Ex: In 3-4-5, the legs are 3 and 4.
Area of a Square	If a square has side length s, its area = $s \times s = s^2$. (Used to understand why the theorem works through areas.)	Ex: Square of side 4 has area = 4×4 = 16 sq. units.
Diagonal of a Square	A line joining two opposite corners of a square. The diagonal of a square of side 'a' has length = $a \times \sqrt{2}$	Ex: Square of side 1 has diagonal = $a \times \sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = 1.414...$

AP SCERT

DAY 9 9. బౌధాయన - పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

- **ముఖ్య పదాలు :** లంబకోణత్రిభుజం, కర్ణం, పాదాలు / లంబ భుజాలు, చతురస్రం & వైశాల్యం, కర్ణం, బౌధాయన-పైథాగరాస్ సిద్ధాంతం, కరణీయసంఖ్య, బౌధాయనత్రికం, వర్గమూలం, సర్వసమానత్వం
- **విషయ వివరణ - పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
లంబకోణత్రిభుజం	ఒకకోణం 90 డిగ్రీలు ఉన్న త్రిభుజం. లంబకోణానికి ఎదురుగా ఉన్న భుజం ఎల్లప్పుడూ పొడవైనదిగా ఉంటుంది.	ఉదాహరణ: 3, 4, 5 భుజాలు కలిగిన త్రిభుజం-ఇందులో 3 మరియు 4 భుజాల మధ్య 90 డిగ్రీల కోణం ఉంటుంది.
కర్ణం	లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణానికి ఎదురుగా ఉన్న భుజం. ఇది లంబకోణ త్రిభుజం అతి పొడవైన భుజం.	ఉదాహరణ : 3-4-5 త్రిభుజంలో, 5 పొడవు కలిగిన భుజమే కర్ణం.
భుజాలు / లంబభుజాలు	లంబకోణాన్ని ఏర్పరిచే రెండు భుజాలు. ఇవి లంబకోణం యొక్క భుజాలు అని లేదా సిద్ధాంతంలో 'a' మరియు 'b' అని కూడా పిలుస్తారు.	ఉదాహరణ: 3-4-5 త్రిభుజంలో 3 మరియు 4 అనేవి లంబభుజాలు. (పాదాలు)
చతురస్రవైశాల్యం	ఒక చతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు 's' అయితే, దానివైశాల్యం = $s \times s = s^2$. (సిద్ధాంతంను వైశాల్యాల ద్వారా అర్థం చేసుకోవడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది.)	ఉదాహరణ: 4 యూనిట్ల భుజం కలిగిన చతురస్ర వైశాల్యం = $4 \times 4 = 16$ చదరపు యూనిట్లు.
చతురస్ర కర్ణం	చతురస్రంలోని రెండు ఎదురెదురు మూలలను కలిపే రేఖ. 'a' భుజం కలిగిన చతురస్ర కర్ణం పొడవు = $a \times \sqrt{2}$	ఉదాహరణ: 1 యూనిల్ భుజం కలిగిన చతురస్ర కర్ణం = $a \times \sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = 1.414...$

AP SCERT

Baudhayana-Pythagoras Theorem	In a right triangle with legs a, b and hypotenuse c: $a^2 + b^2 = c^2$. First stated by Baudhayana (800 BCE).	Ex: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. So (3,4,5) works!
Square Root	The square root of a number n (written $\sqrt{(n)}$ is the value hat when multiplied by itself gives n.	Ex: $\sqrt{25} = 5$ because $5 \times 5 = 25$. $\sqrt{2} = 1.414$.
Baudhayana Triple	A set of three positive integers (a, b, c) that satisfy $a^2 + b^2 = c^2$. These form the sides of a right triangle.	Ex: (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) are all Baudhayana tripletss.
Irrational Number	A number that cannot be written as a simple fraction m/n and is a non-terminating, non-repeating decimal. ($m, n \in z, n \neq 0$)	Ex: $\sqrt{2} = 1.41421356..$ cannot be written as a fraction.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. In a right triangle, the side opposite the right angle is called the _____.
2. If a = 3 and b = 4 in a right triangle, then c = _____ (use $a^2 + b^2 = c^2$).
3. The lengh of the diagonal of a square of side 5 units is _____ units.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

4. Which set is a Baudhayana triple?
   (A) (2, 3, 4) (B) (5, 12, 13) (C) (4, 5, 8) (D) (6, 7, 9)
5. If $\sqrt{2} = 1.414...$, then $\sqrt{2}$ is:
   (A) A fraction (B) A terminating decimal
   (C) An irrational number (D) A whole number

AP SCERT

బౌధాయన–పైథాగరాస్ సిద్ధాంతం	భుజాలు a, b మరియు కర్ణం c కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజంలో : $a^2 + b^2 = c^2$ దీనిని మొదట బౌధాయన (క్రీ.పూ. 800 ప్రాంతంలో) వివరించారు.	ఉదాహరణ: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. కాబట్టి (3,4,5) సరిపోతుంది.
వర్గమూలం	ఒక సంఖ్య 'n' యొక్క వర్గమూలం అంటే, ఏ సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణిస్తే 'n' వస్తుందో ఆ విలువ. దీనిని $\sqrt{(n)}$ తో సూచిస్తారు.	ఉదాహరణ: $\sqrt{25} = 5$ ఎందుకంటే $5 \times 5 = 25$. అలాగే $\sqrt{2} = 1.414...$
బౌధాయన త్రికం	$a^2 + b^2 = c^2$ నియమాన్ని తృప్తిపరిచే మూడు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు (a, b, c) సమితి. ఇవి లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాలుగా ఏర్పడతాయి.	ఉదాహరణ: (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) ఇవన్నీ బౌధాయన త్రికాలు.
కరణీయసంఖ్య	సాధారణ భిన్నం m/n రూపంలో రాయలేని సంఖ్య. దీని దశాంశ భాగం అంతం కాదు మరియు ఆవర్తనం కాదు. $(m, n \in z, n \neq 0)$	ఉదాహరణ: $\sqrt{2} = 1.41421356...$ దీనిని భిన్న రూపంలో రాయలేము.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో, లంబకోణానికి ఎదురుగా ఉన్న భుజాన్ని _____ అంటారు.
2. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో $a = 3$ మరియు $b = 4$ అయితే, అప్పుడు $c =$ _____ ($a^2 + b^2 = c^2$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి).
3. 5 యూనిట్ల భుజం కలిగిన చతురస్రం యొక్క కర్ణం పొడవు _____ యూనిట్లు.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు – సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

4. క్రింది వాటిలో ఏది బౌధాయన త్రికం?

   (A) (2, 3, 4) (B) (5, 12, 13) (C) (4, 5, 8) (D) (6, 7, 9)

5. $\sqrt{2} = 1.414.....$ అయితే, $\sqrt{2}$ అనేది ఒక:

   (A) భిన్నం (B) అంతమయ్యే దశాంశం (C) కరణీయసంఖ్య (D) పూర్ణాంకం

AP SCERT

DAY 10 10. PROPORTIONAL REASONING-2

- **Key Terms :** Ratio, Proportion, Cross Multiplication, Multi-term Ratio, Representative Fraction (RF), Direct Proportion, Inverse Proportion, Pie Chart, HCF
- **Concept Explaination-Know the term :**
  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Ratio	A ratio is a way of comparing two or more quantities to show how their sizes relate to one another. It indicates how many times one number contains another	In the ratio a:b, a is called antecedent and b is called the consequent In 3:2, antecedent = 3 condequent = 2
Multi-term Ratio	A ratio with more than 2 terms, e.g., a:b:c. All terms change by the same factor when scaled up or down.	Ex: Spice mix 8:4:2:1 scaled to half = 4:2:1:0.5.
Proportion	Proportion is a statement that two ratios are equal. If a,b,c,d are in proportion then a:b = c:d	If 15, 20, 6, 8 are in proportion then 15 : 20 = 6:8
Representative Fraction (RF)	The ratio of a distance on the map to the actual ground distance. Used to find real-world distances from map distances.	Ex: RF 1:60,00,000 means 1 cm on map = 60 km real.
Direct Proportion	Two quantities are in direct proportional if when one increases, the other increases by the same factor. $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ (constant).	Ex: More rice → more idlis. 5 workers make 4500 bricks; 20 workers make 18000 bricks.

AP SCERT

DAY 10 10. అనుపాత తార్కికత-2

- **ముఖ్య పదాలు :** నిష్పత్తి, అనుపాతం, అడ్డగుణకారం, బహుళ-పదనిష్పత్తి, ప్రాతినిధ్యభిన్నం, అనులోమఅనుపాతం, విలోమఅనుపాతం, పైచార్ట్, గసాభా
- **విషయ వివరణ - పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
నిష్పత్తి	రెండు ఒకే రకమైన పరిమాణాలను భాగహార రూపంలో పోల్చడాన్ని నిష్పత్తి అంటారు. అంటే, ఒక రాశి కంటే మరొక రాశి ఎన్ని రెట్లు ఎక్కువగా ఉందో లేదా తక్కువగా ఉందో నిష్పత్తి తెలియజేస్తుంది.	a:b లో మొదటి పదం 'a' ని పూర్వ పదం అని, రెండో పదం 'b' ని పరపదం అంటారు. 3:2లో పూర్వపదం = 3, పరపదం = 2,
బహుళ-పదనిష్పత్తి	2 కంటే ఎక్కువ పదాలు ఉన్న నిష్పత్తి, ఉదా: a:b:c. అన్ని పరిమాణాలు పెరిగినా లేదా తగ్గినా, అవన్నీ ఒకే గుణకంతో మారుతాయి.	ఉదా: సుగంధ మిశ్రమం 8:4:2:1 సగానికి స్కేల్ ఇస్తే = 4:2:1:0.5.
అనుపాతం	రెండు నిష్పత్తుల సమానత్వాన్ని అనుపాతం అంటారు. a,b,c,d అనే నాలుగు రాశులు అనుపాతంలో ఉంటే a:b = c:d అవుతుంది.	15, 20, 6, మరియు 8 అనుపాతంలో ఉంటే 15 : 20 = 6:8
ప్రాతినిధ్య భిన్నం	మ్యాప్‌లోని దూరం నిజమైన భూమి దూరానికి ఉన్న నిష్పత్తి. మ్యాప్ దూరాల నుండి నిజ-ప్రపంచ దూరాలను కనుగొనడానికి ఉపయోగపడుతుంది.	ఉదా: = RF 1:60,00,000 అంటే మ్యాప్ 1 సెం.మీ. = నిజందూరం 60 కి.మీ.
అనులోమానుపాతం	ఒకటి పెరిగినప్పుడు మరొకటి అదే గుణకంతో పెరిగితే రెండు పరిమాణాలు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి. $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ (స్థిరాంకం).	ఉదా: ఎక్కువబియ్యం → ఎక్కువ ఇడ్లీలు. 5 కార్మికులు 4500 ఇటుకలను తయారుచేస్తారు ; 20 కార్మికులు 18000 ఇటుకలను తయారుచేస్తారు

AP SCERT

Inverse Proportion	Two quantities are in inversely proportional if when one increases by factor n, the other decreases by factor n. $x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = k$.	Ex: More speed → less time. More workers → fewer days.
Cross Multiplication	Cross multipication is a mathematical technique used to slove an equation involving to ratios or fractions.	If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then a×d = b×c If $\frac{x}{10} = \frac{3}{5}$ then, $5 \times x = 10 \times 3$ $5x = 30$, $x = 6$
Pie Chart	A circle divided into slices where each slice's angle is proportional to the data it represents. Total angle = 360º.	Ex: 12 out of 40 students → angle = $\frac{12}{40} \times 360^\circ = 108^\circ$.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. In inverse proportion, when one quantity doubles, the other quantity _____.
2. Divide 90 in the ratio 1:2:3. The three parts are _____, _____, _____.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

3. 4 workers finish a job in 6 days. 8 workers will finish it in:
   (A) 12 days (B) 3 days (C) 6 days (D) 24 days
4. Speed and time for a fixed distance are:
   (A) Directly proportional (B) Inversely proportional
   (C) Not related (D) Equal

AP SCERT

విలోమఅనుపాతం	ఒకటి n గుణకంతో పెరిగినప్పుడు మరొకటి n గుణకంతో తగ్గితే రెండు పరిమాణాలు విలోమ అనుపాతంలో ఉంటాయి. $x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = k$.	ఉదా: ఎక్కువ వేగం → తక్కువ సమయం. ఎక్కువ కార్మికులు → తక్కువ రోజులు.
అడ్డగుణకారం	గణితంలో అడ్డగుణకారం అనేది రెండు నిష్పత్తులు లేదా భిన్నాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు, వాటిలో తెలియని విలువలు కనుగొనడానికి ఉపయోగించే ఒక సులభమైన పద్ధతి	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయితే $a \times d = b \times c$ అవుతుంది. $\frac{x}{10} = \frac{3}{5}$ అయితే $5 \times x = 10 \times 3$ $5x = 30, x = 6$
పైచార్ట్	వృత్తాన్ని సెక్టార్లుగా విభజించిన చిత్రం, ప్రతి భాగం కోణం అది సూచించే డేటాకు అనుపాతంలో ఉంటుంది. మొత్తం కోణం = 360°.	ఉదా: 40 మంది విద్యార్థులలో 12 మందిని సూచించు సెక్టరు కోణం → కోణం= $\frac{12}{40} \times 360^\circ = 108^\circ$

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. విలోమఅనుపాతంలో, ఒక పరిమాణం రెట్టింపు అయినప్పుడు, మరొక పరిమాణం _____.
2. 90ని 1:2:3 నిష్పత్తిలో విభజించండి. మూడుభాగాలు _____, _____, _____.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు – సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

3. నలుగురు కార్మికులు ఒక పనిని 6 రోజులలో పూర్తిచేస్తారు. 8 కార్మికులు దాన్ని ఎంతకాలంలో పూర్తిచేస్తారు?

   (a) 12 రోజులు (b) 3 రోజులు (c) 6 రోజులు (d) 24 రోజులు

4. నిర్ణీత దూరానికి వేగం మరియు సమయం:

   (a) అనులోమ అనుపాతంలో ఉంటాయి (b) విలోమ అనుపాతంలో ఉంటాయి

   (c) సంబంధంలేదు (d) సమానంగా ఉంటాయి

AP SCERT

DAY 11 11. EXPLORING SOME GEOMETRIC THEMES

Teacher Corner

- **Key Terms :** Fractal, Self-similarity, Net (of a solid), Face, Edge, Vertex, Projection, Isometric projection, Prism, Pyramid
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Fractal	A shape that shows the same or similar pattern at smaller and smaller scales (self-similar).	A fern leaf - each sub-leaf looks like the whole fern.
Self-similarity	When smaller parts of a shape look the same as the whole shape.	Koch Snowflake - each bump has smaller bumps of the same shape.
Net of a solid	A flat 2D shape that can be folded to form a 3D solid.	6 squares joined in a cross pattern fold into a cube.
Face	A flat (plane) surface that forms the boundary of a solid.	A cube has 6 square faces.
Edge	A line segment where two faces of a solid meet.	A cube has 12 edges.
Vertex	A point (corner) where two or more edges of a solid meet.	A cube has 8 vertices.
Projection	The shadow-like flat image of a 3D object formed on a plane surface when light shines perpendicularly on it.	Top view of a cylinder is a circle.

AP SCERT

DAY 11 11. కొన్ని జ్యామితీయ అంశాల అన్వేషణ

- **ముఖ్య పదాలు :** పునరావృతనమూనా, స్వయం-సారూప్యత, ఘనం యొక్క వలచిత్రం, తలం (ముఖం), అంచు, శీర్షం, ప్రక్షేపం, సమమితిప్రక్షేపం, పట్టకం, పిరమిడ్
- **విషయ వివరణ - పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
పునరావృతనమూనా	చిన్న చిన్న కొలతలలో కూడా ఒకే రకమైన లేదా సమానమైన అమరికను చూపే ఆకారం (స్వయం-సారూప్యత).	ఫెర్న్ ఆకు - ప్రతి చిన్న ఆకు కూడా మొత్తం ఫెర్న్ ఆకులాగే కనిపిస్తుంది.
స్వయం-సారూప్యత	ఒక ఆకారంలోని చిన్న భాగాలు కూడా పూర్తి ఆకారం లాగే కనిపించడం.	కోచ్ స్నోఫ్లేక్ - దీనిలోని ప్రతి వంపుపై అదే ఆకారంలో ఉండే చిన్న చిన్నవంపులు ఉంటాయి.
ఘనం యొక్క వల చిత్రం	ఒక 3D ఘనరూపాన్ని తయారు చేయడానికి మడవగలిగే ఒక చదునైన 2D ఆకారం.	సిలువ ఆకారంలో జత చేయబడిన 6 చతురస్రాలను మడిచితే ఒక ఘనం ఏర్పడుతుంది.
తలము (ముఖం)	ఒక ఘనరూపానికి సరిహద్దుగా ఉండే చదునైన ఉపరితలం.	ఒక ఘనానికి 6 చతురస్రకార తలాలు (ముఖాలు) ఉంటాయి.
అంచు	ఒక ఘనరూపంలోని రెండు తలాలు కలిసే రేఖాఖండం.	ఒక ఘనానికి 12 అంచులు ఉంటాయి.
శీర్షం	ఒక ఘనరూపంలోని రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంచులు కలిసే ఉమ్మడి బిందువు (మూల).	ఒక ఘనానికి 8 శీర్షాలు ఉంటాయి.
ప్రక్షేపం	ఒక 3D వస్తువుపై కాంతి నిలువుగా పడినప్పుడు ఒక చదునైన ఉపరితలంపై ఏర్పడే దాని నీడ వంటి చిత్రం.	ఒక స్థూపం పై నుండి చూసినప్పుడు అది ఒక వృత్తంలా కనిపిస్తుంది.

AP SCERT

Isometric projection	A special projection of a solid where the lengths of all projected edges are equal. Drawn on isometric (hexagonal) grid paper.	A cube balanced on its corner vertex gives an isometric (hexagon) projection.
Prism	A solid with two identical parallel polygon faces (Top & base) connected by rectangles (parallelograms).	A triangular prism has 2 triangular faces and 3 rectangular faces.
Pyramid	A solid with a polygon base and triangular Lateral faces meeting at a single apex (top point).	A square pyramid has a square base and 4 triangular faces.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. A shape that shows the same pattern at smaller and smaller scales is called a _____.
2. The flat 2D shape that can be folded to form a 3D solid is called the _____ of the solid.
3. A cube has _____ faces, _____ edges and _____ vertices.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

1. Which of the following is an example of a fractal found in nature?
   (a) Cube (b) Fern leaf (c) Cylinder (d) Net
2. The projection of a cube in which all edges appear equal in length is called:
   (a) Front view (b) Top view
   (c) Isometric projection (d) Side view

C. Match the following :

	Column A			Column B
1.	Fractal	( )	A)	Flat shape that folds into a solid
2.	Vertex	( )	B)	Same pattern repeating at smaller scales
3.	Net	( )	C)	A shape made by repeating a pattern at smaller scales
4.	Self-similarity	( )	D)	Shadow-like flat image of a 3D object on a plane
5.	Projection	( )	E)	Point where two or more edges meet

AP SCERT

సమమితి ప్రక్షేపం	ఒక ఘనరూపంలోని అన్ని అంచుల పొడవులు సమానంగా కనిపించేలా చూపే ప్రత్యేక ప్రక్షేపం. దీనిని ఐసోమెట్రిక్ గ్రిడ్ పేపర్‌పై గీస్తారు.	ఒక ఘనం తన శీర్షంపై సమతుల్యంగా ఉన్నప్పుడు అది ఐసోమెట్రిక్ (షడ్భుజి) ప్రక్షేపాన్ని ఇస్తుంది.
పట్టకం	పక్క తలాలు సమాంతర చతుర్భుజాలుగా (దీర్ఘచతురస్రాలు) ఉండి, రెండు సర్వసమాన సమాంతర బహుభుజి తలాలు (భూములు పై భాగం) కలిగిన ఘనరూపం.	త్రిభుజాకార పట్టకానికి 2 త్రిభుజాకార తలాలు మరియు 3 దీర్ఘచతురస్రకార తలాలు ఉంటాయి.
పిరమిడ్	ఒక బహుభుజిభూమిని కలిగి ఉండి, మిగిలిన త్రిభుజాకార ప్రక్క తలాలన్నీ ఒకే బిందువు (శిఖరం) వద్ద కలిసే ఘనరూపం.	చతురస్రాకార పిరమిడ్‌కు ఒక చతురస్ర భూమి మరియు 4 త్రిభుజాకార తలాలు ఉంటాయి.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. చిన్నచిన్న కొలతలలో కూడా ఒకే రకమైన అమరికను చూపే ఆకారాన్ని _____ అని పిలుస్తారు.
2. ఒక 3D ఘనరూపాన్ని తయారు చేయడానికి మడవగలిగే చదునైన 2D ఆకారాన్ని ఆ ఘనరూపం యొక్క _____ అంటారు.
3. ఒకఘనానికి _____ తలాలు, _____ అంచులు, మరియు _____ శీర్షాలు ఉంటాయి.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

1. క్రింది వాటిలో ప్రకృతిలో కనిపించే పునరావృత సమూనా ఉదాహరణ ఏది?
   (a) ఘనం (b) ఫెర్న్‌ఆకు (c) స్థూపం (d) ఘనరూప వల
2. ఘనం యొక్క అన్ని అంచుల పొడవులు సమానంగా కనిపించే ప్రక్షేపాన్ని ఏమంటారు?
   (a) ముందు నుండి చూసిన దృశ్యం (b) పైనుండి చూసిన దృశ్యం
   (c) సమమితి ప్రక్షేపకం (d) ప్రక్క నుండి చూసిన దృశ్యం

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
1. పునరావృతనమూనా	( )	A) ఒక ఘనరూపాన్ని తయారు చేయడానికి మడవగలిగే చదునైన ఆకారం
2. శీర్షం	( )	B) చిన్న చిన్న కొలతలలో అదే నమూనా పునరావృతం కావడం
3. ఘనం యొక్క వల చిత్రం	( )	C) చిన్న చిన్న కొలతలలో ఒకే నమూనాను పునరావృతం చేయడం ద్వారా ఏర్పడే ఆకారం
4. స్వయం-సారూప్యత	( )	D) ఒక తలంపై 3D వస్తువు యొక్క నీడ వంటి చదునైన చిత్రం
5. ప్రక్షేపకం	( )	D) రెండు అంతకంటే ఎక్కువ అంచులు కలిసే బిందువు

AP SCERT

DAY 12 12. TALES BY DOTS AND LINES

Teacher Corner

- **Key Terms :** Mean (Average), Median, Central Tendency, Frequency, Line Graph, Spreadsheet, Data (Dataset), Infographic, Arithmetic Mean formula
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Mean (Average)	Sum of all values divided by the number of values. It is the 'balance point' of the data.	Mean of 3,7,8 = $\frac{3+7+8}{3}$ = 18÷3 = 6
Median	The middle value when data is sorted in order. Half of the values of the data lie below it, half above.	Sorted: 3,5,7,9,11 → Median = 7
Central Tendency	A single value that represents the 'centre' or typical value of a data set.	Mean & Median are both measures of central tendency.
Frequency	The number of times a particular value appears in a data set.	In {4,4,4,7,9}, frequency of 4 is 3.
Line Graph	A graph where data points are connected by lines. Best used to show change over time.	Monthly temperature plotted over 12 months.
Spreadsheet	A digital table of rows and columns (cells) used to store and calculate data using formulae.	= AVERAGE(B2:B10) finds average of a column.

AP SCERT

DAY 12 12. బిందువులు మరియు రేఖల కథలు

ఉపాధ్యాయుల విభాగం

- **ముఖ్య పదాలు :** సగటు / సరాసరి, మధ్యగతం, కేంద్రీయ స్థానపు కొలతలు, పౌనఃపున్యం, రేఖాపటం (లైన్ గ్రాఫ్), స్ప్రెడ్‌షీట్ దత్తాంశం, దృశ్య సమాచార చిత్రం, అంకగణిత సగటు సూత్రం
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
సగటు / సరాసరి	అన్ని విలువల మొత్తాన్ని, ఆ విలువల సంఖ్యతో భాగించగా వచ్చేది. ఇది దత్తాంశం యొక్క 'సమతుల్య బిందువు'.	3, 7, 8 ల సగటు = $\frac{3+7+8}{3}$ $18 \div 3 = 6$.
మధ్యగతం	దత్తాంశాన్ని వరుస క్రమంలో అమర్చినప్పుడు మధ్యలో ఉండే విలువ. సగం విలువలు దీనికంటే తక్కువగా, సగం ఎక్కువగా ఉంటాయి.	క్రమ పద్ధతి: 3, 5, 7, 9, 11 → మధ్యగతం = 7.
కేంద్ర స్థానపు కొలతలు	దత్తాంశం యొక్క 'కేంద్రం' లేదా ఒక సాధారణ విలువను సూచించే ఒకే ఒక విలువ.	సగటు మరియు మధ్యగతం రెండూ కేంద్ర స్థానపు కొలతలే.
పౌనఃపున్యం	దత్తాంశంలో ఒక నిర్దిష్ట విలువ ఎన్నిసార్లు పునరావృతమవుతుందో తెలిపే సంఖ్య.	{4, 4, 4, 7, 9} లో, 4 యొక్క పౌనఃపున్యం = 3.
రేఖాపటం (లైన్ గ్రాఫ్)	దత్తాశం యొక్క బిందువులను గీతలతో కలుపుతూ చూపే గ్రాఫ్. కాలక్రమేణా జరిగే మార్పులను చూపడానికి ఇది ఉత్తమం.	12 నెలల కాలంలో నమోదైన నెలవారీ ఉష్ణోగ్రతలు.
స్ప్రెడ్‌షీట్	వరుసలు, నిలువు వరుసలు కలిగిన డిజిటల్ పట్టిక. ఇందులో సూత్రాలను ఉపయోగించి లెక్కలు చేయవచ్చు.	= సగటు(B2:B10) నిలువ వరుసలోని అంకెల సగటు

AP SCERT

Data (Dataset)	A collection of information (numbers, facts) that is gathered for analysis.	Heights of 30 students is a dataset.
Infographic	A visual representation that combines images and data to communicate information clearly.	A map showing wheat vs. rice preference by state.
Arithmetic Mean formula	Mean = (Sum of all values) ÷ (Number of values). When all values increase by k, mean also increases by k.	Data: 4,6,8. Mean = 18÷3 = 6. Add 5 to each: New mean = 11.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. The _____ is found by adding all values and dividing by the count.
2. The _____ is the middle value when data is sorted in order.
3. A graph that shows data points connected by lines, used to show change over time, is called a _____.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

1. If the mean of 4, 6, 8, 10 is 7 and we add 3 to each value, the new mean is:
   (a) 7 (b) 10 (c) 21 (d) 3
2. The median of the data 3, 5, 7, 9, 11 is:
   (a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 9

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Mean	( )	A) A graph connecting data points with lines
2. Median	( )	B) The middle value in sorted data
3. Frequency	( )	C) Number of times a value appears in data
4. Line Graph	( )	D) Sum of values divided by count

AP SCERT

దత్తాంశం	విశ్లేషణ కోసం సేకరించిన సమాచార (సంఖ్యలు, వివరాలు) సమూహం.	30 మంది విద్యార్థుల ఎత్తుల వివరాలు ఒక దత్తాంశం.
దృశ్య సమాచార చిత్రం	పటాలు మరియు సమాచారాన్ని సమాచారాన్ని స్పష్టంగా వివరించే ఒక దృశ్య రూపం.	రాష్ట్రాల వారీగా గోధుమలు vs బియ్యం ఇష్టపడే వారిని చూపే మ్యాప్.
అంకగణిత సగటు సూత్రం	సగటు = (రాశుల మొత్తం) ÷ (రాశుల సంఖ్య). అన్ని విలువలకు 'k' కలిపితే, సగటు కూడా 'k' పెరుగుతుంది.	డేటా: 4, 6, 8. సగటు = 6. ప్రతి విలువకు 5 కలిపితే: కొత్త సగటు = 11.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. అన్ని విలువలను కూడి, ఆ సంఖ్యల మొత్తంతో భాగించడం ద్వారా _____ కనుగొనబడుతుంది.
2 దత్తాంశాన్ని ఒక క్రమంలో అమర్చినప్పుడు, మధ్యలో ఉండే విలువను _____ అంటారు.
3. దత్తాంశ బిందువులను గీతలతో కలుపుతూ, కాలక్రమేణా జరిగే మార్పులను చూపించడానికి ఉపయోగించే గ్రాఫ్‌ను _____ అంటారు.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు – సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

1. 4, 6, 8, 10 ల సగటు 7 అయినప్పుడు, మనం ప్రతి విలువకు 3 కలిపితే, కొత్త సగటు ఎంత అవుతుంది?
   (a) 7 (b) 10 (c) 21 (d) 3
2. 3, 5, 7, 9, 11 అనే దత్తాంశం యొక్క మధ్య గతం ఎంత?
   (a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 9

C. జతపరచండి.

వరుస A			వరుస B
1. సగటు	( )	A)	ధత్తాంశంలోని బిందువులను సరళరేఖతో కలిపే రేఖాచిత్రం
2. మధ్యగతం	( )	B)	క్రమబద్ధీకరించిన దత్తాంశంలో మధ్య విలువ
3. పౌనఃపున్యం	( )	C)	దత్తాంశంలో ఒక విలువ ఎన్ని సార్లు కనిపిస్తుందో తెలిపే సంఖ్య
4. రేఖా పటం	( )	D)	విలువల మొత్తాన్ని వాటి సంఖ్యతో భాగించడం

AP SCERT

DAY 13 13. ALGEBRA PLAY

Teacher Corner

- **Key Terms :** Variable (Letter-number), Expression, Equation, Solving an equation, Distributive property, Divisibility, Number Pyramid, Substitution, Constant, Algebraic identity
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Key Term	Definition	Example
Variable (Letter-number)	A letter used to represent an unknown number in an expression or equation.	x, a, b, M, D are variables.
Expression	A combination of numbers, variables and operations (no '=' sign).	$2x + 4$, $a + b$, $5M + 6$
Equation	A mathematical statement showing two expressions are equal (has an = sign).	$2x + 4 = 10$; $a + b = 60$
Solving an equation	Finding the value of the variable that makes the equation true.	$2x = 10 \rightarrow x = 5$
Distributive property	$a \times (b + c) = a\times b + a\times c$. Used to expand or factorise expressions.	$5(x+3) = 5x + 15$
Divisibility	A number is said to be divisible by n if dividing by n leaves remainder 0.	$27 \div 9 = 3$ (no remainder), so 27 is divisible by 9.
Number Pyramid	A structure where the value of each cell equals the sum of the two Values of the cells directly below it.	Bottom row: 3, 4 → Next level: 7 → Top: 7

AP SCERT

DAY 13 13. బీజగణితంతో ఆట

ఉపాధ్యాయుల విభాగం

- **ముఖ్య పదాలు :** చరరాశి (అక్షర సంఖ్య), సమాసం, సమీకరణం, సమీకరణ సాధన, విభాగ న్యాయం, భాజనీయత, సంఖ్యా పిరమిడ్, ప్రతిక్షేపణ, స్థిరరాశి, బీజగణిత సర్వసమీకరణం
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
చరరాశి (అక్షర సంఖ్య)	సమాసం లేదా సమీకరణంలో తెలియని సంఖ్యను సూచించడానికి ఉపయోగించే అక్షరం.	x, a, b, M, D లు చరరాశులు.
సమాసం	సంఖ్యలు, చరరాశులు మరియు గణిత ప్రక్రియల కలయిక (= గుర్తు ఉండదు).	$2x + 4$, $a + b$, $5M + 6$
సమీకరణం	రెండు సమాసాలు సమానమని చూపే గణిత వాక్యం (= గుర్తు ఉంటుంది).	$2x + 4 = 10$; $a + b = 60$
సమీకరణ సాధన	సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే చరరాశి విలువను కనుగొనడం.	$2x = 10 \rightarrow x = 5$
విభాగ న్యాయం	$a \times (b + c) = a\times b + a\times c$. సమాసాలను విస్తరించడానికి లేదా కారణాంకాలుగా విభజించడానికి వాడతారు.	$5(x+3) = 5x + 15$
భాజనీయత	ఒక సంఖ్యను 'n' తో భాగించినప్పుడు శేషం 0 వస్తే ఆ సంఖ్య n చే భాగించబడుతుంది.	$27 \div 9 = 3$ (శేషం '0'), కాబట్టి 27 అనేది 9 చే భాగించబడుతుంది.
సంఖ్యా పిరమిడ్	ప్రతి గడిలోని సంఖ్య దాని కింద ఉన్న రెండు గడులలోని సంఖ్యల మొత్తానికి సమానంగా ఉండే నిర్మాణం.	కింది వరుస: 3, 4 → పై వరుస: 7

AP SCERT

Substitution	Replacing a variable with a specific number to evaluate an expression.	If a = 5, then a + 3 = 5 + 3 = 8.
Constant	A fixed number in an expression that does not change.	In 2x + 4, the number 4 is a constant.
Algebraic identity	An equation that is true for ALL values of the variables.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ is true for any a, b.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. A letter used to represent an unknown number in an expression is called a _____.
2. An expression that has an equal sign (=) is called an _____.
3. The rule a × (b + c) = a×b + a×c is called the _____ property.

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

1. In the expression 3x + 7, the variable is:
   (a) 3 (b) x (c) 7 (d) 3x
2. Solve: 2x + 4 = 14. The value of x is:
   (a) 7 (b) 9 (c) 5 (d) 4

C. Match the following :

	Column A			Column B
1.	Variable	( )	A)	Replacing a variable with a number to evaluate an expression
2.	Equation	( )	B)	A statement showing two expressions are equal (uses = sign)
3.	Distributive Property	( )	C)	A letter that represents an unknown number
4.	Divisibility	( )	D)	A number leaves remainder 0 when divided by another number
5.	Substitution	( )	E)	a × (b + c) = a×b + a×c

AP SCERT

ప్రతిక్షేపణ	ఒక సమాసం విలువను కనుగొనడానికి చరరాశి స్థానంలో ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యను ఉంచడం.	$a = 5$ అయితే, $a + 3 = 5 + 3 = 8$.
స్థిరరాశి	సమాసంలో విలువ మారకుండా ఉండే ఒక స్థిరమైన సంఖ్య.	$2x + 4$ లో 4 అనేది స్థిరరాశి.
బీజగణిత సర్వసమీకరణం	చరరాశుల అన్ని విలువలకూ సత్యమయ్యే సమీకరణం.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ అనేది అన్ని a, b విలువలకూ నిజం.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. ఒక సమాసంలో తెలియని సంఖ్యను సూచించడానికి ఉపయోగించే అక్షరాన్ని _____ అని పిలుస్తారు.
2. సమానత్వ గుర్తు (=) కలిగిన సమాసాన్ని _____ అంటారు.
3. $a \times (b + c) = a\times b + a\times c$ అనే నియమాన్ని _____ ధర్మం (లేదా న్యాయం) అంటారు.

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

1. $3x + 7$ అనే సమాసంలో చరరాశి ఏది?
   (a) 3 (b) x (c) 7 (d) 3x
2. సాధించండి: $2x + 4 = 14$. 'x' విలువఎంత?
   (a) 7 (b) 9 (c) 5 (d) 4

C. జతపరచండి.

వరుస A		వరుస B
1. చరరాశి	( )	A) సమాసం విలువను కనుగొనడానికి చరరాశి స్థానంలో ఒక సంఖ్యను ఉంచడం
2. సమీకరణం	( )	B) రెండు సమాసాలు సమానమని చూపే వాక్యం (= గుర్తును ఉపయోగిస్తుంది)
3. విభాగన్యాయం	( )	C) తెలియని సంఖ్యను సూచించే ఒక అక్షరం
4. భాజనీయత	( )	D) ఒక సంఖ్యను మరొక సంఖ్యతో భాగించినప్పుడు శేషం 0 రావడం
5. ప్రతిక్షేపణ	( )	E) $a \times (b + c) = a\times b + a\times c$

APSCERT

DAY 14 — 14. AREA

Teacher Corner

- **Key Terms :** Area, Perimeter, Base & Height, Altitude, Parallelogram, Trapezium, Rhombus, Diagonal
- **Concept Explaination-Know the term :**

  Instructions: Introduce each term using definitions and examples. Connect each concept to a real-life example to build readiness.

Term	Definition	Example
Area	The amount of 2D space covered by a flat shape, measured in square units.	e.g. 5 cm × 3 cm tile covers an area of 15 cm^2.
Perimeter	The total length of the boundary around a 2D shape.	e.g. 6 m × 4 m field has perimeter = 20 m.
Base & Height	Base = any chosen side; Height = perpendicular distance from that base to the opposite vertex/side.	e.g. In ΔABC, BC = 8 cm (base); altitude h = 5 cm.
Altitude	A perpendicular line segment drawn from a vertex to the opposite side (or its extension).	e.g. Altitude is always perpendicular to the base.
Parallelogram	A quadrilateral with two pairs of parallel sides. Opposite sides are equal in length.	e.g. In a parallelogram ABCD, AB$\parallel$CD, BC$\parallel$DA and AB=CD, BC=DA
Trapezium	A quadrilateral with exactly one pair of parallel sides a and b are called parallel sides	e.g. In a Trapezium ABCD, AB$\parallel$CD, AB=a CD=b

AP SCERT

DAY 14 14. వైశాల్యం

- **ముఖ్య పదాలు :** వైశాల్యం, చుట్టుకొలత, భూమి&ఎత్తు, ఉన్నతి, సమాంతర చతుర్భుజం, సమలంబ చతుర్భుజం (ట్రెపీజియం), సమచతుర్భుజం (రాంబస్), కర్ణం
- **విషయ వివరణ – పదజాల అవగాహన :**

సూచనలు: నిర్వచనాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా ప్రతి పదాన్ని పరిచయం చేయండి. సంసిద్ధతను పెంపొందించుటకు ప్రతి భావనను నిజజీవిత ఉదాహరణలతో అనుసంధానం చేయండి.

ముఖ్యమైన పదం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ
వైశాల్యం	ఒక చదునైన ఆకారం ఆక్రమించే 2D స్థలం పరిమాణం. దీనిని చదరపు యూనిట్లలో కొలుస్తారు.	ఉదా: 5 సెం.మీ × 3 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక టైల్ 15 సెం.మీ^{2} వైశాల్యాన్ని ఆక్రమిస్తుంది.
చుట్టుకొలత	ఒక 2D ఆకారం చుట్టూ ఉండే సరిహద్దు మొత్తం పొడవు.	ఉదా: 6 మీ × 4 మీ కొలతలు గల పొలం చుట్టుకొలత = 20 మీ.
భూమి & ఎత్తు	భూమి అంటే మనం ఎంచుకున్న ఏదైనా ఒక భుజం; ఎత్తు అంటే ఆ ఆధారం నుండి ఎదురుగా ఉన్న శీర్షానికి లేదా భుజానికి గల లంబదూరం.	ఉదా: త్రిభుజ ΔABC లో BC = 8 సెం.మీ (భూమి); ఉన్నతి h = 5 సెం.మీ.
ఉన్నతి	ఒక శీర్షం నుండి ఎదురుగా ఉన్న భుజానికి (లేదా దాని పొడిగింపునకు) గీసిన లంబ రేఖాఖండం.	ఉన్నతి ఎల్లప్పుడూ భూమికి లంబంగా ఉంటుంది.
సమాంతర చతుర్భుజం	రెండు జతల సమాంతర భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజం. ఎదురెదురు భుజాల పొడవులు సమానంగా ఉంటాయి.	ఉదా: ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$ మరియు AB=CD, BC=DA
సమలంబ చతుర్భుజం (ట్రెపీజియం)	సరిగ్గా ఒక జత సమాంతర భుజాలు మాత్రమే కలిగిన చతుర్భుజం ('a' మరియు 'b' లు సమాంతర భుజం)	ఉదా: ABCD ట్రెపీజియంలో, $AB \parallel CD$, AB = a CD=b

AP SCERT

Rhombus	A parallelogram with all four sides equal. Diagonals bisect each other at right angles.	e.g. If ABCD is a Rhombus AB = BC = CD = DA
Diagonal	A line segment joining two non-adjacent vertices of a polygon; used to split shapes into triangles.	e.g. Drawing BD splits. quadrilateral ABCD into 2 triangles.

Student corner-Reading and Practice

Instructions: Read the key terms carefully. Then attempt all questions on your own.

A. Fill in the blanks :

1. Area of a triangle = $\frac{1}{2}$ × _____ × height.
2. A parallelogram with base 9 cm and height 4 cm has an area of ____cm².
3. A rhombus with diagonals 10 cm and 6 cm has an area of _____ cm².

B. MCQs - Tick (✓) the correct answer.

1. A trapezium has parallel sides 8 cm and 12 cm, height 5 cm. Its area is:
   (A) 80 cm² (B) 50 cm² (C) 100 cm² (D) 60 cm²
2. Perimeter and area of a shape are:
   (A) Always equal
   (B) Both measured in cm²
   (C) Independent - same perimeter can give different areas
   (D) Interchangeable measures

C. Match the following :

Column A		Column B
1. Rectangle	( )	P. $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
2. Triangle	( )	Q. $l \times b$
3. Rhombus	( )	R. $b \times h$
4. Parallelogram	( )	S. $\frac{1}{2} \times b \times h$

AP SCERT

సమచతుర్భుజం / రాంబస్	నాలుగు భుజాలు సమానంగా ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజం. దీనివి కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఖండించుకుంటాయి.	ఉదా: ABCD ఒక రాంబస్ AB = BC = CD = DA
కర్ణం	ఒక బహుభుజిలో పక్కపక్కన లేని రెండు శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండం. దీనిని ఉపయోగించి ఆకారాలను త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు.	ఉదా: ABCD చతుర్భుజంలో BD కర్ణం రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

విద్యార్థుల సంసిద్ధత - చదవడం మరియు సాధన

సూచనలు: ముఖ్యమైన పదాలను జాగ్రత్తగా చదవండి. ఆ తర్వాత అన్ని ప్రశ్నలకు మీరే సొంతంగా సమాధానాలు ఇవ్వండి. మీ అవగాహనను మరిన్ని ఉదాహరణల ద్వారా సరిచూసుకోండి.

A. ఖాళీలను పూరించండి.

1. త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × _____ × ఎత్తు.
2. 9 సెం.మీ ఆధారం మరియు 4 సెం.మీ ఎత్తు కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = _____ సెం.మీ^{2}
3. 10 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ కర్ణాలు కలిగిన సమచతుర్భుజం (రాంబస్) వైశాల్యం = _____ సెం.మీ^{2}

B. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు - సరియైన సమాధానమునకు టిక్ (✓) చేయండి.

1. ఒక ట్రాపీజియం సమాంతర భుజాలు 8 సెం.మీ మరియు 12 సెం.మీ, ఎత్తు 5 సెం.మీ. దాని వైశాల్యం:
   (A) 80 cm^2 (B) 50 cm^2 (C) 100 cm^2 (D) 60 cm^2
2. ఒక ఆకారం యొక్క చుట్టు కొలత మరియు వైశాల్యం:
   (A) ఎల్లప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయి.
   (B) రెండూ సెం.మీ^{2} లో కొలవబడతాయి.
   (C) స్వతంత్రమైనవి – ఒకే చుట్టుకొలత ఉన్నప్పటికీ వేర్వేరు వైశాల్యాలు ఉండవచ్చు.
   (D) పరస్పరం మార్చుకోదగిన కొలతలు.

C. జతపరచండి.

	వరుస A		వరుస B
1.	దీర్ఘచతురస్రం	( )	P. $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
2.	త్రిభుజం	( )	Q. $l \times b$
3.	రాంబస్	( )	R. $b \times h$
4.	సమాంతరచతుర్భుజం	( )	S. $\frac{1}{2} \times b \times h$

AP SCERT

1 A SQUARE AND A CUBE

Learning outcomes

Learners will be able to

- Identify, explores in patterns numbers and describes rules (CG-1)
- Create puzzles and develop own solution (CG-7)
- Appreciate contributions of Indian mathematicians in mathematics (CG-9)
- Analyze possible solutions to problems with effective combination of steps (CG-8)

Y9A7A1

1.0 Introduction

Queen Ratnamanjari had a will written that described her fortune of ratnas (precious stones) and also included a puzzle. Her son Kumara Varma and their 99 relatives were invited to the reading of her will. She wanted to leave all of her ratnas to her son, but she knew that if she did so, all their relatives would pester Kumara Varma forever. She hoped that she had taught him everything he needed to know about solving puzzles. She left the following note in her will-

"I have created a puzzle. If all 100 of you answer it at the same time, you will share the ratnas equally. However, if you are the first one to solve the problem, you will get to keep the entire inheritance to yourself. Good luck." The minister took Kumara Varma and his 99 relatives to a secret room in the mansion containing 100 lockers.

The minister explained- "Each person is assigned a number from 1 to 100.

- Person 1 opens every locker.
- Person 2 toggles every 2nd locker (i.e., closes it if it is open, opens it if it is closed).
- Person 3 toggles every 3rd locker (3rd, 6th, 9th, ... and so on).
- Person 4 toggles every 4th locker (4th, 8th, 12th, ... and so on).

AP SCERT

1 వర్గము మరియు ఘనము

అభ్యసన ఫలితాలు

I3Y3A5

అభ్యాసకులు

- ☞ సంఖ్యలో నమూనాలను గుర్తించగలరు,అన్వేషించగలరు మరియు నియమాలను వివరించగలరు. (CG-1)
- ☞ పజిల్స్ సృష్టించగలరు మరియు సొంత పరిష్కారాన్ని అభివృద్ధి చేయగలరు. (CG-7)
- ☞ గణితంలో భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుల సహకారాన్ని అభినందిస్తారు. (CG-9)
- ☞ ప్రభావవంతమైన దశల కలయికతో సమస్యలకు సాధ్యమైన పరిష్కారాలను విశ్లేషించగలరు. (CG-8)

1.0 పరిచయం

రాణి రత్నమంజరి తన రత్నాల సంపదను వివరించే వీలునామాను వ్రాసుకుంది మరియు దానిలో ఒక పజిల్ కూడా ఉంది. ఆమె కుమారుడు కుమార వర్మ మరియు వారి 99 మంది బంధువులను ఆమె వీలునామా చదవడానికి ఆహ్వానించారు. ఆమె తన రత్నాలన్నింటినీ తన కొడుకుకే వదిలివేయాలని కోరుకుంది, కానీ అలా చేస్తే, వారి బంధువులందరూ కుమార వర్మను ఎప్పటికీ పీడిస్తారని ఆమెకు తెలుసు. పజిల్స్ పరిష్కరించడం గురించి అతనికి అవసరమైన ప్రతిదాన్ని ఆమె నేర్పించిందని ఆమె ఆశించింది. ఆమె తన వీలునామాలో ఈ క్రింది గమనికను వదిలి వేసింది –

"నేను ఒక పజిల్ సృష్టించాను. మీ 100 మంది కూడా దానికి ఒకేసారి సమాధానం చెబితే, మీరు రత్నాలను సమానంగా పంచుకుంటారు. అయితే, సమస్యను పరిష్కరించే మొదటి వ్యక్తి మీరే అయితే, వారసత్వం మొత్తాన్ని మీ వద్దే ఉంచుకునే అవకాశం మీకు లభిస్తుంది. మీకు శుభాకాంక్షలు."

మంత్రి, కుమార వర్మ మరియు అతని 99 మంది బంధువులను భవనంలోని 100 లాకర్లు ఉన్న ఒక రహస్య గదికి తీసుకెళ్లాడు. మంత్రి ఇలా వివరించాడు – "ప్రతి వ్యక్తికి 1 నుండి 100 వరకు ఒక సంఖ్య కేటాయించబడింది.

- ❖ 1 వ వ్యక్తి ప్రతి లాకర్‌ను తెరుస్తాడు.
- ❖ 2 వ వ్యక్తి ప్రతి 2వ లాకర్‌ను టోగుల్ చేస్తాడు (అంటే, అది తెరిచి ఉంటే దాన్ని మూసివేస్తాడు, అది మూసివేయబడితే దాన్ని తెరుస్తాడు).
- ❖ 3 వ వ్యక్తి ప్రతి 3వ లాకర్‌ను టోగుల్ చేస్తాడు (3వ, 6వ, 9వ, ... మరియు మొదలైనవి).
- ❖ 4 వ వ్యక్తి ప్రతి 4వ లాకర్‌ను టోగుల్ చేస్తాడు (4వ, 8వ, 12వ, ... మరియు మొదలైనవి).

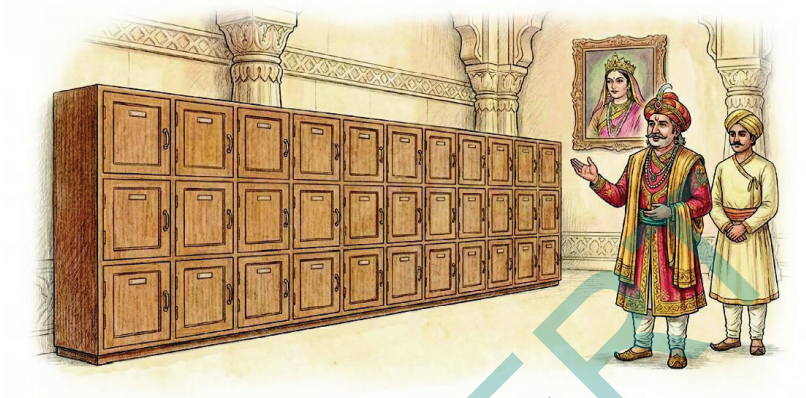
AP SCERT

This continues until all 100 get their turn.

In the end, only some lockers remain open. The open lockers reveal the code to the fortune in the safe."

? Before the process begins, Kumara Varma realizes that he already knows which lockers will be open at the end. How did he figure out the answer?

Hint: Find out how many times each locker is toggled.



If a locker is toggled an odd number of times, it will be open. Otherwise, it will be closed. The number of times a locker is toggled is the same as the number of factors of the locker number. For example, for locker #6, Person 1 opens it, Person 2 closes it, Person 3 opens it and Person 6 closes it. The numbers 1, 2, 3, and 6 are factors of 6. If the number of factors is even, the locker will be toggled by an even number of people and it will eventually be closed.

6 :
1 × 6
2 × 3
Factors are
1, 2, 3 and 6.

Note that each factor of a number has a 'partner factor' so that the product of the pair of factors yields the given number. Here, 1 and 6 form a pair of partner factors of 6, and 2 and 3 form another pair.

? Does every number have an even number of factors?

1:
1 × 1
The only factor is 1.

4:
1 × 4
2 × 2
Factors are
1, 2 and 4.

9 :
1 × 9
3 × 3
Factors are
1, 3 and 9.

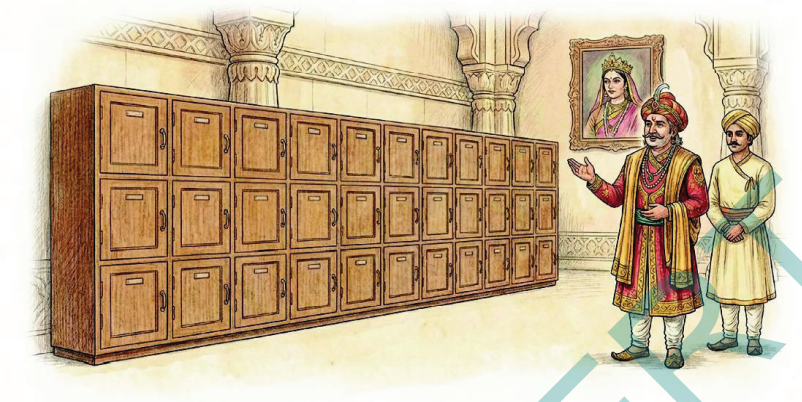
AP SCERT

మొత్తం 100 మంది తమ వంతు వచ్చే వరకు ఇది కొనసాగిస్తారు.

చివరికి, కొన్ని లాకర్లు మాత్రమే తెరిచి ఉంటాయి. తెరిచిన లాకర్లు సేఫ్‌లోని సంపదకు సంబంధించిన కోడ్‌ను వెల్లడిస్తాయి."

? ప్రక్రియ ప్రారంభమయ్యే ముందే, చివరిలో ఏ లాకర్లు తెరిచి ఉంటాయో తనకు ఇప్పటికే తెలుసని కుమార వర్మ గ్రహిస్తాడు. అతను సమాధానాన్ని ఎలా కనుగొన్నాడు?

సూచన: ప్రతి లాకర్ ఎన్నిసార్లు టోగుల్ చేయబడిందో తెలుసుకోండి.



ఒక లాకర్‌ను బేసి సంఖ్యలో టోగుల్ చేస్తే, అది తెరిచి ఉంటుంది. లేకపోతే, అది మూసివేయబడుతుంది. లాకర్‌ను ఎన్నిసార్లు టోగుల్ చేస్తారనేది లాకర్ నంబర్ యొక్క కారణాంకాల సంఖ్యకు సమానం. ఉదాహరణకు, లాకర్ #6 కోసం, 1వ వ్యక్తి దానిని తెరుస్తాడు, 2వ వ్యక్తి దానిని మూసివేస్తాడు, 3వ వ్యక్తి దానిని తెరుస్తాడు మరియు 6వ వ్యక్తి దానిని మూసివేస్తాడు. 1, 2, 3 మరియు 6 సంఖ్యలు 6 యొక్క కారణాంకాలు. కారణాంకాల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయితే, లాకర్‌ను సరిసంఖ్యలో వ్యక్తులు టోగుల్ చేస్తారు మరియు చివరికి అది మూసివేయబడుతుంది.

6 :
1×6
2×3
కారణాంకాలు
1, 2, 3 మరియు 6.

ఒక సంఖ్యలోని ప్రతి కారణాంకానికి – భాగస్వామి కారకం' ఉంటుందని గమనించండి, తద్వారా ఆ కారణాంకాల జత యొక్క లబ్ధం ఇచ్చిన సంఖ్యను ఇస్తుంది. ఇక్కడ, 1 మరియు 6 అనేవి 6 యొక్క భాగస్వామి కారణాంకాల జతను ఏర్పరుస్తాయి మరియు 2 మరియు 3 మరొక జతను ఏర్పరుస్తాయి.

? ప్రతి సంఖ్యకు సరిసంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉంటాయా?

1:
1×1
ఒకే ఒక కారణాంకం
1.

4:
1×4
2×2
కారణాంకాలు 1,
2 మరియు 4.

9 :
1×9
3×3
కారణాంకాలు 1,
3 మరియు 9.

AP SCERT

We see in some cases, like 2 × 2, that the numbers in the pair are the same.

? Can you use this insight to find more numbers with an odd number of factors?

For instance, 36 has a factor pair 6 × 6 where both numbers are 6. Does this number have an odd number of factors? If every factor of 36 other than 6 has a different factor as its partner, then we can be sure that 36 has an odd number of factors. Check if this is true.

Hence all the following numbers have an odd number of factors -

1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, ...

A number that can be expressed as the product of a number with itself is called a ***square number****, or simply a* ***square****.* The only numbers that have an odd number of factors are the squares, because they each have one factor which, when multiplied by itself, equals the number. Therefore, every locker whose number is a square will remain open.

? Write the locker numbers that remain open.

KumaraVarma immediately collects word clues from these 10 lockers and reads, "The passcode consists of the first five locker numbers that were touched exactly twice."

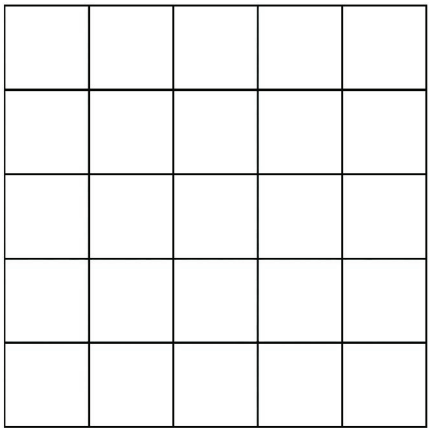
? Which are these five lockers?

The lockers that are toggled twice are the prime numbers, since each prime number has 1 and the number itself as factors. So, the code is 2-3-5-7-11.

1.1 Square Numbers

Why are the numbers, 1, 4, 9, 16, ..., called squares? We know that the number of unit squares in a square (the area of a square) is the product of its sides. The table below gives the areas of squares with different sides.

Sidelength (in units)	Area (in sq units)
1	1 × 1 = 1 sq. unit
2	2 × 2 = 4 sq. units
3	3 × 3 = 9 sq. units
4	4 × 4 = 16 sq. units
5	5 × 5 = 25 sq. units
10	10 × 10 = 100 sq. units



AP SCERT

2×2 వంటి కొన్ని సందర్భాలలో, జతలోని సంఖ్యలు ఒకేలా ఉండటం మనం చూస్తాము.

? బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉన్న మరిన్ని సంఖ్యలను కనుగొనడానికి మీరు ఈ అంతర్దృష్టిని ఉపయోగించగలరా?

ఉదాహరణకు, 36కు 6×6 అనే ఒక కారణాంకాల జత ఉంది, ఇక్కడ రెండు సంఖ్యలూ 6. ఈ సంఖ్యకు బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉన్నాయా? 6 కాకుండా 36 యొక్క ప్రతి కారణాంకానికి దాని భాగస్వామిగా వేరే కారణాంకం ఉంటే, అప్పుడు 36కు బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉన్నాయని మనం ఖచ్చితంగా చెప్పగలం. ఇది నిజమో కాదో తనిఖీ చేయండి.

అందువల్ల, కింది సంఖ్యలన్నింటికీ బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉన్నాయి.

$$1 \times 1,\ 2 \times 2,\ 3 \times 3,\ 4 \times 4,\ \ldots$$

ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించడం ద్వారా లభించే సంఖ్యను **వర్గ సంఖ్య** అని లేదా కేవలం **వర్గం** అని అంటారు. బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉండే సంఖ్యలు మాత్రమే వర్గ సంఖ్యలు అవుతాయి. ఎందుకంటే వాటిలో ఒక కారణాంకం తనతో తాను గుణించినప్పుడు ఆ సంఖ్యకు సమానం అవుతుంది. అందువల్ల, ఏ లాకర్ సంఖ్య అయితే వర్గసంఖ్యగా ఉంటుందో, ఆ లాకర్లన్నీ తెరిచే ఉంటాయి.

? తెరిచి ఉన్న లాకర్ నంబర్లను రాయండి.

కుమారవర్మ వెంటనే ఈ 10 లాకర్ల నుండి పద ఆధారాలను సేకరించి, "పాస్‌కోడ్ అనేది సరిగ్గా రెండుసార్లు తాకబడిన మొదటి ఐదు లాకర్ల సంఖ్యలను కలిగి ఉంటుంది" అని చదివాడు.

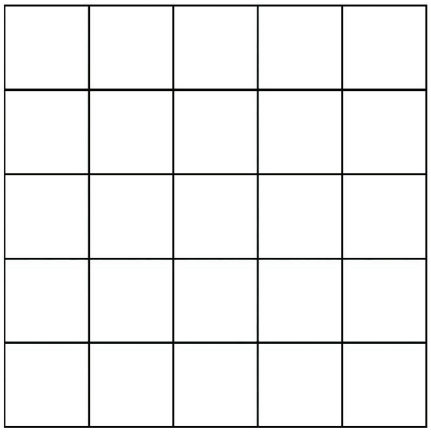
? ఆ ఐదు లాకర్లు ఏవి?

రెండుసార్లు తాకబడిన లాకర్లు ప్రధాన సంఖ్యలు, ఎందుకంటే ప్రతి ప్రధాన సంఖ్యకు 1 మరియు ఆ సంఖ్యే కారణాంకాలుగా ఉంటాయి. కాబట్టి, కోడ్ 2-3-5-7-11.

1.1 వర్గ సంఖ్యలు

1, 4, 9, 16, ... వంటి సంఖ్యలను వర్గాలు అని ఎందుకు అంటారు? ఒక చతురస్రంలోని యూనిట్ చతురస్రాల సంఖ్య (చతురస్ర వైశాల్యం) దాని భుజాల లబ్ధానికి సమానమని మనకు తెలుసు. కింది పట్టిక వేర్వేరు భుజాలు గల చతురస్రాల వైశాల్యాలను చూపుతుంది.

భుజం పొడవు (ప్రమాణాలలో)	వైశాల్యం (చదరపు ప్రమాణాలలో)
1	$1 \times 1 = 1$ చ.ప్ర
2	$2 \times 2 = 4$ చ.ప్ర
3	$3 \times 3 = 9$ చ.ప్ర
4	$4 \times 4 = 16$ చ.ప్ర
5	$5 \times 5 = 25$ చ.ప్ర
10	$10 \times 10 = 100$ చ.ప్ర



AP SCERT

We use the following notation for squares.

$$1 \times 1 = 1^2 = 1$$
$$2 \times 2 = 2^2 = 4$$
$$3 \times 3 = 3^2 = 9,$$
$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$
$$5 \times 5 = 5^2 = 25.$$

In general, for any number n, we write $n \times n = n^2$, which is read as 'n squared'.

Can we have a square of side length $\frac{3}{5}$ or 2.5 units?

Yes, there area in square units are $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{25}\right)$

and $(2.5)^2 = (2.5) \times (2.5) = 6.25$.

The squares of natural numbers are called **perfect squares**. For example, 1, 4, 9, 16, 25, ... are all perfect squares.

1.1.1 Patterns and Properties of Perfect Squares

Find the squares of the first 30 natural numbers and fill in the table below.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 = 9$	$13^2 =$	
$4^2 = 16$	$14^2 =$	
$5^2 = 25$	$15^2 =$	
$6^2 =$	$16^2 =$	
$7^2 =$	$17^2 =$	
$8^2 =$	$18^2 =$	
$9^2 =$	$19^2 =$	
$10^2 =$	$20^2 =$	

? What patterns do you notice? Share your observations and make conjectures.

Study the squares in the table above. What are the digits in the units places of these numbers? All these numbers end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9. None of them end with 2, 3, 7 or 8.

? If a number ends in 0, 1, 4, 5, 6 or 9, is it always a square?

The numbers 16 and 36 are both squares with 6 in the units place.

AP SCERT

వర్గాల కోసం మనం ఈ క్రింది సంకేతాలను ఉపయోగిస్తాము.

$$1 \times 1 = 1^2 = 1$$
$$2 \times 2 = 2^2 = 4$$
$$3 \times 3 = 3^2 = 9,$$
$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$
$$5 \times 5 = 5^2 = 25.$$

సాధారణంగా, ఏదైనా సంఖ్య n కోసం, మనం $n \times n = n^2$ అని రాస్తాము, దీనిని 'n స్క్వేర్డ్' అని చదువుతారు.

మనం $\frac{3}{5}$ లేదా 2.5 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం ఉంటుందా?

అవును, ఆ ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యం చదరపు యూనిట్లలో ఉంటుంది $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{25}\right)$

మరియు $(2.5)^2 = (2.5) \times (2.5) = 6.25.$

సహజ సంఖ్యల వర్గాలను **పరిపూర్ణ వర్గాలు అంటారు.** ఉదాహరణకు, 1, 4, 9, 16, 25, .. ఇవన్నీ పరిపూర్ణ వర్గాలు.

1.1.1 పరిపూర్ణ వర్గాల నమూనాలు మరియు ధర్మాలు

మొదటి 30 సహజ సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొని, క్రింది పట్టికను పూరించండి.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 = 9$	$13^2 =$	
$4^2 = 16$	$14^2 =$	
$5^2 = 25$	$15^2 =$	
$6^2 =$	$16^2 =$	
$7^2 =$	$17^2 =$	
$8^2 =$	$18^2 =$	
$9^2 =$	$19^2 =$	
$10^2 =$	$20^2 =$	

? మీరు ఏ నమూనాలను గమనించారు? మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి మరియు అంచనాలను రూపొందించండి.

పై పట్టికలోని వర్గాలను పరిశీలించండి. ఈ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలు ఏమిటి? ఈ సంఖ్యలన్నీ 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9తో ముగుస్తాయి. వాటిలో ఏవీ 2, 3, 7 లేదా 8తో ముగియవు.

? ఒక సంఖ్య 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9తో ముగిస్తే, అది ఎల్లప్పుడూ వర్గ సంఖ్య అవుతుందా?

16 మరియు 36 అనే సంఖ్యలు రెండూ వర్గ సంఖ్యలే, వాటి ఒకట్ల స్థానంలో 6 ఉంది.

APSCERT

However, 26, whose units digit is also 6, is not a square. Therefore, we cannot determine if a number is a square just by looking at the digit in the units place. ***But, the units digit can tell us when a number is not a square.*** If a number ends with 2, 3, 7, or 8, then we can definitely say that it is not a square.

? Write 5 numbers such that you can determine by looking at their units digit that they are not squares.

The squares, 1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2, and 29^2, all have 1 in their units place. Write the next two squares. Notice that if a number has 1 or 9 in the units place, then its square ends in 1.

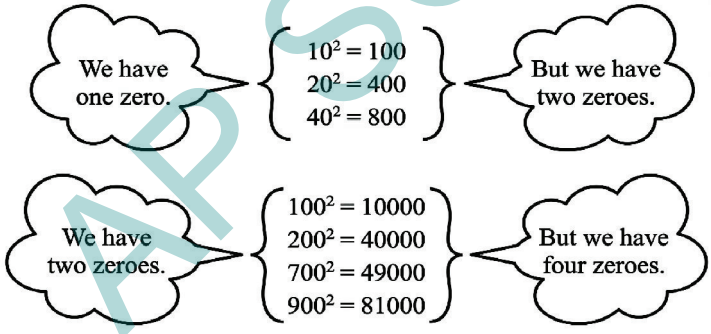
? Let us consider square numbers ending in 6: $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, $196 = 14^2$, $256 = 16^2$, $576 = 24^2$, and $676 = 26^2$.

Which of the following numbers have the digit 6 in the units place?

(i) 38^2 (ii) 34^2 (iii) 46^2 (iv) 56^2 (v) 74^2 (vi) 82^2

? Find more such patterns by observing the numbers and their squares from the table you filled earlier.

Consider the following numbers and their squares.



? If a number contains 3 zeros at the end, how many zeros will its square have at the end?

? What do you notice about the number of zeros at the end of a number and the number of zeros at the end of its square? Will this always happen? Can we say that squares can only have an even number of zeros at the end?

? What can you say about the parity of a number and its square?

1.1.2 Perfect Squares and Odd Numbers

Let us explore the differences between consecutive squares. What do you notice?

APSCERT

అయితే, ఒకట్ల స్థానంలో 6 ఉన్న 26 అనేది వర్గ సంఖ్య కాదు. కాబట్టి, ఒక సంఖ్య వర్గ సంఖ్య అవునో కాదో కేవలం ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను చూసి మనం నిర్ధారించలేము. **కానీ, ఒక సంఖ్య వర్గ సంఖ్య కాదని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె మనకు చెప్పగలదు.** ఒక సంఖ్య 2, 3, 7, లేదా 8తో ముగిస్తే, అది వర్గ సంఖ్య కాదని మనం ఖచ్చితంగా చెప్పవచ్చు.

? వాటి ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను చూడటం ద్వారా అవి వర్గ సంఖ్యలు కావని మీరు నిర్ధారించగలిగే 5 సంఖ్యలను రాయండి.

1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2, మరియు 29^2,అనే వర్గ సంఖ్యలన్నింటి ఒకట్ల స్థానంలో 1 ఉంది. తర్వాతి రెండు వర్గ సంఖ్యలను రాయండి. ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 1 లేదా 9 ఉంటే, దాని వర్గం 1తో ముగుస్తుందని గమనించండి.

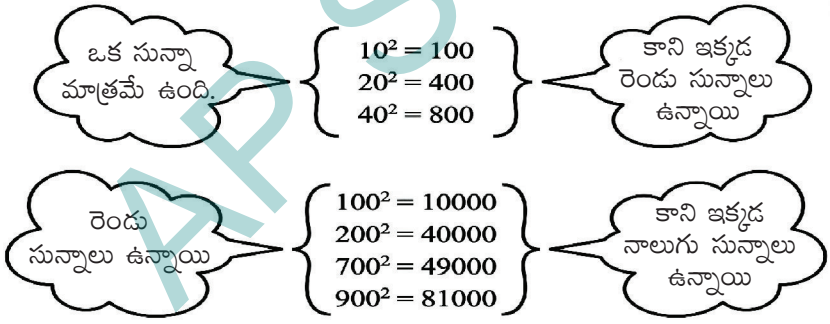
? 6తో ముగిసే వర్గ సంఖ్యలను పరిశీలిద్దాం: 6: $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, $196 = 14^2$, $256 = 16^2$, $576 = 24^2$, మరియు $676 = 26^2$.

కింది సంఖ్యలలో ఏ సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానంలో 6 అనే అంకె ఉంది?

(i) 38^2 (ii) 34^2 (iii) 462 (iv) 56^2 (v) 74^2 (vi) 82^2

? మీరు ఇంతకు ముందు నింపిన పట్టికలోని సంఖ్యలను మరియు వాటి వర్గాలను గమనించడం ద్వారా ఇలాంటి మరిన్ని నమూనాలను కనుగొనండి.

కింది సంఖ్యలను మరియు వాటి వర్గాలను గమనించండి.



? ఒక సంఖ్య చివరలో 3 సున్నాలు ఉంటే, దాని వర్గం చివరలో ఎన్ని సున్నాలు ఉంటాయి?

? ఒక సంఖ్య చివరలో ఉన్న సున్నాల సంఖ్యకు మరియు దాని వర్గం చివరలో ఉన్న సున్నాల సంఖ్యకు మధ్య మీరు ఏమి గమనించారు? ఇది ఎల్లప్పుడూ జరుగుతుందా? వర్గాల చివరలో సరి సంఖ్యలో మాత్రమే సున్నాలు ఉంటాయని మనం చెప్పగలమా?

? ఒక సంఖ్య యొక్క సరి-బేసి స్వభావం గురించి మరియు దాని వర్గం యొక్క సరి-బేసి స్వభావం గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

1.1.2 పరిపూర్ణ వర్గాలు మరియు బేసి సంఖ్యలు

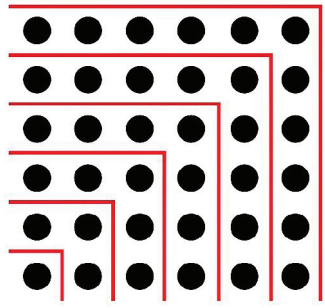
వరుస వర్గాల మధ్య తేడాలను పరిశీలిద్దాం. మీరు ఏమి గమనించారు?

APSCERT

$4 - 1 = 3$ $\quad 9 - 4 = 5$ $\quad 16 - 9 = 7$ $\quad 25 - 16 = 9$

See if this pattern continues for the next few square numbers.

From this we observe that adding consecutive odd numbers starting from 1 gives consecutive square numbers, as shown below.



$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

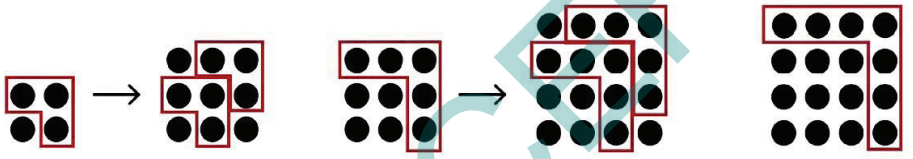
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$

Do you remember this pattern from Grade 6?

The picture below explains why each subsequent inverted L gives the next odd number:



$1 + 3$ $\quad 1 + 3 + (3 + 2)$ $\quad 1 + 3 + 5$ $\quad 1 + 3 + 5 + (5 + 2)$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7$

We see that the sum of the first n odd numbers is n^2. Alternatively, every square is a sum of successive odd numbers starting from 1.

In mathematics, sometimes arguments and reasoning can be presented without any words. Visual proofs can be complete by themselves.

Also, we can find out whether a number is a perfect square by successively subtracting odd numbers. Consider the number 25, successively subtract 1, 3, 5, ... until you get or cross over 0,

$25 - 1 = 24$ $\quad 24 - 3 = 21$ $\quad 21 - 5 = 16$ $\quad 16 - 7 = 9$ $\quad 9 - 9 = 0$

This means $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ and is thus a perfect square. Since we subtracted the first five odd numbers, $25 = 5^2$.

? Using the pattern above, find 36^2, given that $35^2 = 1225$.

From the question we know that 1225 is the sum of the first 35 odd numbers. To find 36^2, we need to add the 36th odd number to 1225.

AP SCERT

$4 - 1 = 3 \quad 9 - 4 = 5 \quad 16 - 9 = 7 \quad 25 - 16 = 9$

ఈ నమూనా తదుపరి కొన్ని వర్గ సంఖ్యలకు కూడా కొనసాగుతుందో లేదో చూడండి.

దీని నుండి మనం గమనించేది ఏమిటంటే, 1 నుండి ప్రారంభమయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యలను కలపడం వల్ల వరుస వర్గ సంఖ్యలు వస్తాయి, అది క్రింద చూపిన విధంగా ఉంది.

$1 = 1$

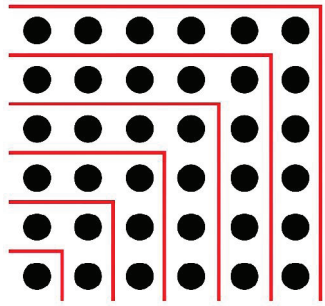
$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

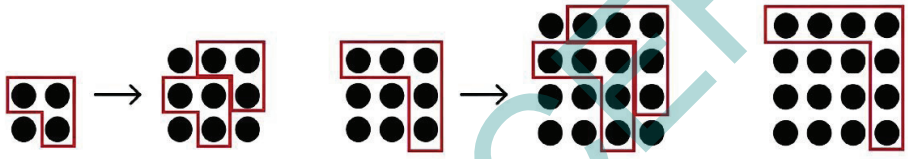
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$



ఆరవ తరగతిలో ఉన్న ఈ నమూనా మీకు గుర్తుందా?

కింద ఉన్న చిత్రం ప్రతి తదుపరి విలోమ 'L' ఆకారం తదుపరి బేసి సంఖ్యను ఎందుకు ఇస్తుందో వివరిస్తుంది:



$1 + 3 \quad 1 + 3 + (3 + 2) \quad 1 + 3 + 5 \quad 1 + 3 + 5 + (5 + 2) \quad 1 + 3 + 5 + 7$

మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తం n^2 అని మనం గమనిస్తాము. మరో మాటలో చెప్పాలంటే, ప్రతి వర్గ సంఖ్య కూడా 1 నుండి ప్రారంభమయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం

గణితశాస్త్రంలో, కొన్నిసార్లు వాదనలను మరియు తర్కాన్ని ఎటువంటి పదాలు లేకుండానే ప్రదర్శించవచ్చు. దృశ్యరూప నిరూపణలు తమంతట తామే సంపూర్ణంగా ఉంటాయి

అలాగే, బేసి సంఖ్యలను వరుసగా తీసివేయడం ద్వారా ఒక సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గమో కాదో మనం కనుగొనవచ్చు. 25 అనే సంఖ్యను తీసుకోండి, 0 వచ్చే వరకు లేదా 0 దాటిపోయే వరకు వరుసగా 1, 3, 5, ...లను తీసివేయండి.

$25 - 1 = 24 \quad 24 - 3 = 21 \quad 21 - 5 = 16 \quad 16 - 7 = 9 \quad 9 - 9 = 0$

దీని అర్థం $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ మరియు అందువల్ల ఇది ఒక పరిపూర్ణ వర్గం. మనం మొదటి ఐదు బేసి సంఖ్యలను తీసివేసాము కాబట్టి, $25 = 5^2$.

? పైన ఉన్న నమూనాను ఉపయోగించి, $35^2 = 1225$ అని ఇచ్చినప్పుడు, 36^2 కనుగొనండి.

ఈ ప్రశ్న నుండి మనకు తెలిసినది ఏమిటంటే, 1225 అనేది మొదటి 35 బేసి సంఖ్యల మొత్తం. 36^2 కనుగొనడానికి, మనం 1225కు 36వ బేసి సంఖ్యను కలపాలి.

AP SCERT

? How do we find the 36th odd number?

The 1st odd number is 1, 2nd odd number is 3, 3rd number is 5, ..., 6th odd number is 11 and so on.

? What is the nth odd number?

The nth odd number is 2n–1. Therefore, the 36th odd number is 71.

By adding 71 to 1225, we get 1296, which is 36^2.

Consider a number such as 38 that is not a square and subtract consecutive odd numbers starting from 1.

38 – 1 = 37 37 – 3 = 34 34 – 5 = 29 29 – 7 = 22 22 – 9 = 13

13 – 11 = 2 2 – 13 = – 11

This shows that 38 cannot be expressed as a sum of consecutive odd numbers starting with 1.

Thus, we can say that a natural number is not a perfect square if it cannot be expressed as a sum of successive odd natural numbers starting from 1. We can use this result to find out whether a natural number is a perfect square or not.

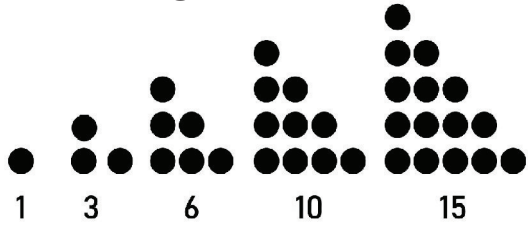
? Find how many numbers lie between two consecutive perfect squares. Do you notice a pattern?

? How many square numbers are there between 1 and 100? How many are between 101 and 200? Using the table of squares you filled earlier, enter the values below, tabulating the number of squares in each block of 100. What is the largest square less than 1000?

1 – 100	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500
_____	_____	_____	_____	_____
501 – 600	601 – 700	701 – 800	801 – 900	901 – 1000
_____	_____	_____	_____	_____

1.1.3 Perfect Squares and Triangular Numbers

Do you remember triangular numbers?



AP SCERT

? మనం 36వ బేసి సంఖ్యను ఎలా కనుగొంటాము?

1వ బేసి సంఖ్య 1, 2వ బేసి సంఖ్య 3, 3వ సంఖ్య 5, ..., 6వ బేసి సంఖ్య 11 మరియు ఇదే విధంగా.

? nవ బేసి సంఖ్య ఏమిటి?

nవ బేసి సంఖ్య 2n–1. కాబట్టి, 36వ బేసి సంఖ్య 71.

1225కు 71ని కలపడం ద్వారా, మనకు 1296 వస్తుంది, ఇది 36^2.

38 వంటి వర్గం కాని సంఖ్యను తీసుకోండి మరియు 1 నుండి ప్రారంభించి వరుస బేసి సంఖ్యలను తీసివేయండి.

38 – 1 = 37 37 – 3 = 34 34 – 5 = 29 29 – 7 = 22 22 – 9 = 13

13 – 11 = 2 2 – 13 = – 11

దీని ప్రకారం 38 ను1నుంచి వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించలేము.

కాబట్టి, ఒక సహజ సంఖ్యను 1 నుండి ప్రారంభమయ్యే వరుస బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచలేకపోతే, అది ఒక పరిపూర్ణ వర్గం కాదని మనం చెప్పవచ్చు. ఒక సహజ సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గమా కాదా అని కనుగొనడానికి మనం ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

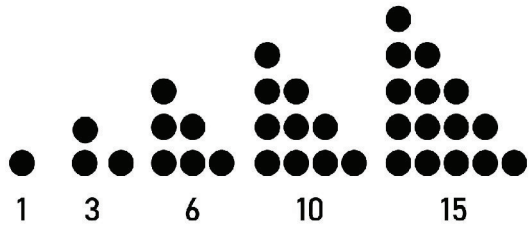
? రెండు వరుస పరిపూర్ణ వర్గాల మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయో కనుగొనండి. మీరు ఏదైనా నమూనాను గమనించారా?

? 1 మరియు 100 మధ్య ఎన్ని వర్గ సంఖ్యలు ఉన్నాయి? 101 మరియు 200 మధ్య ఎన్ని ఉన్నాయి? మీరు ఇంతకు ముందు నింపిన వర్గాల పట్టికను ఉపయోగించి, ప్రతి 100 సంఖ్యల బ్లాక్‌లో ఉన్న వర్గాల సంఖ్యను పట్టిక రూపంలో క్రింద నమోదు చేయండి. 1000 కంటే తక్కువగా ఉన్న అతిపెద్ద వర్గం ఏది?

1 – 100	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500
_____	_____	_____	_____	_____
501 – 600	601 – 700	701 – 800	801 – 900	901 – 1000
_____	_____	_____	_____	_____

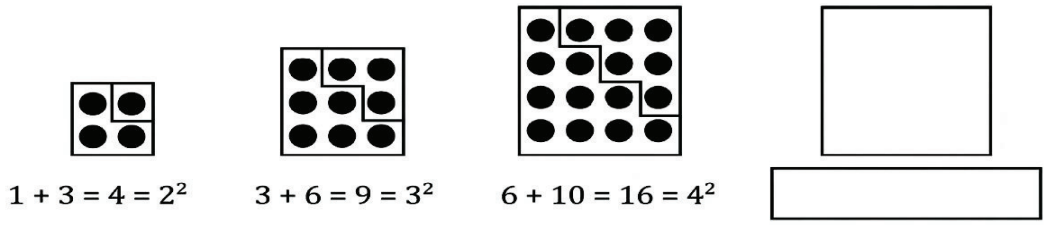
1.1.3 పరిపూర్ణ వర్గాలు మరియు త్రిభుజ సంఖ్యలు

త్రిభుజ సంఖ్యలు మీకు గుర్తున్నాయా?



AP SCERT

? Can you see any relation between triangular numbers and square numbers? Extend the pattern shown and draw the next term.



1.1.4 Square Roots

? The area of a square is 49 sq. cm. What is the length of its side?

We know that $7 \times 7 = 49$, or $7^2 = 49$.

So, the length of the side of a square with an area of 49 sq. cm is 7 cm. We call 7 the **square root of** 49.

In general, if $y = x^2$ then x is the **square root** of y.

? What is the square root of 64?

We know that 8×8 is 64. So, 8 is the square root of 64. What about -8×-8 ? That is 64 too!

$$8^2 = 64, \text{ and } (-8)^2 = 64.$$

So, the square roots of 64 are + 8 and –8.

Every perfect square has two integer square roots. One is positive and the other is negative. The square root of a number is denoted by $\sqrt{\ }$

Thus, $\sqrt{64} = \pm 8$ and $\sqrt{100} = \pm 10$.

Note that $\sqrt{8^2} = \pm 8$ and $\sqrt{10^2} = \pm 10$. In general, $\sqrt{n^2} = \pm n$.

In this chapter, we shall only consider the positive square root.

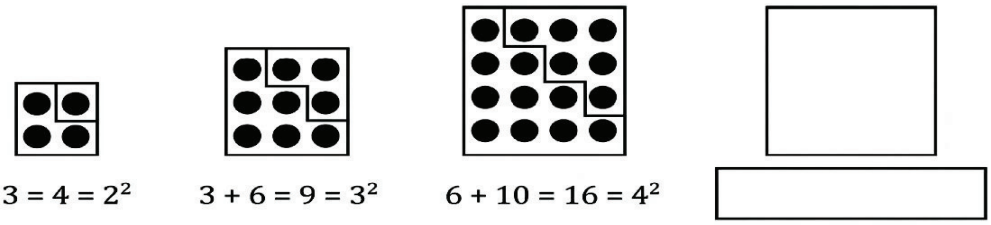
? Given a number, such as 576 or 327, how do we find out if it is a perfect square? If it is a perfect square, how can we find its square root?

We know that perfect squares end in 1, 4, 9, 6, 5, or an even number of zeros. But, it is not certain that a number that satisfies this condition is a square.

We can clearly say that 327 is not a perfect square. However, we cannot be sure that 576 is a perfect square.

AP SCERT

? త్రిభుజ సంఖ్యలకు మరియు చతురస్ర సంఖ్యలకు మధ్య మీరు ఏదైనా సంబంధాన్ని గమనించారా? క్రింద చూపిన నమూనాను పొడిగించి, తదుపరి చిత్రాన్ని గీయండి.



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $\quad$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

1.1.4 వర్గమూలాలు

? ఒక చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం 49 చదరపు సెం.మీ. అయితే, దాని భుజం పొడవు ఎంత?

$7 \times 7 = 49$, లేదా $7^2 = 49$ అని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి, 49 చదరపు సెం.మీ వైశాల్యం ఉన్న ఒక చతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు 7 సెం.మీ. మనం 7ను 49 యొక్క **వర్గమూలం** అని అంటాము.

సాధారణంగా, $y = x^2$ అయితే, x అనేది y యొక్క **వర్గమూలం.**

? 64 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?

8×8 అనేది 64. కాబట్టి, 8 అనేది 64 యొక్క వర్గమూలం అని మనకు తెలుసు, మరి -8×-8 సంగతేంటి? అది కూడా 64

$8^2 = 64$, మరియు $(-8)^2 = 64$.

కాబట్టి, 64 యొక్క వర్గమూలాలు + 8 మరియు –8.

ప్రతి ఖచ్చిత వర్గానికి రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన వర్గమూలాలు ఉంటాయి. ఒకటి ధనాత్మకం మరియు మరొకటి రుణాత్మకం. ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ గుర్తుతో సూచిస్తారు.

కాబట్టి, $\sqrt{64} = \pm 8$ మరియు $\sqrt{100} = \pm 10$

$\sqrt{8^2} = \pm 8$ మరియు $\sqrt{10^2} = \pm 10$ మరియు సాధారణంగా, $\sqrt{n^2} = \pm n$ అని గమనించండి,

ఈ అధ్యాయంలో, మనం కేవలం ధనాత్మక వర్గమూలాన్ని మాత్రమే పరిగణిస్తాము.?

? 576 లేదా 327 వంటి ఒక సంఖ్యను ఇచ్చినప్పుడు, అది ఒక కచ్చితమైన వర్గమో కాదో మనం ఎలా కనుగొనగలం? ఒకవేళ అది కచ్చితమైన వర్గమైతే, దాని వర్గమూలాన్ని మనం ఎలా కనుగొనగలం

పరిపూర్ణ వర్గాల చివర 1, 4, 9, 6, 5, లేదా సరి సంఖ్యలో సున్నాలు ఉంటాయని మనకు తెలుసు. కానీ, ఈ షరతును సంతృప్తిపరిచే ప్రతి సంఖ్య వర్గం అవుతుందని ఖచ్చితంగా చెప్పలేము.

327 ఒక పరిపూర్ణ వర్గం కాదని మనం స్పష్టంగా చెప్పగలం. అయితే, 576 ఒక పరిపూర్ణ వర్గము కాదని అని మనం ఖచ్చితంగా చెప్పలేము.

AP SCERT

1. We can list all the square numbers in sequence and find out whether 576 occurs among them. We know that $20^2 = 400$, we can find squares of 21, 22, 23, ... and so on until we get 576 or a number greater than 576.

   $20^2 = 400$ $21^2 = 441$ $22^2 = 484$ $23^2 = 529$ $24^2 = 576$

However, this process becomes inefficient for larger numbers.

2. Recall that every square can be expressed as a sum of consecutive odd numbers starting from 1.

   Consider $\sqrt{81}$.

   $81 - 1 = 80$ $80 - 3 = 77$ $77 - 5 = 72$ $72 - 7 = 65$ $65 - 9 = 56$
   $56 - 11 = 45$ $45 - 13 = 32$ $32 - 15 = 17$ $17 - 17 = 0$

From 81, we successively subtracted consecutive odd numbers starting from 1 until we obtained 0 at the 9th step. Therefore $\sqrt{81} = 9$.

Can we find the square root of 729 using this method? Yes, but it will be time - consuming

3. We know that a perfect square is obtained by multiplying an integer by itself. Will looking at a number's prime factorisation help in determining whether it is a perfect square?

Yes, if we can divide the prime factors of a number into two equal groups, then the product of the prime factors in either group combine to form the square root.

? Is 324 a perfect square?

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

These can be grouped as

$$324 = (2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3).$$
$$= (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2.$$

We can also write the prime factors in pairs. That is,

$$324 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3),$$

which shows that 324 is a perfect square. Thus,

$$324 = (2\times3\times3)^2 = 18^2.$$

Therefore, $\sqrt{324} = 18$.

? Is 156 a perfect square?

The prime factorisation of 156 is $2 \times 2 \times 3 \times 13$.

AP SCERT

1. మనం అన్ని వర్గ సంఖ్యలను వరుసగా జాబితా చేసి, వాటిలో 576 ఉందో లేదో కనుగొనవచ్చు. మనకు $20^2 = 400$ అని తెలుసు, మనం 576 వచ్చే వరకు లేదా 576 కంటే పెద్ద సంఖ్య వచ్చే వరకు 21, 22, 23, ... మొదలైన సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనవచ్చు.

$20^2 = 400 \quad 21^2 = 441 \quad 22^2 = 484 \quad 23^2 = 529 \quad 24^2 = 576$

అయితే, పెద్ద సంఖ్యల విషయంలో ఈ ప్రక్రియ అసమర్థంగా మారుతుంది.

2. ప్రతి వర్గమును 1 నుండి ప్రారంభమయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచవచ్చని గుర్తుంచుకోండి. $\sqrt{81}$ ని పరిగణించండి.

$81 - 1 = 80 \quad 80 - 3 = 77 \quad 77 - 5 = 72 \quad 72 - 7 = 65 \quad 65 - 9 = 56$

$56 - 11 = 45 \quad 45 - 13 = 32 \quad 32 - 15 = 17 \quad 17 - 17 = 0$

81 నుండి, మనం 1 నుండి ప్రారంభించి వరుస బేసి సంఖ్యలను తీసివేయగా, 9వ దశలో మనకు 0 వచ్చింది. కాబట్టి $\sqrt{81} = 9$.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి మనం 729 యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనగలమా? అవును, కానీ అది చాలా సమయం తీసుకుంటుంది.

3. ఒక పూర్ణ సంఖ్యను దానితోనే గుణించడం ద్వారా ఒక పరిపూర్ణ వర్గం లభిస్తుందని మనకు తెలుసు. ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజనను చేయడం అది పరిపూర్ణ వర్గమో కాదో నిర్ణయించడంలో సహాయపడుతుందా? అవును, మనం ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను రెండు సమాన సమూహాలుగా విభజించగలిగితే, ఆ రెండు సమూహాలలో దేనిలోని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధమైనా వర్గమూలాన్ని ఏర్పరుస్తుంది.

? 324 ఒక పరిపూర్ణ వర్గమా?

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

వీటిని ఈ క్రింది విధంగా వర్గీకరించవచ్చు :

$$324 = (2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3).$$
$$= (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2.$$

మనం ప్రధాన కారణాంకాలను జతలుగా కూడా వ్రాయవచ్చు. అంటే,

$$324 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3),$$

ఇది 324 ఒక పరిపూర్ణ వర్గం అని చూపిస్తుంది. అందువలన,

$$324 = (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2.$$

కావున, $\sqrt{324} = 18$

? 156 ఒక పరిపూర్ణ వర్గమా?

156 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2 \times 2 \times 3 \times 13$.

AP SCERT

We cannot pair up these factors.

Therefore, 156 is not a perfect square.

1.1.5 Estimating :

? Find whether 1156 and 2800 are perfect squares using prime factorisation.

We can estimate the square root of larger perfect squares by looking at the closest perfect squares we are familiar with and then narrowing down the interval to search.

For example, to find $\sqrt{1936}$, we can reason as follows:

(i) 1936 is between 1600 (40^2) and 2500 (50^2), so $40 < \sqrt{1936} < 50$.

(ii) The last digit of 1936 is 6. So, the last digit of the square root must either be 4 or 6. It can be 44 or 46.

(iii) If we calculate 45^2, we can compare it with 1936 to halve the interval to search from 40-50 to either 40-45 or 45-50. We can write 45^2 as $(40 + 5)(40 + 5) = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$.

(iv) $2025 > 1936$. So, $40 < \sqrt{1936} < 45$

(v) From the observation in point (ii) we can guess and then verify that $\sqrt{1936}$ is 44.

Consider the following situations -

Mayur and Rushitha play a game. One says a number and the other replies with its square root. Mayur starts. He says 25, and Rushitha quickly responds with 5. Then Rushitha says 81, and Mayur answers 9. The game goes on till Mayur says 250. Rushitha is not able to answer because 250 is not a perfect square. Mayur asks Rushitha if she can at least provide a number that is close to the square root of 250.

For this, Rushitha needs to estimate the square root of 250.

We know that $100 < 250 < 400$ and $\sqrt{100} = 10$ and $\sqrt{400} = 20$.

So, $10 < \sqrt{250} < 20$.

But, we are still not very close to the number whose square is 250.

We know that $15^2 = 225$ and $16^2 = 256$.

Therefore, $15 < \sqrt{250} < 16$. Since 256 is much closer to 250 than 225, $\sqrt{250}$ is approximately 16. We also know it is less than 16.

Here is another problem that requires estimating square roots.

AP SCERT

మనం ఈ కారణాంకాలను జతలుగా రాయలేము.

అందువల్ల, 156 ఒక పరిపూర్ణ వర్గం కాదు.

1.1.5 అంచనా వేయడం :

? ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిని ఉపయోగించి 1156 మరియు 2800 సంఖ్యలు కచ్చిత వర్గాలా కాదా అని కనుగొనండి.

మనకు తెలిసిన సమీప కచ్చిత వర్గాలను చూడటం ద్వారా మరియు ఆ తర్వాత శోధించాల్సిన అంతరాన్ని కుదించడం ద్వారా మనం పెద్ద కచ్చిత వర్గాల వర్గమూలాన్ని అంచనా వేయవచ్చు.

ఉదాహరణకి, $\sqrt{1936}$, విలువని మనం అంచనా వేయుటకు కారణాలను తెలుపవచ్చు.:

(i) 1936 అనునది 1600 (40^2) మరియు 2500 (50^2), మధ్యలో వుంటుంది కావున

$40 < \sqrt{1936} < 50$

(ii) 1936 యొక్క చివరి అంకె 6. కాబట్టి, దాని వర్గమూలం యొక్క చివరి అంకె తప్పనిసరిగా 4 లేదా 6 అయి ఉండాలి. అది 44 లేదా 46 కావచ్చు

(iii) 45^2 విలువని మనం లెక్కిస్తే, 40–50 మధ్య ఉన్న శోధన పరిధిని 40–45 లేదా 45–50గా సగానికి తగ్గించడానికి మనం దీనిని 1936తో పోల్చవచ్చు. 45^2 ని మనము ఇలా రాయవచ్చు:

$(40 + 5)(40 + 5) = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025.$

(iv) $2025 > 1936$. కావున , $40 < \sqrt{1936} < 45$

(v) (ii) అనే అంశంలోని పరిశీలన నుండి మనం ఊహించి, ఆపై దానిని కింది విధంగా ధృవీకరించవచ్చు.

$\sqrt{1936} = 44.$

కింది పరిస్థితులను పరిగణించండి –

మయూర్ మరియు రుషిత ఒక ఆట ఆడుతున్నారు. ఒకరు ఒక సంఖ్యను చెబితే, మరొకరు దాని వర్గమూలాన్ని చెబుతారు. మయూర్ ఆటను ప్రారంభిస్తాడు. అతను 25 అని చెప్పగా, రుషిత వెంటనే...5 అని సమాధానం ఇస్తుంది. తర్వాత రుషిత 81 అంటుంది, దానికి మయూర్ 9 అని సమాధానం ఇస్తాడు. మయూర్ 250 అని చెప్పే వరకు ఆట కొనసాగుతుంది. 250 ఒక కచ్చితమైన వర్గం కాదు కాబట్టి రుషిత సమాధానం చెప్పలేకపోతుంది. 250 యొక్క వర్గమూలానికి దగ్గరగా ఉండే సంఖ్యనైనా చెప్పగలవా అని మయూర్ రుషితను అడుగుతాడు

దీని కోసం, రుషిత 250 యొక్క వర్గమూలాన్ని అంచనా వేయాలి..

$100 < 250 < 400$ అని మనకు తెలుసు మరియు $\sqrt{100} = 10$ మరియు $\sqrt{400} = 20.$

కావున, $10 < \sqrt{250} < 20.$

అయితే, 250 యొక్క వర్గమూలానికి మనం ఇంకా అంత దగ్గరగా లేము.

$15^2 = 225$ మరియు $16^2 = 256$ అని మనకు తెలుసు.

కావున , $15 < \sqrt{250} < 16$

256 అనేది 225 కంటే, 250 కి చాలా దగ్గరగా ఉంటుంది కాబట్టి,

$\sqrt{250}$ విలువ సుమారుగా 16 అవుతుంది. అది 16 కంటే తక్కువ అని కూడా మనకు తెలుసు.

ఇక్కడ వర్గమూలాలను అంచనా వేయవలసిన మరో సమస్యను చూద్దాం.

AP SCERT

Akhil has a square piece of cloth of area 125 cm^2. He wants to know if he can cut out a square handkerchief of side 15 cm. If not, he wants to know the maximum size handkerchief that can be cut out from this piece of cloth with an integer side length.

125 is not a perfect square. The nearest perfect squares are $11^2 = 121$ and $12^2 = 144$. So the largest square handkerchief with integer side length that can be cut out from this piece of cloth has side length 11 cm.

Figure it Out - 1.1

1. Which of the following numbers are not perfect squares?
   (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089
2. Which one among 64^2, 108^2, 292^2, 36^2 has last digit 4?
3. Given $125^2 = 15625$, what is the value of 126^2?
   (i) 15625 + 126 (ii) 15625 + 26^2 (iii) 15625 + 253
   (iv) 15625 + 251 (v) 15625 + 51^2
4. Find the length of the side of a square whose area is 441 m^2.
5. Find the smallest square number that is divisible by each of the following numbers:
   4, 9, and 10.
6. Find the smallest number by which 9408 must be multiplied so that the product is a perfect square. Find the square root of the product.
7. How many numbers lie between the squares of the following numbers?
   (i) 16 and 17 (ii) 99 and 100
8. In the following pattern, fill in the missing numbers:
   $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
   $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
   $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
   $4^2 + 5^2 + 20^2 = (____)^2$
   $9^2 + 10^2 + (____)^2 = (\quad)^2$
9. How many tiny squares are there in the following picture? Write the prime factorisation of the number of tiny squares.

AP SCERT

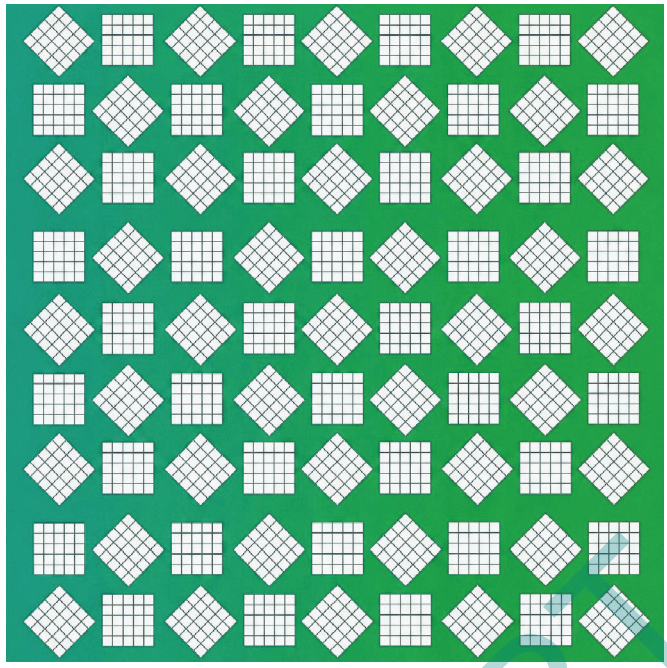
అఖిల్ వద్ద 125 సెం.మీ^{2} వైశాల్యం గల చదరపు వస్త్రం ముక్క ఉంది. అతను 15 సెం.మీ. భుజం ఉన్న చదరపు రుమాలును కత్తిరించగలడా అని తెలుసుకోవాలనుకుంటున్నాడు. లేకపోతే, ఈ వస్త్రం ముక్క నుండి కత్తిరించగల పూర్ణాంకం భుజం పొడవు ఉన్న గరిష్ట పరిమాణం కలిగిన రుమాలును తెలుసుకోవాలనుకుంటున్నాడు.

125 అనేది పరిపూర్ణ వర్గము కాదు. సమీప పరిపూర్ణ వర్గాలు $11^2 = 121$ మరియు $12^2 = 144$. కాబట్టి ఈ వస్త్రం ముక్క నుండి కత్తిరించగల పూర్ణ సంఖ్యగా గల భుజం పొడవు కలిగిన అతిపెద్ద చతురస్రాకారపు రుమాలు భుజం పొడవు 11 సెం.మీ అవుతుంది.

ఆలోచించండి-చేయండి - 1.1

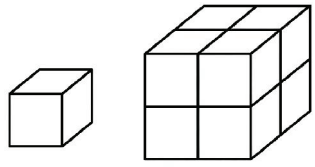
1. కింది సంఖ్యలలో ఏది పరిపూర్ణ వర్గాలు కావు?
   (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089
2. 64^2, 108^2, 292^2, 36^2 లలో ఏది చివరి అంకె 4ను కలిగి ఉంది?
3. $125^2 = 15625$ అయితే, 126^2 విలువ ఎంత?
   (i) 15625 + 126 (ii) 15625 + 26^2 (iii) 15625 + 253
   (iv) 15625 + 251 (v) 15625 + 51^2
4. 441 మీ^{2} వైశాల్యం ఉన్న చతురస్రం యొక్క భుజం పొడవును కనుగొనండి.
5. ఈ కింది సంఖ్యలలో ప్రతి దానితో భాగించబడే అతి చిన్న వర్గ సంఖ్యను కనుగొనండి:
   4, 9 మరియు 10.
6. 9408 పరిపూర్ణ వర్గం అయ్యేలా చేయుటకు గుణించవలసిన అతి చిన్న సంఖ్యను కనుగొనండి. లబ్ధం యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనండి.
7. కింది సంఖ్యల వర్గాల మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయి?
   (i) 16 మరియు 17 (ii) 99 మరియు 100
8. కింది నమూనాలో, లోపించిన సంఖ్యలను పూరించండి:
   $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
   $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
   $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
   $4^2 + 5^2 + 20^2 = (____)^2$
   $9^2 + 10^2 + (____)^2 = (\quad)^2$
9. కింది చిత్రంలో ఎన్ని చిన్న చతురస్రాలు ఉన్నాయి? చిన్న చతురస్రాల సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను వ్రాయండి.

AP SCERT



1.2 Cubic Numbers

You know the word cube from geometry. A cube is a solid figure all of whose all sides meet at right angles and are equal. How many cubes of side 1 cm make a cube of side 2 cm?



? How many cubes of side 1 cm will make a cube of side 3 cm?

Consider the numbers 1, 8, 27, ...

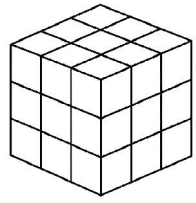
These numbers are called perfect cubes. Can you see why they are named so?

Each of them is obtained by multiplying a number by itself three times. We note that

$1 = 1 \times 1 \times 1$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

$27 = 3 \times 3 \times 3$



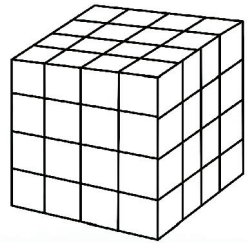
? Is 9 a cube?

We see that $2 \times 2 \times 2 = 8$ and $3 \times 3 \times 3 = 27$. This shows that 9 is not a perfect cube and no other number from 10 to 26.

? Can you estimate the number of unit cubes in a cube with an edge length of 4 units?

It has 64 unit cubes! If you notice carefully, each layer of this cube has 4×4 unit cubes. Each square layer has 16 unit cubes (4×4), and there are 4 such layers, so the total number of unit cubes is

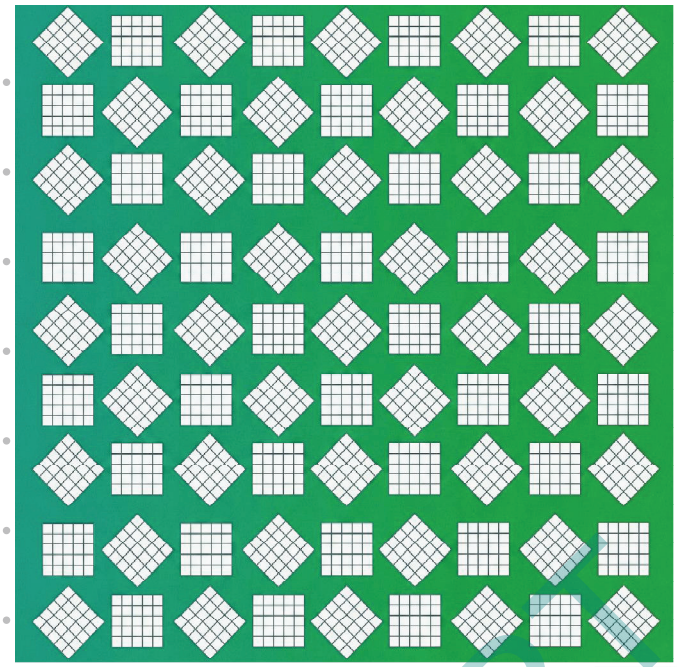
$4 \times 4 \times 4 = 64$.



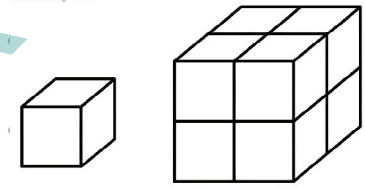
Since $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, 125 is a cube.

In general, for any number n, we write the cube $n \times n \times n$ as n^3.

AP SCERT



1.2 ఘన సంఖ్యలు



జ్యామిత్రిలో మనకు 'ఘనం' అనే పదం గురించి తెలుసు. ఘనం అనేది ఒక త్రిమితీయ ఆకారం, దాని అన్ని భుజాలు లంబ కోణంలో కలుస్తాయి మరియు సమానంగా ఉంటాయి. 1 సెం.మీ. భుజం ఉన్న ఎన్ని ఘనాలు కలిపితే 2 సెం.మీ. భుజం ఉన్న ఒక ఘనం ఏర్పడుతుంది?

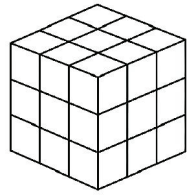
? 1 సెం.మీ. భుజం ఉన్న ఎన్ని ఘనాలు కలిపితే 3 సెం.మీ. భుజం ఉన్న ఒక ఘనం ఏర్పడుతుంది?

1, 8, 27, ... అనే సంఖ్యలను పరిగణించండి.

ఈ సంఖ్యలను ఘన సంఖ్యలు అంటారు. వాటికి ఆ పేరు ఎందుకు వచ్చిందో మీరు ఊహించగలరా?

వాటిలో ప్రతి సంఖ్య ఒక సంఖ్యను దానితోనే మూడుసార్లు గుణించడం ద్వారా లభిస్తుంది. అనగా.

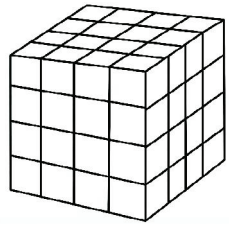
$$1 = 1 \times 1 \times 1$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3$$



? 9 ఒక ఘనసంఖ్యనా?

పరిపూర్ణ $2 \times 2 \times 2 = 8$ మరియు $3 \times 3 \times 3 = 27$ అని మనకు తెలుసు. ఇది 9 ఒక సంపూర్ణ ఘనం కాదని మరియు 10 నుండి 26 వరకు ఉన్న ఏ ఇతర సంఖ్య కూడా పరిపూర్ణ ఘనం కాదని తెలుస్తోంది.

? 4 యూనిట్ల అంచు పొడవు ఉన్న ఒక ఘనంలో ఎన్ని యూనిట్ ఘనాలు ఉంటాయో మీరు అంచనా వేయగలరా?



దానిలో 64 యూనిట్ ఘనాలు ఉన్నాయి! మీరు జాగ్రత్తగా గమనిస్తే, ఈ ఘనం యొక్క ప్రతి తలములో 4×4 యూనిట్ ఘనాలు ఉన్నాయి. ప్రతి చదరపు తలములో 16 యూనిట్ ఘనాలు (4×4) ఉన్నాయి, మరియు అటువంటి తలాలు 4 ఉన్నాయి, కాబట్టి మొత్తం యూనిట్ ఘనాల సంఖ్య $4 \times 4 \times 4 = 64$.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ కాబట్టి, 125 ఒక ఘనసంఖ్య.

సాధారణంగా, ఏదైనా సంఖ్య n కోసం, $n \times n \times n$ ను n^3 అని రాస్తాము.

AP SCERT

Complete the table below.

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$
$2^3 = 8$	$12^3 =$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$
$5^3 = 125$	$15^3 =$
$6^3 =$	$16^3 =$
$7^3 =$	$17^3 = 4913$
$8^3 =$	$18^3 =$
$9^3 =$	$19^3 = 6859$
$10^3 =$	$20^3 =$

What patterns do you notice in the table above?

We know that 0, 1, 4, 5, 6, 9 are the only last digits possible for squares. What are the possible last digits of cubes?

Similar to squares, can you find the number of cubes with 1 digit, 2 digits, and 3 digits? What do you observe?

Can a cube end with exactly two zeroes (00)? Explain.

Just as we can take squares of fractions/decimals : $\left(\frac{4}{6}\right)^2$, $(13.08)^2$, and $(-6)^2$ we also can compute cubes of such numbers : $\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $(13.08)^3$, and $(-6)^3$.

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{64}{216}\right)$$

$(13.08)^3 = 13.08 \times 13.08 \times 13.08 = 2237.810112$

$(-6)^3 = -6 \times -6 \times -6 = -216.$

1.2.1 Taxicab Numbers

Once when Srinivasa Ramanujan was working with G. H. Hardy at the University of Cambridge, Hardy had come to visit Ramanujan at a hospital when he was ill. Hardy had ridden in a taxicab numbered 1729 and he remarked that 1729 was 'rather a dull number,' adding that he hoped that this was not a bad sign. Ramanujan immediately replied, "No, Hardy, it is a very interesting

AP SCERT

? కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి:

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$
$2^3 = 8$	$12^3 =$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$
$5^3 = 125$	$15^3 =$
$6^3 =$	$16^3 =$
$7^3 =$	$17^3 = 4913$
$8^3 =$	$18^3 =$
$9^3 =$	$19^3 = 6859$
$10^3 =$	$20^3 =$

? పై పట్టికలో మీరు ఏ నమూనాలను గమనించారు?

? వర్గాలకు సాధ్యమయ్యే చివరి అంకెలు 0, 1, 4, 5, 6, 9 మాత్రమే అని మనకు తెలుసు. మరి ఘనాలకు సాధ్యమయ్యే చివరి అంకెలు ఏమిటి?

? వర్గాల మాదిరిగానే, 1 అంకె, 2 అంకెలు మరియు 3 అంకెలు ఉన్న ఘనాల సంఖ్యను మీరు కనుగొనగలరా? మీరు ఏమి గమనించారు?

? ఒక సంఖ్య యొక్క ఘనం సరిగ్గా రెండు సున్నాలతో (00) ముగియగలదా? వివరించండి.

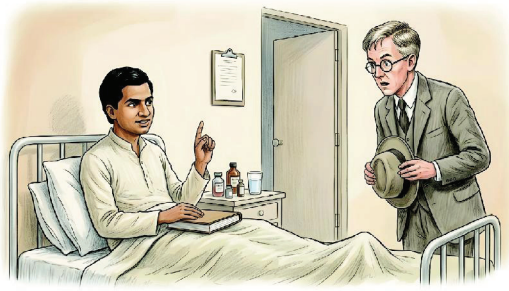
మనం భిన్నాలు/దశాంశాల వర్గాలను ఎలాగైతే కనుగొనగలమో : $\left(\frac{4}{6}\right)^2$, $(13.08)^2$, మరియు $(-6)^2$ అదే విధంగా అటువంటి సంఖ్యల ఘనాలను కూడా లెక్కించగలము : $\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $(13.08)^3$, మరియు $(-6)^3$.

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{64}{216}\right)$$

$(13.08)^3 = 13.08 \times 13.08 \times 13.08 = 2237.810112$

$(-6)^3 = -6 \times -6 \times -6 = -216.$

1.2.1 టాక్సీక్యాబ్ సంఖ్యలు



ఒకసారి శ్రీనివాస రామానుజన్ కేంబ్రిడ్జ్‌విశ్వవిద్యాలయంలో జి. హెచ్. హార్డీతో కలిసి పని చేస్తున్నప్పుడు, రామానుజన్ అనారోగ్యంతో ఉన్నప్పుడు హార్డీ ఆసుపత్రిలో అతన్ని చూడటానికి వచ్చారు. హార్డీ 1729 నంబర్ ఉన్న ఒక టాక్సీలో ప్రయాణించారు మరియు 1729 'చాలా నిస్తేజమైన సంఖ్య' అని వ్యాఖ్యానించారు, ఇది చెడు శకునం కాకూడదని ఆశిస్తున్నానని కూడా అన్నారు. రామానుజన్ వెంటనే, "లేదు, హార్డీ, అది చాలా

AP SCERT

number. It is the smallest number that can be expressed as the sum of two cubes in two different ways".

$$1729 = 1^3 + 12^3$$
$$= 9^3 + 10^3.$$

Because of this story, 1729 has since been known as the **Hardy-Ramanujan** Number. And numbers that can be expressed as the sum of two cubes in two different ways are called **taxicab numbers**.

? The next two taxicab numbers after 1729 are 4104 and 13832. Find the two ways in which each of these can be expressed as the sum of two positive cubes.

How did Ramanujan know this? Well, he loved numbers. All through his life, he tinkered with numbers. During Ramanujan's time in Cambridge, his colleagues often marveled at his ability to see deep patterns in numbers that seemed arbitrary to others. His colleague, John Littlewood, once said, "Every positive integer was one of his [Ramanujan's] personal friends".

1.2.2 Perfect Cubes and Consecutive Odd Numbers

Consecutive odd numbers have a role to play with cubes too. Look at the following pattern:

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3.$$

Later in this series, we get the following set of consecutive numbers:

$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109.$$

? Can you tell what this sum is without doing the calculation?

1.2.3 Cube Roots

We know that $8 = 2^3$.

We call 2 the cube root of 8 and denote this by $2 = \sqrt[3]{8}$.

More generally, if $y = x^3$, then x is the cube root of y. This is denoted by

AP SCERT

ఆసక్తికరమైన సంఖ్య. రెండు వేర్వేరు విధాలుగా రెండు ఘనాల మొత్తంగా వ్యక్తపరచగల అతి చిన్న సంఖ్య అది".

$$1729 = 1^3 + 12^3$$
$$= 9^3 + 10^3.$$

ఈ కథ కారణంగా, అప్పటి నుండి 1729 **హార్డీ-రామానుజన్** సంఖ్యగా ప్రసిద్ధి చెందింది. మరియు రెండు వేర్వేరు విధాలుగా రెండు ఘనాల మొత్తంగా వ్యక్తపరచగల సంఖ్యలను టాక్సీక్యాబ్ సంఖ్యలు అంటారు.

? 1729 తర్వాత వచ్చే తదుపరి రెండు **టాక్సీక్యాబ్** సంఖ్యలు 4104 మరియు 13832. ఈ రెండింటిలో ప్రతిదానిని రెండు ధన ఘనాల మొత్తంగా ఏ రెండు విధాలుగా వ్యక్తపరచవచ్చో కనుగొనండి.

రామానుజన్‌కు ఈ విషయం ఎలా తెలిసింది? నిజానికి, ఆయనకు సంఖ్యలంటే చాలా ఇష్టం. తన జీవితాంతం ఆయన సంఖ్యలతోనే గడిపారు. రామానుజన్ కేంబ్రిడ్జ్‌లో ఉన్న సమయంలో, ఇతరులకు యాదృచ్ఛికంగా కనిపించే సంఖ్యలలోని లోతైన నమూనాలను గుర్తించగల ఆయన సామర్థ్యాన్ని చూసి ఆయన సహోద్యోగులు తరచుగా ఆశ్చర్యపోయేవారు. ఆయన సహోద్యోగి, జాన్ లిటిల్‌వుడ్, ఒకసారి ఇలా అన్నారు, "ప్రతి ధన పూర్ణ సంఖ్య ఆయనకు (రామానుజన్‌కు) వ్యక్తిగత స్నేహితుడితో సమానం".

1.2.2 సంపూర్ణ ఘనాలు మరియు వరుస బేసి సంఖ్యలు

వరుస బేసి సంఖ్యలకు ఘనాలతో కూడా సంబంధం ఉంది. కింది నమూనాను గమనించండి:

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3.$$

ఈ శ్రేణిలో తరువాత, మనకు ఈ క్రింది వరుస సంఖ్యల సమితి లభిస్తుంది:

$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109.$$

? లెక్క చేయకుండానే ఈ మొత్తం ఎంతో మీరు చెప్పగలరా?

1.2.3 ఘనమూలాలు

$8 = 2^3$ అని మనకు తెలుసు.

మనం 2ను 8 యొక్క ఘనమూలం అని పిలుస్తాము మరియు దీనిని $2 = \sqrt[3]{8}$ అని సూచిస్తాము.

మరింత సాధారణంగా, $y = x^3$ అయితే, x అనేది y యొక్క ఘనమూలం. దీనిని

AP SCERT

$x = \sqrt[3]{y}$. So, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

Similarly, $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ and $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 3$. In general, $\sqrt[3]{n^3} = n$.

How do we find out if a number is a cube? Taking inspiration from the case of squares, let us see if we can use prime factorisations.

? Let us check if 3375 is a perfect cube.

$$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5.$$

Can the factors be split into three identical groups? For 3375, we can form three groups of (3×5). So,

$$3375 = (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^3 = 15^3.$$

Another way is to check if the factors can be grouped into triplet(s):

$3375 = (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 3^3 \times 5^3$.

This means $\sqrt[3]{3375} = 15$.

? Is 500 a perfect cube?

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$. We see that the factors cannot be split into three identical groups. Therefore, 500 is not a perfect cube.

Prime Factorisation of a Number	Prime Factorisation of its Cube
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

Observe that each prime factor of a number appears three times in the prime factorisation of its cube.

? Find the cube roots of these numbers:

(i) $\sqrt[3]{64} =$ (ii) $\sqrt[3]{512} =$ (iii) $\sqrt[3]{729} =$

1.2.4 Successive Differences

We know that the differences between consecutive perfect squares gives the sequence of odd numbers. Observe the figure below where the differences

APSCERT

$x = \sqrt[3]{y}$ అని సూచిస్తారు. కాబట్టి, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

అదేవిధంగా, $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ మరియు $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 3$. సాధారణంగా, $\sqrt[3]{n^3} = n$.

ఒక సంఖ్య ఘనం అవునో కాదో మనం ఎలా కనుగొంటాము? వర్గాల సందర్భం నుండి ప్రేరణ పొంది, మనం ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిని ఉపయోగించగలమో లేదో చూద్దాం.

? 3375 ఒక సంపూర్ణ ఘనం అవునో కాదో పరిశీలిద్దాం.

$$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5.$$

కారణాంకాలను మూడు ఒకే రకమైన సమూహాలుగా విభజించగలమా? 3375 కోసం, మనం (3×5) యొక్క మూడు సమూహాలను ఏర్పరచవచ్చు. కాబట్టి,

$$3375 = (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^3 = 15^3.$$

మరొక పద్ధతి ఏమిటంటే, కారణాంకాలను త్రికాలుగా సమూహపరచగలమో లేదో తనిఖీ చేయడం:

$$3375 = (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 3^3 \times 5^3.$$

దీని అర్థం $\sqrt[3]{3375} = 15$.

? 500 ఒక సంపూర్ణ ఘనమా?

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$. కారణాంకాలను మూడు ఒకే రకమైన సమూహాలుగా విభజించలేమని మనం చూస్తున్నాము. అందువల్ల, 500 ఒక సంపూర్ణ ఘనం కాదు.

ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల విభజన	దాని ఘనం యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల విభజన
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

ఒక సంఖ్య యొక్క ఘనం యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల విభజనలో, ఆ సంఖ్య యొక్క ప్రతి ప్రధాన కారణాంకం మూడుసార్లు కనిపిస్తుందని గమనించండి.

? ఈ సంఖ్యల ఘనమూలాలను కనుగొనండి:

(i) $\sqrt[3]{64} =$ (ii) $\sqrt[3]{512} =$ (iii) $\sqrt[3]{729} =$

1.2.4 వరుస భేదాలు

వరుస పరిపూర్ణ వర్గాల మధ్య భేదాలు బేసి సంఖ్యల శ్రేణిని ఇస్తాయని మనకు తెలుసు. పరిపూర్ణ వర్గాల కోసం

AP SCERT

are computed successively for perfect squares. After two levels, all the differences are the same.

Perfect Squares

	1	4	9	16	25	36 ...
Level 1	3	5	7	9	11	...
Level 2	2	2	2	2	...	

? Compute successive differences over levels for perfect cubes until all the differences at a level are the same. What do you notice?

Perfect Cubes

1 8 27 64 125 216 ...

1.3 A Pinch of History

The first known list of perfect squares and perfect cubes was compiled by the Babylonians as far back as 1700 BCE. These lists, found on clay tablets, were used to quickly find square roots and cube roots in problems involving land measurement, architectural design, and other areas where geometric calculations were necessary.

In ancient Sanskrit works the term varga was used both for the square figure or its area, as well as the square power, and the term ghana was used both for the solid cube as well as the product of a number with itself three times. The fourth power was called varga-varga . These terms were used in India at least from the third century BCE.

Aryabhata (499 CE) states

"A square figure of four equal sides and the number representing its area are called varga. The product of two equal quantities is also called varga."

Thus, the term varga for square power has its origin in the graphical representation of a square figure.

Why is the word 'root' (the root of a plant) used for the mathematical operation $\sqrt{\ }$ (square root, cube root, etc.)?

It is because, in ancient India, the Sanskrit word mula, meaning root of a plant, basis, cause, origin, etc., was used for the mathematical operations of taking roots.

AP SCERT

భేదాలను వరుసగా లెక్కించిన క్రింది చిత్రాన్ని గమనించండి. రెండు స్థాయిల తర్వాత, అన్ని భేదాలు ఒకే విధంగా ఉన్నాయి.

పరిపూర్ణ వర్గాలు

1 4 9 16 25 36 ...

Level 1 3 5 7 9 11 ...

Level 2 2 2 2 2 ...

? అన్ని స్థాయిలలోని భేదాలు ఒకేలా అయ్యే వరకు, పరిపూర్ణ ఘనాలపై వరుస భేదాలను లెక్కించండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

పరిపూర్ణ ఘనాలు

1 8 27 64 125 216 ...

1.3 చరిత్రలో గణితం

పరిపూర్ణ వర్గాలు మరియు పరిపూర్ణ ఘనాల యొక్క మొట్టమొదటి జాబితాను బాబిలోనియన్లు 1700 BCE నాటికే తయారు చేశారు. బంకమట్టి పలకలపై కనిపించే ఈ జాబితాలు, వర్గమూలాలు మరియు ఘనాన్ని త్వరగా కనుగొనడానికి ఉపయోగించబడ్డాయి. భూమి కొలతలు, నిర్మాణ రూపకల్పన మరియు రేఖాగణిత గణనలు అవసరమయ్యే ఇతర రంగాలకు సంబంధించిన సమస్యలలో దీని మూలాలు ఉన్నాయి.

ప్రాచీన సంస్కృత గ్రంథాలలో 'వర్గ' అనే పదాన్ని చతురస్రాకారానికి లేదా దాని వైశాల్యానికి, వర్గానికి ఉపయోగించారు, మరియు 'ఘన' అనే పదాన్ని ఘన రూపానికి, అలాగే ఒక సంఖ్యను దానితోనే మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చే లబ్ధానికి ఉపయోగించారు. నాలుగో ఘాతాన్ని వర్గ-వర్గ అని పిలిచేవారు. ఈ పదాలు భారతదేశంలో కనీసం క్రీస్తుపూర్వం మూడవ శతాబ్దం నుండి వాడుకలో ఉన్నాయి.

ఆర్యభట్ట (క్రీ.శ. 499) ఇలా పేర్కొన్నాడు :

"నాలుగు సమాన భుజాలు గల చతురస్రాకార పటం మరియు దాని వైశాల్యాన్ని సూచించే సంఖ్యను వర్గం అని అంటారు. రెండు సమాన రాశుల లబ్ధాన్ని కూడా వర్గం అని అంటారు."

ఈ విధంగా, వర్గ ఘాతానికి సంబంధించిన 'వర్గం' అనే పదం, ఒక చతురస్రాకార పటం యొక్క రేఖాగణిత ప్రాతినిధ్యం నుండి ఉద్భవించింది. గణిత పరిక్రియ అయిన $\sqrt{\ }$ (వర్గమూలం, ఘనమూలం మొదలైనవి) కోసం 'మూలం' (మొక్క యొక్క వేరు) అనే పదాన్ని ఎందుకు ఉపయోగిస్తారు?

ఎందుకంటే, ప్రాచీన భారతదేశంలో, మొక్క యొక్క వేరు, ఆధారం, కారణం, మూలం మొదలైన అర్థాలు గల సంస్కృత పదం 'మూల'ను, మూలాలను కనుగొనే గణిత పరిక్రియల కోసం ఉపయోగించారు.

AP SCERT

In Sanskrit, varga-mula (the basis, cause, origin of the square) was used for square-root and ghana-mula was used for cube-root. This use of mula for the mathematical concept of root was subsequently emulated in Arabic and Latin through their corresponding words for the root of a plant - jidhr and radix respectively. The term mula for root has been used in India at least from the first century BCE. Another term used was pada (foot, basis, cause, origin). Brahmagupta (628 CE) explains, 'The pada (root) of a krti (square) is that of which it is a square.'

Figure it Out - 1.2

1. Find the cube roots of 27000 and 10648.
2. What number will you multiply by 1323 to make it a cube number?
3. State true or false. Explain your reasoning.
   (i) The cube of any odd number is even.
   (ii) There is no perfect cube that ends with 8.
   (iii) The cube of a 2-digit number may be a 3-digit number.
   (iv) The cube of a 2-digit number may have seven or more digits.
   (v) Cube numbers have an odd number of factors.
4. You are told that 1331 is a perfect cube. Can you guess without factorisation what its cube root is? Similarly, guess the cube roots of 4913, 12167, and 32768.
5. Which of the following is the greatest? Explain your reasoning.
   (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$

AP SCERT

SUMMARY

- A number obtained by multiplying a number by itself is called a square number. Squares of natural numbers are called perfect squares.
- All perfect squares end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9. Squares can only have an even number of zeros at the end.
- Square root is the inverse operation of square. Every perfect square has two integral square roots. The positive square root of a number is denoted by the symbol $\sqrt{\ }$. For example, $\sqrt{9} = 3$.
- A number obtained by multiplying a number by itself three times is called a cube. For example 1, 8, 27, ... ,etc., are cubes.

సంస్కృతంలో, వర్గమూలానికి 'వర్గ-మూల' (వర్గం యొక్క ఆధారం, కారణం, మూలం) అని, మరియు ఘనమూలానికి 'ఘన-మూల' అని ఉపయోగించారు. మూలం అనే గణిత భావన కోసం 'మూల' అనే పదాన్ని ఉపయోగించడాన్ని తదనంతరం అరబిక్ మరియు లాటిన్ భాషలలో, మొక్క యొక్క వేరుకు సంబంధించిన వాటి పదాలైన 'జిధర్' మరియు 'రాడిక్స్' ద్వారా అనుకరించారు. మూలం అనే అర్థంలో 'మూల' అనే పదాన్ని భారతదేశంలో కనీసం క్రీ.పూ. మొదటి శతాబ్దం నుండి ఉపయోగిస్తున్నారు.'పాద' (అడుగు, ఆధారం, కారణం, మూలం)అని మరో పదాన్ని కుడా ఉపయోగించారు. 'ఒక కృతి (వర్గం) యొక్క పాదం (మూలం) అంటే, అది దేనికి వర్గమో అదే.' అని బ్రహ్మగుప్తుడు (క్రీ.శ. 628) వివరించాడు.

ఆలోచించండి-చేయండి - 1.2

1. 27000 మరియు 10648 ల ఘనమూలాలను కనుగొనండి.
2. 1323ను ఘన సంఖ్యగా మార్చడానికి మీరు ఏ సంఖ్యతో గుణించాలి?
3. సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి. మీ కారణాన్ని వివరించండి.
   (i) ఏ బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనం అయినా సరి సంఖ్య.
   (ii) 8తో ముగిసే పరిపూర్ణ ఘన సంఖ్య ఏదీ లేదు.
   (iii) రెండు అంకెల సంఖ్య యొక్క ఘనం మూడు అంకెల సంఖ్య కావచ్చు.
   (iv) రెండు అంకెల సంఖ్య యొక్క ఘనంలో ఏడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంకెలు ఉండవచ్చు.
   (v) ఘన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలను కలిగి ఉంటాయి.
4. 1331 ఒక పరిపూర్ణ ఘనం అని మీకు చెప్పబడింది. కారణాంకాల పద్ధతి లేకుండానే దాని ఘనమూలం ఏమిటో మీరు ఊహించగలరా? అదేవిధంగా, 4913, 12167 మరియు 32768 ల ఘనమూలాలను ఊహించండి.
5. కింది వాటిలో ఏది అతి పెద్దది? మీ కారణాన్ని వివరించండి.
   (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$

సారాంశం

- ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించడం ద్వారా వచ్చే సంఖ్యను వర్గ సంఖ్య అంటారు. సహజ సంఖ్యల వర్గాలను పరిపూర్ణ వర్గాలు అంటారు.
- అన్ని పరిపూర్ణ వర్గాలు 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 తో ముగుస్తాయి. వర్గాల చివర సరి సంఖ్యలో సున్నాలు మాత్రమే ఉంటాయి.
- వర్గమూలం అనేది వర్గానికి విలోమ ప్రక్రియ. ప్రతి పరిపూర్ణ వర్గానికి రెండు పూర్ణ సంఖ్యలైన వర్గమూలాలు ఉంటాయి. ఒక సంఖ్య యొక్క ధన వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ గుర్తుతో సూచిస్తారు. దాహరణకు, $\sqrt{9} = 3$.
- ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో మూడుసార్లు గుణించడం ద్వారా వచ్చే సంఖ్యను ఘనం అంటారు. ఉదాహరణకు 1, 8, 27, ... మొదలైనవి ఘనాలు.

AP SCERT

- A number is a perfect square if its prime factors can be split into two identical groups.
- A number is a perfect cube if its prime factors can be split into three identical groups
- The symbol $\sqrt[3]{\ }$ denotes cube root. For example, $\sqrt[3]{27} = 3$.

Look at the following numbers: 3 6 10 15 1

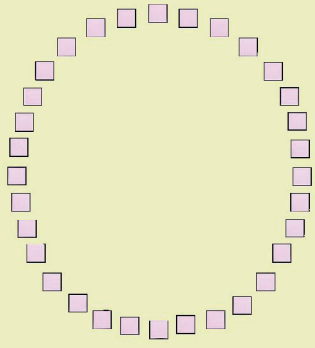
They are arranged such that each pair of adjacent numbers adds up to a square.

$$3 + 6 = 9,\ 6 + 10 = 16,\ 10 + 15 = 25,\ 15 + 1 = 16.$$

Try arranging the numbers 1 to 17 (without repetition) in a row in a similar way - the sum of every adjacent pair of numbers should be a square.

Can you arrange them in more than one way? If not, can you explain why?

Can you do the same with numbers from 1 to 32 (again, without repetition), but this time arranging all the numbers in a circle?



AP SCERT

- ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను రెండు ఒకే రకమైన సమూహాలుగా విభజించగలిగితే, ఆ సంఖ్య ఒక పరిపూర్ణ వర్గం అవుతుంది.
- ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను మూడు ఒకే రకమైన సమూహాలుగా విభజించగలిగితే, ఆ సంఖ్య ఒక పరిపూర్ణ ఘనం అవుతుంది.
- $\sqrt[3]{\ }$ గుర్తు ఘన మూలాన్ని సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకు, $\sqrt[3]{27} = 3$.

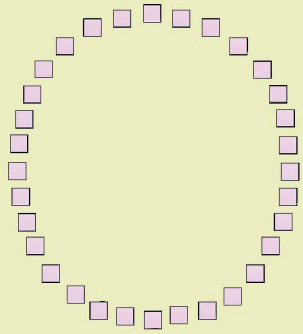
కింది సంఖ్యలను చూడండి: 3 6 10 15 1

వాటిని పక్కపక్కనే ఉన్న ప్రతి రెండు సంఖ్యలను కలిపితే ఒక వర్గం వచ్చే విధంగా అమర్చారు.

$$3 + 6 = 9,\ 6 + 10 = 16,\ 10 + 15 = 25,\ 15 + 1 = 16.$$

1 నుండి 17 వరకు గల సంఖ్యలను (పునరావృతం కాకుండా) పక్క పక్కనే ఉన్న ప్రతి రెండు సంఖ్యల మొత్తం ఒక వర్గ సంఖ్య అయ్యే విధంగా అమర్చడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు వాటిని ఒకటి కంటే ఎక్కువ విధాలుగా అమర్చగలరా? లేకపోతే, దానికి కారణం వివరించగలరా?

మీరు 1 నుండి 32 వరకు ఉన్న సంఖ్యలతో (మళ్ళీ, పునరావృతం కాకుండా) అదే విధంగా చేయగలరా, కానీ ఈసారి అన్ని సంఖ్యలను ఒక వృత్తంలో అమర్చాలి?



AP SCERT

2 POWER PLAY

Learning outcomes

Learners will able to

- Analyze situations, farmulate questions, and arrive at solutions by sequentially guessing and initial answer modelling the problem statement and applying assumptions and approximation (CG-6)
- Understand laws of exponents (CG-1)
- Compare exponential growth with additive growth. (CG-1)
- Convert very large numbers in standard form (CG-1)
- Compare very large numbers (CG-1)

K4N3R2

2.0 Experiencing the Power Play ..

An Impossible Venture!

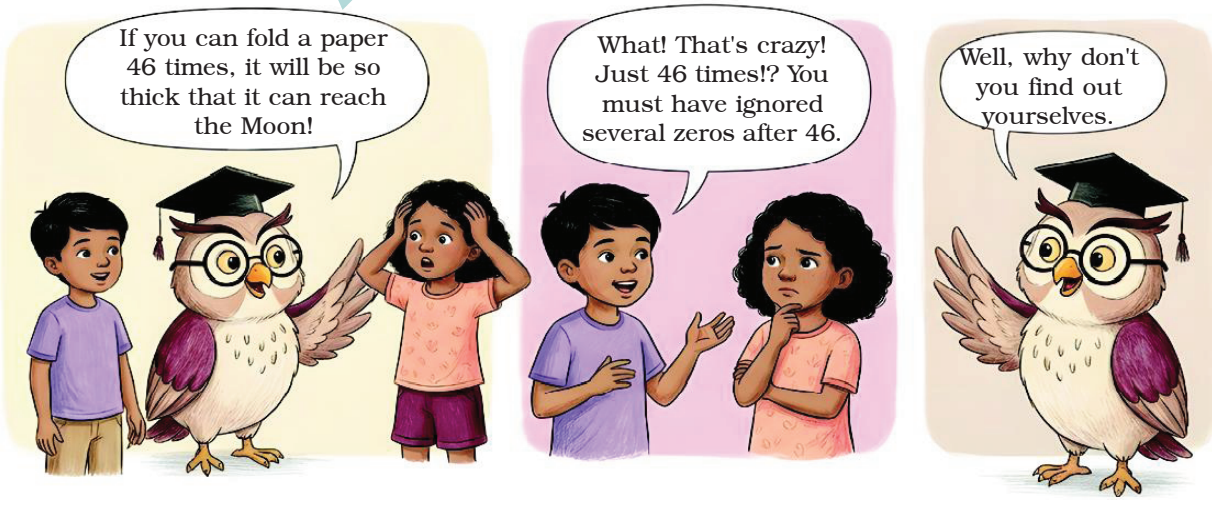
Take a sheet of paper, as large a sheet as you can find. Fold it once. Fold it again, and again.

? How many times can you fold it over and over?

Raju says "I heard that a sheet of paper can't be folded more than 7 times".

Rekha replies "What if we use a thinner paper, like a newspaper or a tissue paper?"

Try it with different types of paper and see what happens.



AP SCERT

2 ఘాతాలతో ఆట

అభ్యసన ఫలితాలు : అభ్యాసకులు

U5S3Y1

- పరిస్థితులను విశ్లేషించగలరు, ప్రశ్నలను రూపొందించగలరు మరియు ప్రారంభ సమాధానాన్ని వరుసగా ఊహించడం, సమస్య ప్రకటనను మోడల్ చేయడం మరియు అంచనాలు మరియు ఉజ్జాయింపును వర్తింపజేయడం ద్వారా పరిష్కారాలను చేరుకోగలరు. (CG-6)
- ఘాతాంకాల నియమాలను అర్థం చేసుకోగలరు. (CG-1)
- సంకలిత పెరుగుదలతో ఘాతాంక పెరుగుదలను పోల్చగలరు. (CG-1)
- చాలా పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో మార్చగలరు. (CG-1)
- చాలా పెద్ద సంఖ్యలను పోల్చగలరు. (CG-1)

2.0 ఘాతాలతో ఆటపై అవగాహన

ఒక అసాధ్యమైన సాహసం!

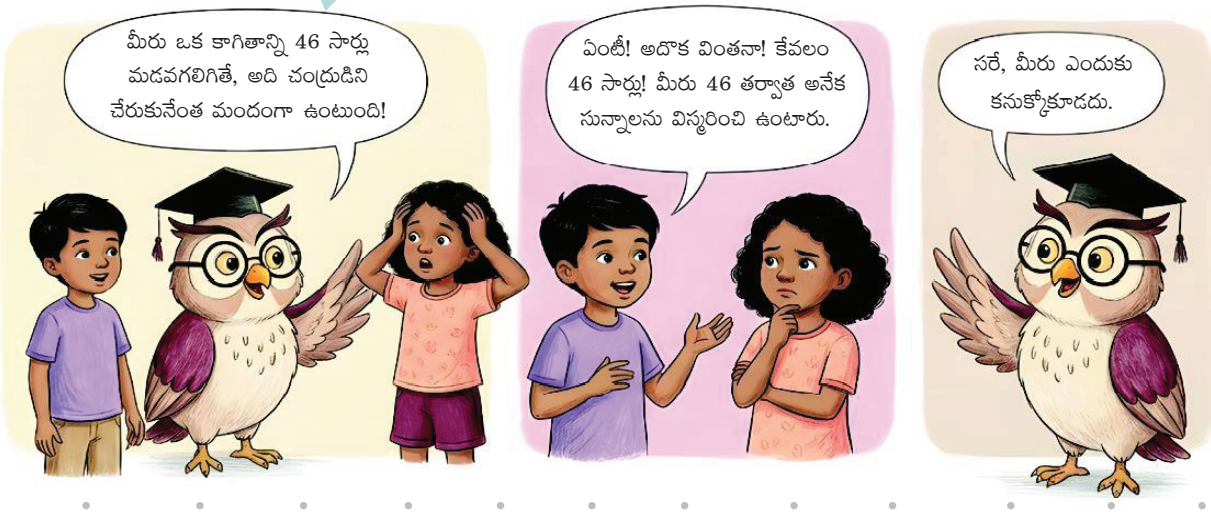
మీరు ఇంత వరకు చూసిన వాటిలో అతి పెద్ద కాగితమును తీసుకోండి. దాన్ని ఒకసారి మడవండి. మళ్ళీ మళ్ళీ మడవండి.

? మీరు దాన్ని ఎన్నిసార్లు మళ్ళీ మళ్ళీ మడవగలరు?

రాజు ఇలా అంటాడు, నేను విన్నాను "ఒక కాగితపు షీట్‌ను 7 సార్లు కంటే ఎక్కువ మడవలేమని".

రేఖ ఇలా అన్నది. "వార్తాపత్రిక లేదా టిష్యూ పేపర్ వంటి పలుచని కాగితాన్ని ఉపయోగిస్తే ఏమి జరుగుతుంది?"

వివిధ రకాల కాగితాలతో దీన్ని ప్రయత్నించండి మరియు ఏమి జరుగుతుందో చూడండి.



AP SCERT

? Say you can fold a sheet of paper as many times as you wish. What would its thickness be after 30 folds? Make a guess.

Let us find out how thick a sheet of paper will be after 46 folds. Assume that the thickness of the sheet is 0.001 cm.

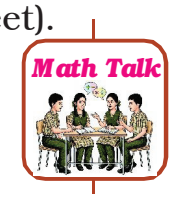
? The following table lists the thickness after each fold. Observe that the thickness doubles after each fold.

Fold	Thickness	Fold	Thickness	Fold	Thickness
1	0.002 cm	7	0.128 cm	13	8.192 cm
2	0.004 cm	8	0.256 cm	14	16.384 cm
3	0.008 cm	9	0.512 cm	15	32.768 cm
4	0.016 cm	10	1.024 cm	16	65.536 cm
5	0.032 cm	11	2.048 cm	17	≈ 131 cm
6	0.064 cm	12	4.096 cm		

(We use the sign '≈' to indicate 'approximately equal to'.)

After 10 folds, the thickness is just above 1 cm (1.024 cm).

After 17 folds, the thickness is about 131 cm (a little more than 4 feet).



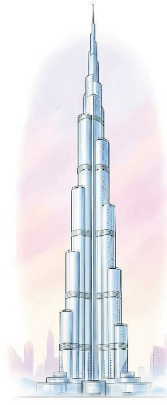
? Now, what do you think the thickness would be after 30 folds? 45 folds? Make a guess.

? Fill the table below.

Fold	Thickness	Fold	Thickness	Fold	Thickness
18	≈ 262 cm	21		24	
19	≈ 524 cm	22		25	
20	≈ 10.4 m	23		26	

After 26 folds, the thickness is approximately 670 m. Burj Khalifa in Dubai, the tallest building in the world, is 830 m tall.

Fold	Thickness	Fold	Thickness
27	≈ 1.3 km	29	
28		30	



After 30 folds, the thickness of the paper is about 10. the typical height at which planes fly. The deepest

AP SCERT

? మీరు ఒక కాగితపు షీట్‌ను మీకు కావలసినన్ని సార్లు మడవగలిగారని అనుకుందాం. 30 మడతల తర్వాత దాని మందం ఎంత ఉంటుంది? ఊహించండి.

46 మడతల తర్వాత కాగితం షీట్ ఎంత మందంగా ఉంటుందో తెలుసుకుందాం. షీట్ మందం 0.001 సెం.మీ అని అనుకుందాం.

? కింది పట్టిక ప్రతి మడత తర్వాత ఉండే మందాన్ని చూపుతుంది. ప్రతి మడత తర్వాత మందం రెట్టింపు అవుతుందని గమనించండి.

మడత	మందం	మడత	మందం	మడత	మందం
1	0.002 సెం.మీ	7	0.128 సెం.మీ	13	8.192 సెం.మీ
2	0.004 సెం.మీ	8	0.256 సెం.మీ	14	16.384 సెం.మీ
3	0.008 సెం.మీ	9	0.512 సెం.మీ	15	32.768 సెం.మీ
4	0.016 సెం.మీ	10	1.024 సెం.మీ	16	65.536 సెం.మీ
5	0.032 సెం.మీ	11	2.048 సెం.మీ	17	≈ 131 సెం.మీ
6	0.064 సెం.మీ	12	4.096 సెం.మీ		

(సుమారుగా సమానం అని సూచించడానికి మనం '≈' గుర్తును ఉపయోగిస్తాము.)

10 మడతల తర్వాత, మందం 1 సెం.మీ. కంటే కొద్దిగా ఎక్కువగా ఉంటుంది (1.024 సెం.మీ.).

17 మడతల తర్వాత, మందం సుమారుగా 131 సెం.మీ. ఉంటుంది (4 అడుగుల కంటే కొద్దిగా ఎక్కువ).

? ఇప్పుడు, 30 మడతల తర్వాత మందం ఎంత ఉంటుందని మీరు అనుకుంటున్నారు?
45 మడతల తర్వాత ఎంత ఉంటుంది? ఊహించి చెప్పండి.

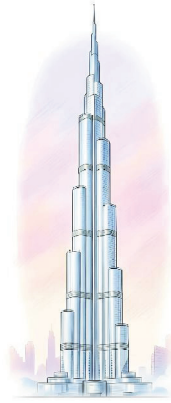
? క్రింది పట్టికను పూరించండి.

మడత	మందం	మడత	మందం	మడత	మందం
18	≈ 262సెం.మీ	21		24	
19	≈ 524సెం.మీ	22		25	
20	≈ 10.4 మీ.	23		26	

26 సార్లు మడిచిన తర్వాత, దాని మందం సుమారుగా 670 మీటర్లు ఉంటుంది. ప్రపంచంలోనే అత్యంత ఎత్తైన భవనమైన దుబాయ్‌లోని బుర్జ్ ఖలీఫా ఎత్తు 830 మీటర్లు.

మడత	మందం	మడత	మందం
27	≈ 1.3 కి.మీ.	29	
28		30	

30 సార్లు మడిచిన తర్వాత, కాగితం మందం సుమారు 10.7 కిలోమీటర్లు ఉంటుంది, ఇది విమానాలు సాధారణంగా ప్రయాణించే ఎత్తుకు సమానం.



AP SCERT

discovered in the oceans is the Mariana Trench, with a depth of 11 km.

Fold	Thickness	Fold	Thickness	Fold	Thickness
31		36		41	
32		37		42	
33		38		43	
34		39		44	
35		40		45	

It might be hard to digest the fact that after just 46 folds, the thickness is more than 7,00,000 km. This is the power of multiplicative growth, also called exponential growth. Let us analyse the growth.

We have seen that the thickness doubles after every fold.

Fold 4	0.016 cm
Fold 5	0.032 cm

Fold 9	0.512 cm
Fold 10	1.024 cm

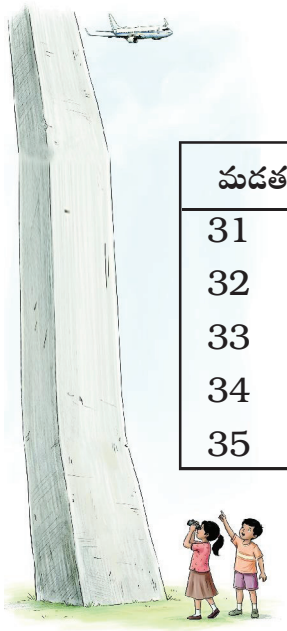
Notice the change in thickness after two folds. By how much does it increase?

Fold 4	0.016 cm
Fold 6	1.064 cm

After any 3 folds, the thickness increases 8 times (= 2 × 2 × 2). Check if that is true. Similarly, from any point, the thickness after 10 folds increases by 1024 times (= 2 multiplied by itself 10 times), as shown in the table below.

Fold	Thickness	Times increased by
0 to 10	1.024 cm - 0.001 cm = 1. 023 cm	1.024 ÷ 0.001 cm = 1024
10 to 20	10.485 m - 1.024 cm ≈ 10. 474 m	10.485 m ÷ 1.024 cm = 1024
20 to 30	10.737 km - 10.485 m ≈ 10. 726 km	10.737 km ÷ 10.485 m = 1024
30 to 40	10995 km - 10.737 m ≈ 10984.2 km	10995 km ÷ 10.737 km = 1024

AP SCERT



సముద్రాలలో కనుగొనబడిన అత్యంత లోతైన ప్రదేశం మరియానా అఖాతం, దీని లోతు 11 కిలోమీటర్లు.

మడత	మందం	మడత	మందం	మడత	మందం
31		36		41	
32		37		42	
33		38		43	
34		39		44	
35		40		45	

కేవలం 46 మడతల తర్వాత, మందం 7,00,000 కిలోమీటర్ల కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందనే వాస్తవాన్ని జీర్ణించుకోవడం కష్టంగా ఉండవచ్చు. ఇదే గుణకార వృద్ధి యొక్క శక్తి, దీనిని ఘాతాంక వృద్ధి అని కూడా అంటారు. మనం ఈ వృద్ధిని విశ్లేషిద్దాం.

ప్రతి మడత తర్వాత మందం రెట్టింపు అవుతుందని మనం చూశాం.

మోడల్ 4	0.01 సెం.మీ.
మోడల్ 5	0.032 సెం.మీ.

మోడల్ 9	0.512 సెం.మీ.
మోడల్ 10	0.024 సెం.మీ.

రెండు మడతలు వేసిన తర్వాత మందంలో వచ్చిన మార్పును గమనించండి. అది ఎంత పెరుగుతుంది?

మోడల్ 4	0.016 సెం.మీ.
మోడల్ 6	1.064 సెం.మీ.

ఏవైనా 3 మడతలు వేసిన తర్వాత, మందం 8 రెట్లు పెరుగుతుంది (= 2 × 2 × 2). ఇది నిజమో కాదో తనిఖీ చేయండి. అదేవిధంగా,

కింది పట్టికలో చూపిన విధంగా, ఏ స్థానం నుండైనా 10 మడతలు వేసిన తర్వాత మందం 1024 రెట్లు పెరుగుతుంది (= 2ను దానితోనే 10 సార్లు గుణించగా వచ్చే సంఖ్య).

మడత	మందం	పెరిగిన రెట్లు
0 to 10	1.024 సెం.మీ. - 0.001 సెం.మీ. = 1. 023 సెం.మీ.	1.024 ÷ 0.001 సెం.మీ. = 1024
10 to 20	10.485 మీ. - 1.024 సెం.మీ. ≈ 10. 474 మీ.	10.485 మీ. ÷ 1.024 సెం.మీ. = 1024
20 to 30	10.737 కి.మీ. - 10.485 మీ. ≈ 10. 726 కి.మీ.	10.737 కి.మీ. ÷ 10.485 మీ. = 1024
30 to 40	10995 కి.మీ. - 10.737 కి.మీ. ≈ 10984.2 కి.మీ.	10995 కి.మీ. ÷ 10.737 కి.మీ. = 1024

AP SCERT

2.1 Exponential Notation and Operations

The initial thickness of the paper was 0.001 cm.

Upon folding once, its thickness became 0.001 cm × 2 = 0.002 cm.

Folding it twice, its thickness became -

0.001 cm × 2 × 2 = 0.004 cm, or 0.001 cm × 2^2 = 0.004 cm (in shorthand).

Upon folding it thrice, its thickness became -

0.001 cm × 2 × 2 × 2, or 0.001 cm × 2^3 = 0.008 cm.

When folded four times, its thickness became -

0.001 cm × 2 × 2 × 2 × 2, or 0.001 cm × 2^4 = 0.016 cm.

Similarly, the expression for the thickness of the paper when folded 7 times will be 0.001 cm × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2, or 0.001 cm × 2^7 = 0.128 cm.

We have seen that square numbers can be expressed as n^2 and cube numbers as n^3.

$n \times n = n^2$ (read as 'n squared' or 'n raised to the power 2')

$n \times n \times n = n^3$ (read as 'n cubed' or 'n raised to the power 3')

$n \times n \times n \times n = n^4$ (read as 'n raised to the power 4' or 'the 4th power of n') $n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^7$ (read as 'n raised to the power 7' or 'the 7th power of n') and so on.

In general, we write n^a to denote n multiplied by itself a times.

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

5^4 is the exponential form of 625. Here, 4 is the exponent/power, and 5 is the base. Exponents of the form 5^n are called powers of 5: 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, etc.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$.

Remember the 1024 from earlier? There, it meant that after every 10 folds, the thickness increased 10^{24} times.

5^4 is read as '5 raised to the power 4' or '5 to the power 4' or '5 power 4' or '4th power of 5'

? Which expression describes the thickness of a sheet of paper after it is folded 10 times? The initial thickness is represented by the letter-number v.

(i) 10v (ii) 10 + v (iii) 2 × 10 × v

(iv) 2^{10} (v) 2^{10}v (vi) 10^2v

Some more examples of exponential notation:

AP SCERT

2.1 ఘాతాంక రూపం మరియు పరిక్రియలు

కాగితం యొక్క ప్రారంభ మందం 0.001 సెం.మీ.

ఒకసారి మడిచినప్పుడు, దాని మందం 0.001 సెం.మీ × 2 = 0.002 సెం.మీ అయింది.

రెండుసార్లు మడిచినప్పుడు, దాని మందం ---

0.001 సెం.మీ × 2 × 2 = 0.004 సెం.మీ, లేదా 0.001 సెం.మీ × 2^2 = 0.004 సెం.మీ (సంక్షిప్త రూపంలో).

మూడుసార్లు మడిచినప్పుడు, దాని మందం ---

0.001 సెం.మీ × 2 × 2 × 2, లేదా 0.001 సెం.మీ × 2^3 = 0.008 సెం.మీ.

నాలుగుసార్లు మడిచినప్పుడు, దాని మందం ---

0.001 సెం.మీ × 2 × 2 × 2 × 2, లేదా 0.001 సెం.మీ × 2^4 = 0.016 సెం.మీ.

అదేవిధంగా, కాగితాన్ని 7 సార్లు మడిచినప్పుడు దాని మందానికి సంబంధించిన సమీకరణం

0.001 సెం.మీ × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2, లేదా 0.001 సెం.మీ × 2^7 = 0.128 సెం.మీ అవుతుంది.

వర్గ సంఖ్యలను n^2 గా మరియు ఘన సంఖ్యలను n^3 గా వ్యక్తపరచవచ్చని మనం చూశాము.

$n \times n = n^2$ ('n స్క్వేర్డ్' లేదా 'n ను 2 వ ఘాతాంకానికి హెచ్చించడం' అని చదువుతాము)

$n \times n \times n = n^3$ ('n క్యూబ్' లేదా 'n ను 3 వ ఘాతాంకానికి హెచ్చించడం' అని చదువుతాము)

$n \times n \times n \times n = n^4$ ('n ఘాతం 4' లేదా 'n ను 4 వ ఘాతాంకానికి హెచ్చించడం' అని చదువుతాము)

$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^7$ ('n ఘాతం 7 లేదా 'n ను 7 వ ఘాతాంకానికి హెచ్చించడం' అని చదువుతాము) మరియు ఇదే విధంగా.

సాధారణంగా, n ను a సార్లు దానితోనే గుణించడాన్ని సూచించడానికి మనం n^a అని రాస్తాము.

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

5^4 అనేది 625 యొక్క ఘాత రూపం. ఇక్కడ, 4 అనేది ఘాతాంకం/ఘాతం, మరియు 5 అనేది ఆధారం. 5^n రూపంలో ఉన్న ఘాతాంకాలను 5 యొక్క ఘాతాలు అంటారు: 5: 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, మొదలైనవి.

5^4 ను ఈ విధంగా చదువుతారు. '5 ఘాతం 4' లేదా "5 ను 4వ ఘాతాంకానికి హెచ్చించడం' లేదా '5 పవర్ 4'

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$

మనం ఇంతకు ముందు చూసిన 1024 గుర్తుందా? అక్కడ, ప్రతి 10 మడతల తర్వాత, మందం 1024 రెట్లు పెరిగిందని దాని అర్థం.

? ఒక కాగితపు షీట్‌ను 10 సార్లు మడచిన తర్వాత దాని మందాన్ని ఏ సమీకరణం వివరిస్తుంది? ప్రారంభ మందాన్ని v అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

(i) 10v (ii) 10 + v (iii) 2 × 10 × v

(iv) 2^{10} (v) $2^{10}v$ (vi) 10^2 v

ఘాతాంక రూపానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు:

AP SCERT

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

$(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3 = -64$.

Similarly,

$a \times a \times a \times b \times b$ can be expressed as a^3b^2 (read as a cubed b squared).

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ can be expressed as a^2b^4 (read as a squared b raised to the power 4).

Remember that $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$, where as $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

? Express the number 32400 as a product of its prime factors and represent the prime factors in their exponential form.

$32400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

In exponential form, this would be

$$32400 = 2^4 \times 5^2 \times 3^4.$$

2 | 32400
2 | 16200
2 | 8100
2 | 4050
5 | 2025
5 | 405
3 | 81
3 | 27
3 | 9
3 | 3
1

? What is $(-1)^5$? Is it positive or negative? What about $(-1)^{56}$?

? Is $(-2)^4 = 16$? Verify.

What is 0^2, 0^5 ? What is 0^n ? What is $(-1)^n$ when n is even integer? and when n is odd integer?

Figure it Out - 2.1

1. Express the following in exponential form:

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $y \times y$

   (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

   (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

2. Express each of the following as a product of powers of their prime factors in exponential form.

   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

3. Write the numerical value of each of the following:

   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^3$ (iii) 3×4^4

   (iv) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (v) $3^2 \times 10^4$ (vi) $(-2)^5 \times (-10)^6$

AP SCERT

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64.$

$(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3 = -64.$

అదేవిధంగా,

$a \times a \times a \times b \times b$ ను a^3b^2 (a క్యూబ్డ్ b స్క్వేర్డ్ అని చదవాలి) గా వ్యక్తపరచవచ్చు. $a \times a \times b \times b \times b \times b$ ను a^2b^4 (a స్క్వేర్డ్ b ఘాతం 4 అని చదవాలి) గా వ్యక్తపరచవచ్చు.

గుర్తుంచుకోండి, $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$, అయితే $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

? 32400 అనే సంఖ్యను దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచండి మరియు ప్రధాన కారణాంకాలను వాటి ఘాత రూపంలో సూచించండి.

$32400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$

ఘాత రూపంలో, ఇది ఇలా ఉంటుంది

$$32400 = 2^4 \times 5^2 \times 3^4.$$

2 | 32400
2 | 16200
2 | 8100
2 | 4050
5 | 2025
5 | 405
3 | 81
3 | 27
3 | 9
3 | 3
1

? $(-1)^5$ అంటే ఎంత? అది ధనాత్మకమా లేదా రుణాత్మకమా? $(-1)^{56}$ సంగతేంటి?

? $(-2)^4 = 16$ అవుతుందా? సరిచూడండి.

> 0^2, 0^5 విలువ ఎంత? 0^n విలువ ఎంత? n అనేది సరిపూర్ణ సంఖ్య అయినపుడు, బేసిపూర్ణ సంఖ్య అయినపుడు $(-1)^n$ విలువ ఎంత?

ఆలోచించండి-చేయండి - 2.1

1. కింది వాటిని ఘాత రూపంలో వ్యక్తపరచండి:

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $y \times y$

   (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

   (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

2. కింది వాటిలో ప్రతిదానిని వాటి ప్రధాన కారణాంకాల ఘాతాల లబ్ధంగా ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

3. కింది వాటిలో ప్రతిదాని సంఖ్యా విలువను రాయండి:

   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^3$ (iii) 3×4^4

   (iv) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (v) $3^2 \times 10^4$ (vi) $(-2)^5 \times (-10)^6$

APSCERT

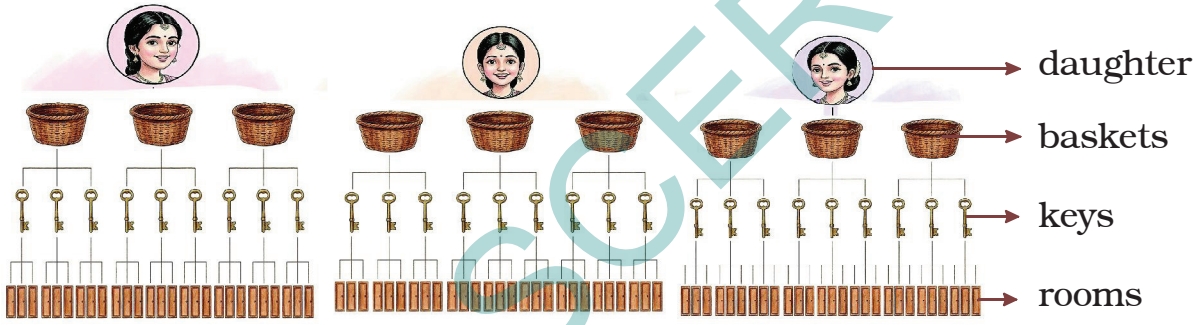
The Stones that Shine ...

Three daughters with curious eyes,
Each got three baskets - a kingly prize.
Each basket had three silver keys,
Each opens three big rooms with ease.
Each room had tables - one, two, three,
With three bright necklaces on each, you see.
Each necklace had three diamonds so fine...
Can you count these stones that shine?

Hint: Find out the number of baskets and rooms.

How many rooms were there altogether?

The information given can be visualised as shown below.

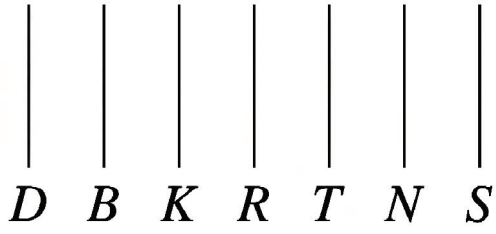


From the diagram, the number of rooms is 3^4. This can be computed by repeatedly multiplying 3 by itself,

$$3 \times 3 = 9.$$
$$9 \times 3 = 27.$$
$$27 \times 3 = 81.$$
$$81 \times 3 = 243.$$

How many diamonds were there in total? Can we find out by just one multiplication using the products above?

The number of diamonds is $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$.



We can write

$$3^7 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$

AP SCERT

ప్రకాశించే రాళ్ళు ...

? జిజ్ఞాస గల కళ్ళతో ముగ్గురు కుమార్తెలు.

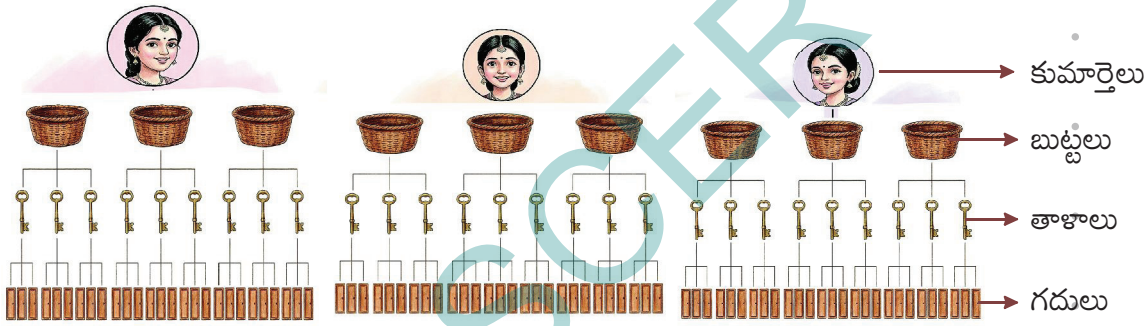
ప్రతి ఒక్కరికి మూడు బుట్టలు లభించాయి – అదొక రాజ బహుమతి. ప్రతి బుట్టలో మూడు వెండి తాళాలు ఉన్నాయి, ప్రతి ఒక్కటి మూడు పెద్ద గదులను సులభంగా తెరుస్తుంది.

ప్రతి గదిలో మూడు టేబుళ్లు ఉన్నాయి. ప్రతి టేబుల్ మీద మూడు ప్రకాశవంతమైన హారాలు ఉన్నాయి, మీరు చూడండి. ప్రతి హారంలో మూడు వజ్రాలు చాలా బాగున్నాయి... మెరిసే ఈ రాళ్లను మీరు లెక్కించగలరా?

సూచన : బుట్టలు మరియు గదుల సంఖ్యను కనుగొనండి.

? మొత్తం ఎన్ని గదులు ఉన్నాయి?

ఇచ్చిన సమాచారాన్ని క్రింద చూపిన విధంగా దృశ్యమానం చేయవచ్చు



పటం నుండి, గదుల సంఖ్య 3^4. దీనిని 3ని పదే పదే దానితోనే గుణించడం ద్వారా లెక్కించవచ్చు,

$3 \times 3 = 9.$

$9 \times 3 = 27.$

$27 \times 3 = 81.$

$81 \times 3 = 243.$

? మొత్తం ఎన్ని వజ్రాలు ఉన్నాయి? పైన ఉన్న లబ్ధాలను ఉపయోగించి కేవలం ఒక గుణకారం ద్వారా మనం కనుగొనగలమా?

వజ్రాల సంఖ్య $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$.

D	*B*	*K*	*R*	*T*	*N*	*S*

మనం ఇలా వ్రాయవచ్చు

$$3^7 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$

AP SCERT

We had computed till 34. To find 37, we can just multiply 34 (= 81) with 3^3(= 27).

$= 3^4 \times 3^3$ $\qquad \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3^4} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3^3}$

$= 81 \times 27 = 2187$

? 3^7 can also be written as $3^2 \times 3^5$. Can you reason out why?

This can be easily extended to products where exponents are the same letter-numbers.

? Write the product $p^4 \times p^6$ in exponential form.

$$p^4 \times p^6 = (p \times p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p \times p \times p) = p^{10}.$$

We can generalise this to -

$n^a \times n^b = n^{a+b}$, where a and b are counting numbers.

? Use this observation to compute the following.

(i) 2^9 (ii) 5^7 (iii) 4^6

4^6 can be evaluated in these two ways,

$(4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^3 \times 4^3$ $= 64 \times 64$ $= 4096.$ $4^3 \times 4^3$ is the square of 4^3, i.e., $4^3 \times 4^3$ can also be written as $(4^3)^2$.	$(4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$ $= 16 \times 16 \times 16$ $= 4096.$ $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ is the cube of 4^2, i.e., $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ can also be written as $(4^2)^3$.

Similarly, $7^4 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^2 \times 7^2 = (7^2)^2$, and

$2^{10} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$= (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$

$= (2^2)^5$.

? Is 2^{10} also equal to $(2^5)^2$? Write it as a product.

$2^{10} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (2^5) \times (2^5)$

$= (2^5)^2$.

In general,

$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b} = n^{ab}$, where a and b are counting numbers.

? Write the following expressions as a power of a power in at least two different ways:

(i) 8^6 (ii) 7^{15} (iii) 9^{14} (iv) 5^8

AP SCERT

మనం 3^4 వరకు లెక్కించాము. 3^7 కనుగొనడానికి, మనం 3^4 (= 81) ను 3^3 (= 27) తో గుణిస్తే సరిపోతుంది.

3^3(= 27).

$= 3^4 \times 3^3$ $\qquad \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3^4} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3^3}$

$= 81 \times 27 = 2187$

? 3^7 ను $3^2 \times 3^5$ గా కూడా వ్రాయవచ్చు. అది ఎందుకో మీరు కారణం చెప్పగలరా?

ఘాతాంకాల ఆధారాలు ఒకే అక్షర-సంఖ్యలుగా ఉన్న లబ్ధాలకు దీనిని సులభంగా విస్తరించవచ్చు.

? $p^4 \times p^6$ లబ్ధాన్ని ఘాతాంక రూపంలో వ్రాయండి.

$$p^4 \times p^6 = (p \times p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p \times p \times p) = p^{10}.$$

మనం దీనిని ఇలా సాధారణీకరించవచ్చు

$n^a \times n^b = n^{a+b}$, ఇక్కడ a మరియు b అనేవి లెక్కించే సంఖ్యలు.

? ఈ పరిశీలనను ఉపయోగించి కింది వాటిని లెక్కించండి.

(i) 2^9 (ii) 5^7 (iii) 4^6

4^6 ఈ రెండు విధాలుగా మూల్యాంకనం చేయవచ్చు,

$(4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^3 \times 4^3$ $= 64 \times 64$ $= 4096.$ 4^3 యొక్క వర్గము $4^3 \times 4^3$. దీనిని కింది విధంగా రాయవచ్చు $4^3 \times 4^3 = (4^3)^2$.	$(4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$ $= 16 \times 16 \times 16$ $= 4096.$ 4^2 యొక్క ఘనము $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ దీనిని కింది విధంగా రాయవచ్చు $4^2 \times 4^2 \times 4^2 = (4^2)^3$.

ఇదే విధంగా, $7^4 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^2 \times 7^2 = (7^2)^2$, and

$2^{10} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$= (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$

$= (2^2)^5$.

? 2^{10} అనేది $(2^5)^2$ కు సమానమా? దీనిని లబ్ధ రూపంలో రాయగా

$2^{10} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (2^5) \times (2^5)$

$= (2^5)^2$.

సాధారణంగా,

$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b} = n^{ab}$, a, b లు లెక్కించే సంఖ్యలు.

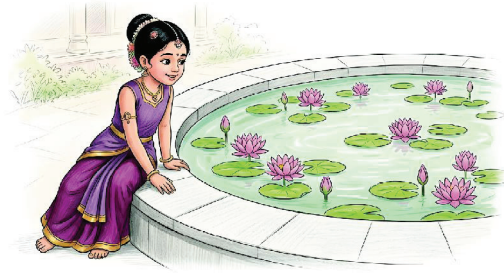
? కింది సమాసాలను కనీసం రెండు వేర్వేరు విధాలుగా ఘాతానికి ఘాతంగా రాయండి.

(i) 8^6 (ii) 7^{15} (iii) 9^{14} (iv) 5^8

AP SCERT

Magical Pond

In the middle of a beautiful, magical pond lies a bright pink lotus. The number of lotuses doubles every day in this pond. After 30 days, the pond is completely covered with lotuses. On which day was the pond half full?



If the pond is completely covered by lotuses on the 30th day, how much of it is covered by lotuses on the 29th day?

Since the number of lotuses doubles every day, the pond should be half covered on the 29th day.

Write the number of lotuses (in exponential form) when the pond was -

(i) fully covered (ii) half covered

There is another pond in which the number of lotuses triples every day. When both the ponds had no flowers, Damayanti placed a lotus in the doubling pond. After 4 days, she took all the lotuses from there and put them in the tripling pond. How many lotuses will be in the tripling pond after 4 more days?

After the first 4 days, the number of lotuses is $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.

After the next 4 days, the number of lotuses is $2^4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$.

What if Damayanti had changed the order in which she placed the flowers in the lakes? How many lotuses would be there?

$$1 \times 3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2).$$

Can this product be expressed as an exponent m^n, where m and n are some counting numbers?

By regrouping the numbers,

$$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$$

$$= (3 \times 2)^4 = 6^4.$$

In general form,

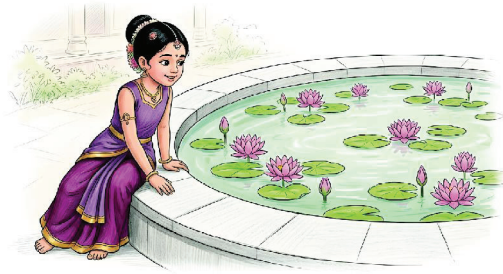
$m^a \times n^a = (mn)^a$, where a is a counting number or natural number.

Use this observation to compute the value of $2^5 \times 5^5$.

AP SCERT

అద్భుతమైన చెరువు

? ఒక అందమైన, అద్భుతమైన చెరువు మధ్యలో ఒక ప్రకాశవంతమైన గులాబీ రంగు తామర పువ్వు ఉంది. ఈ చెరువులో ప్రతిరోజూ తామర పువ్వుల సంఖ్య రెట్టింపు అవుతుంది. 30 రోజుల తర్వాత, చెరువు పూర్తిగా తామర పువ్వులతో నిండిపోతుంది. ఏ రోజున చెరువు సగం నిండింది?



30వ రోజున చెరువు పూర్తిగా తామర పువ్వులతో నిండిపోతే, 29వ రోజున దానిలో ఎంత భాగం తామర పువ్వులతో నిండి ఉంటుంది?

ప్రతిరోజూ తామర పువ్వుల సంఖ్య రెట్టింపు అవుతుంది కాబట్టి, 29వ రోజున చెరువు సగం నిండి ఉంటుంది.

? చెరువు (i) పూర్తిగా నిండినప్పుడు మరియు (ii) సగం నిండినప్పుడు ఉన్న తామర పువ్వుల సంఖ్యను (ఘాతాంక రూపంలో) రాయండి.

? మరొక చెరువు ఉంది, అందులో తామర పువ్వుల సంఖ్య ప్రతిరోజూ మూడు రెట్లు అవుతుంది. రెండు చెరువులలోనూ పువ్వులు లేనప్పుడు, దమయంతి రెట్టింపు అయ్యే చెరువులో ఒక తామర పువ్వును ఉంచింది. 4 రోజుల తర్వాత, ఆమె అక్కడి నుండి అన్ని తామర పువ్వులను తీసుకుని, వాటిని మూడు రెట్లు అయ్యే చెరువులో వేసింది. మరో 4 రోజుల తర్వాత మూడు రెట్లు అయ్యే చెరువులో ఎన్ని తామర పువ్వులు ఉంటాయి?

మొదటి 4 రోజుల తర్వాత, తామర పువ్వుల సంఖ్య $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.

తదుపరి 4 రోజుల తర్వాత, తామర పువ్వుల సంఖ్య $2^4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$.

? ఒకవేళ దమయంతి చెరువులలో పువ్వులు ఉంచే క్రమాన్ని మార్చి ఉంటే? అప్పుడు ఎన్ని తామర పువ్వులు ఉండేవి?

$1 \times 3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$.

? ఈ లబ్ధాన్ని ఘాతాంకం m^nగా వ్యక్తీకరించవచ్చా, ఇక్కడ m మరియు n లు కొన్ని లెక్కింపు సంఖ్యలు సంఖ్యలను తిరిగి సమూహపరచడం ద్వారా,

$$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$$

$$= (3 \times 2)^4 = 6^4.$$

సాధారణ రూపంలో,

$m^a \times n^a = (mn)^a$, a అనేది లెక్కింపు సంఖ్య లేదా సహజ సంఖ్య.

$2^5 \times 5^5$. విలువను లెక్కించడానికి ఈ పరిశీలనను ఉపయోగించండి.

AP SCERT

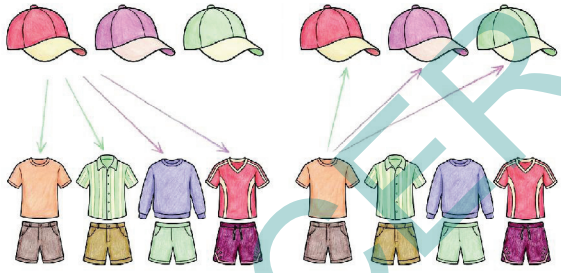
? Simplify $\frac{10^4}{5^4}$ and write it in exponential form.

In general, we can show that $\frac{m^a}{n^a} = \left(\frac{m}{n}\right)^a$

How Many Combinations

? Raju has 4 dresses and 3 caps. How many different ways canRaju combine the dresses and caps?

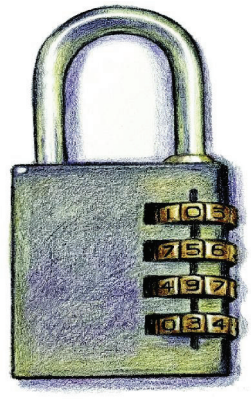
For each cap, he can choose any of the 4 dresses, so for 3 caps, $4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$ combinations are possible. We can also look at it as - for each dress,Raju can choose any of the 3 caps, so for 4 outfits, $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$ combinations are possible.



? Rekha has 7 dresses, 2 hats, and 3 pairs of shoes. How many different ways can Rekha dress up?

Hint: Try drawing a diagram like the one above.

? Raju and Rekha came across a safe containing old stamps and coins that their great-grandfather had collected. It was secured with a 5-digit password. Since nobody knew the password, they had no option except to try every password until it opened. They were unlucky and the lock only opened with the last password, after they had tried all possible combinations. How many passwords did they end up checking?



If you can't solve a problem, try to find a simpler version of the problem that you can solve. This technique can come in handy many times.

Instead of a 5-digit lock, let us assume we have a 2-digit lock and try to find out how many passwords are possible.

AP SCERT

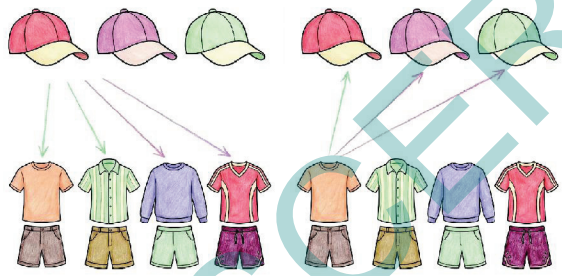
? $\frac{10^4}{5^4}$ ను సూక్ష్మీకరించండి మరియు దానిని ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

సాధారణంగా $\frac{m^a}{n^a} = \left(\frac{m}{n}\right)^a$ గా చూపవచ్చు.

ఎన్ని రకాల కలయికలు

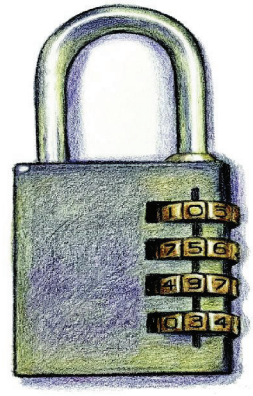
? రాజు వద్ద 4 దుస్తులు మరియు 3 టోపీలు ఉన్నాయి. రాజు దుస్తులు మరియు టోపీలను ఎన్ని విభిన్న విధాలుగా జత చేయగలడు?

ప్రతి టోపీకి, అతను 4 దుస్తులలో దేనినైనా ఎంచుకోవచ్చు, కాబట్టి 3 టోపీలకు, $4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$ రకాల కలయికలు సాధ్యమవుతాయి. మనం దీనిని ఇలా కూడా చూడవచ్చు – ప్రతి దుస్తులకు, రాజు 3 టోపీలలో దేనినైనా ఎంచుకోవచ్చు, కాబట్టి 4 దుస్తులకు, $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$ రకాల కలయికలు సాధ్యమవుతాయి.



? రేఖ వద్ద 7 దుస్తులు, 2 టోపీలు మరియు 3 జతల బూట్లు ఉన్నాయి. రేఖ ఎన్ని విభిన్న విధాలుగా దుస్తులు ధరించగలదు?

సూచన: పై చిత్రంలో ఉన్నటువంటి రేఖాచిత్రాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి.



? రాజు మరియు రేఖకు వారి ముత్తాత సేకరించిన పాత స్టాంపులు మరియు నాణేలు ఉన్న ఒక సేఫ్ కనిపించింది. దానికి 5 అంకెల పాస్‌వర్డ్‌తో భద్రత ఉంది. పాస్‌వర్డ్ ఎవరికీ తెలియకపోవడంతో, అది తెరుచుకునే వరకు ప్రతి పాస్‌వర్డ్‌ను ప్రయత్నించడం తప్ప వారికి వేరే మార్గం లేదు. వారి దురదృష్టం కొద్దీ, వారు సాధ్యమయ్యే అన్ని కలయికలను ప్రయత్నించిన తర్వాత, చివరి పాస్‌వర్డ్‌తో మాత్రమే తాళం తెరుచుకుంది. వారు మొత్తం ఎన్ని పాస్‌వర్డ్‌లను తనిఖీ చేశారు?

> మీరు ఒక సమస్యను పరిష్కరించలేకపోతే, మీరు పరిష్కరించగల ఆ సమస్య యొక్క సరళమైన రూపాన్ని కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి. ఈ పద్ధతి చాలాసార్లు ఉపయోగపడుతుంది.

5–అంకెల తాళం కు బదులుగా, మనకు 2–అంకెల తాళం ఉందని అనుకుందాం మరియు ఎన్ని పాస్‌వర్డ్‌లు సాధ్యమవుతాయో తెలుసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

AP SCERT

There are 10 options for the first digit (0 to 9). For each of these, there are 10 options for the second digit (If 0 is the first digit then 00, 01, 02, 03, ..., 09 are possible). Therefore the total number of combinations for a 2-digit lock is $10 \times 10 = 100$.

Now, suppose we have a 3-digit lock. For each of the earlier 100 (2-digit) passwords there are 10 choices for the third digit. So, there are $100 \times 10 = 1000$ combinations for a 3-digit lock. You can list them all: 000, 001, 002, ..., 997, 997, 999.

How many 5-digit passwords are possible?

Each digit has 10 choices, so a 5-digit lock will have:

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

= 1,00,000 passwords. This is the same as writing numbers till 99,999 with all 5 digits, i.e., 00000, 00001, 00002, ...00010, 00011, ..., 00100, 00101, ..., 00999, ..., 30456, ..., 99998, 99999.

Raju says, "Next time, I will buy a lock that has 6 slots with the letters A to Z. I feel it is safer."

? How many passwords are possible with such a lock?

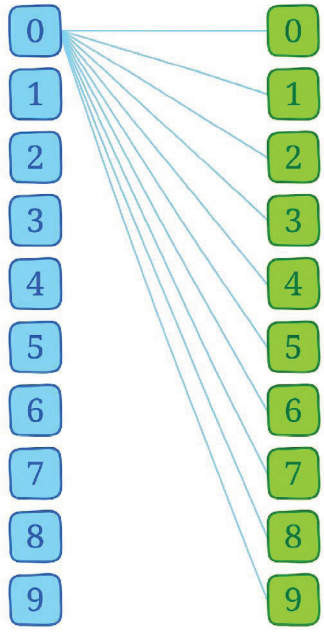
? Think about how many combinations are possible in contexts. Some examples are -

(i) Pincodes of places in India - The Pincode of Rajam in Andhra Pradesh is 532127. The Pincode of Puri in Odisha is 796017.

(ii) Mobile numbers.

(iii) Vehicle registration numbers.

Try to find out how these numbers or codes are allotted/generated.



2.2 The Other Side of Powers

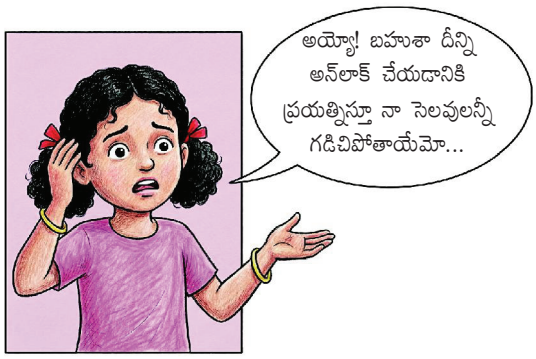
Imagine a line of length 16 units. Erasing half of it would result in

$$2^4 \div 2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \text{ units.}$$

AP SCERT

మొదటి అంకెకు 10 ఎంపికలు ఉన్నాయి (0 నుండి 9 వరకు). వీటిలో ప్రతిదానికి, రెండవ అంకెకు 10 ఎంపికలు ఉన్నాయి (ఒకవేళ మొదటి అంకె 0 అయితే, అప్పుడు 00, 01, 02, 03, ..., 09 సాధ్యమవుతాయి). కాబట్టి 2-అంకెల లాక్ కోసం మొత్తం సాధ్యమయ్యే సంఖ్యల కలయికలు 10 × 10 = 100.

ఇప్పుడు, మనకు 3-అంకెల తాళం ఉందని అనుకుందాం. ఇంతకు ముందు ఉన్న ప్రతి 100 (2-అంకెల) పాస్‌వర్డ్‌లకు, మూడవ అంకెకు 10 ఎంపికలు ఉన్నాయి. కాబట్టి, 3-అంకెల తాళం కోసం 100 × 10 = 1000 కలయికలు ఉన్నాయి. మీరు వాటన్నింటినీ జాబితా చేయవచ్చు : 000, 001, 002, ..., 997, 997, 999.



ఐదు అంకెల పాస్‌వర్డ్‌లు ఎన్ని సాధ్యమవుతాయి?

ప్రతి అంకెకు 10 ఎంపికలు ఉంటాయి, కాబట్టి 5 అంకెల లాక్‌కు ఇన్ని ఉంటాయి:

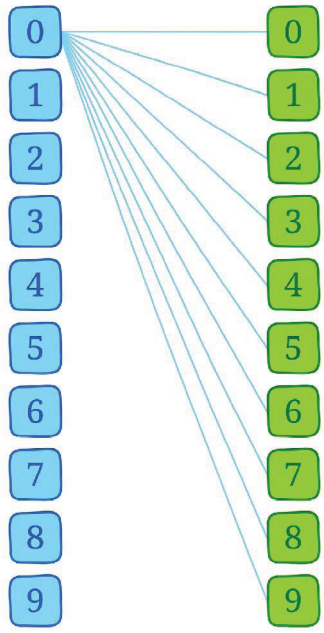
$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

= 1,00,000 పాస్‌వర్డ్‌లు. ఇది 5 అంకెలతో 99,999 వరకు సంఖ్యలను రాయడంతో సమానం, అంటే 00000, 00001, 00002, ...00010,

00011, ..., 00100, 00101, ..., 00999,

.., 30456, ..., 99998, 99999.

రాజు ఇలా అంటాడు, "తదుపరిసారి, నేను A నుండి Z వరకు అక్షరాలు ఉన్న 6 స్లాట్‌లు గల తాళాన్ని కొంటాను. అది మరింత సురక్షితమైనదని నేను భావిస్తున్నాను."



? ఇలాంటి తాళంతో ఎన్ని పాస్‌వర్డ్‌లు సాధ్యమవుతాయి?

? వివిధ సందర్భాలలో ఎన్ని రకాల కలయికలు సాధ్యమవుతాయో ఆలోచించండి. కొన్ని ఉదాహరణలు –

(i) భారతదేశంలోని ప్రదేశాల పిన్‌కోడ్‌లు – ఆంధ్రప్రదేశ్‌లోని రాజాం పిన్‌కోడ్ 532127. ఒడిశాలోని పూరి పిన్‌కోడ్ 796017.

(ii) మొబైల్ నంబర్లు.

(iii) వాహన రిజిస్ట్రేషన్ నంబర్లు.

ఈ నంబర్లు లేదా కోడ్‌లను ఎలా కేటాయిస్తారు/తయారు చేస్తారో తెలుసుకోవడానికి ప్రయత్నించండి.

2.2 ఘాతాంకాలకు మరొక వైపు

ముందుగా 16 యూనిట్ల పొడవున్న ఒక సరళ రేఖను ఊహించుకోండి. 16ని మనం ఘాతాంక రూపంలో

$2^4 \div 2 = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ యూనిట్లు అని రాయవచ్చు.

AP SCERT

Erasing half one more time would result in,

$$(2^4 \div 2) \div 2 = 2^4 \div 2^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2 = 4 \text{ units.}$$

Halving 16 cm three times may be written as,

$$2^4 \div 2^3 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 = 2^1 = 2 \text{ units.}$$

From this we can see that

$2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 21.$

? What is $2^{100} \div 2^{25}$ in powers of 2?

In a generalised form,

$$n^a \div n^b = n^{a-b},$$

where $n \neq 0$ and a and b are counting numbers and $a > b$.

? Why can't n be 0?

? We have not covered the case when the exponent is 0; for example, what is 2^0?

Let us define 2^0 in a way that the generalised form above holds true.

$$2^0 = 2^{4-4} = 2^4 \div 2^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 1.$$

In fact for any letter number a

$$2^0 = 2^{a-a} = 2^a \div 2^a = 1.$$

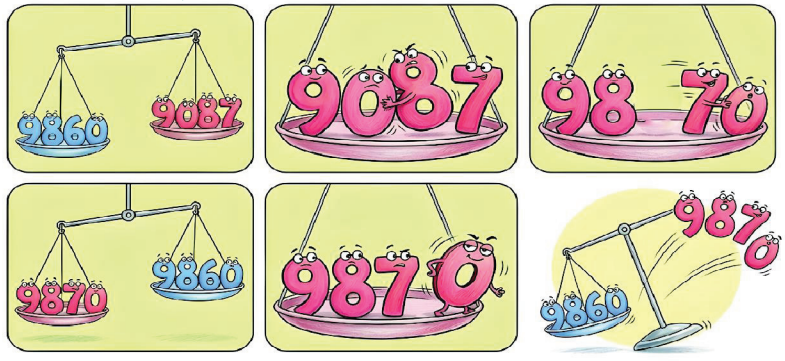
In general,

$$x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0, \text{ and so}$$

$$1 = x^0,$$

where $x \neq 0$ and a is a counting number.

When Zero is in Power!



When a line of length 2^4 units is halved 5 times,

AP SCERT

రెండోసారి సగం చేస్తే : 8లో సగం 4 యూనిట్లు అవుతుంది

$(2^4 \div 2) \div 2 = 2^4 \div 2^2 = \dfrac{2\times2\times2\times2}{2\times2} = 2 \times 2 = 2^2 = 4.$ అని చూడవచ్చు

మూడోసారి సగం చేస్తే : 4లో సగం 2 యూనిట్లు అవుతుంది.

$2^4 \div 2^3 = \dfrac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2 = 2^1 = 2$ యూనిట్లు

దీనిని ఘాతాంక రూపంలో

$2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 21.$

? $2^{100} \div 2^{25}$ ని 2 యొక్క ఘాతాంక రూపంలో రాయండి?

సూత్రం యొక్క సాధారణ రూపం

$$n^a \div n^b = n^{a-b},$$

ఇక్కడ a మరియు b లు లెక్కింపు సంఖ్యలు, $a > b$ మరియు $n \neq 0$

? n ఎందుకు 0 కాకూడదు?

? ఒక సంఖ్య యొక్క ఘాతాకం 0 అయినప్పుడు దాని ఫలితం గురించి ప్రస్తావించబడలేదు. ఉదాహరణకు 2^0 విలువ ఎంత?

$$2^0 = 2^{4-4} = 2^4 \div 2^4 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2} = 1.$$

వాస్తవానికి ఏదైనా సంఖ్య a కు

$$2^0 = 2^{a-a} = 2^a \div 2^a = 1.$$

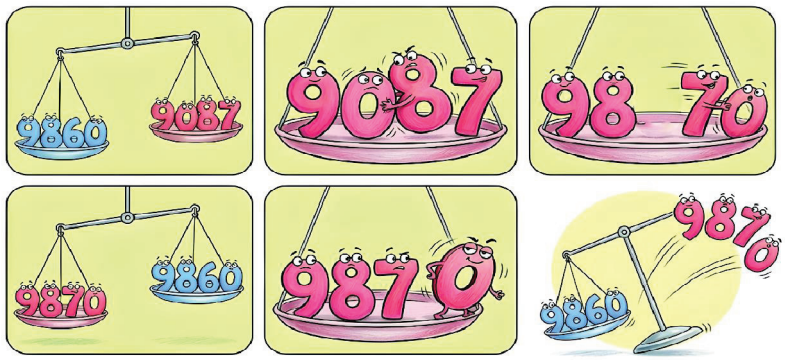
సాధారణంగా

$$x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0, \text{ కావున}$$

$$1 = x^0,$$

ఇక్కడ a అనేది సహజ సంఖ్య మరియు $x \neq 0$

సున్నా ఘాతాకంగా ఉన్నప్పుడు !



2^4 యూనిట్ల పొడవు గల ఒక రేఖను 5 సార్లు సగానికి తగ్గించినప్పుడు,

AP SCERT

$$2^4 \div 2^5 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2} \text{ units.}$$

Using the generalised form, we get $2^4 \div 2^5 = 2^{(4-5)} = 2^{-1}$.

So, $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

When a line of length 24 units is halved 10 times,

we get $2^4 \div 2^{10} = 2^{(4-10)} = 2^{-6}$ units.

When expanded, $2^4 \div 2^{10} = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

which is also written as 2^{-6}.

Similarly, $10^{-3} = \frac{1}{10^{32}}\ 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$, etc.

? Can we write $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$?

We can write, $\frac{1}{10^{-3}} = \frac{1}{1/10^3} = 1 \div \frac{1}{10^3} = 1\times10^3 = 10^3$

Similarly, $7^2 = \frac{1}{7^{-2}}$ and $4^a = \frac{1}{4^{-a}}$.

In a generalised form,

$n^{-a} = \frac{1}{n}$ and $n^a = \frac{1}{n^{-a}}$, where $n \neq 0$.

Consider the following general forms we have identified.

$n^a \times n^b = n^{a+b}$	$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a\times b}$	$n^a \div n^b = n^{a-b}$

? We had required a and b to be counting numbers. Can a and b be any integers? Will the generalised forms still hold true?

? Write equivalent forms of the following.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) $(-7)^{-2}$

(iv) $(-5)^{-3}$ (v) 10^{-100}

? Simplify and write the answers in exponential form.

(i) $2^{-4} \times 2^7$ (ii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $2^4 \times (-4)^{-2}$ (v) $8^p \times 8^q$

Power Lines

Let us arrange the powers of 4 along a line.

AP SCERT

$$2^4 \div 2^5 = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2}$$ యూనిట్స్

సాధారణ రూపంలో వాడినప్పుడు $2^4 \div 2^5 = 2^{(4-5)} = 2^{-1}$. అన్ని పొందుతాం

కావున, $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

24 యూనిట్ల పొడవు ఉన్న ఒక రేఖను 10 సార్లు సగానికి విభజించినప్పుడు

$2^4 \div 2^{10} = 2^{(4-10)} = 2^{-6}$ యూనిట్స్ గా పొందుతాం

విస్తరించి రాసిన $2^4 \div 2^{10} = \frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

దీనిని 2^{-6} గా కూడా రాయవచ్చు

అదే విధంగా, $10^{-3} = \frac{1}{10^{32}} 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$, etc.

? $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$ అని రాయగలరా ?

$\frac{1}{10^{-3}} = \frac{1}{1/10^3} = 1 \div \frac{1}{10^3} = 1\times10^3 = 10^3$ అని రాయగలము

సాధారణంగా, $7^2 = \frac{1}{7^{-2}}$ and $4^a = \frac{1}{4^{-a}}$.

సాధారణ రూపం లో రాసిన,

$n^{-a} = \frac{1}{n}$ మరియు $n^a = \frac{1}{n^{-a}}$, where $n \neq 0$.

మనం గుర్తించిన కింది సాధారణ రూపాలను పరిగణించండి.

$n^a \times n^b = n^{a+b}$	$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a\times b}$	$n^a \div n^b = n^{a-b}$

? a మరియు b అనేవి లెక్కించే సంఖ్యలు కావాలని మనము కోరాము. a మరియు b ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలు కావచ్చా? సాధారణీకరించిన రూపాలు అప్పటికీ నిజంగా ఉంటాయా?

? కింది వాటికి సమానమైన రూపాలను రాయండి.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) $(-7)^{-2}$

(iv) $(-5)^{-3}$ (v) 10^{-100}

? సూక్ష్మీకరించండి మరియు సమాధానాలను ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

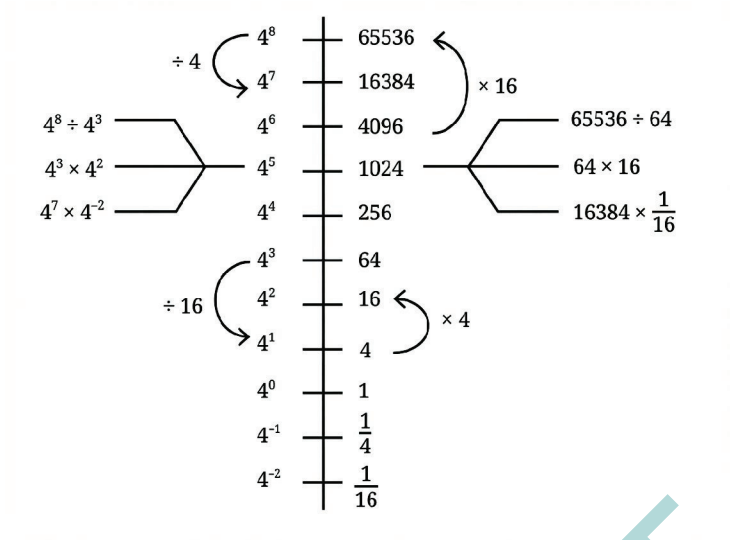
(i) $2^{-4} \times 2^7$ (ii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $2^4 \times (-4)^{-2}$ (v) $8^p \times 8^q$

ఘాతాంక రేఖలు

4 యొక్క ఘాతాంకాలను సరళరేఖ పై అమర్చుదాం.

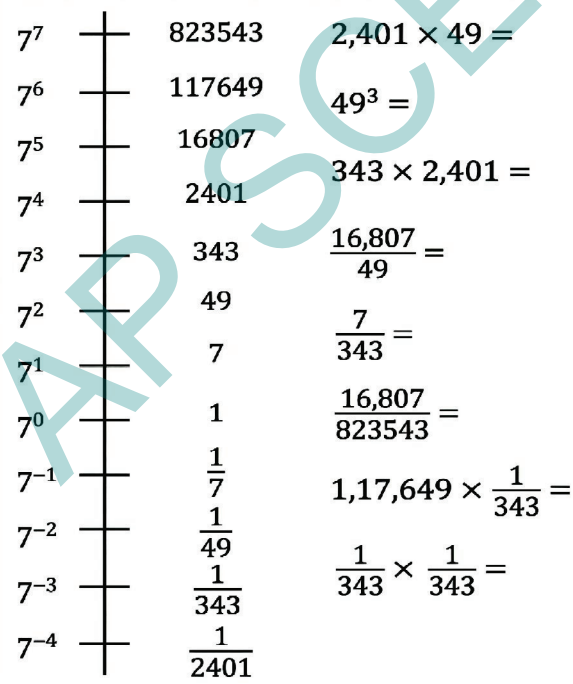
AP SCERT



? Can we say that 16384 (4^7) is 16 (4^2) times larger than 1,024 (4^5)?
Yes, since $4^7 \div 4^5 = 4^2$.

? How many times larger than 4^{-2} is 4^2?

? Use the power line for 7 to answer the following



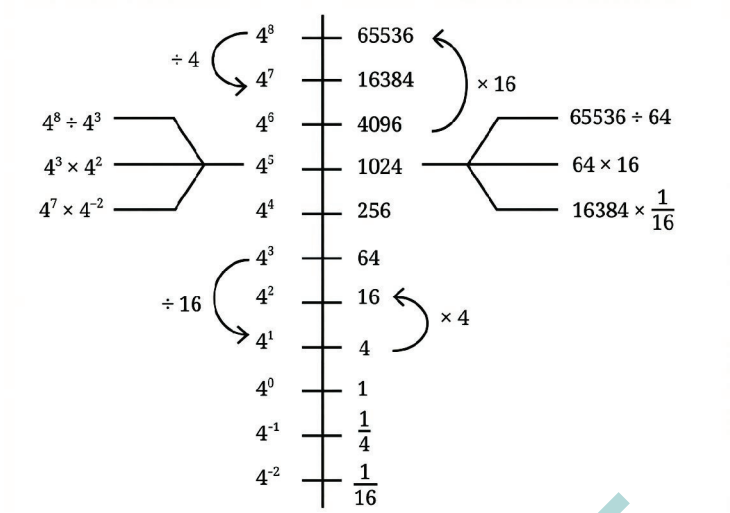
2.3 Powers of 10

We have used numbers like 10, 100, 1000, and so on when writing Indian numerals in an expanded form. For example,

$$47561 = (4 \times 10000) + (7 \times 1000) + (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1.$$

This can be written using powers of 10 as

AP SCERT

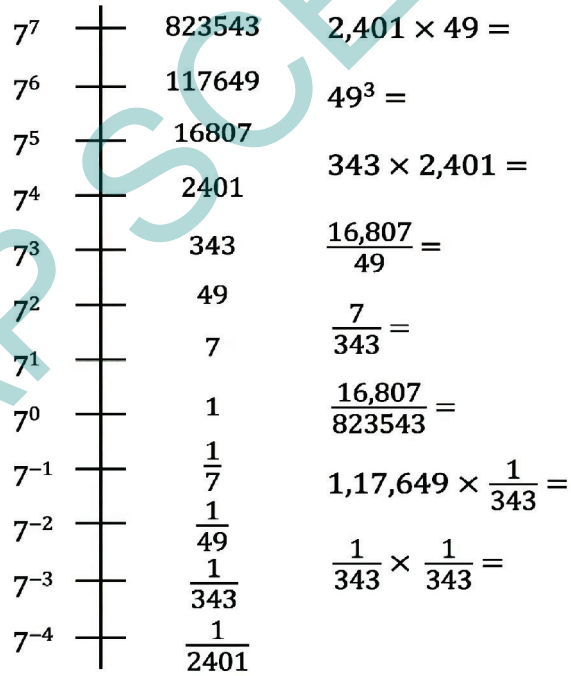


? 16384 (4^7) అనేది 1,024 (4^5) కంటే 16 (4^2) రెట్లు పెద్దదని మనం చెప్పగలమా?

అవును ఎందుకంటే $4^7 \div 4^5 = 4^2$.

? 4^2 అనేది 4^{-2} కంటే ఎన్నిరెట్లు పెద్దది?

? కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వడానికి 7 యొక్క ఘాతాంక రేఖను ఉపయోగించండి.



2.3 10 యొక్క ఘాతాలు

భారతీయ సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాసేటప్పుడు మనము 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలను ఉపయోగించాము. ఉదాహరణకు,

$$47561 = (4 \times 10000) + (7 \times 1000) + (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1.$$

దీనిని 10 ఘాతాంకాన్ని ఉపయోగించి ఇలా వ్రాయవచ్చు

AP SCERT

$$(4 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (5 \times 10^{2)} + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0).$$

? Write these numbers in the same way: (i) 172, (ii) 5642, (iii) 6374.

? How can we write 561.903?

$561.903 = (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1 + (9 \times \frac{1}{10}) + (0 \times \frac{1}{100}) + (3 \times \frac{1}{1000})$.

Writing it using powers of 10, we have

$561.903 = (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3})$.

? Expand the following numbers using exponents (a)810.65 (b)70.697

Scientific Notation

Let's look at some facts involving large numbers -

(i) The Sun is located 30,00,00,00,00,00,00,00,00,000 m from the centre of our Milky Way galaxy.

(ii) The number of stars in our galaxy is 1,00,00,00,00,000.

(iii) The mass of the Earth is 59,76,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 kg.

As the number of digits increases, it becomes difficult to read the numbers correctly. We may miscount the number of zeroes or place commas incorrectly. We will then read the wrong value. It is like getting ₹ 5,000 when you were supposed to get ₹ 50,000. The number of zeroes is more important than the initial digits in several cases.

Can we use the exponential notation to simplify and read these very large numbers correctly?

For example, the number 5900 can be expressed as -

$$5900 = 590 \times 10 = 590 \times 10^1$$
$$= 59 \times 100 = 59 \times 10^2$$
$$= 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$= 0.59 \times 10000 = 0.59 \times 10^4.$$

Any number can be written as the product of a number between 1 and 10 and a power of 10. For example,

$5900 = 5.9 \times 10^3$ $\quad$ $20800 = 2.08 \times 10^4$ $\quad$ $80,00,000 = 8 \times 10^6$

? Write the large-number facts we read just before in this form.

In **scientific notation or scientific form** (also called **standard form**), we write numbers as $x \times \frac{10}{y}$, where $x \geq 1$ and $x < 10$ is the coefficient and y, the exponent, is any integer. Often, the exponent y is more important than the coefficient x.

AP SCERT

$$(4 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0).$$

? ఈ సంఖ్యలును కూడా అదే విధంగా రాయండి (i) 172, (ii) 5642, (iii) 6374.

? మనం ఎలా రాయొచ్చు 561.903?

$$561.903 = (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1 + (9 \times \frac{1}{10}) + (0 \times \frac{1}{100}) + (3 \times \frac{1}{1000}).$$

వీటిని 10 ఘాతాంకాలుగా రాసినచో

$$561.903 = (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3}).$$

? ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి విస్తరణ రూపంలో రాయండి (a)810.65 (b)70.697

శాస్త్రీయ సంకేతం

పెద్ద సంఖ్యలకు సంబంధించిన కొన్ని వాస్తవాలను చూద్దాం ---

(i) సూర్యుడు మన పాలపుంత గెలాక్సీ కేంద్రం నుండి 30,00,00,00,00,00,00,00,00,000 మీటర్ల దూరంలో ఉన్నాడు.

(ii) మన గెలాక్సీలోని నక్షత్రాల సంఖ్య 1,00,00,00,00,000.

(iii) భూమి ద్రవ్యరాశి 59,76,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 కిలోగ్రాములు.

అంకెలు పెరిగే కొద్దీ, సంఖ్యలను సరిగ్గా చదవడం కష్టమవుతుంది. మనం సున్నాలను తప్పుగా లెక్కించవచ్చు లేదా కామాలను తప్పుగా పెట్టవచ్చు. అప్పుడు మనం తప్పు విలువను చదువుతాము. ఇది మీకు ₹ 50,000 రావాల్సి ఉండగా ₹ 5,000 వచ్చినట్లు ఉంటుంది. చాలా సందర్భాలలో, మొదటి అంకెల కంటే సున్నాల సంఖ్యే చాలా ముఖ్యం.

ఈ చాలా పెద్ద సంఖ్యలను సరళీకరించి, సరిగ్గా చదవడానికి మనం ఘాతాంక పద్ధతిని ఉపయోగించగలమా? ఉదాహరణకు, 5900 అనే సంఖ్యను ఈ విధంగా వ్యక్తపరచవచ్చు –

$$5900 = 590 \times 10 = 590 \times 10^1$$
$$= 59 \times 100 = 59 \times 10^2$$
$$= 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$= 0.59 \times 10000 = 0.59 \times 10^4.$$

ఏదైనా సంఖ్యను 1 మరియు 10 మధ్య ఉన్న ఒక సంఖ్య మరియు 10 యొక్క ఘాతం యొక్క లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు,

$$5900 = 5.9 \times 10^3 \qquad 20800 = 2.08 \times 10^4 \qquad 80,00,000 = 8 \times 10^6$$

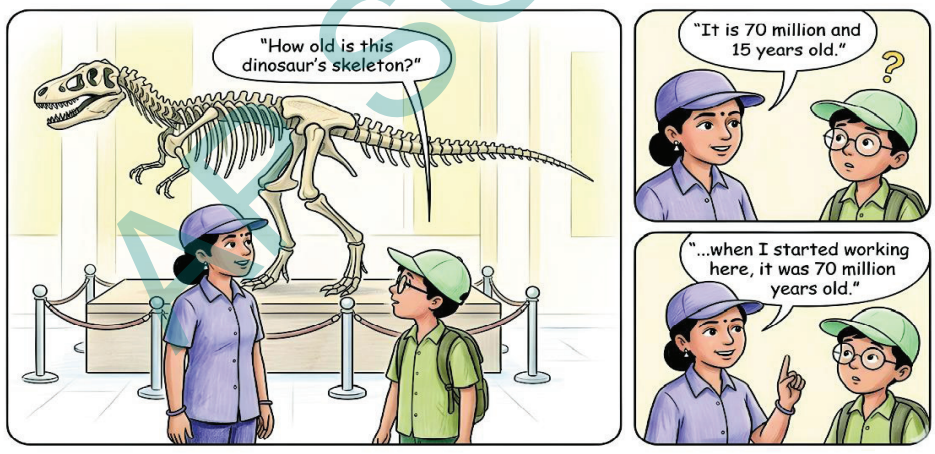
? మనం ఇప్పుడే చదివిన పెద్ద సంఖ్యలకు సంబంధించిన వాస్తవాలను ఈ రూపంలో రాయండి.

శాస్త్రీయ సంకేత రూపంలో లేదా **శాస్త్రీయ రూపంలో** (దీనిని ప్రామాణిక రూపం అని కూడా అంటారు), మనం సంఖ్యలను $x \times \frac{10}{y}$, రూపంలో రాస్తాము, ఇక్కడ $x \geq 1$ మరియు $x < 10$ అనేది గుణకం, మరియు y, ఘాతాంకం, ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్య. తరచుగా, గుణకం x కంటే ఘాతాంకం y చాలా ముఖ్యం.

AP SCERT

When we write the 2 crore population of Mumbai as 2×10^7, the 7 is more important than the 2. Indeed, if the 2 is changed to 3, the population increases by one-half, i.e., 2 crore to 3 crore, whereas if the 7 is changed to 8, the change in population is 10 times, i.e., 2 crores to 20 crores. Therefore, the standard form explicitly mentions the exponent, which indicates the number of digits.

If we say that the population of Kohima is 1,42,395, then it gives the impression that we are quite sure about this number up to the units place. When we use large numbers, in most cases, we are more concerned about how big a quantity or measure is, rather than the exact value. If we are only sure that the population is around 1 lakh 42 thousand, we can write it as 1.42×105. If we can only be certain that it is around 1 lakh 40 thousand, we write it as 1.4×105. The number of digits in the coefficient reflects how well we know the number. The most important part of any number written in scientific form is the exponent, and then the first digit of the coefficient. The digits following the coefficient are small corrections to the first digit.



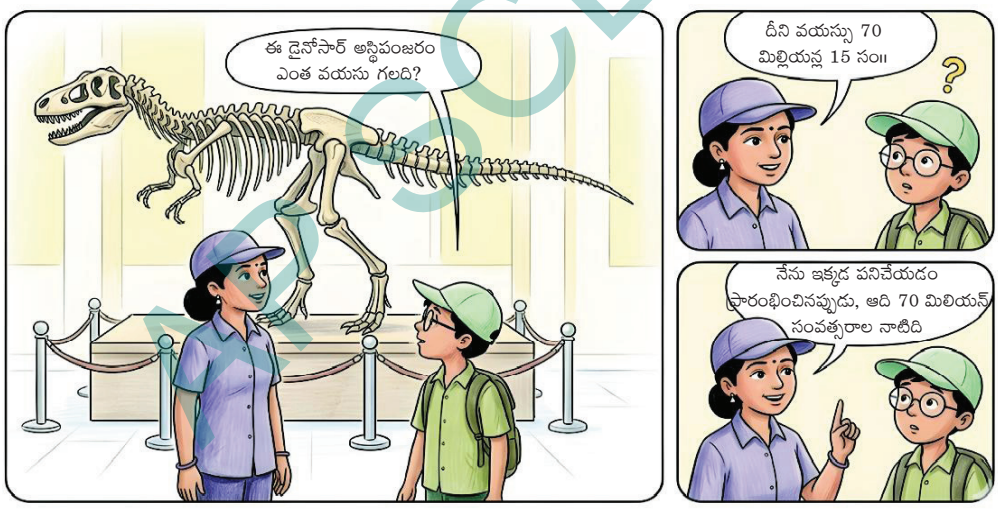
These values are rounded-off estimates, averages, or approximations; most of the time, they serve the purpose at hand.

The distance between the Sun and Saturn is 14,33,50,00,00,000 m $= 1.4335 \times 10^{12}$ m.

The distance between Saturn and Uranus is 14,39,00,00,00,000 m $= 1.439 \times 10^{12}$ m. The distance between the Sun and Earth is 1,49,60,00,00,000 m $= 1.496 \times 10^{11}$ m.

మనం ముంబై జనాభా అయిన 2 కోట్లను 2×10^7 అని రాసినప్పుడు, 2 కంటే 7 చాలా ముఖ్యం. నిజానికి, 2ని 3గా మార్చితే, జనాభా సగం పెరుగుతుంది, అంటే 2 కోట్ల నుండి 3 కోట్లకు, అదే 7ని 8గా మార్చితే, జనాభాలో మార్పు 10 రెట్లు ఉంటుంది, అంటే 2 కోట్ల నుండి 20 కోట్లకు. అందువల్ల, ప్రామాణిక రూపం ఘాతాంకాన్ని స్పష్టంగా తెలియజేస్తుంది, ఇది అంకెల సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

కోహిమా జనాభా 1,42,395 అని మనం చెబితే, ఈ సంఖ్య గురించి ఒకట్ల స్థానం వరకు మనకు చాలా ఖచ్చితంగా తెలుసు అనే భావన కలుగుతుంది. మనం పెద్ద సంఖ్యలను ఉపయోగించినప్పుడు, చాలా సందర్భాలలో, ఖచ్చితమైన విలువ కంటే ఒక పరిమాణం లేదా కొలత ఎంత పెద్దది అనే దాని గురించి మనం ఎక్కువగా ఆందోళన చెందుతాము. జనాభా సుమారు 1 లక్ష 42 వేలు అని మాత్రమే మనకు ఖచ్చితంగా తెలిస్తే, మనం దానిని 1.42×10^5 అని రాయవచ్చు. అది సుమారు 1 లక్ష 40 వేలు అని మాత్రమే మనం ఖచ్చితంగా చెప్పగలిగితే, మనం దానిని 1.4×10^5 అని రాస్తాము. గుణకంలోని అంకెల సంఖ్య మనకు ఆ సంఖ్య గురించి ఎంత బాగా తెలుసో ప్రతిబింబిస్తుంది. శాస్త్రీయ రూపంలో వ్రాసిన ఏ సంఖ్యలోనైనా అత్యంత ముఖ్యమైన భాగం ఘాతాంకం, ఆ తర్వాత గుణకం యొక్క మొదటి అంకె. గుణకాన్ని అనుసరించే అంకెలు మొదటి అంకెకు చిన్న సవరణలు.

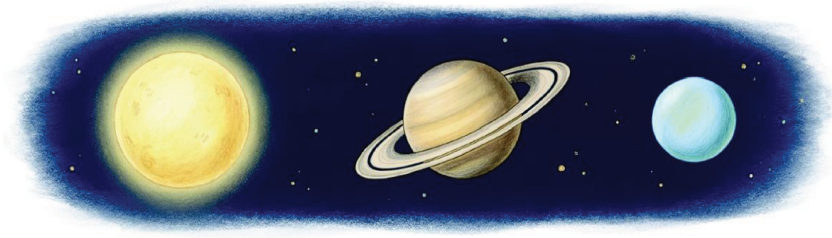


ఈ విలువలు సవరించిన అంచనాలు, సగటులు లేదా ఉజ్జాయింపులు; చాలా సార్లు, అవి ప్రస్తుత అవసరాన్ని తీరుస్తాయి.

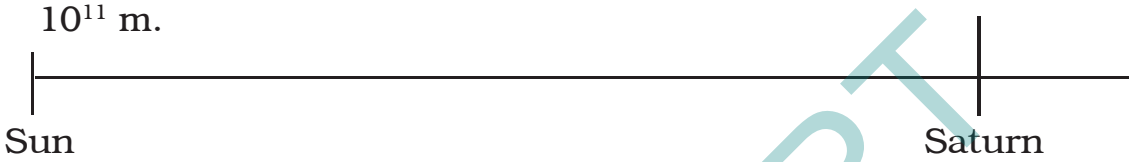
సూర్యుడికి మరియు శనికి మధ్య దూరం 14,33,50,00,00,000 మీ
$= 1.4335 \times 10^{12}$ మీ.

శనికి మరియు యురేనస్‌కు మధ్య దూరం 14,39,00,00,00,000 మీ
$= 1.439 \times 10^{12}$ మీ. సూర్యుడికి మరియు భూమికి మధ్య దూరం
1,49,60,00,00,000 మీ $= 1.496 \times 10^{11}$ మీ.

? Can you say which of the three distances is the smallest?



? The number line below shows the distance between the Sun and Saturn (1.4335×10^{12} m). On the number line below, mark the relative position of the Earth. The distance between the Sun and the Earth is 1.496×10^{11} m.



? Express the following numbers in standard form.

(i) 59,853 (ii) 65,950

(iii) 34,30,000 (iv) 70,04,00,00,000

2.4 Did You Ever Wonder?

Last year, we looked at interesting thought experiments in the chapter on Large Numbers. Let us continue this journey.

Navaneeth wants to donate jaggery equal to Rekha's weight and wheat equal to Estu's weight. He is wondering how much it would cost.

? What would be the worth (in rupees) of the donated jaggery? What would be the worth (in rupees) of the donated wheat?

In order to find out, let us first describe the relationships among the quantities present.

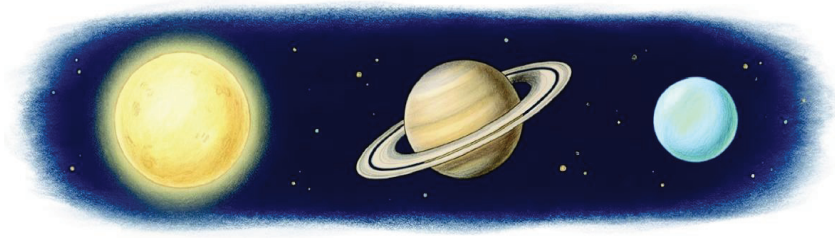
Worth of jaggery (in rupees) = Roxie's weight in kg × cost of 1 kg jaggery.

Worth of wheat (in rupees) = Estu's weight in kg × cost of 1 kg wheat.

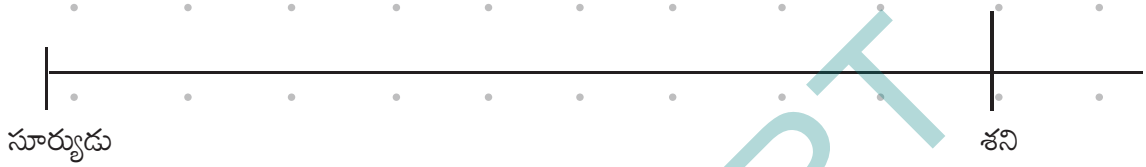
? Make necessary and reasonable assumptions for the unknowns and find

AP SCERT

? ఈ మూడు దూరాలలో ఏది అతి చిన్నదో మీరు చెప్పగలరా?



? క్రింది సంఖ్యా రేఖ సూర్యుడికి మరియు శనికి మధ్య ఉన్న దూరాన్ని (1.4335×10^{12} మీ) చూపిస్తుంది. క్రింది సంఖ్యా రేఖపై భూమి యొక్క సాపేక్ష స్థానాన్ని గుర్తించండి. సూర్యుడికి మరియు భూమికి మధ్య ఉన్న దూరం 1.496×10^{11} మీ.



? కింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 59,853 (ii) 65,950

(iii) 34,30,000 (iv) 70,04,00,00,000

2.4 మీరు ఎప్పుడైనా ఆలోచించారా?

గత సంవత్సరం, మనం పెద్ద సంఖ్యల గురించి చెప్పిన అధ్యాయంలో ఆసక్తికరమైన ఆలోచనా ప్రయోగాలను చూశాము. ఈ ప్రయాణాన్ని కొనసాగిద్దాం.

నవనీత్, రేఖ బరువుకు సమానమైన బెల్లాన్ని మరియు రాజు బరువుకు సమానమైన గోధుమలను దానం చేయాలనుకుంటున్నాడు. దానికి ఎంత ఖర్చవుతుందో అని అతను ఆలోచిస్తున్నాడు.

? విరాళంగా ఇచ్చిన బెల్లం విలువ (రూపాయలలో) ఎంత ఉంటుంది? విరాళంగా ఇచ్చిన గోధుమల విలువ (రూపాయలలో) ఎంత ఉంటుంది?

ఇది తెలుసుకోవడానికి, ముందుగా ఉన్న పరిమాణాల మధ్య సంబంధాలను వివరిద్దాం.

బెల్లం విలువ (రూపాయలలో) = రేఖ బరువు కిలోగ్రాములలో × 1 కిలో బెల్లం ధర. గోధుమల విలువ (రూపాయలలో) = రాజు బరువు కిలోగ్రాములలో × 1 కిలో గోధుమల ధర.

? తెలియని వాటి కోసం అవసరమైన మరియు సహేతుకమైన ఊహలు చేసి, సమాధానాలను కనుగొనండి.

AP SCERT

the answers. Remember, Rekha is 13 years old andRaju is 11 years old.

Assuming Roxie's weight to be 45 kg and the cost of 1 kg of jaggery to be ₹ 70, the worth of donated jaggery is 45 × 70 = ₹ 3150. Assuming Estu's weight to be 50 kg and the cost of 1 kg of wheat to be ₹ 50, the worth of donated wheat is 50 × 50 = ₹ 2500.

The practice of offering goods equal to the weight of a person, called Tulabhara or Tulabharam, is quite old and is still followed in many places in Southern India. It is a symbol of bhakti (surrendering oneself), a token of gratitude; it also supports the community.

? Rekha wonders, "Instead of jaggery if we use 1-rupee coins, how many coins are needed to equal my weight?". How can we find out?

For questions like these, you can consider following the steps suggested below.

1. Guessing: Make an instinctive (quick) guess of what the answer could be, without any calculations.
2. Calculating using estimation and approximation -
   (i) Describe the relationships among the quantities that are needed to find the answer.
   (ii) Make reasonable assumptions and approximations if the required information is not available.
   (iii) Compute and find the answer (and check how close your guess was.

? Would the number of coins be in hundreds, thousands, lakhs, crores, or even more? Make an instinctive guess.

? Find the answer by making necessary and reasonable assumptions and approximations for the unknowns. Remember, we are not looking for an exact answer but a reasonably close estimate.

How about measuring to find out the weight of a 1-rupee coin?

Initially, your guesses may be very far off from the answer and it is perfectly fine! You will get better at it like as you do it often and in different situations. Guessing and estimating can build intuition about numbers and various quantities.

AP SCERT

గుర్తుంచుకోండి, రేఖ వయస్సు 13 సంవత్సరాలు మరియు రాజు వయస్సు 11 సంవత్సరాలు.

రేఖ బరువు 45 కిలోలు మరియు 1 కిలోల బెల్లం ధర ₹ 70 అని ఊహిస్తే, విరాళంగా ఇచ్చిన బెల్లం విలువ 45 × 70 = ₹ 3150. రాజు బరువు 50 కిలోలు మరియు 1 కిలోల గోధుమల ధర ₹ 50 అని ఊహిస్తే, విరాళంగా ఇచ్చిన గోధుమల విలువ 50 × 50 = ₹ 2500.

తులాభారం అని పిలువబడే, ఒక వ్యక్తి బరువుకు సమానమైన వస్తువులను సమర్పించే ఆచారం చాలా పురాతనమైనది మరియు దక్షిణ భారతదేశంలోని అనేక ప్రదేశాలలో ఇప్పటికీ అనుసరించబడుతోంది. ఇది భక్తికి (ఆత్మసమర్పణకు) ప్రతీక, కృతజ్ఞతకు చిహ్నం; ఇది సమాజానికి కూడా తోడ్పడుతుంది.

? ఇలాంటి ప్రశ్నల కోసం, మీరు కింద సూచించిన దశలను అనుసరించవచ్చు.

1. ఊహించడం: ఎలాంటి లెక్కలు చేయకుండానే, సమాధానం ఏమిటో సహజంగా (త్వరగా) ఊహించండి.
2. అంచనా మరియు ఉజ్జాయింపు పద్ధతులను ఉపయోగించి లెక్కించడం –

   (i) సమాధానం కనుగొనడానికి అవసరమైన పరిమాణాల మధ్య సంబంధాలను వివరించండి.

   (ii) అవసరమైన సమాచారం అందుబాటులో లేకపోతే, సహేతుకమైన ఊహలు మరియు ఉజ్జాయింపులు చేయండి.

   (iii) లెక్కించి సమాధానం కనుగొనండి (మరియు మీ ఊహ ఎంత దగ్గరగా ఉందో తనిఖీ చేయండి.

? నాణేల సంఖ్య వందలు, వేలల్లో, లక్షల్లో, కోట్లలో లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా? సహజంగానే ఒక అంచనా వేయండి.

? తెలియని వాటికి అవసరమైన మరియు సహేతుకమైన అంచనాలు మరియు అంచనాలను రూపొందించడం ద్వారా సమాధానాన్ని కనుగొనండి. గుర్తుంచుకోండి, మనం ఖచ్చితమైన సమాధానం కోసం కాదు, సహేతుకమైన దగ్గరి అంచనా కోసం చూస్తున్నాము.

ఒక రూపాయి నాణెం బరువు ఎంత ఉందో కొలిచి తెలుసుకుంటే ఎలా ఉంటుంది?

మొదట్లో, మీరు వేసే అంచనాలు అసలు సమాధానానికి చాలా దూరంగా ఉండవచ్చు, అలా ఉండటంలో ఎలాంటి తప్పు లేదు! మీరు దీనిని తరచుగా మరియు విభిన్న పరిస్థితులలో చేస్తూ ఉంటే, ఇందులో నైపుణ్యం సాధిస్తారు. ఊహించడం మరియు అంచనా వేయడం వల్ల సంఖ్యలు మరియు వివిధ పరిమాణాల గురించి అంతర్ దృష్టిని పెంపొందించుకోవచ్చు.

AP SCERT

Raju asks, "What if we use 5-rupee coins or 10-rupee notes instead? How much money could it be?"

? Make an instinctive guess first. Then find out (make necessary and reasonable assumptions about the unknown details and find the answers). Raju says, "When I become an adult, I would like to donate notebooks worth my weight every year". Rekha says, "When I grow up, I would like to do (offering grains or meals) worth my weight every year".

? How many people might benefit from each of these offerings in a year? Again, guess first before finding out.

Math Talk

Rekha andRaju overheard someone saying - "We did padayatra for about 400 km to reach this place! We arrived early this morning."

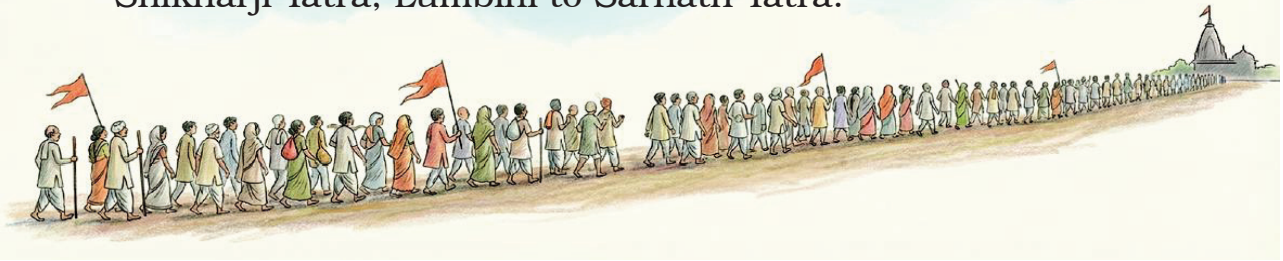
? How long ago would they have started their journey?

? Find answers by making necessary assumptions and approximations. Do guess first before calculating to check how close your guess was!

Note to the Teacher: Assumptions can vary greatly at times, and as a result the answers computed using these you can also vary. This is perfectly alright. Modelling the situation properly is crucial, which can also be done in different ways sometimes. The accuracy of the assumed numbers or quantities can get better with exposure and practice.

Padayatra, is the traditional practice of walking long distances as part of a religious or spiritual pursuit. People across religions in our country observe similar forms of pilgrimage or spiritual walking, although they may have different names or purposes.

Some of the pilgrimages are Ajmer Sharif Dargah Ziyarat, Pandharpur Wari, Kanwar Yatra, Sabarimala Yatra, Sammed Shikharji Yatra, Lumbini to Sarnath Yatra.



AP SCERT

రాజు ఇలా అడుగుతున్నాడు, "ఒకవేళ మనం 5 రూపాయల నాణేలు లేదా 10 రూపాయల నోట్లను ఉపయోగిస్తే ఎలా ఉంటుంది?అది ఎంత డబ్బు అవుతుంది?"

? ముందుగా ఊహించి చెప్పండి. ఆ తర్వాత కనుక్కోండి (తెలియని వివరాల గురించి అవసరమైన మరియు సహేతుకమైన ఊహలు చేసి సమాధానాలను కనుగొనండి).

రాజు ఇలా అంటున్నాడు, "నేను పెద్దయ్యాక, ప్రతి సంవత్సరం నా బరువుకు సమానమైన విలువ గల నోట్‌బుక్‌లను దానం చేయాలనుకుంటున్నాను". రేఖ ఇలా అంటుంది, "నేను పెద్దయ్యాక, ప్రతి సంవత్సరం నా బరువుకు సమానమైన విలువ గల అన్నదానం చేయాలనుకుంటున్నాను".

? ప్రతి సంవత్సరం ఈ దానాల వల్ల ఎంత మందికి ప్రయోజనం చేకూరుతుంది? మళ్ళీ, కనుగొనడానికి ముందుగా ఊహించండి.

రేఖ మరియు రాజు ఎవరో ఇలా అనడం విన్నారు – "ఈ ప్రదేశానికి చేరుకోవడానికి మేము సుమారు 400 కిలోమీటర్లు పాదయాత్ర చేశాము! మేము ఈ రోజు తెల్లవారుజామున ఇక్కడికి చేరుకున్నాము." వారు

? తమ ప్రయాణాన్ని ఎంత కాలం క్రితం ప్రారంభించి ఉంటారు?

? అవసరమైన ఊహలు మరియు ఉజ్జాయింపులు చేసి సమాధానాలను కనుగొనండి. మీ అంచనా ఎంత దగ్గరగా ఉందో తనిఖీ చేయడానికి, లెక్కించే ముందు ముందుగా ఊహించండి!

ఉపాధ్యాయులకు గమనిక: కొన్నిసార్లు ఊహలు చాలా విభిన్నంగా ఉండవచ్చు, మరియు దాని ఫలితంగా వాటిని ఉపయోగించి లెక్కించిన సమాధానాలు కూడా మారవచ్చు. ఇది పూర్తిగా సరైనదే. పరిస్థితిని సరిగ్గా నమూనా చేయడం చాలా ముఖ్యం, దీనిని కూడా కొన్నిసార్లు వివిధ మార్గాలలో చేయవచ్చు. అనుకున్న సంఖ్యలు లేదా పరిమాణాల కచ్చితత్వం అనుభవం మరియు అభ్యాసంతో మెరుగుపడుతుంది.

పాద యాత్ర అనేది మతపరమైన లేదా ఆధ్యాత్మిక అన్వేషణలో భాగంగా సుదూర ప్రాంతాలకు నడిచి వెళ్లే ఒక సాంప్రదాయ పద్ధతి. మన దేశంలో వివిధ మతాలకు చెందిన ప్రజలు, వేర్వేరు పేర్లు లేదా ప్రయోజనాలు ఉన్నప్పటికీ, ఇలాంటి తీర్థయాత్రలు లేదా ఆధ్యాత్మిక నడకలను ఆచరిస్తారు.

కొన్ని ముఖ్యమైన తీర్థయాత్రలు అజ్మీర్ షరీఫ్ దర్గా జియారత్, పండర్‌పూర్ వారి, కాన్వర్ యాత్ర, శబరిమల యాత్ర, సమ్మేద్ శిఖర్జీ యాత్ర, లుంబిని నుండి సారనాథ్ యాత్ర.

AP SCERT

Before the rise of modern transport, people moved from one place to another by walking - sometimes merchants, sages, and scholars walked thousands of kilometres to different parts of the world across deserts, mountains, and rivers.

? How many times can a person circumnavigate (go around the world) the Earth in their lifetime if they walk non-stop? Consider the distance around the Earth as 40,000 km.

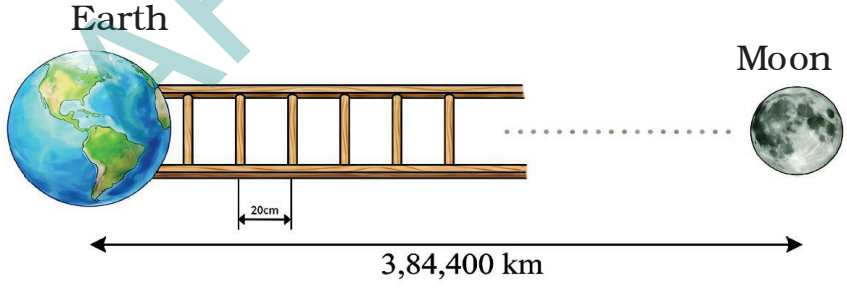
Linear Growth vs. Exponential Growth

Rekha tellsRaju about a science-fiction novel she is reading where they build a ladder to reach the moon, "... I wonder if we actually had a ladder like that, how many steps would it have?".

? What do you think? Make an instinctive guess first.

? Would the number of steps be in thousands, lakhs, crores, or even more?

To find out, we would need to know the gap between consecutive steps of the ladder. Let's assume a reasonable distance of 20 cm. Visualising the problem as shown,



? We have to find out how many 20 cm make 3,84,400 km.

If we calculate the value, we get the result as 1,92,20,00,000 steps, which is 192 crore and 20 lakh steps or 1 billion 922 million steps. The fixed increase in the distance from the earth with each step (a 20 cm gain after each step) is called linear growth.

AP SCERT

ఆధునిక రవాణా సౌకర్యాలు రాకముందు, ప్రజలు ఒక ప్రదేశం నుండి మరొక ప్రదేశానికి నడుచుకుంటూ వెళ్ళేవారు – కొన్నిసార్లు వ్యాపారులు, ఋషులు మరియు పండితులు ఎడారులు, పర్వతాలు మరియు నదులను దాటుకుంటూ ప్రపంచంలోని వివిధ ప్రాంతాలకు వేల కిలోమీటర్లు నడిచి వెళ్ళేవారు.

? ఒక వ్యక్తి తన జీవితకాలంలో ఆగకుండా నడిస్తే, భూమి చుట్టూ ఎన్నిసార్లు ప్రదక్షిణ చేయగలడు? భూమి చుట్టుకొలతను 40,000 కిలోమీటర్లుగా పరిగణించండి.

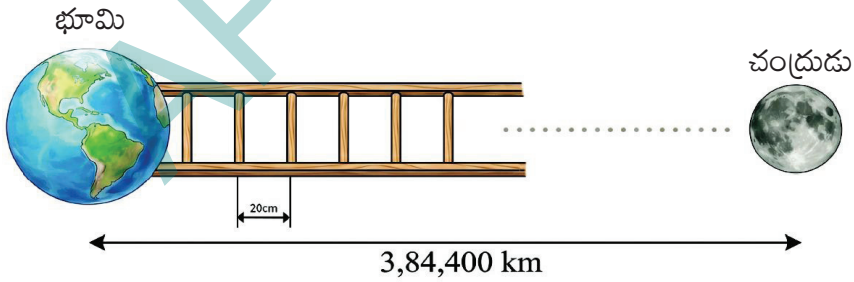
రేఖీయ వృద్ధి vs. ఘాతాంక వృద్ధి

రేఖ తాను చదువుతున్న ఒక సైన్స్ ఫిక్షన్ నవల గురించి రాజు కు చెబుతుంది, అందులో వారు చంద్రుడిని చేరుకోవడానికి ఒక నిచ్చెనను నిర్మిస్తారు, "... నిజంగా మనకు అలాంటి నిచ్చెన ఉంటే, దానికి ఎన్ని మెట్లు ఉంటాయో కదా?".

? మీరు ఏమనుకుంటున్నారు? ముందుగా ఊహాజనిత అంచనా వేయండి.

? మెట్ల సంఖ్య వేలల్లో, లక్షల్లో, కోట్లలో ఉంటుందా, లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా?

కనుగొనడానికి, మనకు నిచ్చెన యొక్క వరుస మెట్ల మధ్య దూరం తెలియాలి. ఒక సహేతుకమైన దూరం 20 సెం.మీ. అని ఊహించుకుందాం. చూపిన విధంగా సమస్యను దృశ్యమానం చేస్తే,



? 3,84,400 కిలోమీటర్లలో ఎన్ని 20 సెంటీమీటర్లు ఉన్నాయో మనం కనుగొనాలి.

మనం ఈ విలువను లెక్కిస్తే, ఫలితం 1,92,20,00,000 అడుగులుగా వస్తుంది, అంటే 192 కోట్ల 20 లక్షల అడుగులు లేదా 1 బిలియన్ 922 మిలియన్ల అడుగులు. ప్రతి అడుగుకు భూమి నుండి దూరం స్థిరంగా పెరగడాన్ని (ప్రతి అడుగు తర్వాత 20 సెం.మీ. పెరుగుదల) రేఖీయ వృద్ధి అంటారు.

AP SCERT

To cover the distance between the Earth and the Moon, it takes 1,92,20,00,000 steps with linear growth whereas it takes just 46 folds of a piece of paper with exponential growth! Linear growth is additive, whereas exponential growth is multiplicative.

$$\underbrace{20 + 20 + 20 + \ldots\ldots\ldots\ldots}_{1,92,20,00,000 \text{ times}} \qquad \underbrace{0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots\ldots}_{46 \text{ times}}$$

Some examples of exponential growth we have seen earlier in this chapter are 'The Stones that Shine', 'Magical Pond', 'How Many Combinations'. We shall explore more such interesting examples in a later chapter and also in the next grade.

? Can you come up with some examples of linear growth and of exponential growth?

Getting a Sense for Large Numbers

Last year, we learnt about lakhs and crores, as well as millions and billions. A lakh is 10^5 (1,00,000), a crore is 10^7 (1,00,00,000), and an arab is 10^9 (1,00,00,00,000), whereas a million is 10^6 (1,000,000) and a billion is 10^9 (1,000,000,000).

You might know the size of the world's human population. Have you ever wondered how many ants there might be in the world or how long ago humans emerged? In this section, we shall explore numbers significantly larger than arabs and billions. We shall use powers of 10 to represent and compare these numbers in each case.

10^0 As of mid - 2025, there are only two northern white rhinos remaining in the world, both females, and they reside at the Ol Pejeta Conservancy in Kenya ($= 2 \times 10^0$).

10^1 As of early 2024, the total population of Hainan gibbons is a meagre 42 ($\approx 4 \times 10^1$).

10^2 There are just 242 Kakapo alive as of mid - 2025 ($\approx 2 \times 10^2$).

10^3 There are fewer than 3000 Komodo dragons in the world, all based in Indonesia ($\approx 3 \times 10^3$).

AP SCERT

భూమికి మరియు చంద్రునికి మధ్య దూరాన్ని అధిగమించడానికి, రేఖీయ వృద్ధిలో 1,92,20,00,000 అడుగులు పడుతుంది, అదే ఘాతాంక వృద్ధిలో కేవలం ఒక కాగితపు ముక్కను 46 సార్లు మడవడం ద్వారా ఆ దూరాన్ని చేరుకోవచ్చు! రేఖీయ వృద్ధి సంకలన రూపంలో ఉంటుంది, అయితే ఘాతాంక వృద్ధి గుణకార రూపంలో ఉంటుంది.

$$\underbrace{20 + 20 + 20 + \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{1,92,20,00,000 సార్లు}} \qquad \underbrace{0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots\ldots}_{\text{46 సార్లు}}$$

ఈ అధ్యాయంలో మనం ఇంతకు ముందు చూసిన ఘాతాంక వృద్ధికి కొన్ని ఉదాహరణలు 'మెరిసే రాళ్లు', 'మాయా చెరువు', 'ఎన్ని కలయికలు'. మనం తర్వాతి అధ్యాయంలో మరియు వచ్చే తరగతిలో కూడా ఇలాంటి మరిన్ని ఆసక్తికరమైన ఉదాహరణలను అన్వేషిస్తాము.

? మీరు రేఖీయ వృద్ధికి మరియు ఘాతాంక వృద్ధికి కొన్ని ఉదాహరణలను చెప్పగలరా?

పెద్ద సంఖ్యలపై అవగాహన పొందడం

గత సంవత్సరం, మనం లక్షలు మరియు కోట్లతో పాటు మిలియన్లు మరియు బిలియన్ల గురించి నేర్చుకున్నాము. ఒక లక్ష అంటే 10^5 (1,00,000), ఒక కోటి అంటే 10^7 (1,00,00,000), మరియు ఒక అరబ్ అంటే 10^9 (1,00,00,00,000), అయితే ఒక మిలియన్ అంటే 10^6 (1,000,000) మరియు ఒక బిలియన్ అంటే 10^9 (1,000,000,000).

ప్రపంచ జనాభా పరిమాణం మీకు తెలిసి ఉండవచ్చు. ప్రపంచంలో ఎన్ని చీమలు ఉండవచ్చో లేదా మానవులు ఎంత కాలం క్రితం ఉద్భవించారో అని మీరు ఎప్పుడైనా ఆలోచించారా? ఈ విభాగంలో, మనం అరబ్లు మరియు బిలియన్ల కంటే గణనీయంగా పెద్ద సంఖ్యలను అన్వేషిస్తాము. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఈ సంఖ్యలను సూచించడానికి మరియు పోల్చడానికి మనం 10 యొక్క ఘాతాంకాలను ఉపయోగిస్తాము.

10^0 2025 మధ్య నాటికి, ప్రపంచంలో కేవలం రెండు ఉత్తర తెల్ల ఖడ్గమృగాలు మాత్రమే మిగిలి ఉన్నాయి, అవి రెండూ ఆడవి, మరియు అవి కెన్యాలోని ఓల్ పెజెటా కన్జర్వెన్సీలో నివసిస్తున్నాయి ($= 2 \times 10^0$).

10^1 2024 సంవత్సరం ప్రారంభం నాటికి, హైనాన్ గిబ్బన్‌ల మొత్తం జనాభా కేవలం 42 మాత్రమే ($\approx 4 \times 10^1$).

10^2 2025 మధ్య నాటికి కేవలం 242 కాకాపోలు మాత్రమే సజీవంగా ఉన్నాయి ($\approx 2 \times 10^2$).

10^3 ప్రపంచంలో 3000 కంటే తక్కువ కొమోడో డ్రాగన్‌లు ఉన్నాయి, అవన్నీ ఇండోనేషియాలోనే ఉన్నాయి ($\approx 3 \times 10^3$).

AP SCERT

10^4 A 2005 estimate of the maned wolf population showed that there are more than 17000 of them; most are located in Brazil (1.7×10^4).

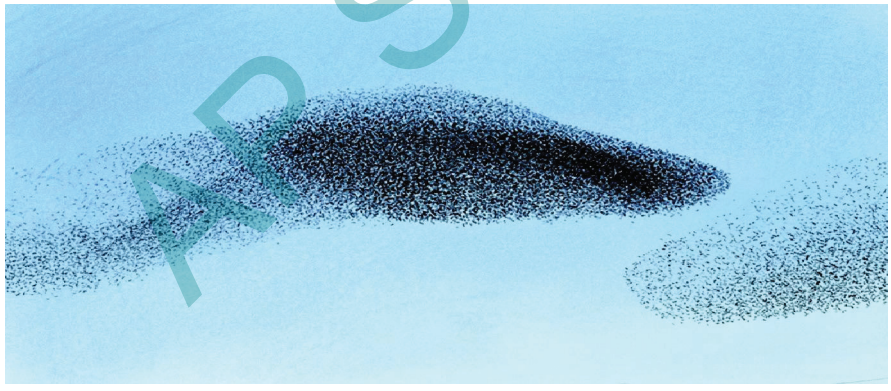
10^5 As of 2018, there are around 4.15 lakh African elephants ($\approx 4 \times 10^5$).

10^6 There are an estimated 50 lakh / 5 million American alligators as of 2025 (5×10^6).

10^7 The global camel population is estimated to be over 3.5 crore/ 35 million (3.5×10^7). India has only about 2.5 lakhs of them. The global horse population is around 5.8 crore / 58 million (5.8×10^7), with about half of them in America.

10^8 More than 20 crore / 200 million (2×10^8) water buffaloes are estimated worldwide, with a vast majority of them in Asia.

10^9 The estimated global population of starlings is around 1.3 arab/1.3 billion (1.3×10^9). The global human population as of 2025 is 8.2 arab/ 8.2 billion (8.2×10^9).



A picture of a starling murmuration over a farm in the UK. Starling murmuration is a mesmerising aerial display of thousands of starlings flying in synchronised, swirling patterns. It is often described as a 'choreographed dance'.

? With a global human population of about 8×10^9 and about 4×10^5 African elephants, can we say that there are nearly 20,000 people for every African elephant?

10^{10} The global chicken population living at any time is estimated at $\approx$ 33 billion (3.3×10^{10}).

AP SCERT

10^4 2005లో జరిపిన ఒక అంచనా ప్రకారం, మాన్డ్ తోడేళ్ల జనాభా 17000 కంటే ఎక్కువగా ఉంది; వాటిలో చాలా వరకు బ్రెజిల్‌లో ఉన్నాయి (1.7×10^4).

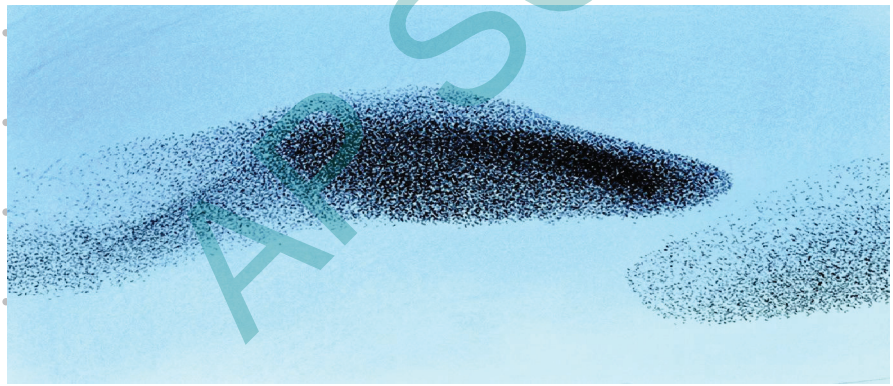
10^5 2018 నాటికి, సుమారు 4.15 లక్షల ఆఫ్రికన్ ఏనుగులు ఉన్నాయి ($\approx 4 \times 10^5$).

10^6 2025 నాటికి సుమారు 50 లక్షలు / 5 మిలియన్ల అమెరికన్ మొసళ్ళు ఉంటాయని అంచనా (5×10^6).

10^7 ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఒంటెల జనాభా 3.5 కోట్లకు పైగా ఉంటుందని అంచనా (3.5×10^7). భారతదేశంలో వాటిలో కేవలం 2.5 లక్షలు మాత్రమే ఉన్నాయి. ప్రపంచవ్యాప్తంగా గుర్రాల జనాభా సుమారు 5.8 కోట్లు / 58 మిలియన్లు (5.8×10^7) ఉంది, వాటిలో దాదాపు సగం అమెరికాలో ఉన్నాయి.

10^8 ప్రపంచవ్యాప్తంగా 20 కోట్లకు పైగా / 200 మిలియన్ల (2×10^8) నీటి గేదెలు ఉన్నాయని అంచనా, వాటిలో అధిక శాతం ఆసియాలో ఉన్నాయి.

10^9 స్టార్లింగ్ పక్షుల ప్రపంచ జనాభా సుమారు 1.3 అరబ్/1.3 బిలియన్లు (1.3×10^9) ఉంటుందని అంచనా. 2025 నాటికి ప్రపంచ మానవ జనాభా 8.2 అరబ్/8.2 బిలియన్లు (8.2×10^9).



UK లోని ఒక పొలంలో స్టార్లింగ్ గొణుగుతున్న చిత్రం. స్టార్లింగ్ గొణుగుతున్న శబ్దం వేలాది స్టార్లింగ్‌లు సమకాలీకరించబడిన, తిరుగుతున్న నమూనాలలో ఎగురుతున్న మంత్రముగ్ధులను చేసే గగన విన్యాసం (వైమానిక ప్రదర్శన). దీనిని తరచుగా 'రూపకల్పన (కొరియోగ్రాఫ్) చేసిన నృత్యం'గా అభివర్ణిస్తారు.

? ప్రపంచ మానవ జనాభా సుమారు 8×10^9 మరియు ఆఫ్రికన్ ఏనుగుల సంఖ్య సుమారు 4×10^5 ఉన్నప్పుడు, ప్రతి ఆఫ్రికన్ ఏనుగుకు సమానంగా దాదాపు 20,000 మంది ప్రజలు ఉన్నారని మనం చెప్పగలమా?

10^{10} ఏ సమయంలోనైనా జీవించి ఉన్న ప్రపంచ కోళ్ల జనాభా సుమారుగా

$\approx$ 33 బిలియన్లు (3.3×10^{10}) గా అంచనా వేయబడింది.

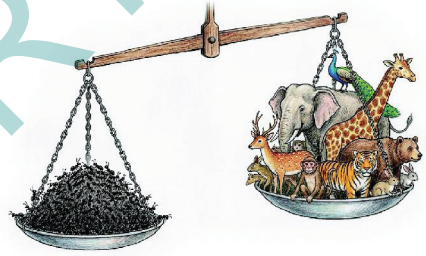
A SCERT

10^{12} The estimated number of trees (2023) globally stands at 30 kharab/3 trillion (3×10^{12}). One kharab is 100 arab, and one trillion is 1000 billion.

10^{14} The estimated mosquito population worldwide (2023) is 11 neel/110 trillion (1.10×10^{14}). A derived estimate of the population of the Antarctic krill stands at 50 neel/500 trillion (5×10^{14}).

10^{15} An estimate of the beetle population stands at 1 padma/1 quadrillion (1×10^{15}). The estimate of the earthworm population is also at 1 padma/1 quadrillion.

10^{16} The estimated population of ants globally is 20 padma/20 quadrillion (2×10^{16}). Ants alone outweigh all wild birds and wild mammals combined.



10^{21} is supposed to be the number of grains of sand on all beaches and deserts on Earth. This is enough sand to give every ant 10 little sand castles to live in.

10^{23} The estimated number of stars in the observable universe is 2×10^{23}.

10^{25} There are an estimated 2×10^{25} drops of water on Earth (assuming 16 drops per millilitre).

? Calculate and write the answer using scientific notation:

(i) How many ants are there for every human in the world?

(ii) If a flock of starlings contains 10,000 birds, how many flocks could there be in the world?

(iii) If each tree had about 10^4 leaves, find the total number of leaves on all the trees in the world.

AP SCERT

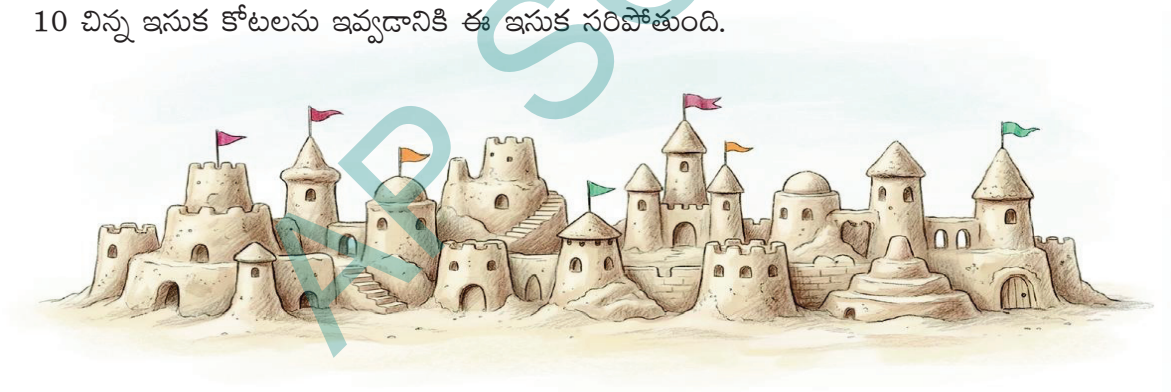
10^{12} ప్రపంచవ్యాప్తంగా చెట్ల అంచనా సంఖ్య (2023) 30 ఖరబ్‌లు/3 ట్రిలియన్లు (3×10^{12}) గా ఉంది. ఒక ఖరబ్ అంటే 100 అరబ్బులు, మరియు ఒక ట్రిలియన్ అంటే 1000 బిలియన్లు.

10^{14} ప్రపంచవ్యాప్తంగా దోమల అంచనా జనాభా (2023) 11 నీల్/ 110 ట్రిలియన్లు (1.10×10^{14}) గా ఉంది. అంటార్కిటిక్ క్రిల్ జనాభా యొక్క ఉత్పాదక అంచనా 50 నీల్/500 ట్రిలియన్లు (5×10^{14}) గా ఉంది.

10^{15} బీటిల్ జనాభా యొక్క అంచనా 1 పద్మ/1 క్వాడ్రిలియన్ (1×10^{15}) గా ఉంది. వానపాముల జనాభా అంచనా కూడా 1 పద్మ/1 క్వాడ్రిలియన్ గా ఉంది.

10^{16} ప్రపంచవ్యాప్తంగా చీమల అంచనా జనాభా 20 పద్మ/20 క్వాడ్రిలియన్లు (2×10^{16}) గా ఉంది. కేవలం చీమల బరువు అన్ని అడవి పక్షులు మరియు అడవి క్షీరదాల మొత్తం బరువు కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

10^{21} అనేది భూమిపై ఉన్న అన్ని బీచ్‌లు మరియు ఎడారులలోని ఇసుక రేణువుల సంఖ్యగా భావించబడుతుంది. ప్రతి చీమకు నివసించడానికి 10 చిన్న ఇసుక కోటలను ఇవ్వడానికి ఈ ఇసుక సరిపోతుంది.



10^{23} గమనించదగిన విశ్వంలో నక్షత్రాల అంచనా సంఖ్య 2×10^{23}.

10^{25} భూమిపై సుమారుగా 2×10^{25} నీటి బిందువులు ఉన్నాయి (ఒక మిల్లీలీటరుకు 16 బిందువులు ఊహిస్తే).

? శాస్త్రీయ సంకేత పద్ధతిని ఉపయోగించి సమాధానాన్ని లెక్కించి వ్రాయండి:

(i) ప్రపంచంలో ప్రతి మానవునికి ఎన్ని చీమలు ఉన్నాయి?

(ii) ఒక స్టార్లింగ్ పక్షుల గుంపులో 10,000 పక్షులు ఉంటే, ప్రపంచంలో అలాంటి ఎన్ని గుంపులు ఉండగలవు?

(iii) ప్రతి చెట్టుకు సుమారు 10^4 ఆకులు ఉంటే, ప్రపంచంలోని అన్ని చెట్లపై ఉన్న మొత్తం ఆకుల సంఖ్యను కనుగొనండి.

AP SCERT

(iv) If you stacked sheets of paper on top of each other, how many would you need to reach the Moon?

A different way to say your age!

"How old are you?" asked Raju.

"I completed 13 years a few weeks ago!" said Rekha.

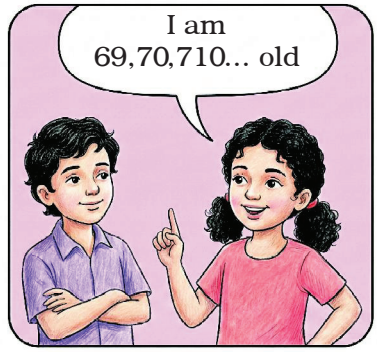
"How old are you?" asked Raju again.

"I'm 4840 days old today!" said Rekha.

"How old are you?" asked Raju again.

"I'm _____ hours old!" said Rekha.

Make an estimate before finding this number.



What could this number mean? Find out!

Raju: "I am 4070 days old today. Can you find out my date of birth?"

? If you have lived for a million seconds, how old would you be?

We shall look at approximate times and timelines of some events and phenomena, and use powers of 10 to represent and compare these quantities.

Time in seconds	Comparison to real-world events/ phenomena
10^0 = 1 second	- Time taken for a ball thrown up to fall back on the ground (typically a few seconds).
10^1 = 10 seconds	- Time blood takes to complete one full circulation through the body: 10 - 20 seconds (1×10^1 - 2×10^1 seconds). - Typical waiting time at a traffic signal.

Isn't it quite amazing how someone is able to estimate things like the number of ants in the world or the time blood takes to fully circulate? You may carry this wonder whenever you encounter such facts. You will come across such facts in subjects like Science and Social Science, where such estimates are made frequently.

10^2 seconds $\approx$ 1.6 minutes	- Time needed to make a cup of tea: 5 - 10 minutes ($\approx 4 \times 10^2$ - 8×10^2 seconds). - Time for light to reach the Earth from the Sun: about 8 minutes ($\approx 5 \times 10^2$ seconds).

AP SCERT

(iv) మీరు కాగితపు షీట్లను ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చితే, చంద్రుడిని చేరుకోవడానికి మీకు ఎన్ని షీట్లు అవసరమవుతాయి?

మీ వయస్సు చెప్పడానికి ఒక విభిన్నమైన మార్గం!

"నీ వయస్సు ఎంత?" అని రాజు అడిగాడు.

"నేను కొన్ని వారాల క్రితం 13 సంవత్సరాలు పూర్తి చేసుకున్నాను!" అని రేఖ చెప్పింది.

"నీ వయస్సు ఎంత?" అని రాజు మళ్ళీ అడిగింది.

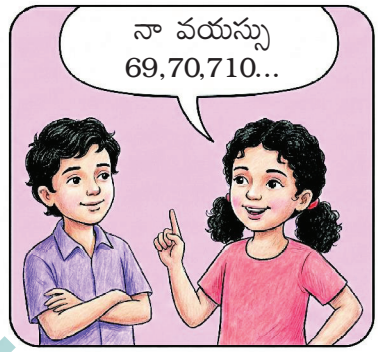
"ఈ రోజుకి నాకు 4840 రోజులు!" అని రేఖ చెప్పింది.

"నీ వయస్సు ఎంత?" అని రాజు మళ్ళీ అడిగాడు.

"నాకు గంటల వయస్సు!" అని రేఖ చెప్పింది.

ఈ సంఖ్యను కనుగొనడానికి ముందు ఒక అంచనా వేయండి.

రాజు : "ఈ రోజుకి నాకు 4070 రోజులు. నా పుట్టిన తేదీని నువ్వు కనుగొనగలవా?"



ఈ సంఖ్యకు అర్థం ఏమిటి? కనుగొనండి!

? మీరు ఒక మిలియన్ సెకన్ల పాటు జీవించి ఉంటే, మీ వయస్సు ఎంత ఉంటుంది?

మనం కొన్ని సంఘటనలు మరియు దృగ్విషయాల యొక్క సుమారు సమయాలు మరియు కాలపరిమితులను పరిశీలిస్తాము, మరియు ఈ పరిమాణాలను సూచించడానికి మరియు పోల్చడానికి 10 యొక్క ఘాతాలను ఉపయోగిస్తాము.

కాలం సెకన్లలో		వాస్తవ ప్రపంచ సంఘటనలు / దృగ్విషయాలతో పోటీ
10^0 = 1 సెకను	–	పైకి విసిరిన బంతి తిరిగి నేలపై పడటానికి పట్టే సమయం (సాధారణంగా కొన్ని సెకన్లు).
10^1 = 10 సెకన్లు	–	రక్తం శరీరంలో ఒక పూర్తి ప్రసరణను పూర్తి చేయడానికి పట్టే సమయం: 10 – 20 సెకన్లు (1×10^1 - 2×10^1 సెకన్లు).
	–	ట్రాఫిక్ సిగ్నల్ వద్ద సాధారణంగా వేచి ఉండే సమయం.

ప్రపంచంలో చీమల సంఖ్య లేదా రక్తం శరీరంలో పూర్తిగా ప్రసరించడానికి పట్టే సమయం వంటి విషయాలను ఒకరు ఎలా అంచనా వేయగలుగుతారో ఆలోచిస్తే చాలా ఆశ్చర్యంగా అనిపిస్తుంది కదూ? మీరు ఇలాంటి వాస్తవాలను ఎదుర్కొన్నప్పుడల్లా ఈ ఆశ్చర్యాన్ని అనుభూతి చెందవచ్చు. సైన్స్ మరియు సోషల్ సైన్స్ వంటి విషయాలలో మీకు ఇలాంటి వాస్తవాలు తారసపడతాయి, ఇక్కడ ఇటువంటి అంచనాలు తరచుగా వేయబడతాయి.

10^2 సెకన్లు $\approx$ 1.6 నిమిషాలు	–	ఒక కప్పు టీ తయారు చేయడానికి పట్టే సమయం: 5 – 10 నిమిషాలు ($\approx 4 \times 10^2$ - 8×10^2 సెకన్లు).
	–	సూర్యుడి నుండి కాంతి భూమిని చేరడానికి పట్టే సమయం: సుమారు 8 నిమిషాలు ($\approx 5 \times 10^2$ సెకన్లు).

AP SCERT

10^3 seconds $\approx$ 16.6 minutes - Satellites in low Earth orbits take between 90 minutes ($\approx 5.5 \times 10^3$ seconds) to 2 hours to complete one full revolution around the Earth.

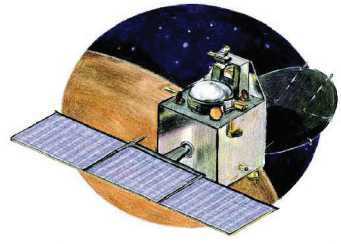
10^4 seconds $\approx$ 2.7 hours - The time needed to digest a meal: about 2 - 4 hours to pass through the stomach.

- Lifespan of an adult mayfly: about a day ($\approx 9 \times 10^4$ seconds).

? 10^5 seconds $\approx$ 1.16 days and 106 seconds $\approx$ 11.57 days. Think of some events or phenomena whose time is of the order of (i) 10^5 seconds and (ii) 10^6 seconds. Write them in scientific notation.

10^7 seconds $\approx$ 115.7 days / $\approx$ 3.8 months - Time spent sleeping in a year: about 4 months.

- Time taken by Mangalyaan mission to reach Mars: 298 days ($\approx 2.65 \times 10^7$ seconds).



- Time taken by Mars for one full revolution around the Sun: 687 Earth-days/1.88 Earth-years ($\approx 6 \times 10^7$ seconds).

10^8 seconds $\approx$ 3.17 years - The typical lifespan of most dogs is 3 to 15 years.

AP SCERT

10^3 సెకన్లు $\approx$ 16.6 నిమిషాలు – భూమికి దగ్గరగా ఉన్న కక్ష్యలలోని ఉపగ్రహాలు భూమి చుట్టూ ఒక పూర్తి ప్రదక్షిణ చేయడానికి 90 నిమిషాల ($\approx 5.5 \times 10^3$ సెకన్లు) నుండి 2 గంటల సమయం పడుతుంది.

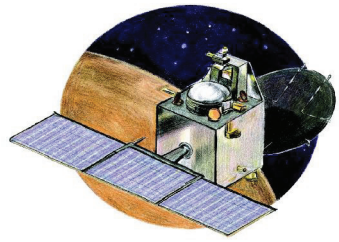
10^4 సెకన్లు $\approx$ 2.7 గంటలు – ఒక భోజనాన్ని జీర్ణం చేయడానికి పట్టే సమయం: కడుపులోంచి వెళ్ళడానికి సుమారు 2 – 4 గంటలు.

– ఒక వయోజన మేఫ్లై యొక్క జీవితకాలం: సుమారు ఒక రోజు ($\approx 9 \times 10^4$ సెకన్లు).

? 10^5 సెకన్లు $\approx$ 1.16 రోజులు మరియు 10^6 సెకన్లు $\approx$ 11.57 రోజులు. సమయం (i) 10^5 సెకన్లు మరియు (ii) 10^6 సెకన్ల పరిమాణంలో ఉండే కొన్ని సంఘటనలు లేదా దృగ్విషయాల గురించి ఆలోచించండి. వాటిని శాస్త్రీయ సంకేత రూపంలో రాయండి.

10^7 సెకన్లు $\approx$ 115.7 రోజులు / $\approx$ 3.8 నెలలు – ఒక సంవత్సరంలో నిద్రపోవడానికి వెచ్చించే సమయం: సుమారు 4 నెలలు.

– మంగళయాన్ మిషన్ అంగారకుడిని చేరుకోవడానికి పట్టిన సమయం: 298 రోజులు ($\approx 2.65 \times 10^7$ సెకన్లు).



– అంగారకుడు సూర్యుని చుట్టూ ఒక పూర్తి ప్రదక్షిణ చేయడానికి పట్టే సమయం: 687 భూమి రోజులు/1.88 భూమి సంవత్సరాలు ($\approx 6 \times 10^7$ సెకన్లు).

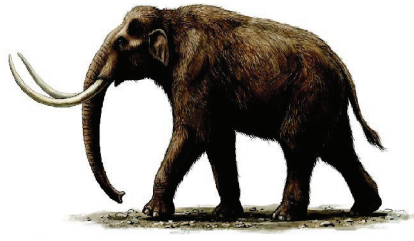
10^8 సెకన్లు $\approx$ 3.17 సంవత్సరాలు – చాలా కుక్కల సాధారణ జీవితకాలం 3 నుండి 15 సంవత్సరాలు.

AP SCERT

10^9 seconds $\approx$ 31.7 years	-	The orbital period of Halley's comet is 75 - 79 years; the next expected return is in the year 2061 ($\approx 2.4 \times 10^9$ seconds).
	-	Duration of one full revolution of Neptune around the Sun: 60,190 Earth-days/~165 Earth-years or 89,666 Neptunian days/1 Neptunian-year ($\approx 5.2 \times 10^9$ seconds). A day on Neptune is about 16.1 hours

Notice how rapid exponential growth is - 10^6 seconds is less than a fortnight, but 10^9 seconds is a whopping 31 years (about half the life expectancy of a human)!

10^{10} seconds $\approx$317 years	-	The Chola dynasty ruled for more than 900 years ($\approx 3 \times 10^{10}$ seconds) between the 3rd Century BCE and 12th Century CE.
10^{11} seconds $\approx$3,170 years	-	Age of the oldest known living tree: about 5000 years ($\approx 1.57 \times 10^{11}$ seconds).
	-	Time since the last peak ice age: 19,000 - 26,000 years ago ($\approx 6 \times 10^{11}$ seconds - 8.2×10^{11} seconds).
10^{12} seconds $\approx$ 31,700	-	Early Homo sapiens first appeared 2 - 3 lakh years ago ($\approx 7 \times 10^{12}$ - 9×10^{12} seconds). The entire population around that time could fit in a large cricket stadium.
10^{13} seconds $\approx$ 3.17 lakh years	-	The Steppe Mammoth is estimated to have appeared around 8 - 18 lakh years ago.



10^{14} seconds $\approx$3.17 million years	-	A fossil of Kelenken Guillermoi, a type of terror bird, is dated to 15 million years ago ($\approx$ _____seconds).

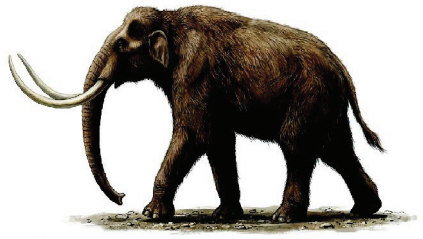
10^{15} seconds	-	Age of Himalayas: 5.5 crore years/55 million years

APSCERT

10^9 సెకన్లు $\approx$ 31.7 సంవత్సరాలు	–	హేలీ తోకచుక్క యొక్క కక్ష్య కాలం 75 -- 79 సంవత్సరాలు; తదుపరి రాక 2061 సంవత్సరంలో ఉంటుందని అంచనా వేయబడింది ($\approx 2.4 \times 10^9$ సెకన్లు).
	–	సూర్యుని చుట్టూ నెప్ట్యూన్ ఒక పూర్తి పరిభ్రమణం చేయడానికి పట్టే సమయం: 60,190 భూమి రోజులు / $\approx$ 165 భూమి సంవత్సరాలు లేదా 89,666 నెప్ట్యూన్ రోజులు/1 నెప్ట్యూన్ సంవత్సరం ($\approx 5.2 \times 10^9$ సెకన్లు). నెప్ట్యూన్‌పై ఒక రోజు సుమారు 16.1 గంటలు.

ఘాతాంక వృద్ధి ఎంత వేగంగా ఉంటుందో గమనించండి – 10^6 సెకన్లు అంటే రెండు వారాల కంటే తక్కువ సమయం, కానీ 10^9 సెకన్లు అంటే ఏకంగా 31 సంవత్సరాలు (మానవుని సగటు ఆయుర్దాయంలో దాదాపు సగం)!

10^{10} సెకన్లు $\approx$ 317 సంవత్సరాలు	–	క్రీ.పూ. 3వ శతాబ్దం మరియు క్రీ.శ. 12వ శతాబ్దం మధ్య చోళ రాజవంశం 900 సంవత్సరాలకు పైగా ($\approx 3 \times 10^{10}$ సెకన్లు) పరిపాలించింది.
10^{11} సెకన్లు $\approx$ 3,170 సంవత్సరాలు	–	తెలిసిన అత్యంత పురాతన జీవించి ఉన్న చెట్టు వయస్సు: సుమారు 5000 సంవత్సరాలు ($\approx 1.57 \times 10^{11}$ సెకన్లు).
	–	చివరి గరిష్ట హిమయుగం నుండి గడిచిన సమయం: 19,000 – 26,000 సంవత్సరాల క్రితం ($\approx 6 \times 10^{11}$ సెకన్లు - 8.2×10^{11} సెకన్లు).
10^{12} సెకన్లు $\approx$ 31,700 సంవత్సరాలు	–	తొలి హోమో సేపియన్స్ 2 – 3 లక్షల సంవత్సరాల క్రితం ($\approx 7 \times 10^{12}$ - 9×10^{12} సెకన్లు) మొదటిసారిగా కనిపించారు. ఆ కాలంలోని మొత్తం జనాభా ఒక పెద్ద క్రికెట్ స్టేడియంలో సరిపోగలదు.
10^{13} సెకన్లు $\approx$ 3.17 లక్షల సంవత్సరాలు	–	స్టెప్పీ మముత్ సుమారు 8 – 18 లక్షల సంవత్సరాల క్రితం కనిపించిందని అంచనా.
10^{14} సెకన్లు $\approx$ 3.17 మిలియన్ల సంవత్సరాలు	–	ఒక రకమైన భయంకరమైన పక్షి అయిన కెలింకన్ గిల్లెర్మోయ్ యొక్క శిలాజం 15 మిలియన్ల సంవత్సరాల క్రితం నాటిదిగా నిర్ధారించబడింది. ($\approx$ _____ సెకన్లు).
10^{15} సెకన్లు	–	హిమాలయాల వయస్సు: 5.5 కోట్ల సంవత్సరాలు/55 మిలియన్ సంవత్సరాలు



AP SCERT

$\approx$ 3.17 crore years	($\approx$ 1.7×10^{15} seconds); they continue to grow a few mm every year.
	- Dinosaurs went extinct 6.6 crore years ago/66 million years ago ($\approx$ 2×10^{15} seconds).
	- Dinosaurs first appeared more than 20 crore/200 million years ago ($\approx$ 6×10^{15} seconds).
	- It takes about 23 crore years for the Sun to make one complete trip around the Milky Way ($\approx$ 7×10^{15} seconds).
10^{16} seconds $\approx$ 31.7 crore years	- Plants on land started 47 crore/470 million years ago ($\approx$ _____seconds).
10^{17} seconds $\approx$ 3.17 billion years	- The oldest fossil evidence suggests that bacteria first appeared about 3.7 billion years ago.
	- The Earth is 4.5 billion years old.
	- The Milky Way galaxy was formed 13.6 billion years ago, and the Universe was formed 13.8 billion years ago.

Notice that 10^9 seconds is of the order of the lifespan of a human, whereas 10^{18} seconds ago the universe did not exist according to modern physics!! The exponential notation can capture very large quantities in a concise manner.

? Calculate and write the answer using scientific notation:

(i) If one star is counted every second, how long would it take to count all the stars in the universe? Answer in terms of the number of seconds using scientific notation.

(ii) If one could drink a glass of water (200 ml) every 10 seconds, how long would it take to finish the entire volume of water on Earth?

Very large quantities are often beyond our experience and comprehension. To put them into perspective, we can relate and compare them with quantities we are familiar with. This can give an essence of how large a number or a measure is!

AP SCERT

$\approx$ 3.17 కోట్ల సంవత్సరాలు		($\approx 1.7 \times 10^{15}$ సెకన్లు); అవి ప్రతి సంవత్సరం కొన్ని మిల్లీమీటర్ల మేర పెరుగుతూనే ఉన్నాయి.
	–	డైనోసార్లు 6.6 కోట్ల సంవత్సరాల క్రితం/66 మిలియన్ సంవత్సరాల క్రితం అంతరించిపోయాయి ($\approx 2 \times 10^{15}$ సెకన్లు).
	–	డైనోసార్లు మొదటిసారిగా 20 కోట్ల సంవత్సరాల కంటే ముందు/200 మిలియన్ సంవత్సరాల క్రితం కనిపించాయి ($\approx 6 \times 10^{15}$ సెకన్లు).
	–	సూర్యుడు పాలపుంత చుట్టూ ఒక పూర్తి ప్రదక్షిణ చేయడానికి సుమారు 23 కోట్ల సంవత్సరాలు పడుతుంది ($\approx 7 \times 10^{15}$ సెకన్లు).
10^{16} సెకన్లు $\approx$ 31.7 కోట్ల సంవత్సరాలు	–	భూమిపై మొక్కలు 47 కోట్ల/470 మిలియన్ల సంవత్సరాల క్రితం ప్రారంభమయ్యాయి ($\approx$ _____ సెకన్లు).
10^{17} సెకన్లు $\approx$ 3.17 బిలియన్ సంవత్సరాలు	–	పురాతన శిలాజ ఆధారాల ప్రకారం, బ్యాక్టీరియా సుమారు 3.7 బిలియన్ సంవత్సరాల క్రితం మొదటిసారిగా కనిపించింది.
	–	భూమికి 4.5 బిలియన్ సంవత్సరాల వయస్సు.
	–	పాలపుంత గెలాక్సీ 13.6 బిలియన్ సంవత్సరాల క్రితం ఏర్పడింది, మరియు విశ్వం 13.8 బిలియన్ సంవత్సరాల క్రితం ఏర్పడింది.

గమనించండి, 10^9 సెకన్లు అనేది ఒక మనిషి జీవితకాలం యొక్క పరిమాణంలో ఉంటుంది, అయితే ఆధునిక భౌతిక శాస్త్రం ప్రకారం 10^{18} సెకన్ల క్రితం విశ్వం ఉనికిలోనే లేదు!! ఘాతాంక సంకేత పద్ధతి చాలా పెద్ద పరిమాణాలను సంక్షిప్త పద్ధతిలో వ్యక్తపరచగలదు.

? శాస్త్రీయ సంకేత పద్ధతిని ఉపయోగించి సమాధానాన్ని లెక్కించి వ్రాయండి :

(i) ప్రతి సెకనుకు ఒక నక్షత్రాన్ని లెక్కిస్తే, విశ్వంలోని అన్ని నక్షత్రాలను లెక్కించడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది? సమాధానాన్ని శాస్త్రీయ సంకేత పద్ధతిని ఉపయోగించి సెకన్ల రూపంలో తెలపండి.

(ii) ప్రతి 10 సెకన్లకు ఒక గ్లాసు నీటిని (200 మి.లీ) తాగగలిగితే, భూమిపై ఉన్న మొత్తం నీటి పరిమాణాన్ని తాగడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

చాలా పెద్ద పరిమాణాలు తరచుగా మన అనుభవానికి మరియు అవగాహనకు అతీతంగా ఉంటాయి. వాటిని సరిగ్గా అర్థం చేసుకోవడానికి, మనం వాటిని మనకు సుపరిచితమైన పరిమాణాలతో పోల్చి చూడవచ్చు. ఇది ఒక సంఖ్య లేదా కొలత ఎంత పెద్దదో అనే దాని గురించి ఒక అవగాహనను ఇస్తుంది!

AP SCERT

2.5 A Pinch of History

In the Lalitavistara, a Buddhist treatise from the first century BCE, we see number - names for odd powers of ten up to 10^{53}. The following occurs as part of the dialogue between the mathematician Arjuna and Prince Gautama, the Bodhisattva.

"Hundred kotis are called an ayuta (10^9), hundred ayutas a niyuta (10^{11}), hundred niyutas a kankara (10^{13}), ..., hundred sarva-balas a visamjna- gati (10^{47}), hundred visamjna-gatis a sarvajna (10^{49}), hundred sarvajnas a vibhutangama (10^{51}), a hundred vibhutangamas is a tallakshana (10^{53})."

Mahaviracharya gives a list of 24 terms (i.e., up to 10^{23}) in his treatise Ganita-sara-sangraha. An anonymous Jaina treatise Amalasiddhi gives a list with a name for each power of ten up to 10^{96} (dasha-ananta). A Pali grammar treatise of Kaccayana lists number-names up to 10^{140}, named asankhyeya.

For expressing high powers of ten, Jaina and Buddhist texts use bases like sahassa (thousand) and ko?i (ten million); for instance, prayuta (10^6) would be dasa sata sahassa (ten hundred thousand).

The modern naming is similar to this, where we say,

A hundred thousand is a lakh	$100 \times 1000 = 1,00,000$	$10^2 \times 10^3 = 10^5$
A hundred lakhs is a crore	$100 \times 1,00,000 = 1,00,00,000$	$10^2 \times 10^5 = 10^7$
A hundred crores is an arab	$100 \times 1,00,00,000 = 1,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^7 = 10^9$
A hundred arab is a kharab	$100 \times 1,00,00,00,000 = 1,00,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^9 = 10^{11}$

Continuing this, a hundred kharab is a neel (10^{13}), a hundred neel is a padma (10^{15}), a hundred padma is a shankh (10^{17}) and a hundred shankh is a maha shankh (10^{19}).

In the American/International system, we say

A thousand thousand	$1000 \times 1000 = 1,000,000$	$10^3 \times 10^3 = 10^6$

AP SCERT

2.5 చరిత్రలో గణితం

క్రీ.పూ. మొదటి శతాబ్దానికి చెందిన బౌద్ధ గ్రంథమైన లలితవిస్తారంలో, మనం 10^{53} వరకు పది యొక్క బేసి ఘాతాలకు సంఖ్యా నామాలను చూస్తాము. గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు అర్జునుడు మరియు బోధిసత్వుడైన యువరాజు గౌతముడి మధ్య జరిగిన సంభాషణలో ఈ క్రిందిది కనిపిస్తుంది.

"వంద కోట్లను ఆయుతము (10^9) అంటారు, వంద ఆయుతాలను నియుతము (10^{11}) అంటారు, వంద నియుతాలను కంకరము (10^{13}) అంటారు, ..., వంద సర్వ-బలాలను విసంజ్ఞ-గతి (10^{47}) అంటారు, వంద విసంజ్ఞ-గతులను సర్వజ్ఞ (10^{49}) అంటారు, వంద సర్వజ్ఞలను విభూతంగమ (10^{51}) అంటారు, వంద విభూతంగమలు ఒక తల్లక్షణము (10^{53})."

మహావీరాచార్యుడు తన గణిత-సార-సంగ్రహం అనే గ్రంథంలో 24 పదాల జాబితాను (అంటే, 10^{23} వరకు) ఇచ్చాడు. అజ్ఞాత జైన గ్రంథమైన అమలసిద్ధి, 10^{96} (దశ-అనంత) వరకు పది యొక్క ప్రతి ఘాతానికి ఒక పేరుతో కూడిన జాబితాను ఇచ్చింది. కాచ్చాయనుడి పాలి వ్యాకరణ గ్రంథం 10^{140} (అసంఖ్యేయ) వరకు సంఖ్యా-నామాలను జాబితా చేస్తుంది.

పది యొక్క అధిక ఘాతాలను వ్యక్తపరచడానికి, జైన మరియు బౌద్ధ గ్రంథాలు సహస్స (వెయ్యి) మరియు కోటి (పది మిలియన్లు) వంటి ఆధారాలను ఉపయోగిస్తాయి; ఉదాహరణకు, ప్రయుత (10^6) అంటే దశ శత సహస్స (పది వందల వేలు).

ఆధునిక నామకరణం కూడా దీనికి సారూప్యంగా ఉంటుంది, దీనిలో మనం ఇలా అంటాము,

వంద వేలు అంటే ఒక లక్ష	$100 \times 1000 = 1,00,000$	$10^2 \times 10^3 = 10^5$
వంద లక్షలు అంటే ఒక కోటి	$100 \times 1,00,000 = 1,00,00,000$	$10^2 \times 10^5 = 10^7$
వంద కోట్లు అంటే ఒక అరబ్	$100 \times 1,00,00,000 = 1,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^7 = 10^9$
వంద అరబ్ అంటే ఒక ఖరబ్	$100 \times 1,00,00,00,000 = 1,00,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^9 = 10^{11}$

ఈ విధంగా కొనసాగిస్తే, వంద ఖరబ్ అంటే ఒక నీల్ (10^{13}), వంద నీల్ అంటే ఒక పద్మ (10^{15}) వంద పద్మ అంటే ఒక శంఖ్ (10^{17}) మరియు వంద శంఖ్ అంటే ఒక మహా శంఖ్ (10^{19}).

అమెరికన్/అంతర్జాతీయ పద్ధతిలో, మనం ఇలా అంటాము :

వెయ్యి వేలు అంటే	$1000 \times 1000 = 1,000,000$	$10^3 \times 10^3 = 10^6$

AP SCERT

is a million

A thousand million is a billion	$1000 \times 1{,}000{,}000 = 1{,}000{,}000{,}000$	$10^3 \times 10^6 = 10^9$
A thousand billion is an trillion	$1000 \times 1{,}000{,}000{,}000 = 1{,}00{,}000{,}000{,}000$	$10^3 \times 10^9 = 10^{12}$

Continuing this, a thousand trillion is a quadrillion (10^{15}). This pattern continues. Observe the names million (10^6), billion (10^9), trillion (10^{12}), quadrillion (10^{15}), quintillion (10^{18}), sextillion (10^{21}), septillion (10^{24}), octillion (10^{27}), nonillion (10^{30}), decillion (10^{33}).

? What does the first part of each name denote?

The number 10^{100} is also called a googol. The estimated number of atoms in the universe is 10^{78} to 10^{82}. The number 10^{googol} is called a googolplex. It is hard to imagine how large this number is!

The currency note with the highest denomination in India currently is 2000 rupees. Guess what is the highest denomination of a currency note ever, across the world. The highest numerical value banknote ever printed was a special note valued 1 sextillion pengo (10^{21} or 1 milliard bilpengo) printed in Hungary in 1946, but it was never issued. In 2009, Zimbabwe printed a 100 trillion (10^{14}) Zimbabwean dollar note, which at the time of printing was worth about $30.

Figure it Out - 2.2

1. Find out the units digit in the value of $2^{224} \div 4^{32}$? [Hint: $4 = 2^2$]
2. There are 5 bottles in a container. Every day, a new container is brought in. How many bottles would be there after 40 days?
3. Write the given number as the product of two or more powers in three different ways. The powers can be any integers.

   (i) 64^3 (ii) 192^8 (iii) 32^{-5}

BSCERT

ఒక మిలియన్

వెయ్యి మిలియన్లు అంటే $1000 \times 1,000,000 = 1,000,000,000$

ఒక బిలియన్ $10^3 \times 10^6 = 10^9$

వెయ్యి బిలియన్లు అంటే $1000 \times 1,000,000,000$ $10^3 \times 10^9 = 10^{12}$

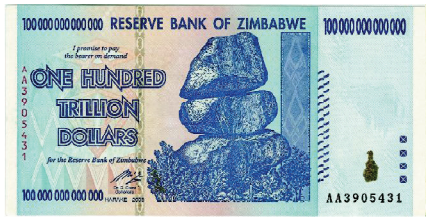
ఒక ట్రిలియన్ $= 1,00,000,000,000$

ఇలాగే కొనసాగిస్తే, వెయ్యి ట్రిలియన్లు అంటే ఒక క్వాడ్రిలియన్ (10^{15}). ఈ నమూనా కొనసాగుతుంది. మిలియన్ (10^6), బిలియన్ (10^9), ట్రిలియన్ (10^{12}), క్వాడ్రిలియన్ (10^{15}), క్వింటిలియన్ (10^{18}), సెక్స్టిలియన్ (10^{21}), సెప్టిలియన్ (10^{24}), ఆక్టిలియన్ (10^{27}), నోనిలియన్ (10^{30}), డెసిలియన్ (10^{33}) అనే పేర్లను గమనించండి.

? ప్రతి పేరులోని మొదటి భాగం దేనిని సూచిస్తుంది?

10^{100} అనే సంఖ్యను గూగోల్ అని కూడా అంటారు. విశ్వంలోని అణువుల అంచనా సంఖ్య 10^{78} నుండి 10^{82} వరకు ఉంటుంది. $10^{\text{గూగోల్}}$ అనే సంఖ్యను గూగోల్‌ప్లెక్స్ అంటారు. ఈ సంఖ్య ఎంత పెద్దదో ఊహించడం కష్టం!

ప్రస్తుతం భారతదేశంలో అత్యధిక విలువ కలిగిన కరెన్సీ నోటు 2000 రూపాయలు. ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఇప్పటివరకు ముద్రించిన అత్యధిక విలువ కలిగిన కరెన్సీ నోటు ఏది అని ఊహించండి. ఇప్పటివరకు ముద్రించిన అత్యధిక సంఖ్యా విలువ కలిగిన నోటు, 1946లో హంగరీలో ముద్రించిన 1 సెక్టిలియన్ పెంగో (10^{21} లేదా 1 మిలియార్డ్ బిల్పెంగో) విలువైన ప్రత్యేక నోటు, కానీ దానిని ఎప్పుడూ జారీ చేయలేదు. 2009లో, జింబాబ్వే 100 ట్రిలియన్ (10^{14}) జింబాబ్వే డాలర్ల నోటును ముద్రించింది, ముద్రించే సమయానికి దాని విలువ సుమారు $30.



ఆలోచించండి-చేయండి - 2.2

1. $2^{224} \div 4^{32}$ విలువలో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను కనుగొనండి? (సూచన: $4 = 2^2$)
2. ఒక కంటైనర్‌లో 5 సీసాలు ఉన్నాయి. ప్రతిరోజూ ఒక కొత్త కంటైనర్ తీసుకువస్తారు. 40 రోజుల తర్వాత ఎన్ని సీసాలు ఉంటాయి?
3. ఇచ్చిన సంఖ్యను రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘాతాల లబ్ధంగా మూడు వేర్వేరు విధాలుగా రాయండి. ఘాతాలు ఏవైనా పూర్ణాంకాలు కావచ్చు.

   (i) 64^3 (ii) 192^8 (iii) 32^{-5}

DSCERT

4. Examine each statement below and find out if it is 'Always True', 'Only Sometimes True', or 'Never True'. Explain your reasoning.

(i) Cube numbers are also square numbers.

(ii) Fourth powers are also square numbers.

(iii) The fifth power of a number is divisible by the cube of that number.

(iv) The product of two cube numbers is a cube number.

(v) q^{46} is both a 4th power and a 6th power (q is a prime number).

5. Simplify and write these in the exponential form.

(i) $10^{-2} \times 10^{-5}$ (ii) $5^7 \div 5^4$ (iii) $9^{-7} \div 9^4$

(iv) $(13^{-2})^{-3}$ (v) $m^5n^{12}(mn)^9$

6. If $12^2 = 144$ what is

(i) $(1.2)^2$ (ii) $(0.12)^2$

(iii) $(0.012)^2$ (iv) 120^2

7. Circle the numbers that are the same -

$2^4 \times 3^6$ $6^4 \times 3^2$ 6^{10} $18^2 \times 6^2$ 6^{24}

8. Identify the greater number in each of the following -

(i) 4^3 or 3^4 (ii) 2^8 or 8^2 (iii) 100^2 or 2^{100}

9. A dairy plans to produce 8.5 billion packets of milk in a year. They want a unique ID (identifier) code for each packet. If they choose to use the digits 0-9, how many digits should the code consist of?

10. 64 is a square number (8^2) and a cube number (4^3). Are there other numbers that are both squares and cubes?

Is there a way to describe such numbers in general?

11. A digital locker has an alpha-numeric (it can have both digits and letters) passcode of length 5. Some example codes are G89P0, 38098, BRJKW, and 003AZ. How many such codes are possible?

12. The worldwide population of sheep (2024) is about 10^9, and that of goats is also about the same. What is the total population of sheep and goats?

(i) 20^9 (ii) 10^{11} (iii) 10^{10}

(iv) 10^{18} (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. Calculate and write the answer in scientific notation:

AP SCERT

4. కింద ఇచ్చిన ప్రతి వాక్యాన్ని పరిశీలించి, అది 'ఎల్లప్పుడూ నిజమా', 'కొన్నిసార్లు మాత్రమే నిజమా', లేదా 'ఎప్పుడూ నిజం కాదా' అని కనుగొనండి. మీ కారణాన్ని వివరించండి.

(i) ఘన సంఖ్యలు వర్గ సంఖ్యలు కూడా అవుతాయి.

(ii) నాలుగో ఘాతాలు వర్గ సంఖ్యలు కూడా అవుతాయి.

(iii) ఒక సంఖ్య యొక్క ఐదవ ఘాతం ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనంతో భాగించబడుతుంది.

(iv) రెండు ఘన సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ఘన సంఖ్య అవుతుంది.

(v) q^{46} అనేది 4వ ఘాతం మరియు 6వ ఘాతం ఈ రెండూ (q ఒక ప్రధాన సంఖ్య).

5. వీటిని సూక్ష్మీకరించి, ఘాత రూపంలో రాయండి అవుతుంది.

(i) $10^{-2} \times 10^{-5}$ (ii) $5^7 \div 5^4$ (iii) $9^{-7} \div 9^4$

(iv) $(13^{-2})^{-3}$ (v) $m^5n^{12}(mn)^9$

6. $12^2 = 144$ అయితే

(i) $(1.2)^2$ (ii) $(0.12)^2$

(iii) $(0.012)^2$ (iv) 120^2

7. ఒకేలా ఉన్న సంఖ్యలను చుట్టండి –

$2^4 \times 3^6$ $6^4 \times 3^2$ 6^{10} $18^2 \times 6^2$ 6^{24}

8. కింది వాటిలో ప్రతి దానిలో పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించండి –

(i) 4^3 or 3^4 (ii) 2^8 or 8^2 (iii) 100^2 or 2^{100}

9. ఒక పాల డెయిరీ సంవత్సరానికి 8.5 బిలియన్ల పాల ప్యాకెట్లను ఉత్పత్తి చేయాలని యోచిస్తోంది. వారికి ప్రతి ప్యాకెట్‌కు ఒక ప్రత్యేకమైన ID (గుర్తింపు) కోడ్ కావాలి. వారు 0–9 అంకెలను ఉపయోగించాలని ఎంచుకుంటే, ఆ కోడ్‌లో ఎన్ని అంకెలు ఉండాలి?

10. 64 అనేది ఒక వర్గ సంఖ్య (8^2) మరియు ఒక ఘన సంఖ్య (4^3). వర్గ సంఖ్యలు మరియు ఘన సంఖ్యలు రెండూ అయిన ఇతర సంఖ్యలు ఉన్నాయా? అటువంటి సంఖ్యలను సాధారణంగా వివరించడానికి ఏదైనా మార్గం ఉందా?

11. ఒక డిజిటల్ లాకర్‌కు 5 అక్షరాల పొడవు గల ఆల్ఫాన్యూమరిక్ (అందులో అంకెలు మరియు అక్షరాలు రెండూ ఉండవచ్చు) పాస్‌కోడ్ ఉంది. కొన్ని ఉదాహరణ కోడ్‌లు G89P0, 38098, BRJKW, మరియు 003AZ. ఇటువంటి ఎన్ని కోడ్‌లు సాధ్యమవుతాయి?

12. ప్రపంచవ్యాప్తంగా గొర్రెల జనాభా (2024) సుమారు 10^9, మరియు మేకల జనాభా కూడా సుమారు అంతే వుంటాయి. గొర్రెలు మరియు మేకల మొత్తం జనాభా ఎంత?

(i) 20^9 (ii) 10^{11} (iii) 10^{10}

(iv) 10^{18} (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. లెక్కించి, జవాబును శాస్త్రీయ సంకేత రూపంలో రాయండి:

AP SCERT

(i) If each person in the world had 30 pieces of clothing, find the total number of pieces of clothing.

(ii) There are about 100 million bee colonies in the world. Find the number of honeybees if each colony has about 50,000 bees.

(iii) The human body has about 38 trillion bacterial cells. Find the bacterial population residing in all humans in the world.

(iv) Total time spent eating in a lifetime in seconds.

14. What was the date 1 arab/1 billion seconds ago

Try This

SUMMARY

- We analysed some situations, asked questions, and found answers by first guessing, then modelling the problem statement, followed by making assumptions and approximations to carry out the calculations.
- We experienced how rapid exponential growth, also called multiplicative growth, can be compared to additive growth.
- n^a is $n \times n \times n \times n \times \ldots \times n$ (n multiplied by itself a times) and $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$
- Operations with exponents satisfy
  - $n^a \times n^b = n^{a+b}$
  - $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$
  - $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $(n \neq 0)$
  - $n^a \times m^a = (n \times m)^a$
  - $n^a \div m^a = (n \div m)^a$ $(m \neq 0)$
  - $n^0 = 1$ $(n \neq 0)$
- The scientific notation for the number 308100000 is 3.081×10^8. The standard form of the scientific notation of any number is $x \times 10^y$, where $x \geq 1$ and $x < 10$, and y is an integer.
- Engaging in interesting thought experiments can be used as means to understand how large a number or a quantity is.

AP SCERT

(i) ప్రపంచంలోని ప్రతి వ్యక్తికి 30 దుస్తుల వస్తువులు ఉంటే, మొత్తం దుస్తుల వస్తువుల సంఖ్యను కనుగొనండి.

(ii) ప్రపంచంలో సుమారు 100 మిలియన్ల తేనెటీగల కాలనీలు ఉన్నాయి. ప్రతి కాలనీలో సుమారు 50,000 తేనెటీగలు ఉంటే, తేనెటీగల సంఖ్యను కనుగొనండి.

(iii) మానవ శరీరంలో సుమారు 38 ట్రిలియన్ల బాక్టీరియా కణాలు ఉన్నాయి. ప్రపంచంలోని మానవులందరిలో నివసించే బాక్టీరియా జనాభాను కనుగొనండి.

(iv) జీవితకాలంలో తినడానికి గడిపిన మొత్తం సమయం సెకన్లలో.

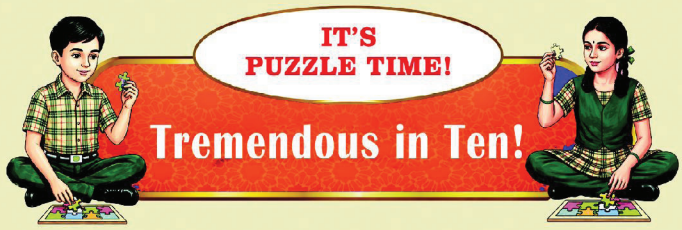
14. 1 అరబ్ / 1 బిలియన్ సెకన్ల క్రితం తేదీ ఏమిటి?

ప్రయత్నించండి

సారాంశం

- మేము కొన్ని పరిస్థితులను విశ్లేషించాము, ప్రశ్నలు అడిగాము మరియు మొదట ఊహించడం, ఆపై సమస్య ప్రకటనను నమూనాగా రూపొందించడం, దాని తర్వాత లెక్కలు చేయడానికి ఊహలు మరియు ఉజ్జాయింపులు చేయడం ద్వారా సమాధానాలను కనుగొన్నాము.
- గుణకార వృద్ధి అని కూడా పిలువబడే వేగవంతమైన ఘాతాంక వృద్ధిని సంకలన వృద్ధితో ఎలా పోల్చవచ్చో మేము అనుభవపూర్వకంగా తెలుసుకున్నాము.
- n^a is $n \times n \times n \times n \times \ldots \times n$ (n ను సార్లు దానికదే గుణించడం) మరియు $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$.
- ఘాతాంకాలతో కూడిన ప్రక్రియలు ఈ క్రింది వాటిని సంతృప్తిపరుస్తాయి:
  - $n^a \times n^b = n^{a+b}$
  - $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$
  - $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $(n \neq 0)$
  - $n^a \times m^a = (n \times m)^a$
  - $n^a \div m^a = (n \div m)^a$ $(m \neq 0)$
  - $n^0 = 1$ $(n \neq 0)$
- 308100000 అనే సంఖ్య యొక్క శాస్త్రీయ సంకేతం 3.081×10^8. ఏదైనా సంఖ్య యొక్క శాస్త్రీయ సంకేతం యొక్క ప్రామాణిక రూపం $x \times 10^y$, ఇక్కడ $x \geq 1$ మరియు $x < 10$, మరియు y ఒక పూర్ణ సంఖ్య.
- ఒక సంఖ్య లేదా పరిమాణం ఎంత పెద్దదో అర్థం చేసుకోవడానికి ఆసక్తికరమైన ఆలోచనా ప్రయోగాలలో పాల్గొనడాన్ని ఒక సాధనంగా ఉపయోగించవచ్చు.

AP SCERT



Find a partner to play this game with. In 10 seconds, the person who writes a number or an expression, using only the digits 0 - 9 and arithmetic operations, that gives a number that is the larger between the two wins the round.

10000000000000 $\quad$ 999999 × 999999

In Round 1, Rekha wrote 10000000000000 and Raju wrote 999999 × 999999. Between these two, Rekha's number is greater. Can you see why? Rekha's number is 10^{13}, whereas Raju's number is less than $(10^6)^2$.

In Round 2, Rekha wrote $10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ and Raju wrote $(10^{1000000}) \times 9000$. Can you say which is greater?

$10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ $\quad$ $10^{1000000} \times 9000$

Below are some conditions that you may consider for different rounds.

(i) Exponents are not allowed. Only addition is allowed.

(ii) Exponents are not allowed. Only addition and multiplication are allowed.

(iii) Exponents are allowed. Only addition is allowed.

(iv) Exponents are allowed. Any arithmetic operation is allowed.

You can create your own conditions and/or involve more people to play together.

AP SCERT

మీరు ఒక భాగస్వామితో కలిసి ఈ ఆట ఆడాలి. కేవలం 10 సెకన్లలో, 0–9 అంకెలను మరియు గణిత గుర్తులను (arithmetic operations) ఉపయోగిస్తూ ఒక సంఖ్యను లేదా సమీకరణాన్ని రాయాలి. ఎవరి సంఖ్య పెద్దదైతే వారే ఆ రౌండ్‌లో విజేత.

10000000000000 999999 × 999999

మొదటి రౌండ్ : రేఖ రాసిన సంఖ్య: 10000000000000 రాజు రాసిన సంఖ్య: 999999 × 999999.
విశ్లేషణ: రేఖ సంఖ్య పెద్దది. ఎందుకంటే రేఖ సంఖ్య 10^{13}, కానీ రాజు రాసిన సంఖ్య $(10^6)^2$ కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

రెండవ రౌండ్ : వీరిద్దరిలో ఎవరి సంఖ్య పెద్దదో చెప్పగలరా? రేఖ: $10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ రాజు : $(10^{1000000}) \times 9000$

$10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ $10^{1000000} \times 9000$

వివిధ రౌండ్ల కోసం నిబంధనలు:

మీరు ఆడేటప్పుడు ఈ క్రింది నిబంధనలను అనుసరించవచ్చు:

(i) ఘాతాంకాలు వాడకూడదు. కేవలం సంకలనం మాత్రమే వాడాలి.

(ii) ఘాతాంకాలు వాడకూడదు. సంకలనం మరియు గుణకారం మాత్రమే వాడాలి.

(iii) ఘాతాంకాలు వాడవచ్చు. కేవలం సంకలనం మాత్రమే వాడాలి.

(iv) ఘాతాంకాలు వాడవచ్చు. ఏదైనా గణిత ప్రక్రియను వాడవచ్చు.

మీరు మీ స్వంత నిబంధనలను కూడా తయారు చేసుకుని ఎక్కువ మంది స్నేహితులతో ఈ ఆటను ఆస్వాదించవచ్చు!

AP SCERT

3 A STORY OF NUMBERS

Learning outcomes

Learners will be able to

- Read, write, and compare sets of numbers and large numbers up to 10 digits. (CG-1)
- Understand the different number systems. (CG-1)
- Identify and Appreciate relationships between numbers. (CG-1)
- Recognise and create patterns in numbers and operations. (CG-1)
- Apply scientific notation using exponents and powers. (CG-1)

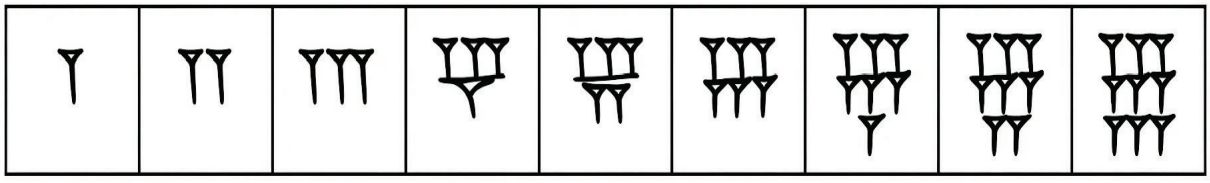
H4Q8F5

AP SCERT

3.1 Hasantika's Curiosity

One lazy afternoon, Hasantika was flipping through an old book when - whoosh! - a piece of paper slipped out and floated to the floor. She picked it up and stared at the strange symbols all over it. "What is this?" she wondered.

She ran to her father, holding the paper as if it were a secret treasure. He looked at it and smiled. "Around 4000 years ago, there flourished a civilisation in a region called Mesopotamia, in the western part of Asia, containing a major part of the present-day Iraq and a few other neighbouring countries. This is one of the ways they wrote their numbers!"



Hasantika's eyes lit up, "Seriously? These strange symbols were numbers?" Her curiosity was sparked, and questions started swirling in her head.

3 సంఖ్యల కథ

అభ్యసన ఫలితాలు : అభ్యాసకులు

☞ 10 అంకెల వరకు గల పెద్ద సంఖ్యలను చదవడం, వ్రాయడం మరియు పోల్చడం చేస్తారు. (CG-1)

☞ వివిధ సంఖ్యా పద్ధతులను అర్థం చేసుకుంటారు. (CG-1)

☞ సంఖ్యల మధ్య సంబంధాలను గుర్తిస్తారు మరియు అభినందిస్తారు. (CG-1)

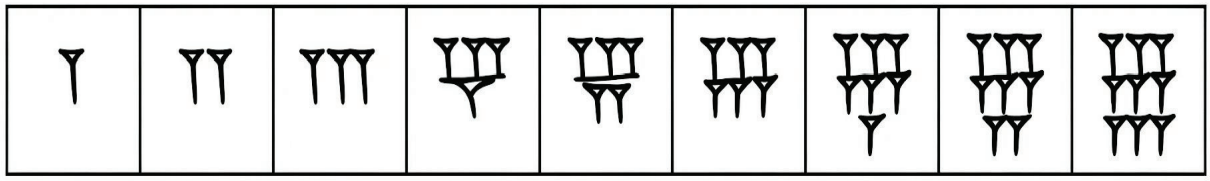
☞ సంఖ్యలు మరియు పరిక్రియలలో నమూనాలను గుర్తిస్తారు మరియు రూపొందిస్తారు. (CG-1)

☞ ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు ఉపయోగించి శాస్త్రీయ రూపాన్ని అన్వయిస్తారు. (CG-1)

3.1 హసంతిక ఉత్సుకత

ఒక రోజు మధ్యాహ్నం, హసంతిక ఒక పాత పుస్తకాన్ని తిరగేస్తుండగా – ఒక్కసారిగా! – ఒక కాగితం ముక్క జారి కిందపడిపోయింది. ఆమె దానిని తీసి, దానిపై ఉన్న వింత గుర్తులను చూస్తూ ఉండిపోయింది. “ఇది ఏమిటి?” అని ఆమె ఆశ్చర్యపోయింది.

ఆమె ఆ కాగితాన్ని ఒక రహస్య నిధిలా పట్టుకుని తన తండ్రి వద్దకు పరుగెత్తుకెళ్లింది. ఆయన దానిని చూసి నవ్వారు. “సుమారు 4000 సంవత్సరాల క్రితం, ఆసియా ఖండంలోని పశ్చిమ భాగంలో, ప్రస్తుత ఇరాక్ దేశంలోని చాలా భాగం మరియు కొన్ని పొరుగు దేశాలను కలుపుకొని ఉన్న మెసొపొటేమియా అనే ప్రాంతంలో ఒక నాగరికత వర్ధిల్లింది. వారు తమ సంఖ్యలను వ్రాసిన పద్ధతులలో ఇది ఒకటి!”



హసంతిక కళ్ళు మెరిశాయి, “నిజంగానా? ఈ వింత గుర్తులు సంఖ్యలా?” ఆమెలో ఉత్సుకత రేకెత్తింది, మరియు ప్రశ్నలు ఆమె మనసులో సుడిగాలిలా తిరగడం మొదలుపెట్టాయి.

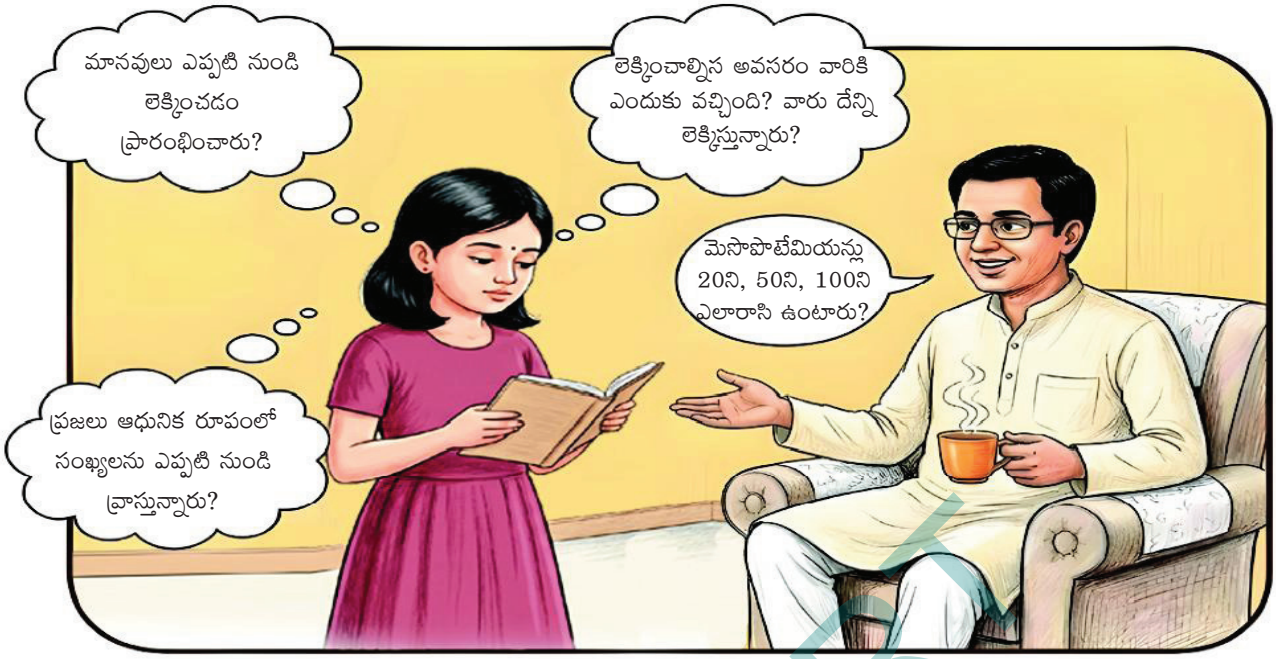
AP SCERT

Sensing her curiosity, her father started telling her how the idea of number and number representation evolved over the course of time, across geographies, to finally reach its modern efficient form.
Get ready to travel back in time with them!

Humans had the need to count even as early as the Stone Age. They were counting to determine the quantity of food they had, the number of animals in their livestock, details regarding trades of goods, the number of offerings given in rituals, etc. They also wanted to keep track of the passing days, e.g., to know and predict when important events such as the new moon, full moon, or onset of a season would occur. However, when they said or wrote down such numbers, they didn't make use of the numbers that we use today.

The structure of the modern oral and written numbers that we use today had its origin thousands of years ago in India. Ancient Indian texts, such as the Yajurveda Samhita, mentioned names of numbers based on powers of 10, almost as we say them orally today. For example, they listed names for the numbers one (eka), ten (dasha), hundred (shata), thousand (sahasra), ten thousand (ayuta), etc., all the way up to 10^{12} and beyond.

AP SCERT



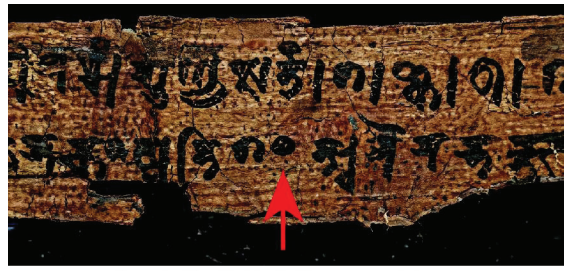
ఆమె ఉత్సుకతను గ్రహించిన ఆమె తండ్రి, సంఖ్య మరియు సంఖ్య ప్రాతినిధ్యం అనే ఆలోచన కాలక్రమేణా, భౌగోళిక ప్రాంతాలలో ఎలా ఉద్భవించి, చివరకు దాని ఆధునిక సమర్థవంతమైన రూపాన్ని ఎలా చేరుకుందో ఆమెకు చెప్పడం ప్రారంభించాడు. వారితో కాలంలో వెనక్కి ప్రయాణించడానికి సిద్ధంగా ఉండండి.!

మానవులకు రాతియుగం నాటికే లెక్కించే అవసరం ఉండేది. వారు తమ వద్ద ఉన్న ఆహార పరిమాణాన్ని, తమ పశుసంపదలోని జంతువుల సంఖ్యను, వస్తువుల వ్యాపారానికి సంబంధించిన వివరాలను, ఆచారాలలో సమర్పించే నైవేద్యాల సంఖ్యను మొదలైనవాటిని లెక్కించేవారు. అలాగే, అమావాస్య, పౌర్ణమి లేదా ఒక రుతువు ప్రారంభం వంటి ముఖ్యమైన సంఘటనలు ఎప్పుడు జరుగుతాయో తెలుసుకోవడానికి మరియు అంచనా వేయడానికి, గడిచే రోజులను కూడా లెక్కపెట్టాలనుకున్నారు. అయితే, వారు అటువంటి సంఖ్యలను చెప్పినప్పుడు లేదా వ్రాసినప్పుడు, మనం ఈ రోజు ఉపయోగించే సంఖ్యలను ఉపయోగించలేదు.

మనం ఈ రోజు ఉపయోగించే ఆధునిక మౌఖిక మరియు లిఖిత సంఖ్యా వ్యవస్థ యొక్క నిర్మాణం వేల సంవత్సరాల క్రితం భారతదేశంలో ఉద్భవించింది. యజుర్వేద సంహిత వంటి ప్రాచీన భారతీయ గ్రంథాలు, మనం ఈ రోజు మౌఖికంగా పలికే విధంగానే, 10 యొక్క ఘాతాల ఆధారంగా సంఖ్యల పేర్లను పేర్కొన్నాయి. ఉదాహరణకు, వారు ఒకటి (ఏక), పది (దశ), వంద (శత), వెయ్యి (సహస్ర), పదివేలు (అయుత) మొదలైన సంఖ్యలకు, 10^{12}మరియు అంతకు మించిన సంఖ్యల వరకు పేర్లను జాబితా చేశారు.

AP SCERT

The way we write our numbers today - using the digits 0 through 9 - also originated and were developed in India, around 2000 years ago. The first known instance of numbers being written using ten digits, including the digit 0 (which was then notated as a dot), occurs in the Bakhshali manuscript (c. 3rd century CE). Aryabhata (c. 499 CE) was the first mathematician to fully explain, and do elaborate scientific computations with the Indian system of 10 symbols.



Zero in the Bakhshali manuscript

The Indian number system was transmitted to the Arab world by around 800 CE. It was popularised in the Arab world by the great Persian mathematician Al-Khwarizm? (after whom the word 'algorithm' is named) through his book On the Calculation with Hindu Numerals (c. 825) and by the noted philosopher Al-Kindi through his work On the Use of the Hindu Numerals (c. 830).

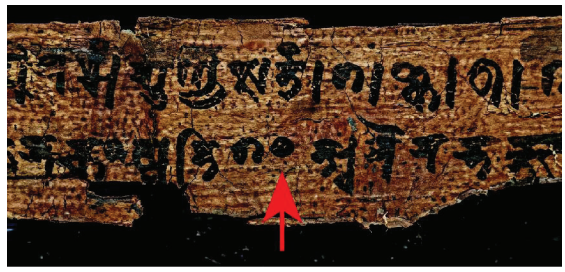
From the Arab world, the Hindu numerals were transmitted to Europe and to parts of Africa by around 1100 CE. Though Al-Khwarizm?'s work on calculation with Hindu numerals was translated into Latin, it was the Italian mathematician Fibonacci who around the year 1200 really made the case to Europe to adopt the Indian numerals. However, the Roman numerals were so ingrained in European thinking and writing at the time that the Indian numerals did not gain widespread use for several more centuries. But eventually, during the European Renaissance and by the 17th century, not adopting them became impossible or it would impede scientific progress.

"The ingenious method of expressing every possible number using a set of ten symbols (each symbol having a place value and an absolute value) emerged in India. The idea seems so simple nowadays that its significance and profound importance is no longer appreciated. Its simplicity lies in the way it facilitated calculations and placed arithmetic foremost among useful inventions."

- Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

AP SCERT

మనం ఈ రోజు సంఖ్యలను వ్రాసే విధానం – 0 నుండి 9 వరకు అంకెలను ఉపయోగించి – ఇది కూడా సుమారు 2000 సంవత్సరాల క్రితం భారతదేశంలోనే ఉద్భవించి అభివృద్ధి చేయబడింది. 0 ను ఒక చుక్క (.) రూపంలో ఉపయోగించిన తొలి ఆధారాలు బక్షాలీ రాత ప్రతి క్రీ.శ. 3 వ శతాబ్దంలో కనిపిస్తాయి. క్రీ.శ. 499 కాలంలో ఆర్యభట్ట ఈ 10 అంకెల వ్యవస్థను ఉపయోగించి శాస్త్రీయమైన లెక్కలను వివరించిన మొదటి గణిత శాస్త్రవేత.



బక్షాలీ రాత ప్రతి

భారతీయ సంఖ్యామానం క్రీ.శ. 800వ సంవత్సరం నాటికి అరబ్ ప్రపంచానికి చేరింది. గొప్ప పర్షియన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు అల్–ఖ్వారిజ్మీ (ఇతని పేరు మీదుగానే 'అల్గారిథమ్' అనే పదం వచ్చింది) తన 'హిందూ సంఖ్యలతో గణన' (సుమారు 825) అనే పుస్తకం ద్వారా మరియు ప్రఖ్యాత తత్వవేత్త అల్–కిండి తన 'హిందూ సంఖ్యల ఉపయోగంపై' (సుమారు 830) అనే గ్రంథం ద్వారా దీనిని అరబ్ ప్రపంచంలో ప్రాచుర్యంలోకి తెచ్చారు.

అరబ్ ప్రపంచం నుండి, హిందూ సంఖ్యలు క్రీ.శ. 1100వ సంవత్సరం నాటికి ఐరోపాకు మరియు ఆఫ్రికాలోని కొన్ని ప్రాంతాలకు చేరాయి. హిందూ సంఖ్యలతో గణనపై అల్–ఖ్వారిజ్మీ చేసిన కృషి లాటిన్ భాషలోకి అనువదించబడినప్పటికీ, సుమారు 1200వ సంవత్సరంలో ఇటాలియన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఫిబొనాకియే భారతీయ సంఖ్యలను స్వీకరించమని ఐరోపాకు గట్టిగా సూచించాడు. అయితే, ఆ సమయంలో రోమన్ సంఖ్యలు యూరోపియన్ల ఆలోచన మరియు రచనలలో ఎంతగానో పాతుకుపోయి ఉండటంతో, భారతీయ సంఖ్యలు మరో అనేక శతాబ్దాల వరకు విస్తృతంగా వాడుకలోకి రాలేదు. కానీ చివరికి, యూరోపియన్ పునరుజ్జీవన కాలంలో మరియు 17వ శతాబ్దం నాటికి, వాటిని స్వీకరించకపోవడం అసాధ్యంగా మారింది, లేకపోతే అది శాస్త్రీయ పురోగతికి ఆటంకం కలిగించేది.

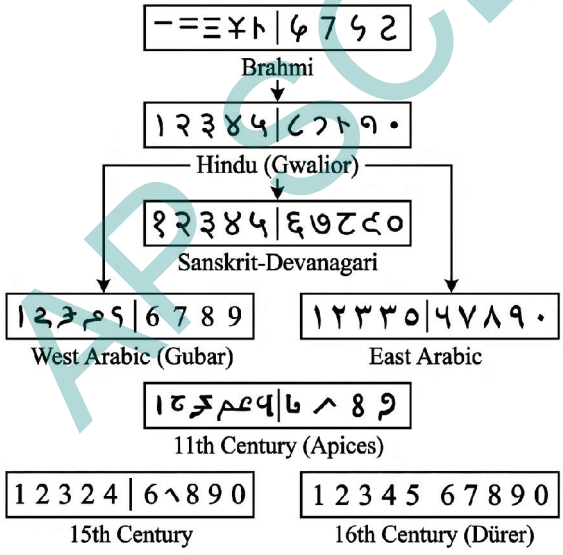
> పది గుర్తులను ఉపయోగించి సాధ్యమయ్యే ప్రతి సంఖ్యను వ్యక్తపరిచే ఈ అద్భుతమైన పద్ధతి (ప్రతి గుర్తుకు స్థాన విలువ మరియు సంఖ్యా విలువ ఉండటం) భారతదేశంలోనే ఆవిర్భవించింది. ఈ ఆలోచన ఈ రోజుల్లో చాలా సరళంగా అనిపిస్తుంది, అందుకే దీని ప్రాముఖ్యత మరియు లోతైన విశిష్టత ఇప్పుడు గుర్తించబడటం లేదు. దీని సరళత, ఇది గణనలను సులభతరం చేయడంలో మరియు అంకగణితాన్ని ఉపయోగకరమైన ఆవిష్కరణలలో అగ్రస్థానంలో నిలపడంలో ఉంది.
>
> **– పియరీ –సైమన్ లాప్లేస్ (1749 – 1827)**

AP SCERT

Their use then spread to every continent, and are now used in every corner of the world.

Because European scholars learned the Indian numerals from the Arab world, they called them 'Arabic numerals' to reflect their European perspective. On the other hand, as noted above, Arab scholars, such as Al-Khwarizmi and Al-Kindi, called them 'Hindu numerals'. During the period of European colonisation, the European term Arabic numbers became widely used. However, in recent years, this mistake is being corrected in many textbooks and documents around the world, including in Europe. The most commonly used terminologies for the numbers we use today are ?Hindu numerals', ?Indian numerals', and the transitional Hindu-Arabic numerals'. It is worth noting that the word ?Hindu' here does not refer to a religion, but rather a geography/people from whom these numbers came.

The shape of the digits 0, 1, 2, ..., 9 used to write numbers in the Indian number system today evolved over a period of time, as shown below:



Evolution of the digits used in the Indian number system

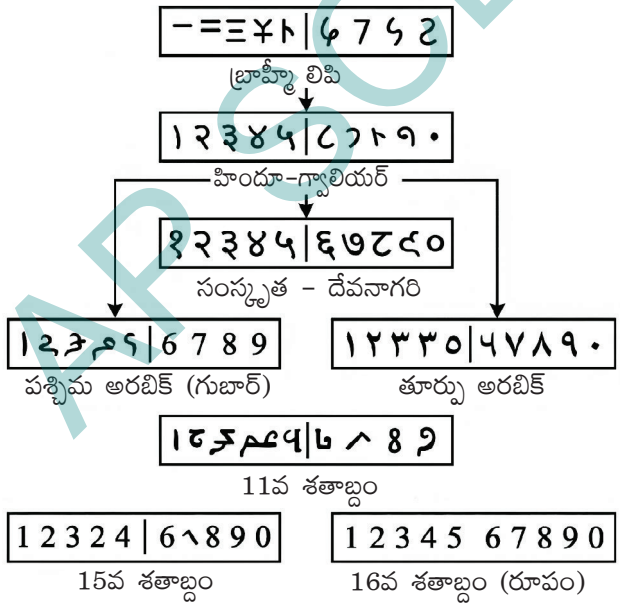
Prior to the global adoption of the Indian system of numerals, different groups of people used different methods of representing numbers. We shall take a glimpse of some of them. We will not be looking at different systems in a chronological order, but rather an order that shows us the main stages in the development of the idea of number representation.

ARSCERT

తరువాత వాటి వాడకం ప్రతి ఖండానికి వ్యాపించింది, మరియు ఇప్పుడు ప్రపంచంలోని ప్రతి మూలలోనూ వాటిని ఉపయోగిస్తున్నారు.

యూరోపియన్ పండితులు అరబ్ ప్రపంచం నుండి భారతీయ సంఖ్యలను నేర్చుకున్నందున, వారు తమ యూరోపియన్ దృక్కోణాన్ని ప్రతిబింబించేలా వాటిని 'అరబిక్ సంఖ్యలు' అని పిలిచారు. మరోవైపు, పైన పేర్కొన్నట్లుగా, అల్-ఖ్వారిజ్మీ మరియు అల్-కిండి వంటి అరబ్ పండితులు వాటిని 'హిందూ సంఖ్యలు' అని పిలిచారు. యూరోపియన్ వలసవాద కాలంలో, యూరోపియన్ పదం 'అరబిక్ సంఖ్యలు' విస్తృతంగా వాడుకలోకి వచ్చింది. అయితే, ఇటీవలి సంవత్సరాలలో, యూరప్‌తో సహా ప్రపంచవ్యాప్తంగా అనేక పాఠ్యపుస్తకాలు మరియు పత్రాలలో ఈ తప్పును సరిదిద్దుతున్నారు. మనం ఈ రోజు ఉపయోగించే సంఖ్యలకు అత్యంత సాధారణంగా ఉపయోగించే పదజాలాలు 'హిందూ సంఖ్యలు', 'భారతీయ సంఖ్యలు', మరియు మార్పుచేయబడిన 'హిందూ-అరబిక్ సంఖ్యలు'. ఇక్కడ 'హిందూ' అనే పదం ఒక మతాన్ని సూచించదు, బదులుగా ఈ సంఖ్యలు వచ్చిన భౌగోళిక ప్రాంతాన్ని/ప్రజలను సూచిస్తుందని గమనించాలి.

ఈ రోజు భారతీయ సంఖ్యా విధానంలో (హిందూ - అరబిక్ సంఖ్యామానం) సంఖ్యలను వ్రాయడానికి ఉపయోగించే 0, 1, 2, ..., 9 అంకెల ఆకారం, క్రింద చూపిన విధంగా కాలక్రమేణా పరిణామం చెందింది:



భారతీయ సంఖ్యా వ్యవస్థలోని అంకెలు కాలక్రమేణా ఎలా పరిణామం చెందాయో వివరించే సారాంశం

భారతీయ సంఖ్యా వ్యవస్థను ప్రపంచవ్యాప్తంగా స్వీకరించడానికి ముందు, ఉన్న వివిధ వ్యవస్థలలో కొన్నింటిని మనం పరిశీలిద్దాం. మనం ఈ విభిన్న వ్యవస్థలను కాలక్రమానుసారం కాకుండా, సంఖ్యలను సూచించే భావన అభివృద్ధిలో ఉన్న ప్రధాన దశలను చూపించే క్రమంలో చూస్తాము.

AP SCERT

But first, let us explore some of the foundational ideas needed to count and to determine the number of objects in a given collection.

The Mechanism of Counting

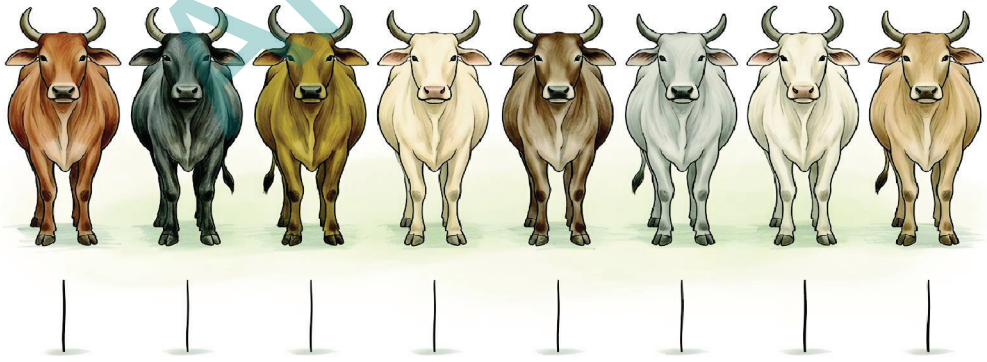
Imagine that we are living in the Stone Age, say, around ten thousand years ago. Suppose we have a herd of cows. Here are some natural questions that we might ask about our herd -

- Q 1. How do we ensure that all cows have returned safely after grazing?
- Q 2. Do we have fewer cows than our neighbour?
- Q 3. If there are fewer, how many more cows would we need so that we have the same number of cows as our neighbour?

We need to tackle these questions without the use of the number names or written numbers of the Hindu number system. How do we do it?

Here are some possible methods.

Method 1: We could tackle the questions by using pebbles, sticks or any object that is available in abundance. Let us choose sticks. For every cow in the herd, we could keep a stick. The final collection of sticks tells us the number of cows, which can be used to check if any cows have gone missing.



This way of associating each cow with a stick, such that no two cows are associated or mapped to the same stick is called a one-to-one mapping. This mapping can then be used to come up with a way to represent numbers, as shown in the table.

AP SCERT

అయితే ముందుగా, లెక్కించడానికి మరియు ఇచ్చిన సమూహంలోని వస్తువుల సంఖ్యను నిర్ధారించడానికి అవసరమైన కొన్ని ప్రాథమిక భావనలను అన్వేషిద్దాం.

లెక్కింపు విధానం

మనం రాతియుగంలో, అంటే సుమారు పది వేల సంవత్సరాల క్రితం జీవిస్తున్నామని ఊహించుకోండి. మన దగ్గర ఒక ఆవుల మంద ఉందని అనుకుందాం. మన మంద గురించి మనం అడగదగిన కొన్ని సహజమైన ప్రశ్నలు ఇక్కడ ఉన్నాయి. –

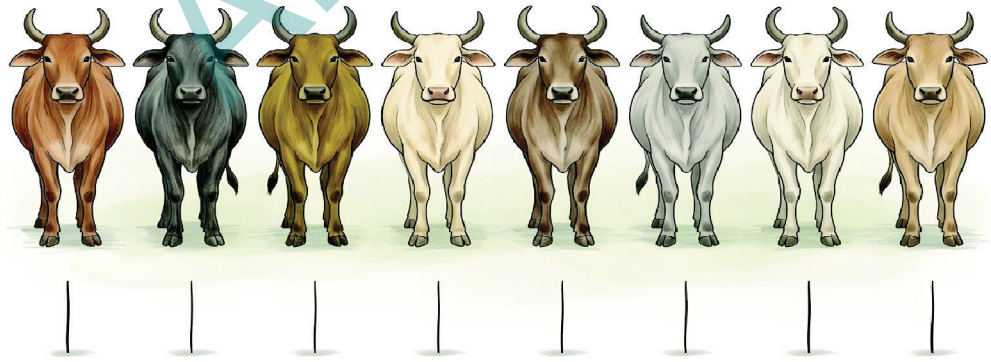
Q 1. మేతకు వెళ్లిన ఆవులన్నీ సురక్షితంగా తిరిగి వచ్చాయని మనం ఎలా నిర్ధారించుకోవాలి?

Q 2. మన పొరుగువారి కంటే మన దగ్గర తక్కువ ఆవులు ఉన్నాయా?

Q 3. ఒకవేళ తక్కువ ఆవులు ఉంటే, మన పొరుగువారి వద్ద ఉన్నన్ని ఆవులు మనకు ఉండాలంటే మనకు ఇంకా ఎన్ని ఆవులు అవసరం అవుతాయి? హిందూ సంఖ్యా వ్యవస్థలోని సంఖ్యల పేర్లను లేదా లిఖిత సంఖ్యలను ఉపయోగించకుండానే మనం ఈ ప్రశ్నలను పరిష్కరించాలి. మనం అది ఎలా చేస్తాము?

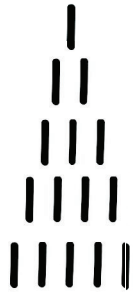
ఇక్కడ కొన్ని సాధ్యమైన పద్ధతులు ఉన్నాయి.

విధానం 1: మనం గులకరాళ్లు, కర్రలు లేదా పుష్పలంగా లభించే ఏవైనా వస్తువులను ఉపయోగించి ఈ ప్రశ్నలను పరిష్కరించవచ్చు. మనం కర్రలను ఎంచుకుందాం. మందలోని ప్రతి ఆవుకు బదులుగా మనం ఒక కర్రను ఉంచవచ్చు. చివరికి పోగైన కర్రల సంఖ్య మనకు ఆవుల సంఖ్యను తెలియజేస్తుంది, దీనిని ఉపయోగించి ఏవైనా ఆవులు తప్పిపోయాయో లేదో తనిఖీ చేయవచ్చు.



ప్రతి ఆవుకు ఒక కర్రను కేటాయించడం, తద్వారా ఏ రెండు ఆవులకూ ఒకే కర్ర కేటాయించబడకుండా ఉండే ఈ పద్ధతిని ఏక-ఏక అనురూపణం (వన్-టు-వన్ మ్యాపింగ్) అంటారు. ఈ అనురూపణాన్ని ఉపయోగించి, పట్టికలో చూపిన విధంగా సంఖ్యలను సూచించడానికి ఒక పద్ధతిని రూపొందించవచ్చు.

AP SCERT

Number	Its representation (using sticks)
1	
2	
3	
4	
5	
.	.
.	.
.	.

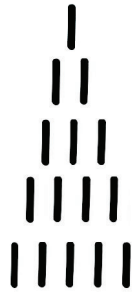
How will you use such sticks to answer the other two questions (Q2 and Q3)?

Method 2: Instead of objects, we could use a standard sequence of sounds or names. For example, we could use the sounds of the letters of any language. While counting, we could make a one-to-one mapping between the objects and the letters: that is, associate each object to be counted with a letter, following the letter-order. This mapping can then be used to come up with a way of verbally representing numbers.

For example, we get the following number representation if we use English letters 'a' to 'z'.

Number	Its representation (using sounds or names)
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
.	.
.	.
.	.
26	z

AP SCERT

సంఖ్య	దాని ప్రాతినిధ్యం (పుల్లలను ఉపయోగించి)
1	
2	
3	
4	
5	
.	.
.	.
.	.

? మిగిలిన రెండు ప్రశ్నలకు (Q2 మరియు Q3) సమాధానం ఇవ్వడానికి మీరు అలాంటి కర్రలను ఎలా ఉపయోగిస్తారు?)

విధానం 2: వస్తువులకు బదులుగా, మనం ప్రామాణిక శబ్దాల లేదా పేర్ల క్రమాన్ని ఉపయోగించవచ్చు. ఉదాహరణకు, మనం ఏదైనా భాషలోని అక్షరాల శబ్దాలను ఉపయోగించవచ్చు. లెక్కించేటప్పుడు, మనం వస్తువులకు మరియు అక్షరాలకు మధ్య ఒకదానికొకటి అనురూపతను ఏర్పరచవచ్చు: అంటే, లెక్కించాల్సిన ప్రతి వస్తువును అక్షరాల క్రమాన్ని అనుసరించి ఒక అక్షరంతో అనుసంధానించవచ్చు. ఈ అనురూపతను ఉపయోగించి సంఖ్యలను మౌఖికంగా సూచించడానికి ఒక పద్ధతిని రూపొందించవచ్చు.

ఉదాహరణకు, మనం ఆంగ్ల అక్షరాలు 'a' నుండి 'z' వరకు ఉపయోగిస్తే, మనకు ఈ క్రింది సంఖ్యా ప్రాతినిధ్యం లభిస్తుంది.

సంఖ్య	దాని ప్రాతినిధ్యం (శబ్దాలు లేదా పేర్లను ఉపయోగించి)
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
.	.
.	.
.	.
26	z

AP SCERT

An obvious limitation of using only the letters of the English alphabet in this form is that it cannot be used to count collections having more than 26 objects.

? How many numbers can you represent in this way using the sounds of the letters of your language?

Method 3: We could use a sequence of written symbols as follows.

Table 1

Number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Representation using symbols	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Number	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Representation using symbols	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

? Do you see a way of extending this method to represent bigger numbers as well? How?

From the discussion above, we see that for counting and finding the size of a collection, we need a standard sequence of objects, or names, or written symbols, that has a fixed order. Let us call this standard sequence a **number system**. A collection of objects can be counted by making a one-to-one mapping between them and the standard sequence, following the sequence order.

Since there is no end to numbers, the challenge is to come up with an unending standard sequence/number system that is easy to count with. Using sticks gives an unending standard sequence/number system. However, it is not convenient to count larger collections, as we will need as many sticks as the number of objects being counted. Using the sounds of the letters of a language, as in Method 2, is convenient for the counting process but is not an unending standard sequence/number system. The standard sequence/number system given in Method 3 was actually the system used in Europe before it got replaced by the Hindu number system. It is called the **Roman number system**.

AP SCERT

ఈ రూపంలో కేవలం ఆంగ్ల అక్షరాలను మాత్రమే ఉపయోగించడంలో ఉన్న స్పష్టమైన పరిమితి ఏమిటంటే, దీనిని 26 కంటే ఎక్కువ వస్తువులు ఉన్న సమూహాలను లెక్కించడానికి ఉపయోగించలేము.

? మీ భాషలోని అక్షరాల శబ్దాలను ఉపయోగించి ఈ విధంగా మీరు ఎన్ని సంఖ్యలను సూచించగలరు?

విధానం 3: మనం ఈ క్రింది విధంగా వ్రాతపూర్వక చిహ్నాల శ్రేణిని ఉపయోగించవచ్చు.

పట్టిక 1

సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
చిహ్నాలను ఉపయోగించి ప్రాతినిధ్యం	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
సంఖ్య	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
చిహ్నాలను ఉపయోగించి ప్రాతినిధ్యం	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

? పెద్ద సంఖ్యలను సూచించడానికి ఈ పద్ధతిని విస్తరించే మార్గాన్ని మీరు చూస్తున్నారా? ఎలా?

పై చర్చ నుండి, ఒక సేకరణ యొక్క పరిమాణాన్ని లెక్కించడానికి మరియు కనుగొనడానికి, మనకు స్థిర క్రమాన్ని కలిగి ఉన్న వస్తువుల ప్రామాణిక క్రమం, లేదా పేర్లు లేదా వ్రాతపూర్వక చిహ్నాలు అవసరమని మనం చూశాము. ఈ ప్రామాణిక శ్రేణిని **సంఖ్యా వ్యవస్థ** అని పిలుద్దాం. ఆ శ్రేణి క్రమాన్ని అనుసరించి వస్తువుల సేకరణను వాటికి మరియు ప్రామాణిక శ్రేణికి మధ్య వన్-టు-వన్ మ్యాపింగ్ చేయడం ద్వారా లెక్కించవచ్చు.

సంఖ్యలకు ముగింపు లేనందున, లెక్కించడానికి సులభమైన అంతంలేని ప్రామాణిక శ్రేణి/సంఖ్య వ్యవస్థను రూపొందించడం సవాలు. కర్రలను ఉపయోగించడం వలన అంతులేని ప్రామాణిక శ్రేణి/సంఖ్య వ్యవస్థ లభిస్తుంది. అయితే, పెద్ద సేకరణలను లెక్కించడం సౌకర్యంగా ఉండదు, ఎందుకంటే మనకు లెక్కించబడుతున్న వస్తువుల సంఖ్యకు సమానమైన కర్రలు అవసరం. పద్ధతి 2లో ఉన్నట్లుగా, భాషలోని అక్షరాల శబ్దాలను ఉపయోగించడం లెక్కింపు ప్రక్రియకు సౌకర్యవంతంగా ఉంటుంది కానీ ఇది అంతంలేని ప్రామాణిక శ్రేణి/సంఖ్య వ్యవస్థ కాదు. పద్ధతి 3లో ఇవ్వబడిన ప్రామాణిక శ్రేణి/సంఖ్య వ్యవస్థ వాస్తవానికి హిందూ సంఖ్య వ్యవస్థ ద్వారా భర్తీ చేయబడటానికి ముందు యూరప్‌లో ఉపయోగించిన వ్యవస్థ. దీనిని **రోమన్ సంఖ్యా వ్యవస్థ అంటారు.**

AP SCERT

It was widely used in Europe for centuries, and was convenient for many purposes, but had the similar drawback that one cannot write arbitrarily large numbers without introducing more and more symbols. We will learn more about this system of writing numbers later on.

As illustrated by the three methods, history gives us examples of number systems formed using physical objects (such as sticks, pebbles, body parts, etc.), names, and written symbols. Some groups of people had numbers represented both by physical objects as well as by names, while others like the Chinese had all three forms of representation. The symbols occurring in a written number system are called **numerals**. For example, 0, 1, 5, 36, 193, etc., are some of the numerals occurring in the Hindu number system. Numerals representing 'smaller' numbers always had names, and so a number system composed of written symbols always went hand in hand with a number system composed of names, as is the case with the modern-day Hindu system.

Figure it Out - 3.1

1. Suppose you are using the number system that uses sticks to represent numbers, as in Method 1. Without using either the number names or the numerals of the Hindu number system, give a method for adding, subtracting, multiplying and dividing two numbers or two collections of sticks.
2. One way of extending the number system in Method 2 is by using strings with more than one letter - for example, we could use 'aa' for 27. How can you extend this system to represent all the numbers?

AP SCERT

ఇది శతాబ్దాలుగా ఐరోపాలో విస్తృతంగా ఉపయోగించబడింది మరియు అనేక ప్రయోజనాలకు అనుకూలమైనది, కానీ దీనిలో లోపం ఉంది, ఎక్కువ చిహ్నాలను ప్రవేశపెట్టకుండా ఏకపక్షంగా పెద్ద సంఖ్యలను వ్రాయలేము. ఈ సంఖ్యలను వ్రాసే విధానం గురించి మనం తరువాత మరింత తెలుసుకుంటాము.

ఈ మూడు పద్ధతుల ద్వారా వివరించినట్లుగా, చరిత్ర మనకు భౌతిక వస్తువులు (కట్టెలు, గులకరాళ్లు, శరీర భాగాలు మొదలైనవి), పేర్లు మరియు వ్రాతపూర్వక చిహ్నాలను ఉపయోగించి ఏర్పడిన సంఖ్యా వ్యవస్థలకు ఉదాహరణలను అందిస్తుంది. కొన్ని మానవ సమూహాలు సంఖ్యలను భౌతిక వస్తువుల ద్వారా మరియు పేర్ల ద్వారా కూడా సూచించగా, చైనీయుల వంటి మరికొందరు ఈ మూడు రకాల ప్రాతినిధ్యాలను కలిగి ఉన్నారు. వ్రాతపూర్వక సంఖ్యా వ్యవస్థలో కనిపించే చిహ్నాలను **అంకెలు అంటారు.** ఉదాహరణకు, 0, 1, 5, 36, 193 మొదలైనవి హిందూ సంఖ్యా వ్యవస్థలో కనిపించే కొన్ని అంకెలు. 'చిన్న' సంఖ్యలను సూచించే అంకెలకు ఎల్లప్పుడూ పేర్లు ఉండేవి, కాబట్టి వ్రాతపూర్వక చిహ్నాలతో కూడిన సంఖ్యా వ్యవస్థ, పేర్లతో కూడిన సంఖ్యా వ్యవస్థతో ఎల్లప్పుడూ కలిసి ఉండేది, ఆధునిక హిందూ వ్యవస్థ విషయంలో కూడా ఇదే జరుగుతుంది.

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.1

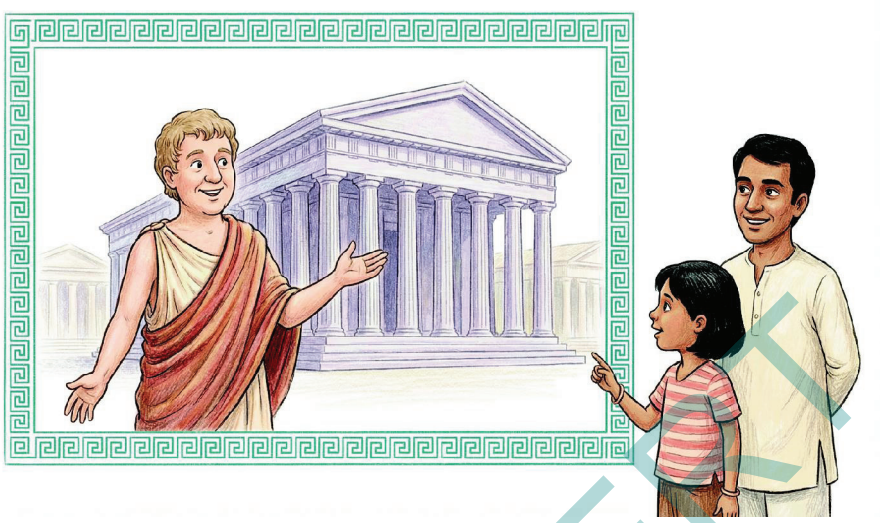
1. పద్ధతి 1లో చూపినట్లుగా, సంఖ్యలను సూచించడానికి కర్రలను ఉపయోగించే సంఖ్యా వ్యవస్థను మీరు వాడుతున్నారని అనుకుందాం. హిందూ సంఖ్యా వ్యవస్థ యొక్క సంఖ్యల పేర్లను గానీ లేదా అంకెలను గానీ ఉపయోగించకుండా, రెండు సంఖ్యలను లేదా రెండు కర్రల సమూహాలను కూడటానికి, తీసివేయడానికి, గుణించడానికి మరియు భాగించడానికి ఒక పద్ధతిని వివరించండి.
2. విధానం 2లో సంఖ్యా వ్యవస్థను విస్తరించడానికి ఒక మార్గం, ఒకటి కంటే ఎక్కువ అక్షరాలు ఉన్న స్ట్రింగ్‌లను ఉపయోగించడం – ఉదాహరణకు, మనం 27 కోసం 'aa' ని ఉపయోగించవచ్చు. అన్ని సంఖ్యలను సూచించడానికి మీరు ఈ వ్యవస్థను ఎలా విస్తరించగలరు?

AP SCERT

There are many ways of doing it!

3. Try making your own number system.

3.2 The Roman Numerals



We have already seen the Roman number system till 20 (Table 1). We have seen that it uses I for 1, V for 5, X for 10.

To get the Roman numeral for any number till 39, it is first grouped into as many 10s as possible, the remaining is grouped into as many 5s as possible, and finally the remaining is grouped into 1s.

Example: Let us take the number 27.

27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1

So, 27 in Roman numerals is XXVII.

Instead of representing 50 as XXXXX, a new symbol is given to it: L. Following the way the number 4 is represented as 1 less than 5 - that is, as IV - 40 is represented as 10 less than 50 - that is, as XL. However, people using this system were not always consistent with this practice. Sometimes, 40 was also represented as XXXX.

The Roman number system introduces newer symbols to represent certain bigger numbers. Let us call all these numbers that have a new basic symbol as landmark numbers. Here are some of the **landmark numbers** of the Roman system and their associated numerals.

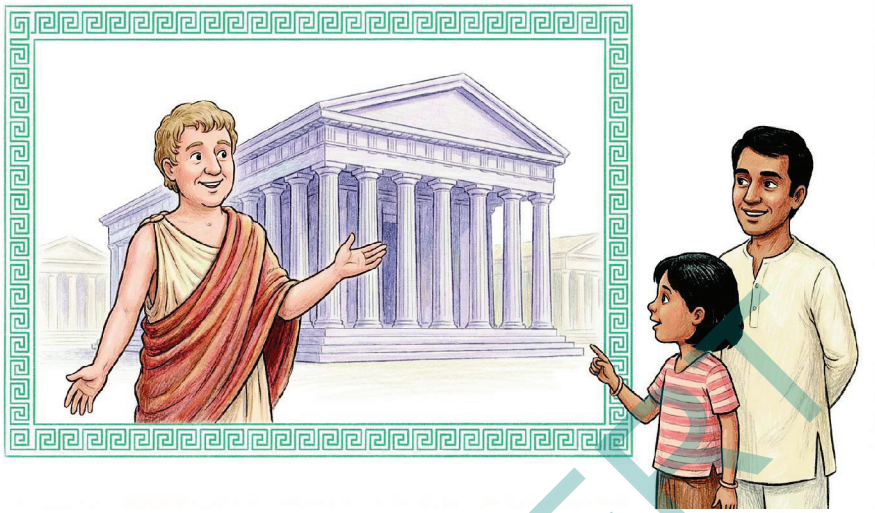
I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1,000

AP SCERT

అలా చేయడానికి చాలా మార్గాలు ఉన్నాయి!

3. మీ స్వంత సంఖ్యా వ్యవస్థను రూపొందించడానికి ప్రయత్నించండి..

3.2 రోమన్ సంఖ్యలు



మనం ఇప్పటికే 20 వరకు రోమన్ సంఖ్యా విధానాన్ని చూశాము (పట్టిక 1). ఇది 1 కోసం I, 5 కోసం V, 10 కోసం X లను ఉపయోగిస్తుందని మనం చూశాము.

39 వరకు ఉన్న ఏ సంఖ్యకైనా రోమన్ సంఖ్యను పొందడానికి, మొదట దానిని వీలైనన్ని 10ల సమూహాలుగా, మిగిలిన దానిని వీలైనన్ని 5ల సమూహాలుగా, చివరకు మిగిలిన దానిని 1ల సమూహాలుగా విభజిస్తారు.

ఉదాహరణ: 27 అనే సంఖ్యను తీసుకుందాం.

$27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1$

కాబట్టి, రోమన్ సంఖ్యలలో 27 అంటే XXVII.

50ని XXXXXగా సూచించడానికి బదులుగా, దానికి ఒక కొత్త గుర్తు ఇవ్వబడింది: L. 4 అనే సంఖ్యను 5 కంటే 1 తక్కువగా – అంటే, IVగా – సూచించే పద్ధతిని అనుసరించి, 40ని 50 కంటే 10 తక్కువగా – అంటే, XL గా – సూచిస్తారు. అయితే, ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించే ప్రజలు ఈ అభ్యాసంలో ఎల్లప్పుడూ స్థిరంగా ఉండేవారు కాదు. కొన్నిసార్లు, 40ని XXXXగా కూడా సూచించేవారు.

రోమన్ సంఖ్యా విధానం కొన్ని పెద్ద సంఖ్యలను సూచించడానికి కొత్త చిహ్నాలను ప్రవేశపెడుతుంది. కొత్త ప్రాథమిక చిహ్నం ఉన్న ఈ సంఖ్యలన్నింటినీ మనం **మైలురాయి సంఖ్యలు** అని పిలుద్దాం. రోమన్ పద్ధతిలోని కొన్ని మైలురాయి సంఖ్యలు మరియు వాటికి సంబంధించిన సంఖ్యలు ఇక్కడ ఉన్నాయి.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1,000

AP SCERT

These symbols are used to denote other numbers as well. For example, consider the number 2367. Writing it as a sum of landmark numbers starting from 1000 such that we take as many 1000s as possible, 500s as possible, and so on, we get

$$2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1$$

So in Roman numerals, this number is MMCCCLXII.

Figure it Out - 3.2

1. Represent the following numbers in the Roman system.

   (i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715

We see how vastly efficient this system is compared to some of the previous number systems that we have seen. This system seems to have evolved out of the ancient Greek number system in around the 8th century BCE in Rome, and evolved over time. It spread throughout Europe with the expansion of the Roman empire.

> The efficiency of this system is due to the grouping of a given number by not just one group size, but a sequence of group sizes that we call landmark numbers, and then using these landmark numbers to represent the given number. This idea is the next important breakthrough in the history of the evolution of number systems.

AP SCERT

Despite the relative efficiency of the Roman system, it doesn't lend itself to an easy performance of arithmetic operations, particularly multiplication and division.

Example : Try adding the following numbers without converting them to Hindu numerals:

(a) CCXXXII + CCCCXIII

Let us find the total number of Is, Xs, and Cs, and group them starting from the largest landmark number.

Apparently, it looks like the largest landmark number is C, but note that 5 Cs (100s) make a D (500). So the sum is

ఈ గుర్తులను ఇతర సంఖ్యలను సూచించడానికి కూడా ఉపయోగిస్తారు. ఉదాహరణకు, 2367 అనే సంఖ్యను తీసుకోండి. దీనిని 1000 నుండి ప్రారంభమయ్యే ముఖ్య సంఖ్యల మొత్తంగా రాస్తే, సాధ్యమైనన్ని ఎక్కువ 1000లను, సాధ్యమైనన్ని ఎక్కువ 500లను, ఆ విధంగా తీసుకుంటే, మనకు ఇలా లభిస్తుంది:

$$2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1$$

కాబట్టి రోమన్ సంఖ్యలలో, ఈ సంఖ్య MMCCCLXII.

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.2

1. క్రింది సంఖ్యలను రోమన్ సంఖ్యా విధానంలో సూచించండి.

(i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715

మనం ఇంతకు ముందు చూసిన కొన్ని సంఖ్యా వ్యవస్థలతో పోలిస్తే, ఈ వ్యవస్థ ఎంతగానో సమర్థవంతమైనదో మనం చూడవచ్చు. ఈ వ్యవస్థ క్రీస్తుపూర్వం 8వ శతాబ్దంలో రోమ్‌లో ప్రాచీన గ్రీకు సంఖ్యా వ్యవస్థ నుండి ఉద్భవించి, కాలక్రమేణా పరిణామం చెందినట్లు తెలుస్తోంది. రోమన్ సామ్రాజ్యం విస్తరణతో ఇది యూరప్ అంతటా వ్యాపించింది.

> ఈ వ్యవస్థ యొక్క సామర్థ్యానికి కారణం, ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యను కేవలం ఒకే సమూహ పరిమాణంతో కాకుండా, మనం ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలు అని పిలిచే వరుస సమూహ పరిమాణాలతో సమూహపరచడం, ఆపై ఈ ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలను ఉపయోగించి ఆ నిర్దిష్ట సంఖ్యను సూచించడం. సంఖ్యా వ్యవస్థల పరిణామ చరిత్రలో ఈ ఆలోచన తదుపరి ముఖ్యమైన ముందడుగు.

రోమన్ సంఖ్యా విధానం సాపేక్షంగా సమర్థవంతమైనది అయినప్పటికీ, అది అంకగణిత కార్యకలాపాలను, ముఖ్యంగా గుణకారం మరియు భాగహారాన్ని సులభంగా నిర్వహించడానికి అనుకూలమైనది కాదు.

ఉదాహరణ: కింది సంఖ్యలను హిందూ సంఖ్యలుగా మార్చకుండానే వాటిని కూడటానికి ప్రయత్నించండి:

(a) CCXXXII + CCCCXIII

మనం Iలు, Xలు మరియు Cల మొత్తం సంఖ్యను కనుగొని, వాటిని అతిపెద్ద మైలురాయి సంఖ్య నుండి ప్రారంభించి సమూహాలుగా విభజిద్దాం.

స్పష్టంగా, అతిపెద్ద ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య జ లాగా కనిపిస్తోంది, కానీ 5 Cలు (100లు) ఒక D (500) ను చేస్తాయని గమనించండి. కాబట్టి మొత్తం

AP SCERT

D

CCXXXII

CCCCXIII

	XL	V	
DC	XXX X	II III	= DCXLV

Do it yourself now: (b) LXXXVII + LXXVIII

? How will you multiply two numbers given in Roman numerals, without converting them to Hindu numerals? Try to find the product of the following pairs of landmark numbers:

Try This

V × L, L × D, V × D, VII × IX.

People using the Roman system made use of a calculating tool called the **abacus** to perform their arithmetic operations. We will see what it is in a later section. However, only specially trained people used this tool for calculation. While going through the number systems discussed above, it should not be understood that, historically, one system developed as an improvement over the previous system. This point should be kept in mind when studying the upcoming number systems too. The actual story of how each of the number systems developed is much more complex, and many times not clearly known, and so we will not try to trace this in the chapter.

Figure it Out - 3.3

Math Talk

1. Identify the features of the Hindu number system that make it efficient when compared to the Roman number system.

AP SCERT

D
CCXXXII
CCCCXIII

XL V

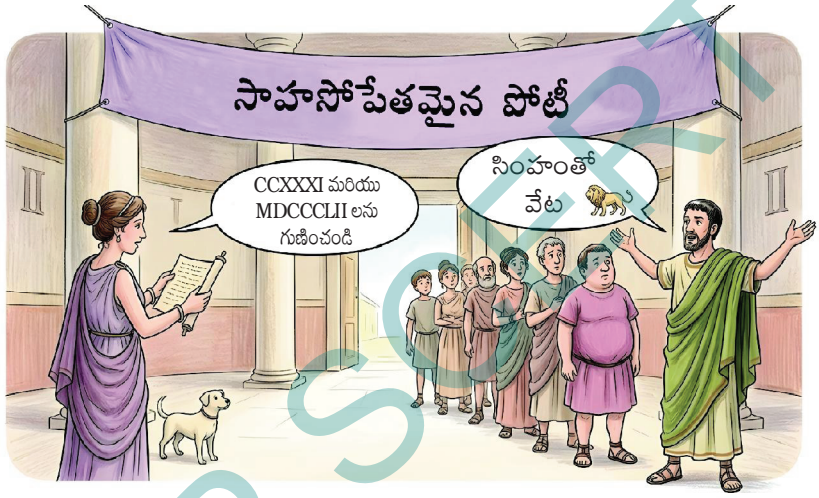
DC XXX II = DCXLV
X III

ఇప్పుడు మీరే చేయండి: (b) LXXXVII + LXXVIII

? రోమన్ సంఖ్యలను హిందూ అరబిక్ సంఖ్యలలోకి మార్చకుండానే, మీరు రెండు రోమన్ సంఖ్యలను ఎలా గుణిస్తారు? కింది ముఖ్యమైన సంఖ్యల జతల లబ్ధాన్ని కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి:

ప్రయత్నించండి

V × L, L × D, V × D, VII × IX.



రోమన్ సంఖ్యా విధానాన్ని ఉపయోగించే ప్రజలు తమ అంకగణిత కార్యకలాపాలను నిర్వహించడానికి **అబాకస్** అనే గణన సాధనాన్ని ఉపయోగించారు. అది ఏమిటో మనం తర్వాతి విభాగంలో చూస్తాము. అయితే, కేవలం ప్రత్యేక శిక్షణ పొందిన వ్యక్తులు మాత్రమే ఈ సాధనాన్ని గణన కోసం ఉపయోగించారు.

పైన చర్చించిన సంఖ్యా విధానాలను పరిశీలిస్తున్నప్పుడు, చారిత్రాత్మకంగా, ఒక విధానం మునుపటి విధానంపై మెరుగుదలగా అభివృద్ధి చెందిందని అర్థం చేసుకోకూడదు. రాబోయే సంఖ్యా విధానాలను అధ్యయనం చేసేటప్పుడు కూడా ఈ విషయాన్ని గుర్తుంచుకోవాలి. ప్రతి సంఖ్యా విధానం ఎలా అభివృద్ధి చెందిందనే దాని అసలు కథ చాలా సంక్లిష్టమైనది, మరియు చాలాసార్లు స్పష్టంగా తెలియదు, కాబట్టి మనం ఈ అధ్యాయంలో దానిని గుర్తించడానికి ప్రయత్నించము.

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.3

1. రోమన్ సంఖ్యామానంలో పోల్చినపుడు హిందూ సంఖ్యామానాన్ని మరింత సమర్థవంతంగా చేసే అంశాలను గుర్తించండి.

గణిత చర్చ

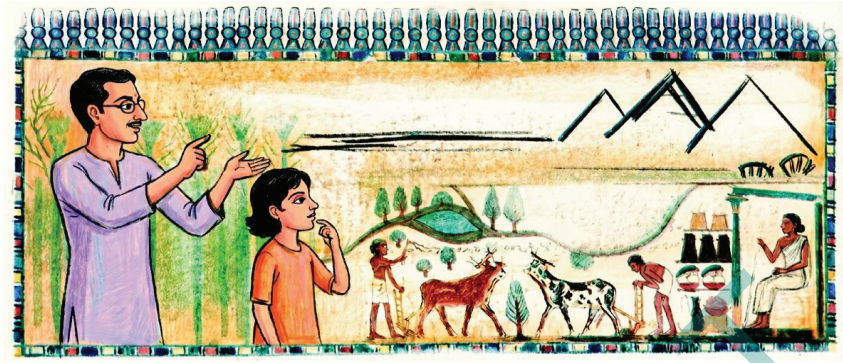
AP SCERT

2. Using the ideas discussed in this section, try refining the number system you might have made earlier.

Try This

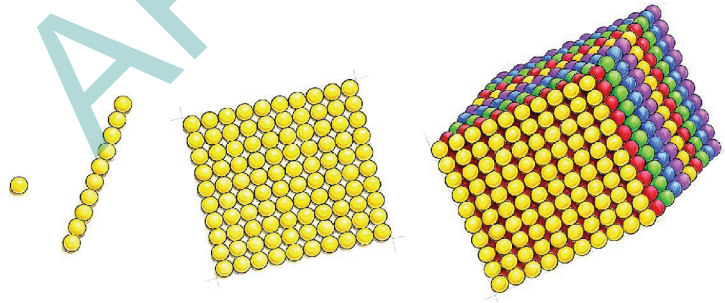
3.3 The Idea of a Base

I. The Egyptian Number System



We are now going to see a written number system that the Egyptians developed around 3000 BCE. In this system, we see the use of landmark numbers to group and represent a given number. However, what makes this system special is its sequence of landmark numbers.

Imagine making collections of pebbles. The first landmark number is 1. Group together 10 collections of the previous landmark number (1). Its size is the second landmark number which is 10. Group together 10 collections of the previous landmark number (10). Its size is the third landmark number which is 10 × 10 = 100, and so on.



Each landmark number is 10 times the previous one. Since 1 is the first landmark number, they are all powers of 10. The following are the symbols given to these numbers -

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7

APSCERT

2. ఈ విభాగంలో చర్చించిన ఆలోచనలను ఉపయోగించి, మీరు ఇంతకు ముందు తయారు చేసిన సంఖ్యా వ్యవస్థను మెరుగుపరచడానికి ప్రయత్నించండి.

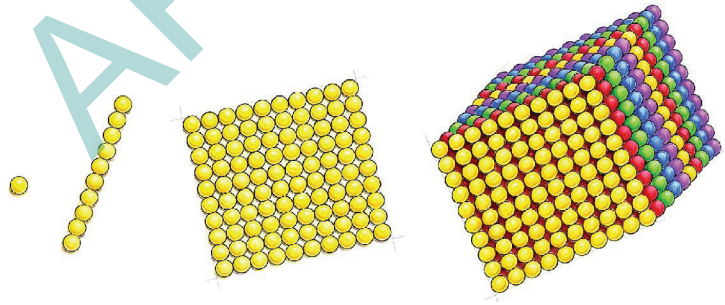
ప్రయత్నించండి

3.3 బేస్ యొక్క ఆలోచన

I. ఈజిప్షియన్ సంఖ్యా వ్యవస్థ

ఈజిప్షియన్లు 3000 BCE ప్రాంతంలో అభివృద్ధి చేసిన లిఖిత సంఖ్య వ్యవస్థను ఇప్పుడు మనం చూడబోతున్నాము. ఈ వ్యవస్థలో, ఇచ్చిన సంఖ్యను సమూహపరచడానికి మరియు సూచించడానికి ల్యాండ్‌మార్క్ (మైలురాయి సంఖ్యలు) సంఖ్యలను ఉపయోగించడాన్ని మనం చూస్తాము. అయితే, ఈ వ్యవస్థను ప్రత్యేకంగా చేసేది దాని ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యల క్రమం.

గులకరాళ్ళ సేకరణ చేయడం ఊహించుకోండి. మొదటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య 1. మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య (1) యొక్క 10 సేకరణలను కలిపి సమూహపరచండి. దీని పరిమాణం రెండవ ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య, ఇది 10. మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య (10) యొక్క 10 సేకరణలను కలిపి సమూహపరచండి. దీని పరిమాణం మూడవ ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య $10 \times 10 = 100$, మరియు మొదలైనవి



ప్రతి మైలురాయి సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యకు 10 రెట్లు ఉంటుంది. 1 మొదటి మైలురాయి సంఖ్య కాబట్టి, అవన్నీ 10 యొక్క ఘాతాలుగా ఉంటాయి. ఈ సంఖ్యలకు ఇవ్వబడిన గుర్తులు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి –

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7

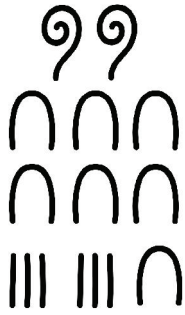
AP SCERT

As in the case of Roman numbers, a given number is counted in groups of the landmark numbers, starting from the largest landmark number less than the given number. This is then used to assign the numeral.
For example 324 which equals 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4 is written as.

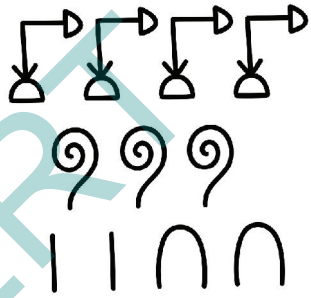
Figure it Out - 3.4

1. Represent the following numbers in the Egyptian system: 10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707.
2. What numbers do these numerals stand for?

(i)



(ii)



II. Variations on the Egyptian System and the Notion of Base

? Instead of grouping together 10 collections of size equal to the previous landmark number (as in the case of the Egyptian system), can we get a number system by grouping together 5 collections of size equal to the previous landmark number? Can this 5 be replaced by any positive integer?

Let us examine this possibility. Let 1 be the first landmark number.

Group together 5 collections of size equal to the previous landmark number (1). Its size is the second landmark number which is 5.

Group together 5 collections of size equal to the previous landmark number (5). Its size is the third landmark number which is 5 × 5 = 25.

Group together 5 collections of size equal to the previous landmark number (5). Its size is the fourth landmark number which is 5 × 25 = 125.

Thus, we have a new number system where each landmark number is 5 times the previous one. Since 1 is the first landmark number, they are all powers of 5.

AP SCERT

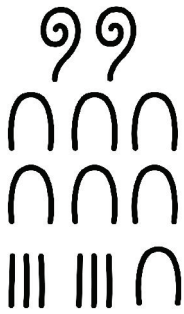
రోమన్ సంఖ్యల విషయంలో వలెనే, ఇచ్చిన సంఖ్య కంటే తక్కువగా ఉన్న అతిపెద్ద మైలురాయి సంఖ్య నుండి ప్రారంభించి, ఇచ్చిన సంఖ్యను మైలురాయి సంఖ్యల సమూహాలుగా లెక్కిస్తారు. ఆ తర్వాత దీనిని ఉపయోగించి సంఖ్యా చిహ్నాన్ని కేటాయిస్తారు.

ఉదాహరణకు, 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4కి సమానమైన 324 ను ఇలా వ్రాస్తారు .

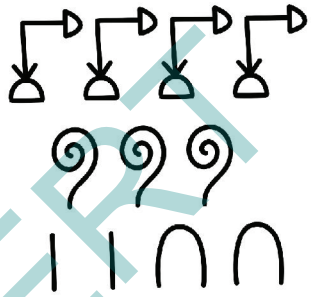
ఆలోచించండి-చేయండి - 3.4

1. కింది సంఖ్యలను ఈజిప్షియన్ సంఖ్యా విధానంలో సూచించండి: 10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707.
2. ఈ అంకెలు ఏ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి?

(i)



(ii)



II. ఈజిప్షియన్ వ్యవస్థలోని వైవిధ్యాలు మరియు ఆధార సంఖ్య భావన

? మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యకు సమానమైన పరిమాణంలో 10 సేకరణలను (ఈజిప్షియన్ వ్యవస్థలో వలె) సమూహపరచడానికి బదులుగా, మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యకు సమానమైన పరిమాణంలో 5 సేకరణలను సమూహపరచడం ద్వారా మనం సంఖ్యా వ్యవస్థను పొందవచ్చా? ఈ 5ని ఏదైనా సానుకూల పూర్ణాంకంతో భర్తీ చేయవచ్చా?

ఈ అవకాశాన్ని పరిశీలిద్దాం. 1ని మొదటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యగా భావించండి.

మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య (1)కి సమానమైన పరిమాణంలో 5 సేకరణలను సమూహపరచండి. దీని పరిమాణం రెండవ ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య, ఇది 5.

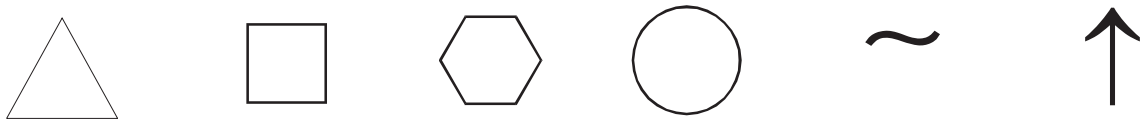
మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య (25)కి సమానమైన పరిమాణంలో 5 సేకరణలను సమూహపరచండి. దీని పరిమాణం మూడవ ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య, ఇది 5 × 5 = 25.

మునుపటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య (5)కి సమానమైన పరిమాణంలో 5 సేకరణలను సమూహపరచండి. దీని పరిమాణం నాల్గవ ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య, ఇది 5 × 25 = 125.

ఈ విధంగా, మనకు ఒక కొత్త సంఖ్యా వ్యవస్థ ఉంది, ఇందులో ప్రతి మైలురాయి సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యకు 5 రెట్లు ఉంటుంది. 1 మొదటి మైలురాయి సంఖ్య కాబట్టి, అవన్నీ 5 యొక్క ఘాతాలుగా ఉంటాయి.

AP SCERT

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$



? Express the number 143 in this new system.

Let us start grouping, starting with the size 53 = 125, as this is the largest landmark number smaller than 143. We get-

$$143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1.$$

So the number 143 in the new system is ○ □ □ □ △ △ △

Number systems having landmark numbers in which the

(a) first landmark number is 1, and

(b) every next landmark number is obtained by multiplying the current landmark number by some fixed number n is said to be a base-n number system.

The Egyptian number system is a base-10 system, and the number system that we created is a base-5 system. A base-10 number system is also called a decimal number system.

Figure it Out - 3.5

1. Write the following numbers in the above base-5 system using the symbols in Table 2: 15, 50, 137, 293, 651.
2. Is there a number that cannot be represented in our base-5 system above? Why or why not?
3. Compute the landmark numbers of a base-7 system. In general, what are the landmark numbers of a base-n system?

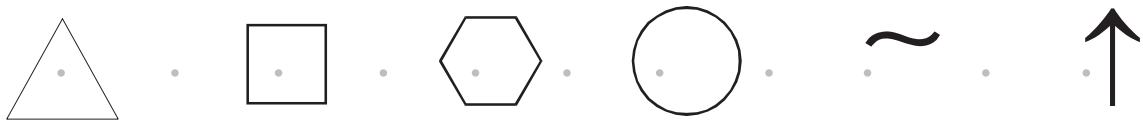
   The landmark numbers of a base-n number system are the powers of n starting from $n^0 = 1, n, n^2, n^3, \ldots$

Abacus that Makes Use of the Decimal System

In around the 11th century, even the people still using the Roman numerals started using a calculating device - the abacus - constructed using a decimal system. It was a board with lines, as shown in the Fig. 3.1. Starting

AP SCERT

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$



? 143 అనే సంఖ్యను ఈ కొత్త పద్ధతిలో వ్యక్తపరచండి.

$5^3 = 125$ పరిమాణంతో ప్రారంభించి, సమూహాన్ని ప్రారంభిద్దాం, ఎందుకంటే ఇది 143 కంటే చిన్నదైన అతిపెద్ద ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య. మనకు లభిస్తుంది ---

$$143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1.$$

కాబట్టి కొత్త వ్యవస్థలో 143 సంఖ్య ○□□□△△△ .

(a) ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న సంఖ్య వ్యవస్థలు, వీటిలో

(b) మొదటి ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్య 1, మరియు ప్రతి తదుపరి మైలురాయి సంఖ్యను ప్రస్తుత మైలురాయి సంఖ్యను ఏదైనా స్థిర సంఖ్య n తో గుణించడం ద్వారా పొందినట్లయితే, దానిని బేస్-అ సంఖ్యామానం అంటారు.

ఈజిప్షియన్ సంఖ్యామానం ఒక బేస్-10 పద్ధతి, మరియు మనం సృష్టించిన సంఖ్యామానం ఒక బేస్-5 పద్ధతి. బేస్-10 సంఖ్యామానాన్ని దశాంశ సంఖ్యామానం అని కూడా అంటారు.

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.5

1. పట్టిక 2లోని చిహ్నాలను ఉపయోగించి, కింది సంఖ్యలను పై బేస్-5 పద్ధతిలో రాయండి: 15, 50, 137, 293, 651.
2. పైన పేర్కొన్న మన బేస్-5 సంఖ్యా విధానంలో సూచించలేని సంఖ్య ఏదైనా ఉందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు లేదు?
3. బేస్-7 వ్యవస్థ యొక్క ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలను లెక్కించండి. సాధారణంగా, బేస్-అ వ్యవస్థ యొక్క ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలు ఏమిటి?

   బేస్-అ సంఖ్యా వ్యవస్థ యొక్క ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలు అ యొక్క ఘాతాలు, అవి $n^0 = 1, n, n^2, n^3, \ldots$ నుండి ప్రారంభమవుతాయి.

దశాంశ పద్ధతిని ఉపయోగించే అబాకస్

సుమారు 11వ శతాబ్దంలో, రోమన్ సంఖ్యలను ఉపయోగించే ప్రజలు కూడా దశాంశ పద్ధతిని ఉపయోగించి నిర్మించిన ఒక గణన పరికరాన్ని - అబాకస్‌ను - ఉపయోగించడం ప్రారంభించారు. ఇది పటంలో 3.1లో చూపిన

AP SCERT

from the line that stood for 1, each successive line stood for a successive power of 10.

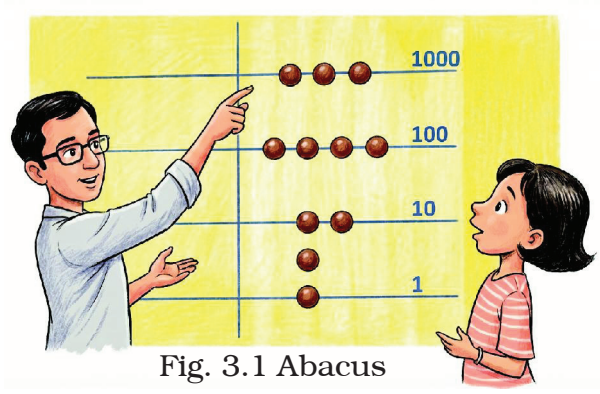


Fig. 3.1 Abacus

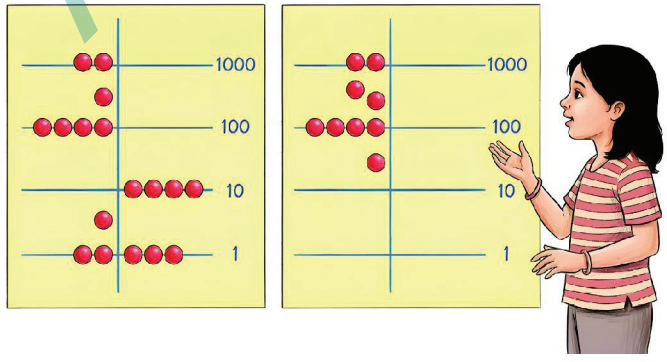
Numbers were represented in it as follows: the given number was first grouped into the landmark numbers (powers of 10), in exactly the same way we have been grouping them so far. For each power of 10, as many counters were placed on its line as the number of times it occurred in the grouping. The presence of a counter above a line contributed a value of 5.

For example let us take the number 3426. It can be grouped as

3426 = 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

This number was represented as shown in Fig. 3.1. Notice how the 6 ones are represented.

To get an idea of how the abacus was used for calculations, let us consider a simple addition problem: 2907 + 43. The two numbers were taken on either side of the vertical partition.

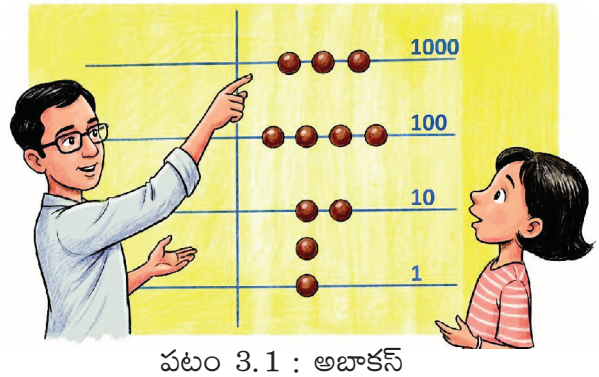


How would you use this to find the sum?

The counters along each line were brought together. What is to be done if the total in a line exceeded 10?

AP SCERT

విధంగా గీతలతో కూడిన ఒక పలక. 1ని సూచించే గీత నుండి మొదలుకొని, ప్రతి తదుపరి గీత 10 యొక్క తదుపరి ఘాతాన్ని సూచించింది.



పటం 3.1 : అబాకస్

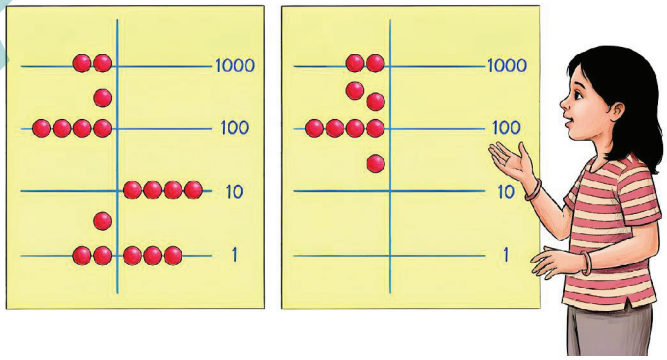
అందులో సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా సూచించారు: ఇచ్చిన సంఖ్యను మొదటగా మైలురాయి సంఖ్యలుగా (10 యొక్క ఘాతాలుగా) విభజించారు, మనం ఇప్పటివరకు విభజించిన విధంగానే. 10 యొక్క ప్రతి ఘాతానికి, అది ఎన్నిసార్లు పునరావృతమైందో అన్ని పూసలను దాని వరుసలో ఉంచారు. గ్రూపింగ్‌లో. ఒక లైన్ పైన పూస ఉండటం 5 విలువకు దోహదపడింది.

ఉదాహరణకు 3426 సంఖ్యను తీసుకుందాం. దీనిని ఇలా వర్గీకరించవచ్చు

3426 = 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

ఈ సంఖ్యను పటం 3.1లో చూపిన విధంగా సూచించారు. 6 ఒకట్లను ఎలా సూచించారో గమనించండి.

లెక్కల కోసం అబాకస్‌ను ఎలా ఉపయోగించారో తెలుసుకోవడానికి, ఒక సాధారణ సంకలనం సమస్యను పరిశీలిద్దాం: 2907 + 43. ఈ రెండు సంఖ్యలను నిలువు విభజన యొక్క ఇరువైపులా తీసుకున్నారు.



మొత్తాన్ని కనుగొనడానికి మీరు దీనిని ఎలా ఉపయోగిస్తారు?

ప్రతి గీత వెంబడి ఉన్న పూసలను ఒకచోట చేర్చారు. ఒక గీతలోని మొత్తం 10 కంటే ఎక్కువ ఉంటే ఏమి చేయాలి?

AP SCERT

Hint: In this problem, the 7 ones and the 3 ones together make 10 ones which contributes a counter to the line representing 10s.

III. Shortcomings of the Egyptian System

Despite being a number system that enabled relatively efficient number representations for numbers till a crore (10^7), and relatively easy computations, the Egyptian system had a drawback.

If larger and larger numbers needed to be represented, then there was a need for inventing an unending sequence of symbols for higher and higher powers of 10. Here we see the original challenge of number representation resurfacing in a different form!

The next and the final idea in the history of the evolution of number systems not only solves this problem but also remarkably simplifies number representation and computations!

Figure it Out - 3.6

1. Can there be a number whose representation in Egyptian numerals has one of the symbols occurring 10 or more times? Why not?
2. Create your own number system of base 4, and represent numbers from 1 to 16.
3. Give a simple rule to multiply a given number by 5 in the base-5 system that we created.

3.4. Place Value Representation

I. The Mesopotamian Number System

AP SCERT

సూచన: ఈ సమస్యలో, 7 ఒకట్లు మరియు 3 ఒకట్లు కలిసి 10 ఒకట్లు అవుతాయి, ఇది పదులను సూచించే గీతకు ఒక పూసలను అందిస్తుంది.

III. ఈజిప్టు వ్యవస్థలోని లోపాలు

కోటి (10^7) వరకు ఉన్న సంఖ్యలను సాపేక్షంగా సమర్థవంతంగా సూచించడానికి మరియు లెక్కలను సులభంగా చేయడానికి వీలు కల్పించిన సంఖ్యా విధానం అయినప్పటికీ, ఈజిప్షియన్ విధానంలో ఒక లోపం ఉంది.

మరింత పెద్ద సంఖ్యలను సూచించాల్సి వస్తే, 10 యొక్క అధిక ఘాతాలకు కొత్త చిహ్నాలను కనిపెట్టాల్సిన అవసరం ఏర్పడింది. ఇక్కడ మనం సంఖ్యా ప్రాతినిధ్యంలో ఉన్న అసలు సవాలు వేరొక రూపంలో తిరిగి తలెత్తడాన్ని చూస్తున్నాము!

సంఖ్యా విధానాల పరిణామ చరిత్రలో తదుపరి మరియు చివరి ఆలోచన ఈ సమస్యను పరిష్కరించడమే కాకుండా, సంఖ్యల ప్రాతినిధ్యం మరియు గణనలను కూడా అద్భుతంగా సులభతరం చేస్తుంది.!

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.6

1. ఈజిప్షియన్ సంఖ్యామానంలో, ఏదైనా ఒక గుర్తు 10 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సార్లు కనిపించేలా ఒక సంఖ్యను సూచించడం సాధ్యమవుతుందా? ఎందుకు కాదు?
2. మీ స్వంత బేస్ 4 సంఖ్యా వ్యవస్థను సృష్టించండి మరియు 1 నుండి 16 వరకు గల సంఖ్యలను దానిలో సూచించండి.
3. మనం రూపొందించిన బేస్-5 పద్ధతిలో ఇచ్చిన సంఖ్యను 5తో గుణించడానికి ఒక సులభమైన నియమాన్ని తెలపండి.

3.4. స్థాన విలువ ప్రాతినిధ్యం

I. మెసొపొటేమియా సంఖ్యా వ్యవస్థ

AP SCERT

In the beginning, the number system used in ancient Mesopotamia had different symbols for different landmark numbers. In later times, it became a base-60 system, also called the sexagesimal system, with a very efficient number representation.

It has puzzled many why they chose base 60. Different theories exist to explain this, ranging from the connection between 60 and the periods of some important events (like the length of their lunar month which had 30 days, or the time taken for the Sun to complete one revolution around the Earth when Earth is taken to be stationary), the ease of representing fractions (we will not go into this here), their earlier sequence of landmark numbers - 1, 10, 60, 600, 3600, 36000,... - getting reduced to only the powers of 60, and so on.

The influence of the Mesopotamian sexagesimal system, also known as the **Babylonian number system**, can be seen even now in our units of time measurements - 1 hour = 60 minutes and 1 minute = 60 seconds.

This system used the symbol for 1 and for 10.

Let us now briefly pause on the study of their number system, and ideate on how one can build an efficient number system using the Mesopotamian features seen so far.

Let us give our own symbols to their landmark numbers -

1	60	$60^2 = 3600$	$60^3 = 216000$	
	1	2	3	.....

Note that we have actually used Indian numerals in creating these symbols. We could have invented our own symbols but for the sake of easy recall and use, we have chosen to take help of the familiar numerals 1, 2, 3, ...

Using and , numbers from 1 to 59 can be represented -

1	2	3	4	5	6	7	8	9

AP SCERT

మొదట్లో, ప్రాచీన మెసొపొటేమియాలో ఉపయోగించిన సంఖ్యామానంలో వివిధ ముఖ్య సంఖ్యల కోసం వేర్వేరు చిహ్నాలు ఉండేవి. తరువాతి కాలంలో, అది బేస్-60 వ్యవస్థగా మారింది, దీనిని షష్ఠ్యంశ పద్ధతి అని కూడా పిలుస్తారు, మరియు ఇది సంఖ్యలను సూచించడంలో చాలా సమర్థవంతంగా ఉండేది.

వారు బేస్-60ని ఎందుకు ఎంచుకున్నారనేది చాలా మందిని ఆశ్చర్యపరిచింది. దీనిని వివరించడానికి వివిధ సిద్ధాంతాలు ఉన్నాయి, అవి 60కి మరియు కొన్ని ముఖ్యమైన సంఘటనల కాలాలకు మధ్య ఉన్న సంబంధం (వారి చంద్రమాస కాలం 30 రోజులు ఉండటం లేదా భూమి స్థిరంగా ఉందని భావించినప్పుడు సూర్యుడు భూమి చుట్టూ ఒక పరిభ్రమణం పూర్తి చేయడానికి పట్టే సమయం వంటివి), భిన్నాలను సూచించడంలో ఉన్న సౌలభ్యం (మనం దీని గురించి ఇక్కడ చర్చించము), వారి మునుపటి ముఖ్య సంఖ్యల శ్రేణి – 1, 10, 60, 600, 3600, 36000,... – కేవలం 60 యొక్క ఘాతాలుగా కుదించబడటం వంటివి.

బాబిలోనియన్ సంఖ్యా వ్యవస్థ అని కూడా పిలువబడే మెసొపొటేమియన్ షష్ఠ్యంశ పద్ధతి యొక్క ప్రభావం మన కాలమాన కొలతలలో నేటికీ కనిపిస్తుంది – 1 గంట = 60 నిమిషాలు మరియు 1 నిమిషం = 60 సెకన్లు. ఈ వ్యవస్థ 1 కోసం 𒁹 గుర్తును మరియు 10 కోసం 𒌋 గుర్తును ఉపయోగించింది. ఇప్పుడు మనం వారి సంఖ్యా వ్యవస్థ అధ్యయనాన్ని కొద్దిసేపు ఆపి,

ఇప్పటివరకు మనం చూసిన మెసొపొటేమియన్ లక్షణాలను ఉపయోగించి ఒక సమర్థవంతమైన సంఖ్యా వ్యవస్థను ఎలా నిర్మించవచ్చో ఆలోచిద్దాం.

వారి ముఖ్యమైన సంఖ్యలకు మనమే సొంత గుర్తులను ఇద్దాం –

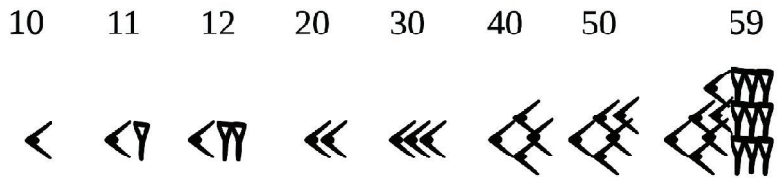
1	60	$60^2 = 3600$	$60^3 = 216000$	
𒁹	1	2	3	.....

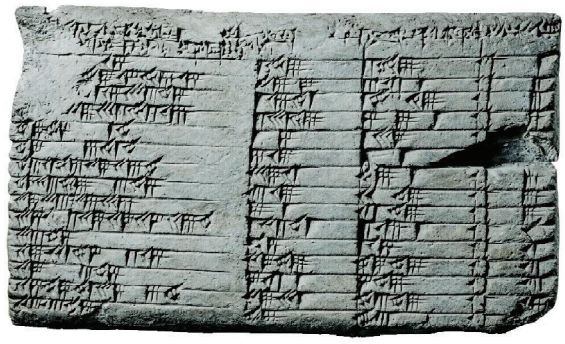
"ఈ చిహ్నాలను సృష్టించడంలో మేము వాస్తవానికి భారతీయ అంకెలను ఉపయోగించామని గమనించండి. మేము మా స్వంత చిహ్నాలను కనిపెట్టి ఉండవచ్చు, కానీ సులభంగా గుర్తుంచుకోవడానికి మరియు ఉపయోగించడానికి వీలుగా, మాకు తెలిసిన 1, 2, 3, ... అంకెలను ఉపయోగించాలని మేము నిర్ణయించుకున్నాము."

𒁹 మరియు 𒌋 లను ఉపయోగించి, 1 నుండి 59 వరకు గల సంఖ్యలను సూచించవచ్చు –

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𒁹	𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹	𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋	𒌋𒌋𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹

AP SCERT





Reproduction of a Mesopotamian Tablet

Example : Let us represent the number 640 in this system.

Grouping it into landmark numbers, we see that

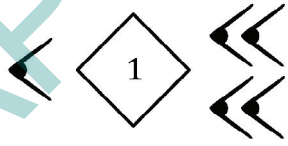
$$640 = (10) \times 60 + 40.$$

If we use the Egyptian idea, this number would be represented using 10

s, and 40 would be represented using 4 s.

Can we represent this more compactly?

We can simply represent this number as

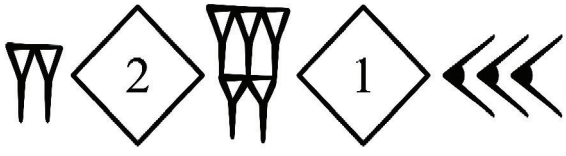


which can be read as ten 60s and one 40, just as we have written in the equation.

Example: Let us try another number - 7530.

$$7530 = (2) \times 3600 + (5) \times 60 + 30$$

So, its representation would be



AP SCERT

10 11 12 20 30 40 50 59

మెసపటోమియన్ సంఖ్యల పునరుత్పత్తి

ఉదాహరణ: ఈ పద్ధతిలో 640 అనే సంఖ్యను సూచిద్దాం.

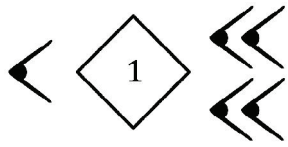
దీనిని ముఖ్యమైన సంఖ్యలుగా విభజించినప్పుడు, మనం గమనించేది ఏమిటంటే...

$$640 = (10) \times 60 + 40.$$

మనం ఈజిప్షియన్ పద్ధతిని ఉపయోగించినట్లయితే, ఈ సంఖ్యను 10 ◇1 లతో సూచిస్తారు, మరియు 40 ని 4 < లతో సూచిస్తారు.

దీనిని మనం మరింత సంక్షిప్తంగా సూచించగలమా?

మనం ఈ సంఖ్యను ఇలా సూచించవచ్చు

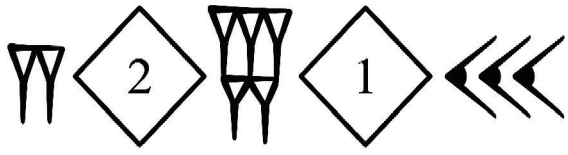


మనం సమీకరణంలో వ్రాసిన విధంగా దీనిని పది 60లు మరియు ఒక 40గా చదవవచ్చు.

ఉదాహరణ: మనం మరొక సంఖ్యను ప్రయత్నిద్దాం – 7530.

$$7530 = (2) \times 3600 + (5) \times 60 + 30$$

కాబట్టి, దాని ప్రాతినిధ్యం



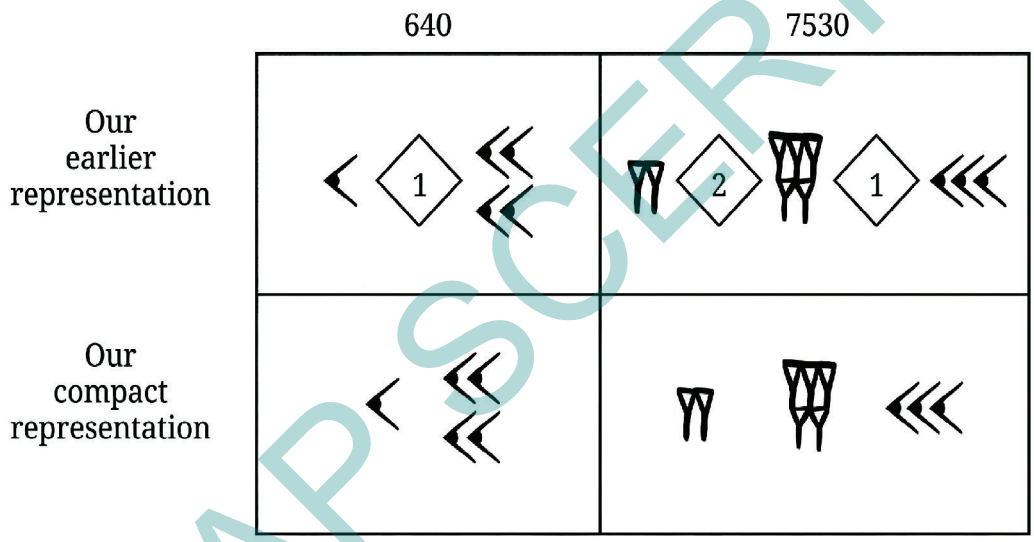
AP SCERT

Note that when a number is grouped into powers of 60 for its representation, no power of 60 can occur 60 or more times. If this happens, then 60 of them can be grouped to form the next power of 60. For example, consider the expression -

$$(1) \times 3600 + (70) \times 60 + 2 = (1) \times 60^2 + (60 + 10) \times 60 + 2$$
$$= (1) \times 60^2 + 60^2 + (10) \times 60 + 2$$
$$= (2) \times 60^2 + (10) \times 60 + 2$$

Therefore, any number can be represented using the numerals from 1 - 59, along with the numerals for landmark numbers.

Now, what if we make the representation even more compact by dropping the symbols for the different powers of 60 altogether?



This is exactly what the Mesopotamians did! In their numeral, the rightmost set of symbols showed the number of 1s, the set of symbols to its left showed the number of 60s, the next showed the number of 3600s and so on. Whenever there was no occurrence of a power of 60, a blank space was given in that position.

It does not seem that the Mesopotamians arrived at this idea in the same way we did. Some scholars suggest that the similarity of symbols given to the landmark numbers 1 and 60 in their earlier number system, and an accidental usage of them, might have made them stumble upon this idea.

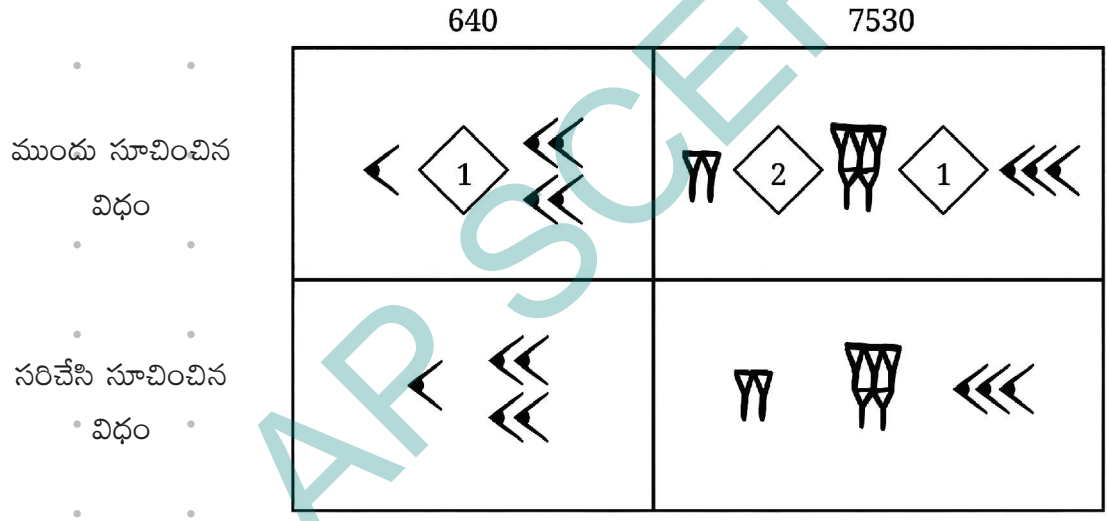
APSCERT

ఒక సంఖ్యను దాని ప్రాతినిధ్యం కోసం 60 యొక్క ఘాతాలుగా సమూహపరిచినప్పుడు, 60 యొక్క ఏ ఘాతమూ 60 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం కాదని గమనించండి. ఒకవేళ అలా జరిగితే, వాటిలో 60 వాటిని సమూహపరిచి 60 యొక్క తదుపరి ఘాతాన్ని ఏర్పరచవచ్చు. ఉదాహరణకు, ఈ వ్యక్తీకరణను పరిగణించండి.

$$
\begin{aligned}
(1) \times 3600 + (70) \times 60 + 2 &= (1) \times 60^2 + (60 + 10) \times 60 + 2 \\
&= (1) \times 60^2 + 60^2 + (10) \times 60 + 2 \\
&= (2) \times 60^2 + (10) \times 60 + 2
\end{aligned}
$$

అందువల్ల, 1 నుండి 59 వరకు ఉన్న అంకెలతో పాటు, ముఖ్యమైన సంఖ్యల కోసం ఉపయోగించే అంకెలను ఉపయోగించి ఏ సంఖ్యనైనా సూచించవచ్చు.

ఇప్పుడు, 60 యొక్క విభిన్న ఘాతాలకు సంబంధించిన చిహ్నాలను పూర్తిగా తొలగించడం ద్వారా ఈ ప్రాతినిధ్యాన్ని మరింత సంక్షిప్తంగా చేస్తే ఎలా ఉంటుంది?



మెసొపొటేమియన్లు సరిగ్గా ఇదే చేశారు! వారి సంఖ్యా విధానంలో, కుడివైపున ఉన్న చిహ్నాల సమితి 1ల సంఖ్యను, దానికి ఎడమవైపున ఉన్న చిహ్నాల సమితి 60ల సంఖ్యను, ఆ తర్వాతది 3600ల సంఖ్యను మరియు ఇదే విధంగా చూపిస్తుంది. ఎప్పుడైనా 60 యొక్క ఘాతం లేనప్పుడు, ఆ స్థానంలో ఒక ఖాళీ ఇవ్వబడింది.

మనం ఈ ఆలోచనకు చేరుకున్న విధంగానే మెసొపొటేమియన్లు కూడా ఈ ఆలోచనకు వచ్చారని అనిపించడం లేదు. కొంతమంది పండితులు వారి మునుపటి సంఖ్యా విధానంలో 1 మరియు 60 వంటి ముఖ్యమైన సంఖ్యలకు ఇచ్చిన చిహ్నాలలో ఉన్న సారూప్యత, మరియు వాటిని అనుకోకుండా ఉపయోగించడం వల్ల వారు ఈ ఆలోచనను కనుగొని ఉండవచ్చని సూచిస్తున్నారు.

AP SCERT

Figure it Out - 3.7

1. Represent the following numbers in the Mesopotamian system -
   (i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605

Thus, we can see how the Mesopotamian system removes the need for generating an unending sequence of symbols for the landmark numbers by making use of the positions where the symbols are written. Such a number system (having a base) that makes use of the position of each symbol in determining the landmark number that it is associated with is called a **positional number system a place value system.**

This idea of place value marks the highest point in the history of evolution of number systems, and gives a very elegant solution to the problem of representing the unending sequence of numbers using only a finite number of different symbols!

The Mesopotamian system however cannot be considered a fully developed place value system. It has certain defects that lead to confusion while reading a number.

? Look at the representation of 60. What will be the representation for 3,600?

While writing the numerals, the spacing between symbols was not given the way we are giving it here. It was also difficult to maintain a consistent spacing for blanks across different manuscripts written by different people. These created ambiguities. For example, consider the representations of the following numbers -

Numbers	1	60	3600	12	602	36002
Our representation	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒐗	𒌋𒐗	𒌋𒐗
Mesopotamian representation	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒐗	𒌋𒐗	𒌋𒐗

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.7

1. కింది సంఖ్యలను మెసొపొటేమియా పద్ధతిలో సూచించండి. -

(i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605

ఈ విధంగా, మెసొపొటేమియన్ వ్యవస్థ సంకేతాలను రాసే స్థానాలను ఉపయోగించుకోవడం ద్వారా, ప్రధాన సంఖ్యల కోసం అంతులేని సంకేతాల శ్రేణిని రూపొందించాల్సిన అవసరాన్ని ఎలా తొలగిస్తుందో మనం చూడవచ్చు. ప్రతి సంకేతం యొక్క స్థానాన్ని ఉపయోగించి, అది సూచించే ప్రధాన సంఖ్యను నిర్ణయించే ఇటువంటి సంఖ్యా వ్యవస్థను (ఒక ఆధారాన్ని కలిగి ఉన్న) స్థాన విలువ సంఖ్యా వ్యవస్థ అని పిలుస్తారు.

ఈ స్థాన విలువ భావన సంఖ్యా వ్యవస్థల పరిణామ చరిత్రలో అత్యున్నత శిఖరాన్ని సూచిస్తుంది మరియు పరిమిత సంఖ్యలో వేర్వేరు సంకేతాలను మాత్రమే ఉపయోగించి, అంతులేని సంఖ్యల శ్రేణిని సూచించే సమస్యకు చాలా సొగసైన పరిష్కారాన్ని అందిస్తుంది!

అయితే, మెసొపొటేమియన్ వ్యవస్థను పూర్తిగా అభివృద్ధి చెందిన స్థాన విలువ వ్యవస్థగా పరిగణించలేము. ఒక సంఖ్యను చదివేటప్పుడు గందరగోళానికి దారితీసే కొన్ని లోపాలు ఇందులో ఉన్నాయి.

? 60 యొక్క ప్రాతినిధ్యాన్ని చూడండి. 3,600కి ప్రాతినిధ్యం ఎలా ఉంటుంది?

సంఖ్యలను వ్రాసేటప్పుడు, మనం ఇక్కడ ఇస్తున్నట్లుగా గుర్తుల మధ్య ఖాళీకి ప్రాధాన్యత ఇవ్వలేదు. వేర్వేరు వ్యక్తులు రాసిన వివిధ చేతివ్రతులలో ఖాళీల కోసం స్థిరమైన అంతరాన్ని పాటించడం కూడా కష్టంగా ఉండేది. ఇవి అస్పష్టతలను సృష్టించాయి. ఉదాహరణకు, కింది సంఖ్యల ప్రాతినిధ్యాలను పరిగణించండి. -

సంఖ్యలు	1	60	3600	12	602	36002
మనం సూచించిన విధం	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹
మెసపటోనియను సూచించిన విధం	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹

AP SCERT

Because of the ambiguity in finding which symbols correspond to which powers of 60, the same numeral can be read in different ways. Even in our representation which uses uniform spacing between symbols for different powers of 60, it is difficult to know the number of blanks between two sets of symbols, as in the representation of 36002.

To address the issue arising out of blank spaces, the later Mesopotamians used a brilliant idea of assigning a 'placeholder' symbol 𒌋𒌋 to denote a blank space. This is like the 0 (zero) we use in our system. Thus, zero - the symbol that shows nothingness - is indispensable as a placeholder in a place value system in which numbers are written in an unambiguous manner.

Even with the problem arising out of blank spaces solved, other ambiguities still remained in the system. For example, the placeholder symbol was primarily used in the middle of numbers and not at the end; so they would not use it to represent a number like (what we would write as) 3600.

II. The Mayan Number System

In Central America, there flourished a civilisation known as the Mayan civilisation that made great intellectual and cultural progress between the 3rd and 10th centuries CE. Among their intellectual achievements stands their place value system designed independently of those in Asia. They also made use of a placeholder symbol, for the modern-day '0', that looked like a seashell.

AP SCERT

60 యొక్క ఏ ఘాతాలకు ఏ గుర్తులు అనుగుణంగా ఉన్నాయో కనుగొనడంలో ఉన్న అస్పష్టత కారణంగా, ఒకే సంఖ్యను వేర్వేరు విధాలుగా చదవవచ్చు. 60 యొక్క విభిన్న ఘాతాల కోసం గుర్తుల మధ్య ఏకరీతి అంతరాన్ని ఉపయోగించే మన ప్రాతినిధ్యంలో కూడా, 36002 సంఖ్య యొక్క ప్రాతినిధ్యంలో ఉన్నట్లుగా, రెండు గుర్తుల సమితుల మధ్య ఖాళీల సంఖ్యను తెలుసుకోవడం కష్టం.

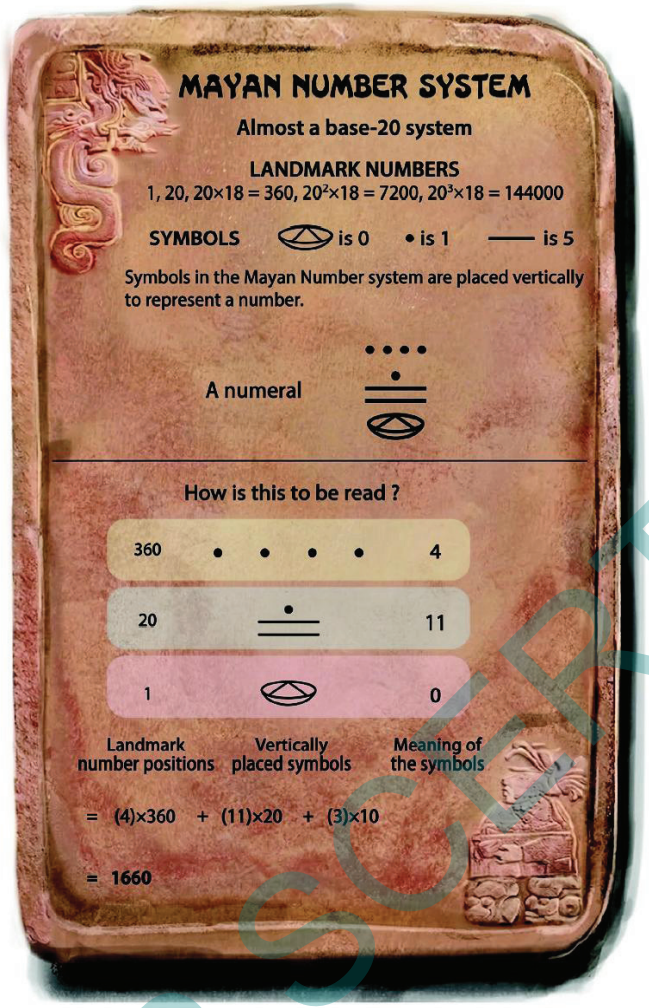
ఖాళీ స్థలాల వల్ల తలెత్తే సమస్యను పరిష్కరించడానికి, తరువాతి మెసొపొటేమియన్లు ఖాళీ స్థలాన్ని సూచించడానికి 𒌋𒌋 అనే ఒక 'ప్లేస్‌హోల్డర్' గుర్తును కేటాయించే ఒక అద్భుతమైన ఆలోచనను ఉపయోగించారు. ఇది మన పద్ధతిలో మనం ఉపయోగించే 0 (సున్నా) లాంటిది. ఈ విధంగా, శూన్యతను చూపించే గుర్తు అయిన సున్నా, సంఖ్యలను అస్పష్టత లేకుండా వ్రాసే స్థాన విలువ పద్ధతిలో ఒక ప్లేస్‌హోల్డర్‌గా అనివార్యమైనది.

ఖాళీ స్థలాల వల్ల తలెత్తే సమస్య పరిష్కరించబడినప్పటికీ, ఆ పద్ధతిలో ఇతర అస్పష్టతలు ఇంకా మిగిలి ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు, ప్లేస్‌హోల్డర్ గుర్తును ప్రధానంగా సంఖ్యల మధ్యలో ఉపయోగించేవారు, చివరలో కాదు; కాబట్టి వారు (మనం 3600 అని వ్రాసే) సంఖ్యను సూచించడానికి దానిని ఉపయోగించేవారు కాదు.

II. మాయన్ సంఖ్యా వ్యవస్థ

మధ్య అమెరికాలో, క్రీ.శ. 3వ మరియు 10వ శతాబ్దాల మధ్య గొప్ప మేధో మరియు సాంస్కృతిక పురోగతిని సాధించిన మాయన్ నాగరికత అనే ఒక నాగరికత వర్ధిల్లింది. వారి మేధో విజయాలలో, ఆసియాలోని పద్ధతులతో సంబంధం లేకుండా స్వతంత్రంగా రూపొందించిన వారి స్థాన విలువ సంఖ్యా విధానం ఒకటి. వారు ఆధునిక '0'కు బదులుగా, శంఖం ఆకారంలో ఉండే ఒక ప్లేస్‌హోల్డర్ చిహ్నాన్ని కూడా ఉపయోగించారు.

AP SCERT



Here we find a puzzling phenomenon. Why was their third landmark number 360 rather than 400? Some scholars feel that this might have something to do with their calendars.

They used a dot for 1, and a bar — for 5. These were used to denote numbers from 1 to 19.

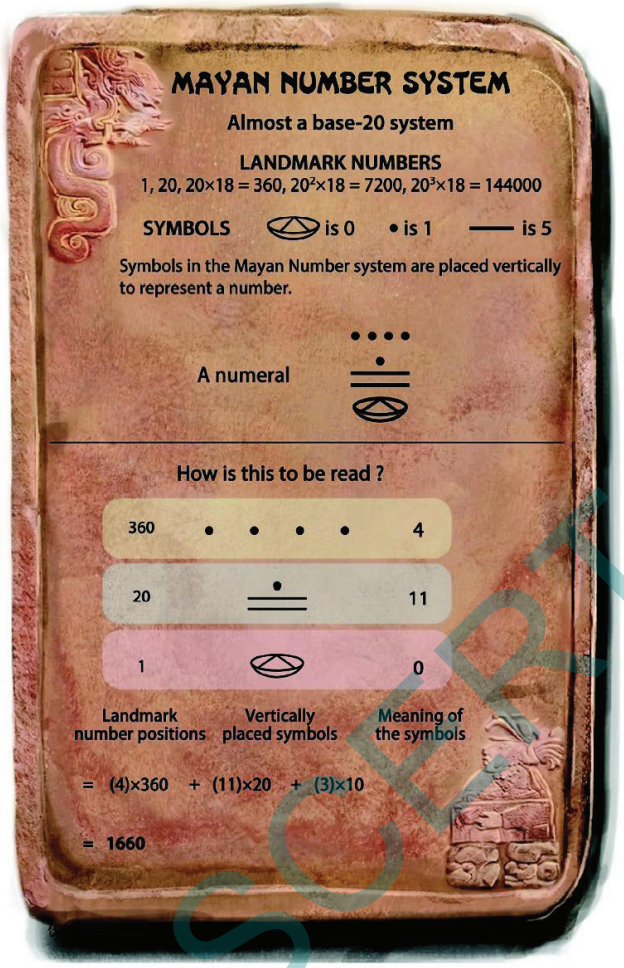
The symbols associated with different landmark numbers were written one below the other with the lowermost set of symbols corresponding to the number of 1s, the set above corresponding to the number of 20s, the set above to the number of 360s and so on.

? Represent the following numbers using the Mayan system:

(i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721

Because the Mayan system is not an actual base-20 system, it lacks the advantages that a system with a base has for computations. Nevertheless,

AP SCERT



ఇక్కడ మనం ఒక గందరగోళపరిచే దృగ్విషయాన్ని చూస్తాము. వారి మూడవ మైలురాయి సంఖ్య 400 కాకుండా 360 ఎందుకు ఉంది? ఇది వారి క్యాలెండర్లకు సంబంధించినది కావచ్చని కొంతమంది పండితులు భావిస్తున్నారు.

వారు 1 కోసం ఒక చుక్కను మరియు 5 కోసం — ఒక గీతను ఉపయోగించారు. వీటిని 1 నుండి 19 వరకు గల సంఖ్యలను సూచించడానికి ఉపయోగించారు.

వివిధ మైలురాయి సంఖ్యలకు సంబంధించిన చిహ్నాలను ఒకదాని కింద ఒకటిగా వ్రాసేవారు, అందులో అన్నిటికంటే కింద ఉన్న చిహ్నాల సమితి 1ల సంఖ్యకు, దాని పైనున్న సమితి 20ల సంఖ్యకు, దాని పైనున్న సమితి 360ల సంఖ్యకు మరియు ఈ విధంగా పైకి సూచించేవి.

? కింది సంఖ్యలను మాయన్ పద్ధతిని ఉపయోగించి సూచించండి.:

(i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721

మాయన్ సంఖ్యా విధానం వాస్తవానికి ఒక ఆధారం-20 విధానం కానందున, ఆధారం ఉన్న సంఖ్యా విధానాలకు లెక్కలు చేయడానికి ఉండే ప్రయోజనాలు దీనికి లేవు. అయినప్పటికీ, వారి స్థాన విలువ సంకేత విధానం

AP SCERT

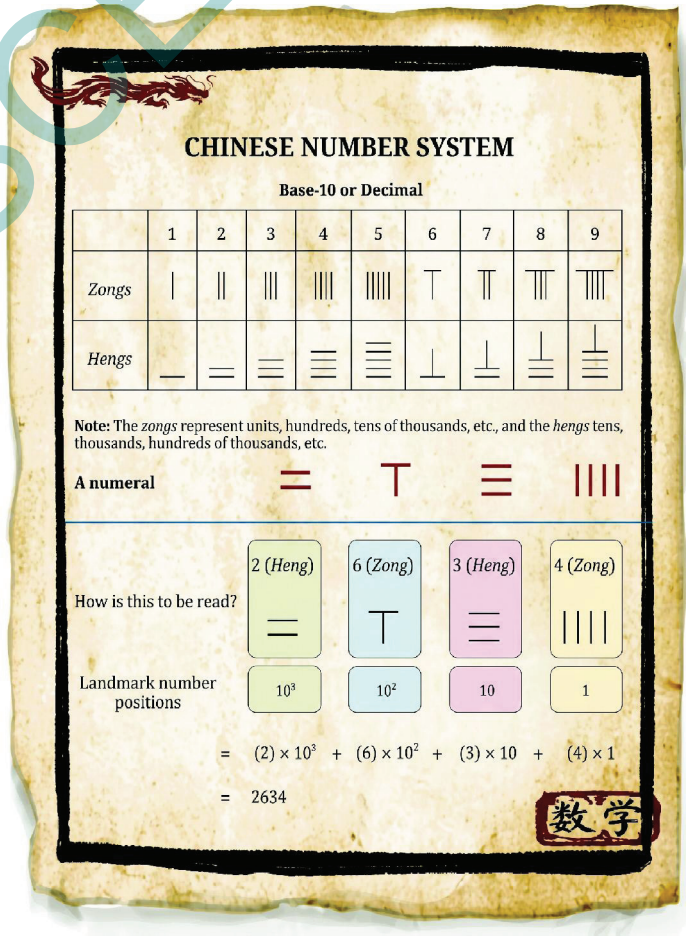
their place value notation and their use of a placeholder symbol for zero is considered an important advance in the history of number systems.

A curious fact is that we can still find the use of base-20 in the number names of some European languages.

III. The Chinese Number System

The Chinese used two number systems - a written system for recording quantities, and a system making use of rods for performing computations. The numerals in the rod-based number system are called **rod numerals**. Here we discuss the rod numerals, which are more efficient in writing and computing with numbers than the written system of the Chinese.

The rod numerals developed in China by at least by 3rd century AD and were used till the 17th century. It was a decimal system (base-10). The symbols for 1 to 9 were as follows :



CHINESE NUMBER SYSTEM

Base-10 or Decimal

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zongs	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Hengs	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Note: The *zongs* represent units, hundreds, tens of thousands, etc., and the *hengs* tens, thousands, hundreds of thousands, etc.

A numeral 𝍪 𝍥 𝍭 𝍣

	2 (*Heng*)	6 (*Zong*)	3 (*Heng*)	4 (*Zong*)
How is this to be read?	𝍪	𝍥	𝍭	𝍣
Landmark number positions	10^3	10^2	10	1

$= (2) \times 10^3 + (6) \times 10^2 + (3) \times 10 + (4) \times 1$

$= 2634$

数学

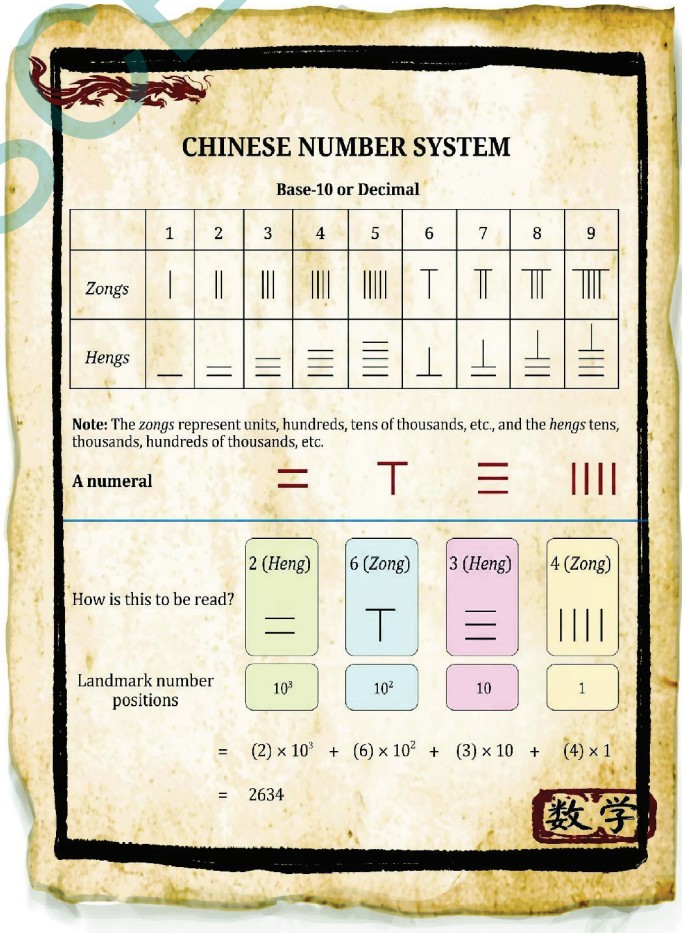
AP SCERT

మరియు సున్నా కోసం ఒక ప్లేస్‌హోల్డర్ చిహ్నాన్ని ఉపయోగించడం అనేది సంఖ్యా విధానాల చరిత్రలో ఒక ముఖ్యమైన పురోగతిగా పరిగణించబడుతుంది. ఒక ఆసక్తికరమైన విషయం ఏమిటంటే, కొన్ని యూరోపియన్ భాషల సంఖ్యా నామాలలో మనం ఇప్పటికీ ఆధారం-20 వినియోగాన్ని చూడవచ్చు.

III. చైనీస్ సంఖ్యా వ్యవస్థ

చైనీయులు రెండు సంఖ్యా విధానాలను ఉపయోగించారు - పరిమాణాలను నమోదు చేయడానికి ఒక లిఖిత విధానం, మరియు గణనలు చేయడానికి కడ్డీలను ఉపయోగించే ఒక విధానం. కడ్డీల ఆధారిత సంఖ్యా విధానంలోని అంకెలను **కడ్డీ సంఖ్యలు** అని పిలుస్తారు. ఇక్కడ మనం కడ్డీ సంఖ్యల గురించి చర్చిస్తాము, ఇవి చైనీయుల లిఖిత విధానం కంటే సంఖ్యలను రాయడంలో మరియు వాటితో గణనలు చేయడంలో మరింత సమర్థవంతమైనవి.

రాడ్ సంఖ్యామానం కనీసం క్రీ.శ. 3వ శతాబ్దంలో చైనాలో అభివృద్ధి చేయబడింది మరియు 17వ శతాబ్దం వరకు ఉపయోగించబడింది. ఇది ఒక దశాంశ పద్ధతి (బేస్-10). 1 నుండి 9 వరకు ఉన్న సంఖ్యలకు చిహ్నాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:

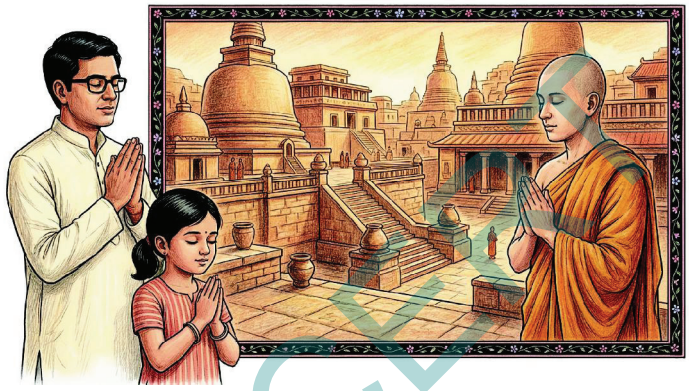


APSCERT

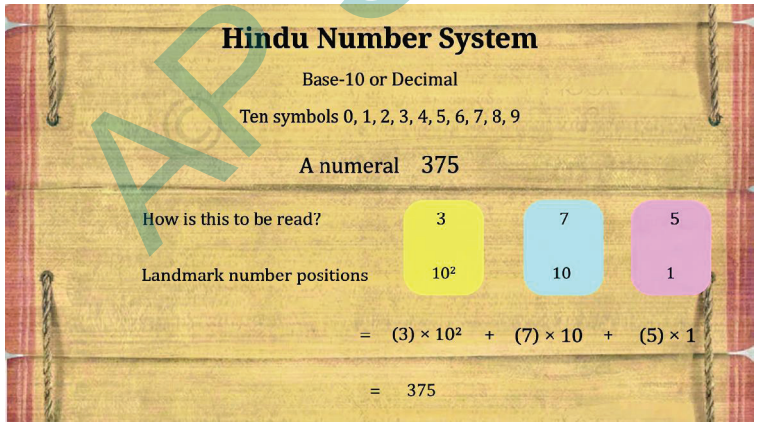
Like the Mesopotamians, the rod numerals used a blank space to indicate the skipping of a place value. However, because of the slightly more uniform sizes of the symbols for one through nine, the blank spaces were easier to locate than in the Mesopotamian system.

Notice how similar the rod numerals are to the Hindu system. The Chinese system, with a symbol for zero, would be a fully developed place value system.

IV. The Hindu Number System



? Where does the Hindu/Indian number system figure in the evolution of ideas of number representation? What are its landmark numbers? And does it use a place value system?



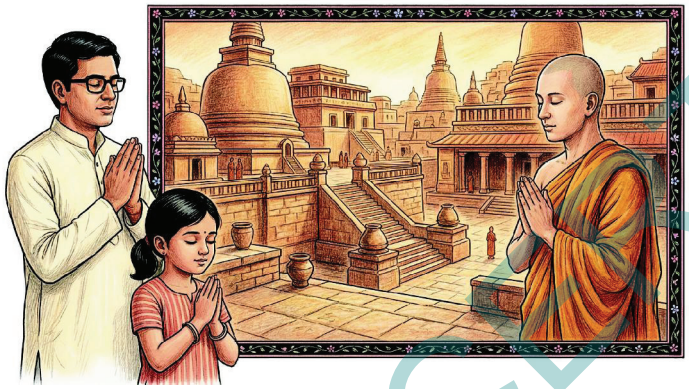
As can be seen, the Hindu number system is a place value system. The Hindu number system has had a symbol for 0 at least as early as 200 BCE. Because of the use of 0 as a digit, and the use of a single digit in each position, this system does not lead to any kind of ambiguity when reading or writing numerals. It is for this reason that the Hindu number system is now used throughout the world.

The use of 0 as a digit, and indeed as a number, was a breakthrough

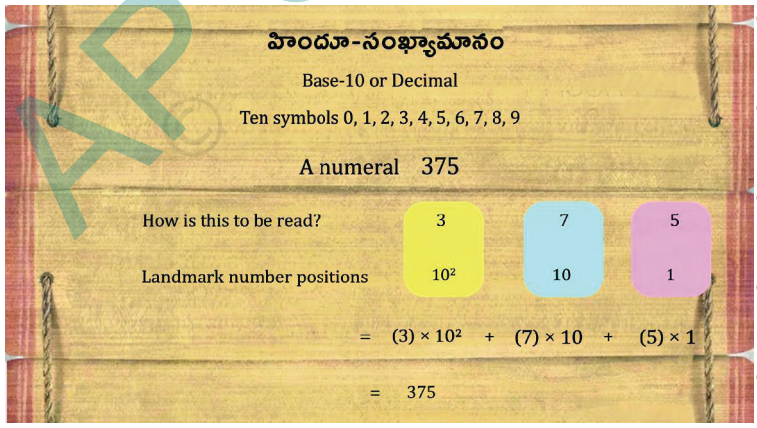
మెసొపొటేమియన్ల మాదిరిగానే, రాడ్ సంఖ్యలు స్థాన విలువ యొక్క దాటవేతను సూచించడానికి ఖాళీ స్థలాన్ని ఉపయోగించాయి. అయితే, ఒకటి నుండి తొమ్మిది వరకు చిహ్నాల పరిమాణాలు కొంచెం ఏకరీతిగా ఉండటం వలన, మెసొపొటేమియన్ వ్యవస్థ కంటే ఖాళీ స్థలాలను గుర్తించడం సులభం.

రాడ్ సంఖ్యలు హిందూ సంఖ్యా విధానానికి ఎంత సారూప్యంగా ఉన్నాయో గమనించండి. సున్నాకు ఒక చిహ్నం ఉన్న చైనీస్ విధానం, పూర్తిగా అభివృద్ధి చెందిన స్థాన విలువ విధానం అవుతుంది.

IV. హిందూ సంఖ్యా వ్యవస్థ



? సంఖ్యల ప్రాతినిధ్యానికి సంబంధించిన భావనల పరిణామంలో హిందూ/భారతీయ సంఖ్యా విధానం యొక్క స్థానం ఏమిటి? దానిలోని ముఖ్యమైన సంఖ్యలు ఏవి? మరియు అది స్థాన విలువ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తుందా??



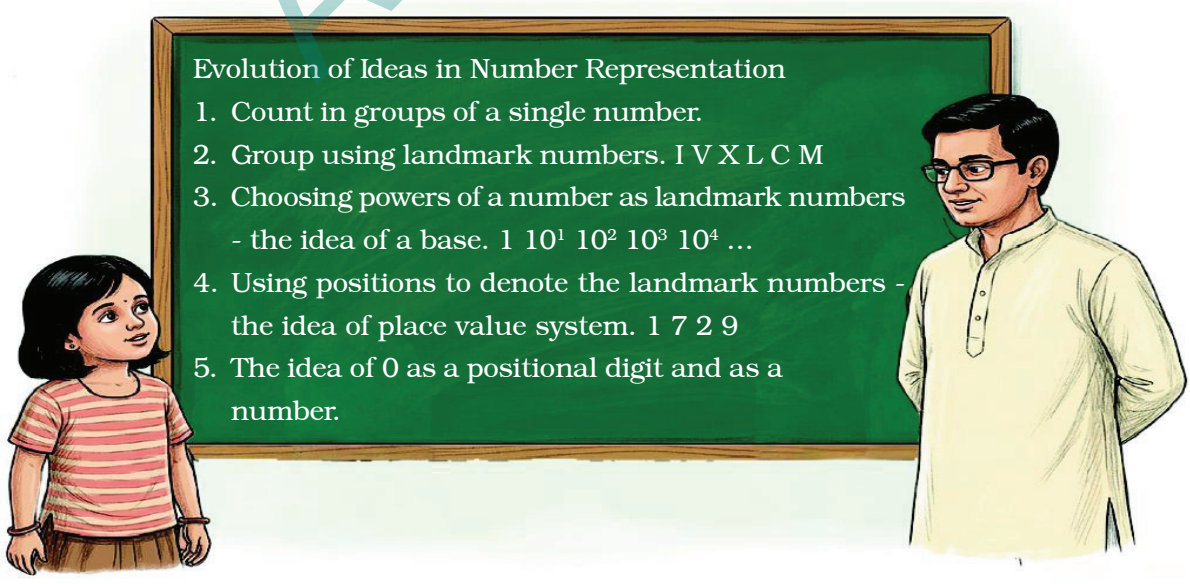
హిందూ సంఖ్యామానం ఒక స్థాన విలువ పద్ధతి. హిందూ సంఖ్యామానంలో కనీసం క్రీ.పూ. 200 నాటికే 0కి ఒక చిహ్నం ఉంది. 0ని ఒక అంకెగా ఉపయోగించడం వల్ల మరియు ప్రతి స్థానంలో ఒకే అంకెను ఉపయోగించడం వల్ల, ఈ పద్ధతి సంఖ్యలను చదివేటప్పుడు లేదా వ్రాసేటప్పుడు ఎలాంటి అస్పష్టతకు దారితీయదు. ఈ కారణంగానే హిందూ సంఖ్యామానం ఇప్పుడు ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఉపయోగించబడుతోంది.

0ని ఒక అంకెగా, మరియు నిజానికి ఒక సంఖ్యగా ఉపయోగించడం అనేది గణిత మరియు విజ్ఞాన శాస్త్ర

that truly changed the world of mathematics and science. In Indian mathematics, indeed, zero was not just used as a placeholder in the place value system, but was also given the status of a number in its own right, on par with other numbers. The arithmetic properties of the number 0 (e.g., that 0 plus any number is the same number, and that 0 times any number is zero) were explicitly used by Aryabhata in his aryabhatiya in 499 CE to compute with and do elaborate scientific computations using Hindu numerals. The use of 0 as a number like any other number, on which one can perform the basic arithmetic operations, was codified by Brahmagupta in his work Brahmasphutasiddhanta in 628 CE, as we learned in an earlier grade.

By introducing 0 as a number, along with the negative numbers, Brahmagupta created what in modern terms is called a ring, i.e., a set of numbers that is closed under addition, subtraction, and multiplication (i.e., any two numbers in the set can be added, subtracted, or multiplied to get another number in that set). These new ideas laid the foundations for modern mathematics, and particularly for the areas of algebra and analysis.

Hopefully, this gives you a sense of all the ideas that went into writing and computing with numbers in the way that we do today. The discovery of 0 and the resulting Indian number system is truly one of the greatest, most creative, and most influential inventions of all time - appearing constantly in our daily lives and forming the basis of much of modern science, technology, computing, accounting, surveying, and more. The next time you are writing numbers, think about the incredible history behind them and all the deep ideas that went into their discovery!

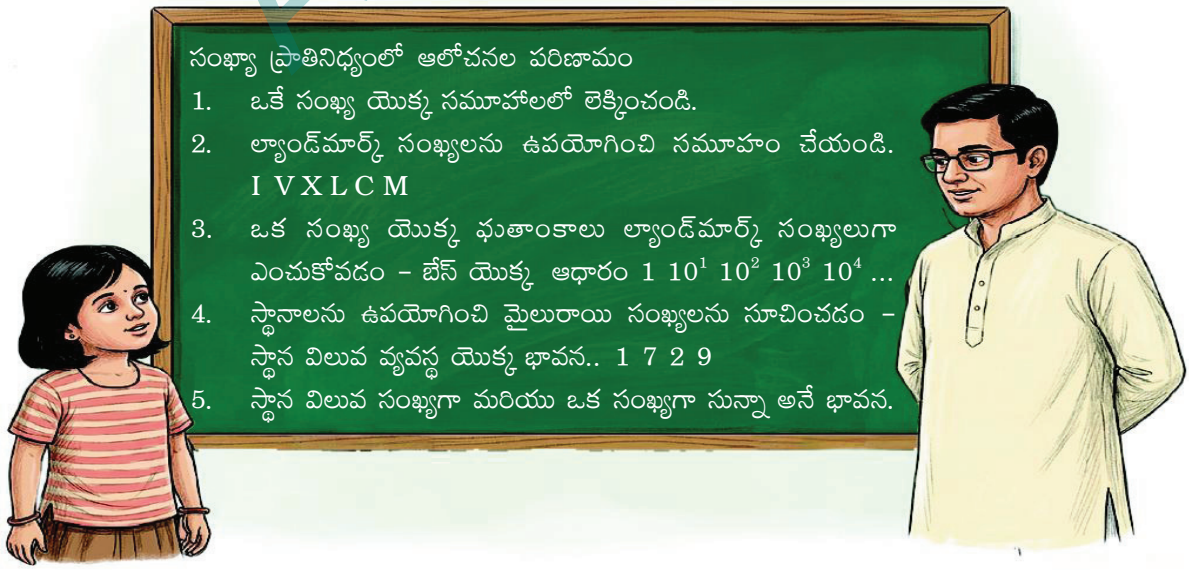


AP SCERT

ప్రపంచాన్ని నిజంగా మార్చివేసిన ఒక అద్భుతమైన ఆవిష్కరణ. భారతీయ గణితంలో, సున్నాను కేవలం స్థాన విలువ పద్ధతిలో ఒక ఖాళీని పూరించేదిగా మాత్రమే కాకుండా, ఇతర సంఖ్యలతో సమానంగా దానికి కూడా ఒక సంఖ్య హోదా ఇవ్వబడింది. 0 సంఖ్య యొక్క అంకగణిత ధర్మాలను (ఉదాహరణకు, 0కి ఏ సంఖ్యను కలిపినా అదే సంఖ్య వస్తుంది, మరియు 0తో ఏ సంఖ్యను గుణించినా సున్నా వస్తుంది) ఆర్యభట్ట క్రీ.శ. 499లో తన ఆర్యభట్టీయంలో హిందూ సంఖ్యలను ఉపయోగించి గణనలు మరియు విస్తృతమైన శాస్త్రీయ లెక్కలు చేయడానికి స్పష్టంగా ఉపయోగించాడు. ఇతర సంఖ్యల మాదిరిగానే 0ని కూడా ఒక సంఖ్యగా ఉపయోగించడం, దానిపై ప్రాథమిక అంకగణిత ప్రక్రియలను నిర్వహించడం వంటి వాటిని బ్రహ్మగుప్తుడు క్రీ.శ. 628లో తన బ్రహ్మస్ఫుటసిద్ధాంతం అనే గ్రంథంలో క్రోడీకరించాడు, ఇది మనం మునుపటి తరగతిలో నేర్చుకున్నాము.

0ని మరియు రుణ సంఖ్యలను ప్రవేశపెట్టడం ద్వారా, బ్రహ్మగుప్తుడు ఆధునిక పరిభాషలో 'రింగ్' అని పిలవబడే దానిని సృష్టించాడు, అంటే, సంకలనం, వ్యవకలనం మరియు గుణకారం కింద సంవృతమై ఉండే సంఖ్యల సమితి (అంటే, ఆ సమితిలోని ఏవైనా రెండు సంఖ్యలను కలిపినా, తీసివేసినా లేదా గుణించినా ఆ సమితిలోనే మరొక సంఖ్య వస్తుంది). ఈ కొత్త ఆలోచనలు ఆధునిక గణితానికి, ముఖ్యంగా బీజగణితం మరియు విశ్లేషణ రంగాలకు పునాదులు వేశాయి.

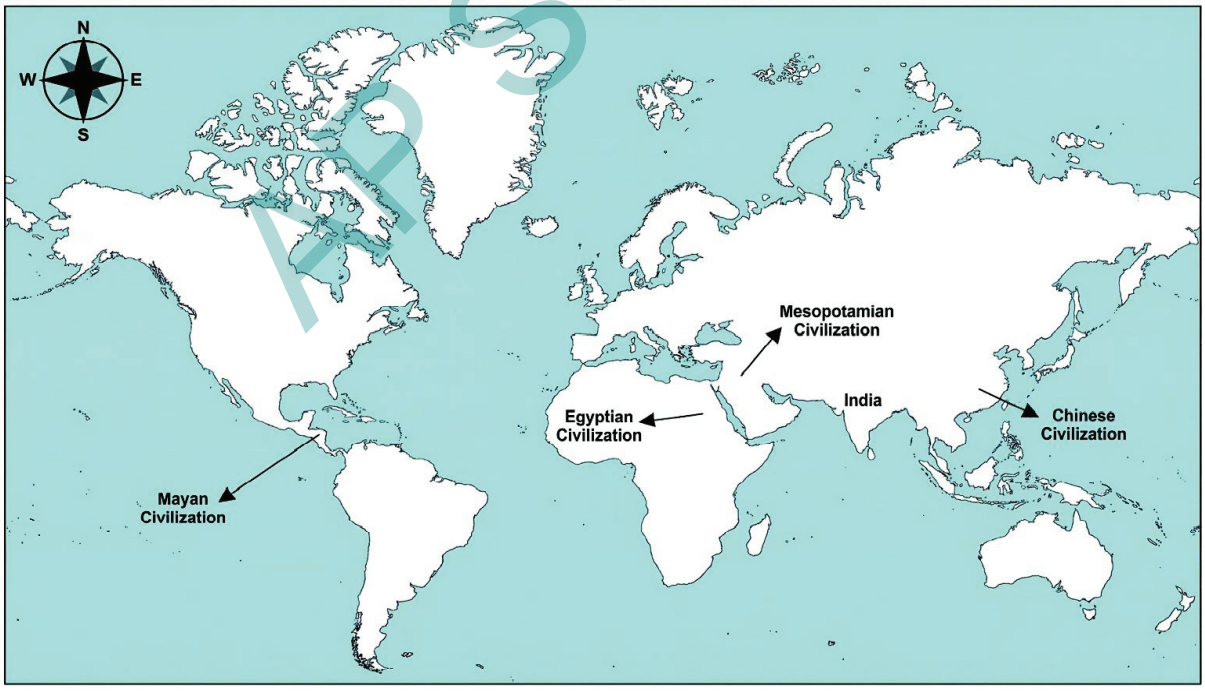
ఈ రోజు మనం సంఖ్యలను వ్రాసే మరియు లెక్కించే విధానంలోకి వెళ్ళిన అన్ని ఆలోచనల గురించి ఇది మీకు ఒక అవగాహన కల్పిస్తుందని ఆశిస్తున్నాము. 0 యొక్క ఆవిష్కరణ మరియు దాని ఫలితంగా ఏర్పడిన భారతీయ సంఖ్యామానం నిజంగా అన్ని కాలాలలోనూ గొప్ప, అత్యంత సృజనాత్మక మరియు అత్యంత ప్రభావవంతమైన ఆవిష్కరణలలో ఒకటి – ఇది మన దైనందిన జీవితంలో నిరంతరం కనిపిస్తుంది మరియు ఆధునిక విజ్ఞాన శాస్త్రం, సాంకేతికత, కంప్యూటింగ్, అకౌంటింగ్, సర్వేయింగ్ మరియు మరెన్నో రంగాలకు ఆధారం. మీరు తదుపరిసారి సంఖ్యలను వ్రాస్తున్నప్పుడు, వాటి వెనుక ఉన్న అద్భుతమైన చరిత్ర మరియు వాటి ఆవిష్కరణలో ఉన్న లోతైన ఆలోచనల గురించి ఆలోచించండి.



AP SCERT

Figure it Out - 3.8

1. Why do you think the Chinese alternated between the Zong and Heng symbols? If only the Zong symbols were to be used, how would 41 be represented? Could this numeral be interpreted in any other way if there is no significant space between two successive positions?
2. Where in your daily lives, and in which professions, do the Hindu numerals, and 0, play an important role? How might our lives have been different if our number system and 0 hadn't been invented or conceived of?
3. The ancient Indians likely used base 10 for the Hindu number system because humans have 10 fingers, and so we can use our fingers to count. But what if we had only 8 fingers? How would we be writing numbers then? What would the Hindu numerals look like if we were using base 8 instead? Base 5? Try writing the base-10 Hindu numeral 25 as base-8 and base-5 Hindu numerals, respectively. Can you write it in base-2?



The map shows the locations of the different civilisations.

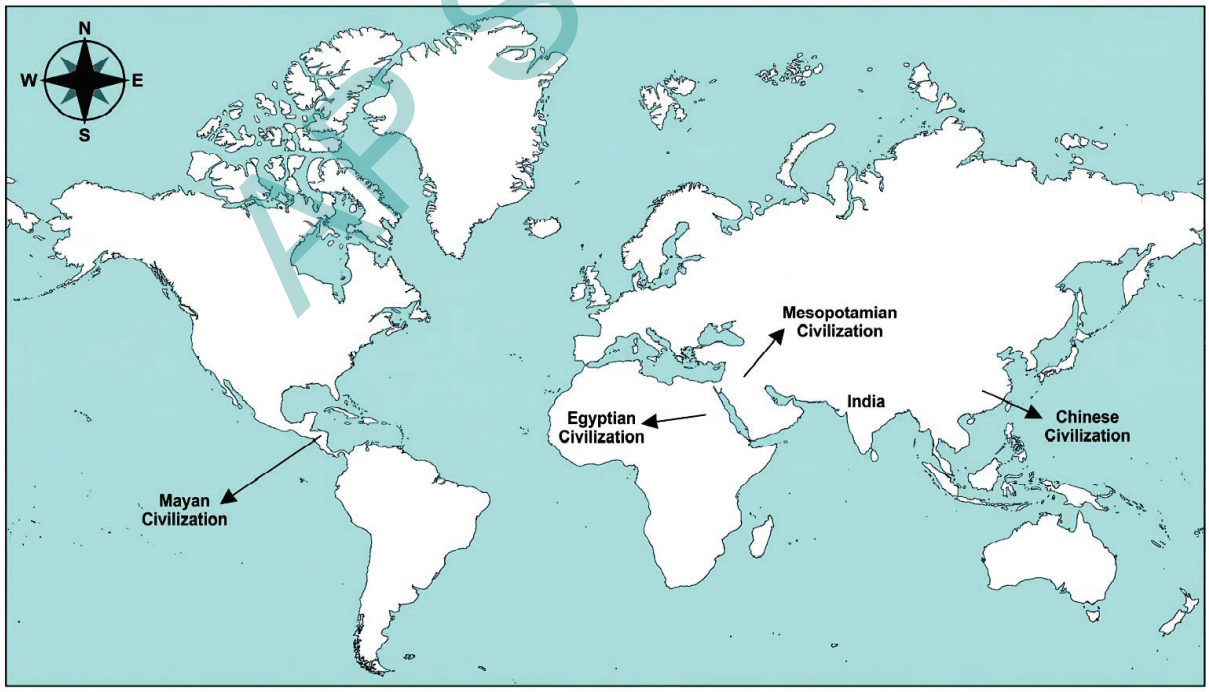
They existed in different time periods.

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.8

1. చైనీయులు జోంగ్ మరియు హెంగ్ చిహ్నాలను ఎందుకు మార్చి మార్చి ఉపయోగించారని మీరు అనుకుంటున్నారు? ఒకవేళ కేవలం జోంగ్ చిహ్నాలను మాత్రమే ఉపయోగించాల్సి వస్తే, 41ని ఎలా సూచిస్తారు? వరుసగా ఉన్న రెండు స్థానాల మధ్య గణనీయమైన ఖాళీ లేకపోతే, ఈ సంఖ్యను మరేదైనా విధంగా అర్థం చేసుకోగలమా?
2. మీ దైనందిన జీవితంలో మరియు ఏయే వృత్తులలో హిందూ సంఖ్యలు, మరియు సున్నా, ముఖ్యమైన పాత్ర పోషిస్తాయి? మన సంఖ్యామానం మరియు సున్నా కనుగొనబడి లేదా భావన చేయబడి ఉండకపోతే మన జీవితాలు ఎలా భిన్నంగా ఉండేవి?

3. ప్రాచీన భారతీయులు హిందూ సంఖ్యామానానికి బేస్ 10ని ఉపయోగించి ఉండవచ్చు, ఎందుకంటే మనుషులకు 10 వేళ్లు ఉంటాయి, కాబట్టి మనం లెక్కించడానికి మన వేళ్లను ఉపయోగించవచ్చు. కానీ మనకు కేవలం 8 వేళ్లు మాత్రమే ఉంటే ఎలా ఉంటుంది? అప్పుడు మనం సంఖ్యలను ఎలా రాసేవాళ్ళం? మనం బేస్ 8ని ఉపయోగించినట్లయితే హిందూ అంకెలు ఎలా కనిపించేవి? బేస్ 5 అయితే ఎలా? బేస్-10 హిందూ సంఖ్య 25ను వరుసగా బేస్-8 మరియు బేస్-5 హిందూ సంఖ్యలుగా రాయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు దానిని బేస్-2లో రాయగలరా?



ఈ పటం వివిధ కాల వ్యవధులలో ఉనికిలో ఉన్న విభిన్న నాగరికతల ప్రదేశాలను చూపుతుంది.

AP SCERT

SUMMARY

- To represent numbers, we need a standard sequence of objects, names, or written symbols that have a fixed order. This standard sequence is called a **number system**.
- The symbols representing numbers in a written number system are called **numerals**.
- In a number system, **landmark numbers** are numbers that are easily recognisable and used as reference points for understanding and working with other numbers. They serve as anchors within the number system, helping people to orient themselves and make sense of quantities, particularly larger ones.
- A number system whose landmark numbers are the powers of a number n is referred to as a **base-n number system**.
- Number systems having a base that make use of the position of a symbol in determining the landmark number that it is associated with are called **positional number systems** or **place value systems.**
- Place value representations were used in the Mesopotamian (Babylonian), Mayan, Chinese and Indian civilisations.
- The system of numerals that we use throughout the world today is the **Hindu number system** (also sometimes called the **Indian number system**, or the **Hindu-Arabic number system**). It is a place value system with (usually) 10 digits, including the digit 0 which is treated on par with other digits. Due to its use of 0 as a number, the system enables the writing of all numbers unambiguously using just finitely many symbols, and also enables efficient computation. The system originated in India around 2000 years ago, and then spread across the world, and is considered one of human history's greatest inventions.

AP SCERT

సారాంశం

- సంఖ్యలను సూచించడానికి, మనకు ఒక నిర్దిష్ట క్రమాన్ని కలిగి ఉన్న వస్తువులు, పేర్లు లేదా లిఖిత చిహ్నాల ప్రామాణిక శ్రేణి అవసరం. ఈ ప్రామాణిక శ్రేణిని సంఖ్యా వ్యవస్థ అని అంటారు.
- లిఖిత సంఖ్యా విధానంలో సంఖ్యలను సూచించే **గుర్తులను అంకెలు** అంటారు.
- సంఖ్యా వ్యవస్థలో, **ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలు** అనేవి సులభంగా గుర్తించదగిన సంఖ్యలు మరియు ఇతర సంఖ్యలను అర్థం చేసుకోవడానికి మరియు వాటితో పనిచేయడానికి సూచన బిందువులుగా ఉపయోగించబడతాయి. అవి సంఖ్యా వ్యవస్థలో లంగరులుగా పనిచేస్తాయి, ప్రజలు తమను తాము ఓరియంట్ చేసుకోవడానికి మరియు పరిమాణాలను, ముఖ్యంగా పెద్ద వాటిని అర్థం చేసుకోవడానికి సహాయపడతాయి.
- ఒక సంఖ్య అ యొక్క ఘాతాలుగా ఉండే ముఖ్య సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న సంఖ్యా విధానాన్ని **బేస్-n సంఖ్యా విధానం** అని అంటారు.
- ఒక సంఖ్యలోని గుర్తు యొక్క స్థానాన్ని ఉపయోగించి, దానికి సంబంధించిన సంఖ్యా విలువను నిర్ధారించే సంఖ్యా విధానాలను స్థాన విలువ సంఖ్యా విధానాలు అని అంటారు.
- స్థాన విలువ ప్రాతినిధ్య పద్ధతులు మెసొపొటేమియన్ (బాబిలోనియన్), మాయన్, చైనీస్ మరియు భారతీయ నాగరికతలలో ఉపయోగించబడ్డాయి.
- ప్రపంచవ్యాప్తంగా మనం ఈ రోజు ఉపయోగించే సంఖ్యా వ్యవస్థ హిందూ సంఖ్యా వ్యవస్థ (దీనిని కొన్నిసార్లు **భారతీయ సంఖ్యా వ్యవస్థ లేదా హిందూ-అరబిక్ సంఖ్యా వ్యవస్థ** అని కూడా పిలుస్తారు). ఇది (సాధారణంగా) 10 అంకెలను కలిగి ఉన్న ఒక **స్థాన విలువ వ్యవస్థ**, ఇందులో 0 అనే అంకెను ఇతర అంకెలతో సమానంగా పరిగణిస్తారు. సంఖ్యగా 0ను ఉపయోగించడం వల్ల, ఈ వ్యవస్థ పరిమిత సంఖ్యలో చిహ్నాలను ఉపయోగించి అన్ని సంఖ్యలను స్పష్టంగా వ్రాయడానికి వీలు కల్పిస్తుంది, మరియు సమర్థవంతమైన గణనను కూడా సాధ్యం చేస్తుంది. ఈ వ్యవస్థ సుమారు 2000 సంవత్సరాల క్రితం భారతదేశంలో ఉద్భవించి, ఆ తర్వాత ప్రపంచమంతటా వ్యాపించింది, మరియు దీనిని మానవ చరిత్రలోని గొప్ప ఆవిష్కరణలలో ఒకటిగా పరిగణిస్తారు.

AP SCERT

4 QUADRILATERALS

Learning outcomes

Learners will be able to

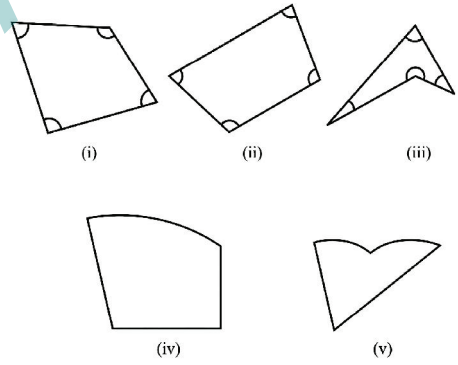
- Define and identify quadrilaterals as four-sided closed figures in daily life (CG-10)
- Classify quadrilaterals (parallelogram, rectangle, square, rhombus, trapezium, kite) (CG-3)
- Understand and apply side, angle, and diagonal properties (including angle sum of 360°) (CG-3)
- Analyse relationships among different types of quadrilaterals (CG-3)
- Draw, classify, and justify quadrilaterals based on given properties (CG-3)
- Solve problems involving missing angles using properties (CG-3)
- Apply quadrilateral concepts in real-life contexts (designs, patterns, architecture) (CG-10)

AP SCERT

4.0 Introduction

In this chapter, we will study some interesting types of four-sided figures and solve problems based on them. Such figures are commonly known as quadrilaterals. The word 'quadrilateral' is derived from Latin words - quadri meaning four, and latus referring to sides.

? Observe the following figures.



Figs. (i), (ii), and (iii) are quadrilaterals, and the others are not. Why?

The angles of a quadrilateral are the angles between its sides, as marked in Figs. (i), (ii), and (iii).

4 చతుర్భుజాలు

అభ్యసన ఫలితాలు : అభ్యాసకులు

- దైనందిన జీవితంలో చతుర్భుజాన్ని నాలుగు భుజాల సంవృత పటంగా నిర్వచించి, గుర్తించడం చేస్తారు. (CG-10)
- చతుర్భుజాల వర్గీకరణ (సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, రాంబస్, ట్రేపీజియం, గాలిపటం) చేస్తారు. (CG-3)
- భుజాలు, కోణాలు, కర్ణాల ధర్మాలు (అంతర్గత కోణాల మొత్తం 360^0) అర్థం చేసుకొని వినియోగిస్తారు. (CG-3)
- వివిధ చతుర్భుజాల మధ్య సంబంధాలను విశ్లేషిస్తారు. (CG-3)
- ఇచ్చిన ధర్మాల ఆధారంగా చతుర్భుజాలను గీయడం, వర్గీకరించడం మరియు సమర్థించడం చేస్తారు. (CG-3)
- ధర్మాలను ఉపయోగించి తెలియని కోణాలను కనుగొంటారు. (CG-3)
- డిజైన్‌లు, నమూనాలు, నిర్మాణాల్లో చతుర్భుజాల భావనలను నిజజీవిత సందర్భాలకు అన్వయిస్తారు. (CG-10)

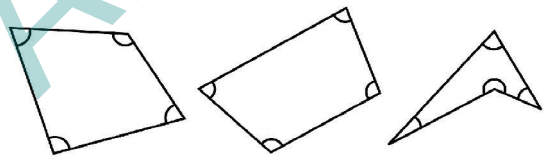
R5U8M4

AP SCERT

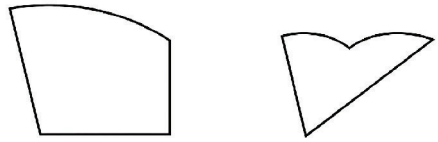
4.0 పరిచయం

ఈ అధ్యాయంలో, మనం కొన్ని ఆసక్తికరమైన నాలుగు భుజాల పటాలను అధ్యయనం చేస్తాము మరియు వాటి ఆధారంగా సమస్యలను పరిష్కరిస్తాము. ఇటువంటి పటాలను సాధారణంగా చతుర్భుజాలు అని పిలుస్తారు. చతుర్భుజం (Quadrilateral) అనే పదం (Quadri - Latus) లాటిన్ పదాల నుండి ఉద్భవించింది. Quadri అంటే నాలుగు అని అర్థం మరియు Latus అంటే భుజాలను సూచిస్తుంది.

? క్రింది పటాలను గమనించండి.



(i) (ii) (iii)



(iv) (v)

పటాలు (i), (ii) మరియు (iii) చతుర్భుజాలు. మిగిలినవి కావు. ఎందుకు?

చతుర్భుజం యొక్క **కోణాలు** అనగా దాని భుజాల మధ్య కోణాలు ఇవి పటాలు (i), (ii) మరియు (iii) లలో గుర్తించబడ్డాయి.

We will start with the most familiar quadrilaterals - rectangles and squares.

4.1 Rectangles and Squares

We know what rectangles are. Let us define them.

Rectangle: A rectangle is a quadrilateral in which -

(i) The angles are all right angles (90°), and

(ii) The opposite sides are of equal length.

The definition precisely states the conditions a quadrilateral has to satisfy to be called a rectangle.

? Are there other ways to define a rectangle?

Let us consider the following problem related to the construction of rectangles.

A Carpenter's Problem

? A carpenter needs to put together B two thin strips of wood, as shown in Fig. 1, so that when a thread is passed through their endpoints, it forms a rectangle.

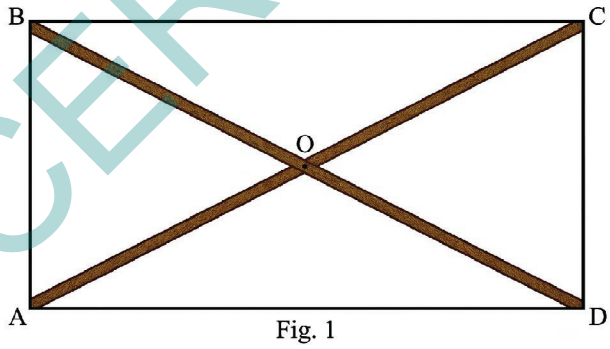


Fig. 1

He already has one 8 cm long strip. What should be the length of the other strip? Where should they both be joined?

Let us first model the structure that the carpenter has to make. The strips can be modelled as line segments. They are the diagonals of the quadrilateral formed by their endpoints. For the quadrilateral to be a rectangle, we need to answer the following questions -

? 1. What is the length of the other diagonal?

? 2. What is the point of intersection of the two diagonals?

? 3. What should the angle be between the diagonals?

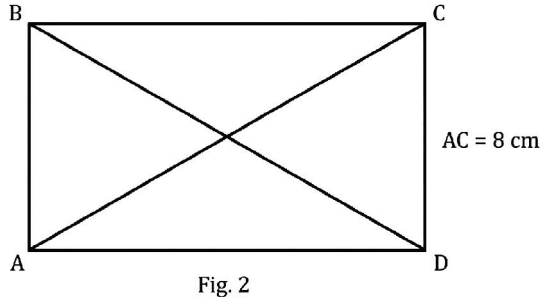


Fig. 2

? Let us answer these questions using geometric reasoning (deduction). If that is challenging, try to construct/ measure some rectangles.

AP SCERT

మనం బాగా తెలిసిన చతుర్భుజాలతో ప్రారంభిద్దాం – దీర్ఘ చతురస్రాలు మరియు చతురస్రాలు.

4.1 దీర్ఘచతురస్రాలు మరియు చతురస్రాలు

మనకు దీర్ఘ చతురస్రాలు ఏమిటో తెలుసు. వాటిని నిర్వచించుకుందాం.

దీర్ఘ చతురస్రం : దీర్ఘ చతురస్రం అనేది ఒక చతుర్భుజం – దీనిలో

(i) కోణాలన్నీ లంబకోణాలు (90^0) మరియు

(ii) ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవులను కలిగి ఉంటాయి

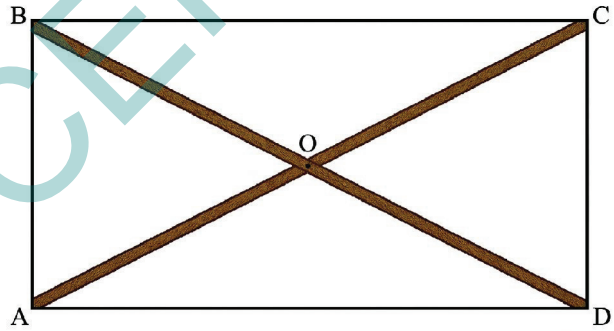
ఈ నిర్వచనం ఒక చతుర్భుజాన్ని దీర్ఘ చతురస్రం అని పిలవడానికి సంతృప్తి పరచాల్సిన పరిస్థితులను కచ్చితంగా పేర్కొంటుంది

? దీర్ఘ చతురస్రాన్ని నిర్వచించడానికి ఇతర మార్గాలు ఉన్నాయా ?

దీర్ఘ చతురస్రాల నిర్మాణానికి సంబంధించిన క్రింది సమస్యను పరిశీలిద్దాం

ఒక వడ్రంగి సమస్య

? ఒక వడ్రంగి పటం (i) లో చూపిన విధంగా రెండు చక్కని చెక్క ముక్కలను కలిపి ఉంచాలి తద్వారా వాటి అంత్య బిందువుల గుండా ఒక దారాన్ని పంపినప్పుడు అది ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తుంది.



పటం. 1

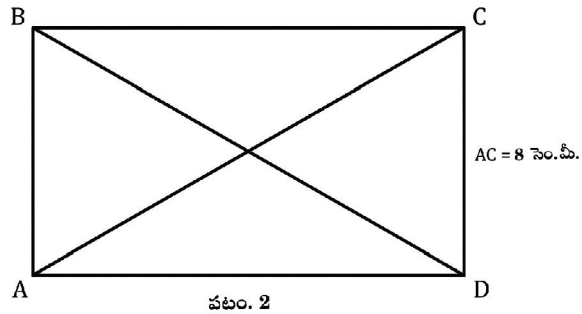
అతని వద్ద ఇప్పటికే 8 సెం. మీ పొడవు వున్న ఒక కర్ర ఉంది. మరొక కర్ర పొడవు ఎంత ఉండాలి? రెండింటిని ఎక్కడ కలపాలి?

ముందుగా వడ్రంగి తయారు చేయాల్సిన నిర్మాణంని తయారు చూద్దాం! కర్రలను రేఖాఖండాలుగా తయారు చేయవచ్చు. అవి వాటి అంత్య బిందువుల ద్వారా ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు. చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం కావాలంటే మనం క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వాలి.

? 1. మరొక కర్ణం పొడవు ఎంత?

? 2. రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు ఏమిటి?

? 3. కర్ణాల మధ్య కోణం ఎంత ఉండాలి?



పటం. 2

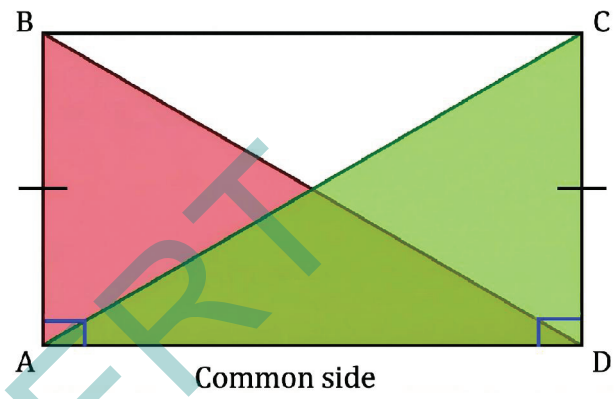
? రేఖాగణిత తార్కికం (నిగమనం) ఉపయోగించి ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇద్దాం. అది సవాలుగా ఉంటే, కొన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలను నిర్మించడానికి/ కొలవడానికి ప్రయత్నించండి.

AP SCERT

To find the answers to these questions, let us suppose that we have placed the diagonals such that their endpoints form the vertices of a rectangle, as shown in Fig. 2.

Deduction 1 - What is the length of the other diagonal?

This can be deduced using congruence as follows -



Since ABCD is a rectangle, we have

AB = CD

$\angle BAD = \angle CDA = 90°$

AD is common to both triangles.

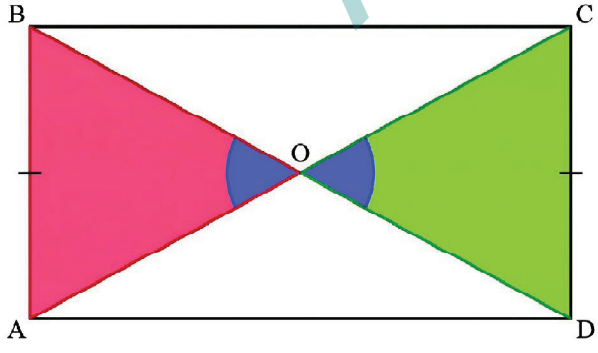
So, $\Delta ADC \cong \Delta DAB$ by the SAS congruence condition.

Therefore, AC = BD, since they are corresponding parts of congruent triangles. This shows that the diagonals of a rectangle always have the same length.

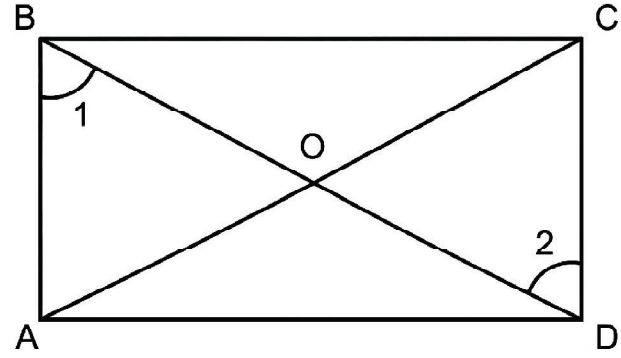
So the other diagonal must also be 8 cm long. You can verify this property by constructing/measuring some rectangles.

Deduction 2 - What is the point of intersection of the two diagonals?

This can also be found using congruence. Since we need to know the relation between OA and OC, and OB and OD, which two triangles of the rectangle ABCD should we consider?



The blue angles are equal since they are vertically opposite angles.



In order to show congruence, consider $\angle 1$ and $\angle 2$. Are they equal?

AP SCERT

ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు కనుగొనడానికి మనం కర్ణాలను వాటి అంత్య బిందువులు ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క శీర్షాలను ఏర్పరిచే విధంగా ఉంచామని అనుకుందాము. ఇది పటం (ii) లో చూపబడింది.

తార్కిక ఊహ 1: రెండవ / మరో కర్ణం యొక్క పొడవు ఎంత?

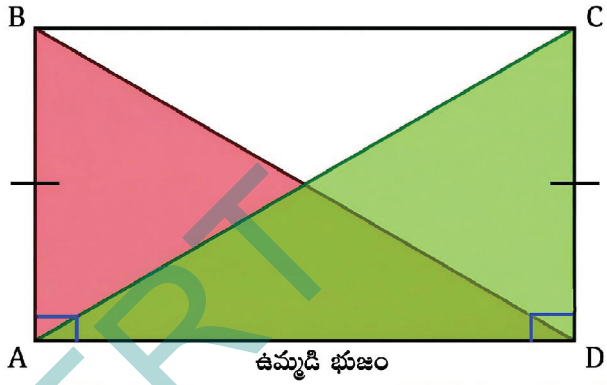
దీనికి ఈ క్రింది విధంగా సర్వసమానత ను ఉపయోగించి ఊహించవచ్చు.–

ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం కాబట్టి మనకు

$AB = CD$

$\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$

రెండు త్రిభుజాలకు AD ఉమ్మడిగా ఉంటుంది.

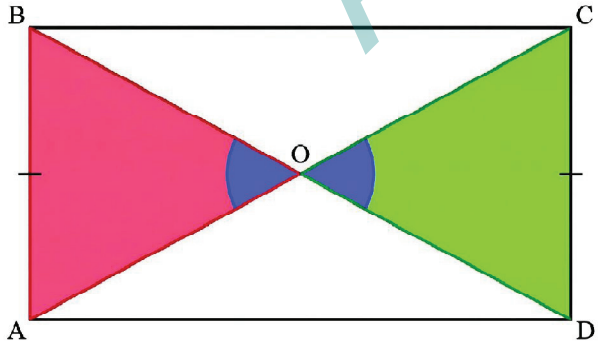


కాబట్టి, భూ.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ద్వారా $\Delta ADC \cong \Delta DAB$ ఎందుకంటే, అవి సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు. ఇది దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు ఎల్లప్పుడూ ఒకే పొడవును కలిగి ఉంటాయని చూపిస్తుంది.

కాబట్టి, AC = BD ఇతర కర్ణం కూడా 8 సెం.మీ పొడవు ఉండాలి. మీరు కొన్ని దీర్ఘచతురస్రాలను నిర్మించడం కొలవడం ద్వారా ఈ లక్షణాన్ని ధ్రువీకరించవచ్చు.

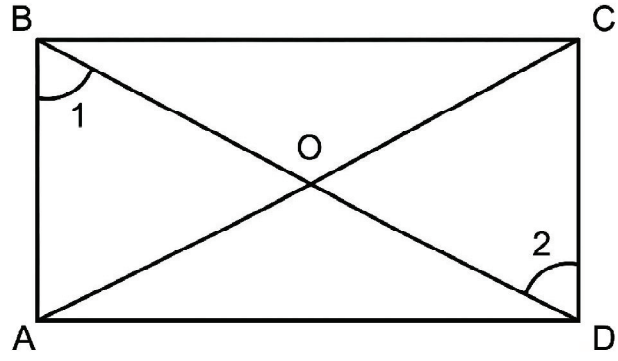
తార్కిక ఊహ 2 : రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు ఏమిటి?

దీనిని సర్వసమానత్వ నియమాలను ఉపయోగించి కూడా కనుగొనవచ్చు. OA మరియు OC ల మధ్య మరియు OB మరియు OD ల మధ్య సంబంధాన్ని మనం తెలుసుకోవాలి కాబట్టి, ABCD దీర్ఘ చతురస్రం లోని ఏ రెండు త్రిభుజాలను మనం పరిగణించాలి?



నీలం కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

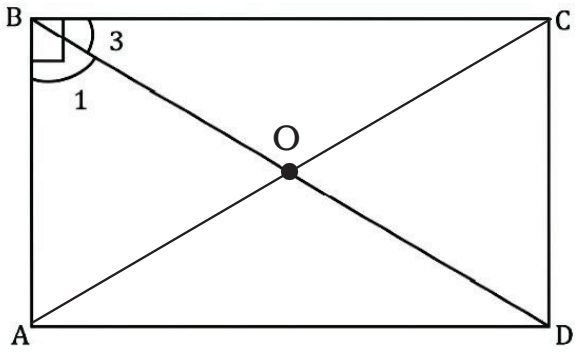
ఎందుకంటే, అవి శీర్షాభిముఖ కోణాలు.

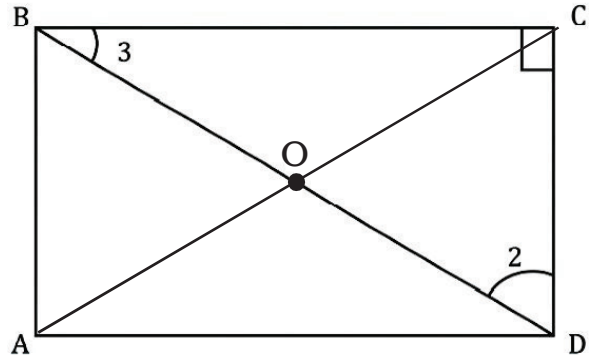


సర్వసమానత్వాన్ని చూపించడానికి $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ లను పరిగణించండి.

అవి సమానంగా ఉన్నాయా?

AP SCERT





Since $\angle B = 90°$,

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$.

In ΔBCD, since

$\angle 3 + \angle 2 + 90 = 180$,

we have $\angle 3 + \angle 2 = 90°$.

So, $\angle 1 = \angle 2$ (= $90° - \angle 3$).

Thus, by the AAS condition for congruence, $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

Hence OA = OC and OB = OD, since they are corresponding parts of congruent triangles. So, O is the midpoint of AC and BD.

This shows that the diagonals of a rectangle always intersect at their midpoints.

Therefore, to get a rectangle, the diagonals must be drawn so that they are equal and intersect at their midpoints.

When the diagonals cross at their midpoints, we say that the diagonals bisect each other. Bisecting a quantity means dividing it into two equal parts.

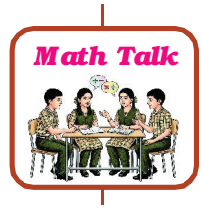
Verify this property by constructing some rectangles and measuring their diagonals and the points of intersection.

? Can the following equalities be used to establish that $\Delta AOD \cong \Delta COB$?

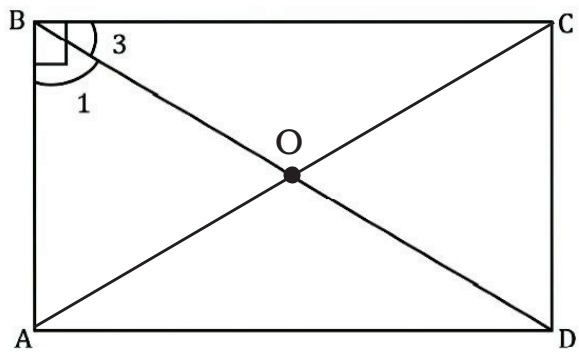
AO = CO (proved above)

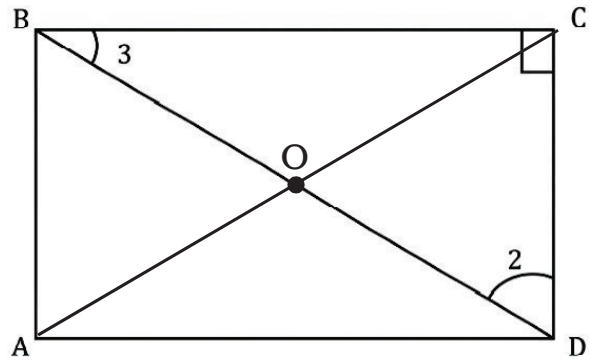
$\angle AOB = \angle COD$ (vertically opposite angles)

AD = CB



AP SCERT





$\angle B = 90^\circ$, కాబట్టి

$\angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$.

ΔBCD, లో $\angle 3 + \angle 2 + 90 = 180$,

కాబట్టి మనకు $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$.

కాబట్టి , $\angle 1 = \angle 2$ $(= 90^\circ - \angle 3)$.

అందువలన, కో.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం నియమం ప్రకారం, $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

కాబట్టి $OA = OC$ మరియు $OB = OD$, ఎందుకంటే, అవి సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు. కాబట్టి, O అనేది AC మరియు BD ల మధ్య బిందువు.

ఇది ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు ఎల్లప్పుడూ వాటి మధ్య బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటాయని చూపిస్తుంది.

కాబట్టి ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని పొందడానికి కర్ణాలు సమానంగా ఉండేలా మరియు అవి వాటి మధ్య బిందువుల వద్ద ఖండించుకునేలా గీయాలి.

కర్ణాలువాటి మధ్య బిందువుల వద్ద ఖండించుకున్నప్పుడు, కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనం చేసుకుంటాయని మనం అంటాము. ఒక రేఖాఖండాన్ని సమద్విఖండనం చేయడం అంటే – దానిని రెండు సమాన భాగాలుగావిభజించడం.

కొన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలను నిర్మించి వాటి కర్ణాలను మరియు ఖండన బిందువులను కొలవడం ద్వారా ఈ లక్షణాన్ని ధ్రువీకరించండి.

? $\Delta AOD \cong \Delta COB$ అని నిరూపించడానికి / చూపడానికి ఈ క్రింది సమానతలను ఉపయోగించవచ్చా?

$AO = CO$ (పైన నిరూపించబడింది)

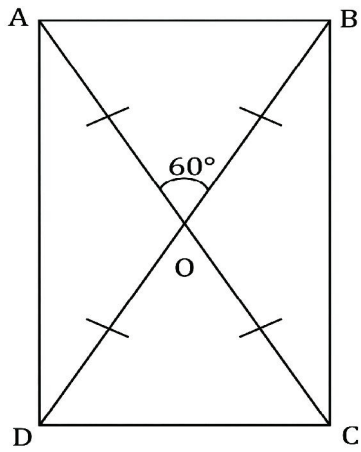
$\angle AOB = \angle COD$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$AD = CB$

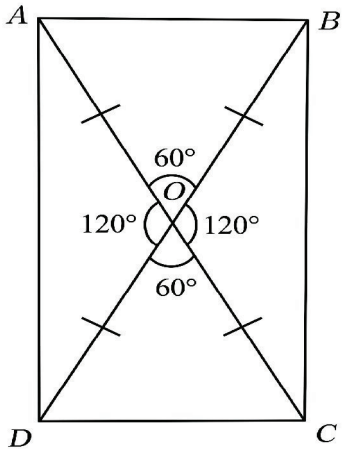
AP SCERT

Deduction 3 - What are the angles between the diagonals?

Let us check what quadrilateral we get if we draw the two diagonals such that their lengths are equal, they bisect each other and have an arbitrary angle, say 60°, between them as shown in the figure to the right.



? Can you find all the remaining angles?



We can find the remaining angles between the diagonals using our understanding of vertically opposite angles and linear pairs.

In ΔAOB, since OA = OB, the angles opposite them are equal, say a.

? Can you find the value of a?

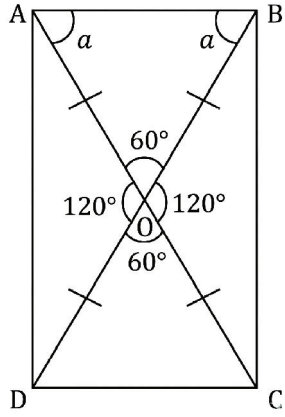
In ΔAOB, we have,

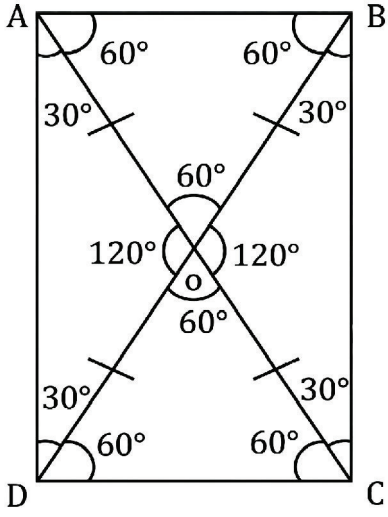
a + a + 60 = 180 (interior angles of a triangle). Therefore

2a = 120.

Thus a = 60.

Similarly, we can find the values of all the other angles.

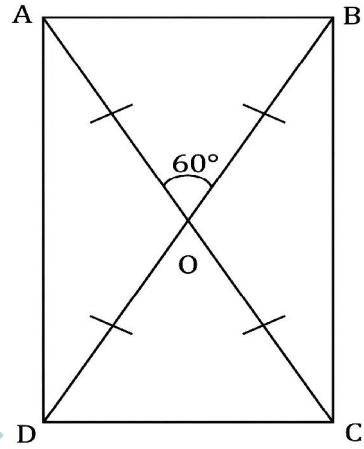




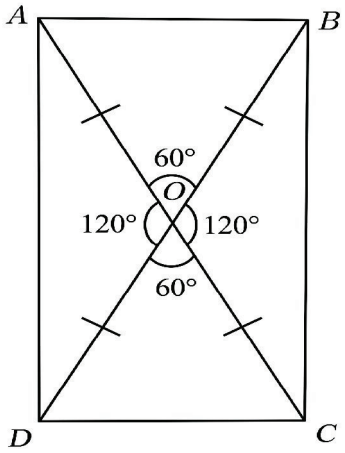
AP SCERT

తార్కిక ఊహ 3 : కర్ణాల మధ్య కోణాలు ఏమిటి?

కుడి వైపు ఉన్న చిత్రంలో చూపిన విధంగా రెండు కర్ణాలను వాటి పొడవులు సమానంగా ఉండేలా ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనం చేసుకునేలా మరియు వాటి మధ్య ఒకేవైపు కోణం 60° ఉండేలా గీస్తే మనకు లభించే చతుర్భుజం ఏమిటో పరిశీలిద్దాం.



? మిగిలిన అన్ని కోణాలను మీరు కనుగొనగలరా?



శీర్షాభిముఖ కోణాలు మరియు రేఖీయ ద్వయం పై మనకున్న అవగాహనను ఉపయోగించి కర్ణాల మధ్య మిగిలిన కోణాలను మనం కనుగొనవచ్చు.

ΔAOB లో, $OA = OB$ కాబట్టి, వాటికి ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి (a అనుకుందాం).

? 'a' విలువను మీరు కనుగొనగలరా?

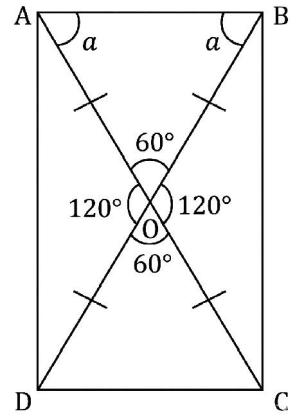
ΔAOB లో , మనకు,

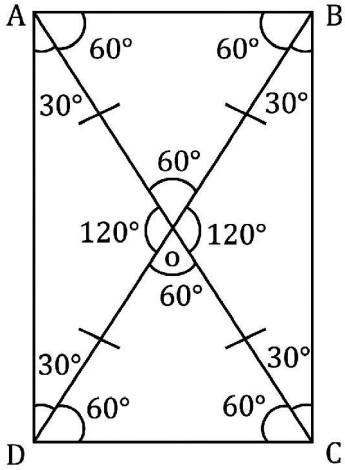
$a + a + 60 = 180$ (త్రిభుజం యొక్క అంతర కోణాలు).

కావున $2a = 120$.

అందువలన $a = 60$.

అదేవిధంగా మనం అన్ని ఇతర కోణాల విలువలను కనుగొనవచ్చు.

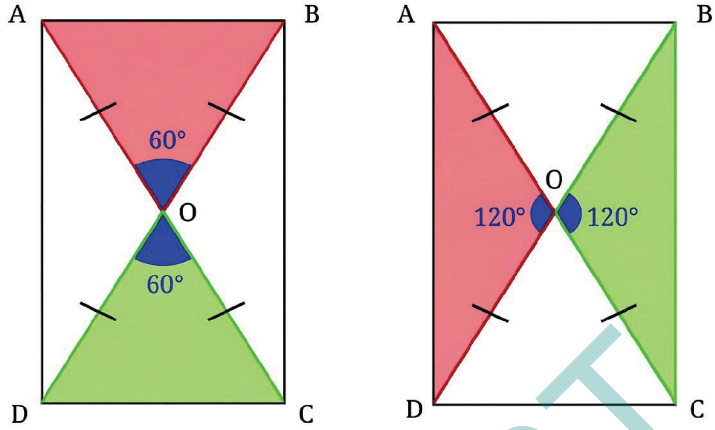




AP SCERT

? Can we now identify what type of quadrilateral ABCD is? Notice that its angles all add up to 90° (30° + 60°).

? What can we say about its sides?

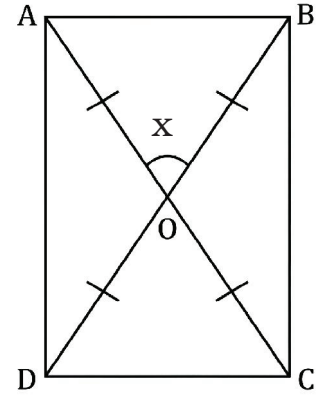


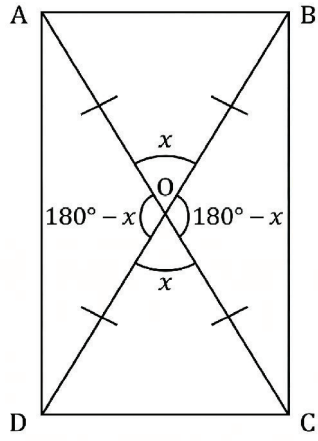
We can see that $\Delta AOB \cong \Delta COD$ and $\Delta AOD \cong \Delta COB$. Hence, AB = CD, and AD = CB, since they are corresponding parts of congruent triangles.

Therefore, ABCD is a rectangle since it satisfies the definition of a rectangle.

? Will ABCD remain a rectangle if the angles between the diagonals are changed? Can we generalise this?

Take one of the angles between the diagonals as x.





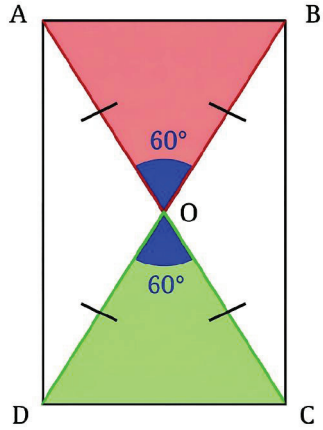
We can compute the four angles between the diagonals to be x, x, 180 - x, and 180 - x.

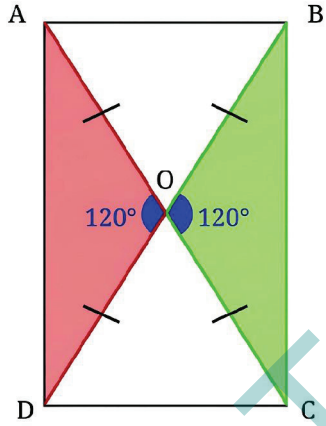
? Can you find the other angles?

AP SCERT

? ఇప్పుడు మనం ABCD ఏ రకమైన చతుర్భుజమో గుర్తించగలమా?
దాని కోణాలన్నీ కలిపితే 90° $(30^\circ + 60^\circ)$ అవుతుందని గమనించండి.

? దాని భుజాల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

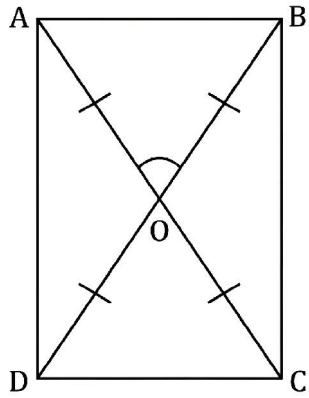


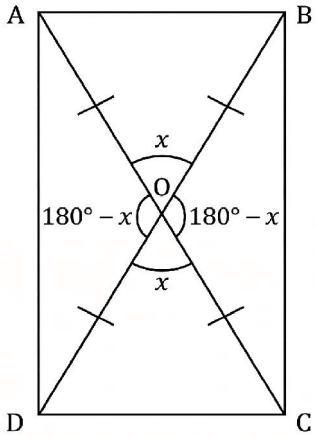


$\Delta AOB \cong \Delta COD$ మరియు $\Delta AOD \cong \Delta COB$ అని మనం చూడవచ్చు. అందువల్ల , AB = CD, మరియు AD = CB, ఎందుకంటే అవి సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు.

కాబట్టి, ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. ఎందుకంటే, ఇది దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క నిర్వచనాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది.

? కర్ణాల మధ్య కోణాలు మారితే ABCD దీర్ఘ చతురస్రం గానే ఉంటుందా? మనం దీనిని మనం సాధారణీకరించవచ్చా? కర్ణాల మధ్య కోణాలలో ఒక దానిని x గా తీసుకుందాం.



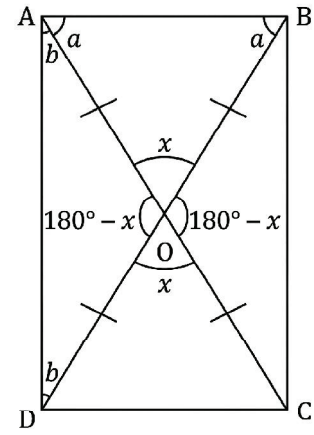


కర్ణాల మధ్య నాలుగు కోణాలను x, x, 180 - x, మరియు 180 - x., గా లెక్కించవచ్చు.

? మీరు ఇతర కోణాలను కనుగొనగలరా?

AP SCERT

Since we know that ΔAOB is isosceles, we can denote the measures of both of its base angles by a.



? What is the value of a (in degrees) in terms of x?

We have,

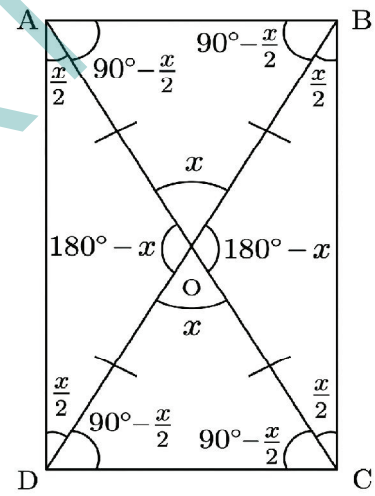
$$a + a + x = 180$$

(sum of the interior angles of a triangle)

$$2a = 180 - x$$

$$a = \frac{(180 - X)}{2} = 90 - \frac{x}{2}.$$

Similarly, in the isosceles ΔAOD, let the base angles be b.



$$b + b + 180 - x = 180$$

$$2b = 180 - (180 - x)$$

$$2b = 180 - 180 + x$$

$$2b = x$$

$$b = \frac{X}{2}.$$

All the angles of the quadrilateral are a + b, which is

$$90 - \frac{X}{2} + \frac{X}{2} = 90.$$

Thus, all four angles of the quadrilateral ABCD are 90°.

? What can we say about AB and CD, and AD and BC?

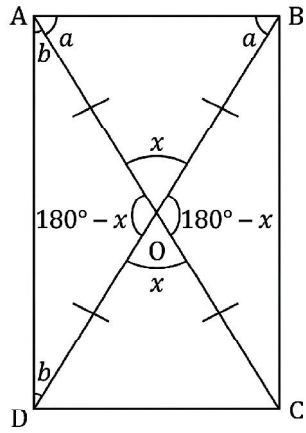
We have ΔAOB $\cong$ ΔCOD and ΔAOD $\cong$ ΔCOB. Hence, AB = CD, and AD = CB, since they are the corresponding parts of congruent triangles.

Hence, no matter what the angles between the diagonals are, if the diagonals are equal and they bisect each other, then the angles of the quadrilateral formed are 90° each, and the opposite sides are equal. Thus, the quadrilateral is a rectangle.

Now we know how the wooden strips have to be put together to form the vertices of a rectangle! They should be equal and connected at their midpoints.

AP SCERT

ΔAOB అనేది సమద్విబాహు త్రిభుజం అని మనకు తెలుసు. కాబట్టి, దాని రెండు భూకోణాల కొలతలను 'a' ద్వారా సూచించవచ్చు.



? x పరంగా a విలువ (డిగ్రీలలో) ఎంత?

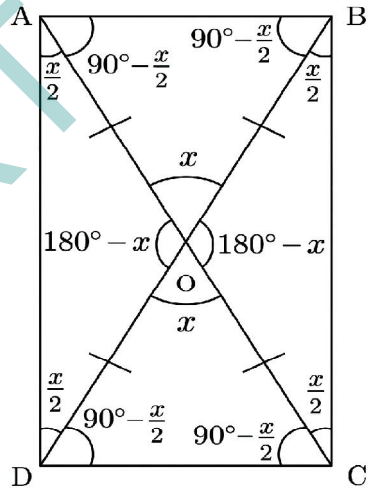
$$a + a + x = 180$$

(త్రిభుజం లోని అంతర కోణాల మొత్తం)

$$2a = 180 - x$$

$$a = \frac{(180 - X)}{2} = 90 - \frac{x}{2}.$$

అదేవిధంగా, ΔAOD సమద్విబాహు త్రిభుజంలో, భూకోణాలు b అనుకుందాము.



$$b + b + 180 - x = 180$$

$$2b = 180 - (180 - x)$$

$$2b = 180 - 180 + x$$

$$2b = x$$

$$b = \frac{X}{2}.$$

a + b, అంటే చతుర్భుజంలోని అన్ని నాలుగు కోణాలు, ఇది

$$90 - \frac{X}{2} + \frac{X}{2} = 90.$$

అందువలన ABCD చతుర్భుజం యొక్క నాలుగు కోణాలు 90°. (సమకోణాలు)

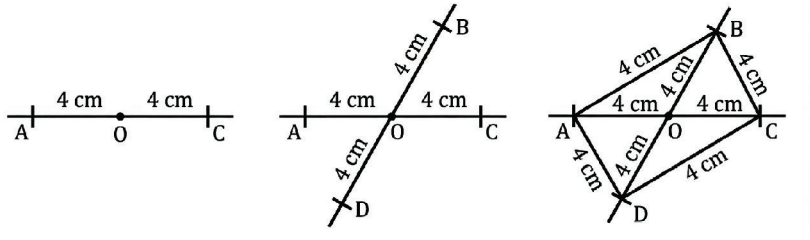
? AB మరియు CD, మరియు AD మరియు BC గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

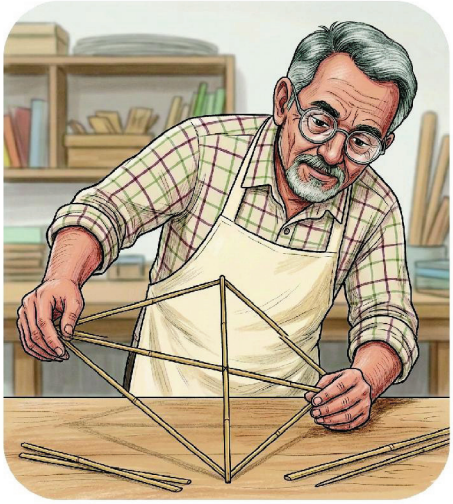
మనకు $\Delta AOB \cong \Delta COD$ మరియు $\Delta AOD \cong \Delta COB$. కాబట్టి, AB = C D మరియు AD = CB ఎందుకంటే అవి సర్వసమాన త్రిభుజాల యొక్క అనురూప భాగాలు.

అందువల్ల, కర్ణాల మధ్య కోణాలు ఎలా ఉన్నా కర్ణాలు సమానంగా ఉండి, అవి ఒకదానికొకటి సమద్విఖండించుకుంటే, ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క కోణాలు ఒక్కొక్కటి 90^0 మరియు ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి. అందువలన ఆ చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం.

ఇప్పుడు మనకు దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క శీర్షాలను ఏర్పరచడానికి చెక్క పట్టీలను ఎలా కలిపి ఉంచాలో తెలుసు! అవి సమానంగా ఉండాలి మరియు వాటి మధ్య బిందువుల వద్ద అనుసంధానించబడి ఉండాలి.

AP SCERT





This method is actually used in practice to make rectangles. Carpenters in Europe use this method to get a rectangular frame. It is also known that farmers in Mozambique, a country in Africa, use this method while constructing houses to get the base of the house in a rectangular shape.

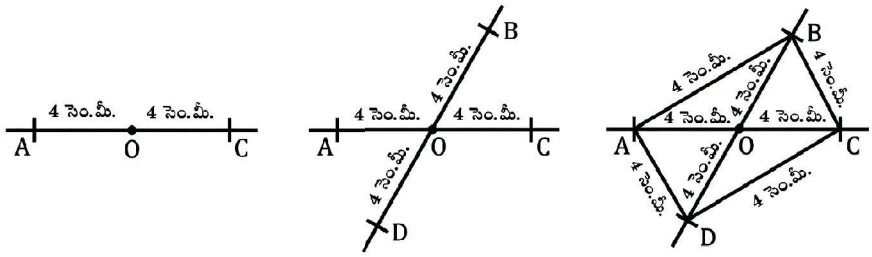
The Process of Finding Properties

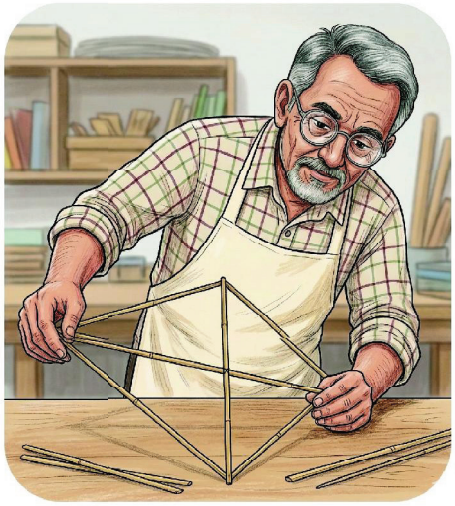
As we have been seeing from lower grades, properties of geometric objects such as parallel lines, angles, and triangles can be deduced through geometric reasoning. We will continue to deduce properties of special types of quadrilaterals in this chapter.

Once you have deduced a property of a quadrilateral, it is good to verify it with a real-world quadrilateral, either the quadrilateral constructed on paper or simply a surface having the shape of the quadrilateral.

If you are not able to figure out the property using deduction, you could experiment by taking real-world quadrilaterals and observing the property through measurement. Note that these observations give useful insights about the property, but with them, we can only form a **conjecture**, that is, a **statement about which we are highly confident, but not yet sure if it always holds true.** For example, constructing a few rectangles and observing through measurement that their diagonals bisect each other does not necessarily mean that this will always be the case - can we be sure that the 1000th rectangle we construct will also have this property? The only way we can be sure of this property is by justifying or proving the statement, just as we did in Deduction 2.

AP SCERT





ఈ పద్ధతిని వాస్తవానికి ఆచరణలో దీర్ఘ చతురస్రాలను తయారు చేయడానికి ఉపయోగిస్తారు. యూరప్ లోని వడ్రంగులు దీర్ఘ చతురస్రాకార చట్రాన్ని పొందడానికి ఈ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు. ఆఫ్రికాలోని ఒక దేశమైన మోజాంబిక్ లోని రైతులు ఇంటి పునాదిని దీర్ఘచతురస్రాకారంలో పొందడానికి ఇళ్ళు నిర్మించేటప్పుడు ఈ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారని కూడా తెలుసు.

ధర్మాలను కనుగొనే ప్రక్రియ

మనం దిగువ తరగతుల నుండి చూస్తున్నట్లుగా, సమాంతర రేఖలు, కోణాలు మరియు త్రిభుజాలు వంటి రేఖాగణిత వస్తువుల ధర్మాలను రేఖాగణిత తార్కికం ద్వారా ఊహించవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో ప్రత్యేక రకాల చతుర్భుజాల ధర్మాలను ఊహించడం కొనసాగిస్తాము.

మీరు ఒక చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాన్ని ఊహించిన తర్వాత దానిని నిజ జీవిత చతుర్భుజంతో, కాగితంపై నిర్మించిన చతుర్భుజంతో లేదా చతుర్భుజ ఆకారాన్ని కలిగి ఉన్న ఉపరితలంతో ధృవీకరించడం మంచిది.

మీరు ఊహను ఉపయోగించి ధర్మాన్ని గుర్తించలేకపోతే, నిజ జీవిత చతుర్భుజాలను తీసుకొని కొలత ద్వారా ధర్మాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా మీరు ప్రయోగం చేయవచ్చు. ఈ పరిశీలనలు ధర్మం గురించి ఉపయోగకరమైన అంతరదృష్టిలను ఇస్తాయని గమనించండి. కానీ వాటితో మనం ఒక ఊహను మాత్రమే రూపొందించగలము. అంటే, మనం చాలా నమ్మకంగా ఉన్న ప్రకటన, కానీ అది ఎల్లప్పుడూ నిజమో కాదో ఇంకా ఖచ్చితంగా తెలియదు. ఉదాహరణకు, కొన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలను నిర్మించడం మరియు కొలత ద్వారా వాటి కర్ణాలు ఒకదానికి ఒకటి సమద్వి ఖండన చేస్తాయని గమనించడం అంటే ఇది ఎల్లప్పుడూ అలాగే ఉంటుందని అర్థం కాదు, మనం నిర్మించే 1000వ దీర్ఘ చతురస్రం కూడా ఈ ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుందని మనం ఖచ్చితంగా చెప్పగలమా? ఈ ధర్మం గురించి మనం ఖచ్చితంగా చెప్పగల ఏకైక మార్గం ఊహ – 2 లో చేసినట్లుగా లేదా నిరూపించడం ద్వారా ఈ ధర్మాన్ని సమర్థించవచ్చు.

AP SCERT

Note to the Teacher: Gently encourage students to deduce or justify properties. Whenever students face challenges in doing it, encourage them to experiment and observe, and use their intuition to figure out the properties.

The Carpenter's Problem shows that rectangles can also be defined as follows -

Rectangle: A rectangle is a quadrilateral whose diagonals are equal and bisect each other.

Observe how different this definition is from the earlier one. Yet, both capture the same class of quadrilaterals. Further, it turns out that the first definition can be simplified.

? In the earlier definition, we stated that a rectangle has (a) opposite sides of equal length, and (b) all angles equal to 90°. Would we be wrong if we just define a rectangle as a quadrilateral in which all the angles are 90°?

? If you think that this definition is incomplete, try constructing a quadrilateral in which the angles are all 90° but the opposite sides are not equal.

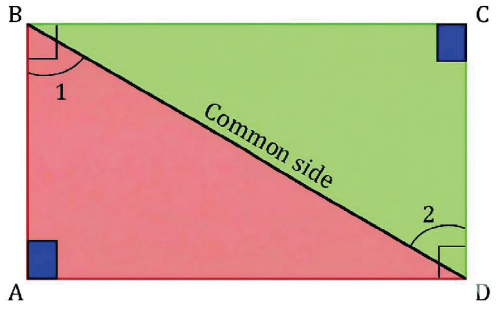
Are you able to construct such a quadrilateral?

Let us prove why this is impossible.

Deduction 4 - What is the shape of a quadrilateral with all the angles equal to 90°?

? Consider a quadrilateral ABCD with all angles measuring 90°. What can we say about the opposite sides of such a quadrilateral?

Join BD. ΔBAD and ΔDCB seem congruent. Can we justify this claim?



Two equalities can be directly seen in the triangles. What can we say about $\angle 1$ and $\angle 2$?

AP SCERT

ఉపాధ్యాయునికి గమనిక : విద్యార్థులను ధర్మాలను ఊహించమని లేదా సమర్థించమని సున్నితంగా ప్రోత్సహించండి. విద్యార్థులు దీన్ని చేయడంలో సవాళ్లు ఎదుర్కొన్నప్పుడల్లా, వారిని ప్రయోగాలు చేయమని ప్రోత్సహించండి మరియు ధర్మాలను గుర్తించడంలో వారి అంతర్ దృష్టిలను గమనించండి.

వజ్రంగి సమస్య దీర్ఘ చతురస్రాలను ఈ క్రింది విధంగా కూడా నిర్వచించవచ్చని చూపిస్తుంది.

దీర్ఘ చతురస్రం: దీర్ఘ చతురస్రం అనేది ఒక చతుర్భుజం. దీని కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి మరియు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

ఈ నిర్వచనం మునుపటి దాని నుండి ఎంత భిన్నంగా ఉందో గమనించండి. అయినప్పటికీ రెండు ఒకే రకమైన చతుర్భుజాలను సూచిస్తాయి. ఇంకా, మొదటి నిర్వచనాన్ని సరళీకరించవచ్చని తేలింది.

? మునపటి నిర్వచనంలో ఒక దీర్ఘ చతురస్రం (a) సమాన పొడవు గల ఎదురెదురు మరియు (b) అన్ని కోణాలు 90^0 సమానం అని మనం చెప్పాము. మనం ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని అన్ని కోణాలు 90^0 ఉన్న చతుర్భుజంగా నిర్వచించినట్లయితే అది తప్పా?

? ఈ నిర్వచనం అసంపూర్ణంగా ఉందని మీరు అనుకుంటే, కోణాలు అన్ని 90^0 ఉండి ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా లేని చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి ప్రయత్నించండి

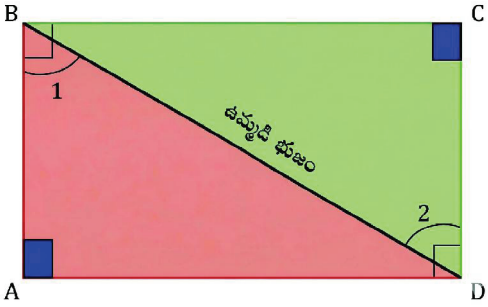
మీరు అలాంటి చతుర్భుజాన్ని నిర్మించగలరా?

ఇది ఎందుకు అసాధ్యమో మనం నిరూపిద్దాం.

ఊహ – 4: అన్ని కోణాలు 90^0 లకు సమానమైన చతుర్భుజం యొక్క ఆకారం ఏమిటి?

? అన్ని కోణాలు 90^0 వుండే చతుర్భుజం ABCD ని పరిగణించండి. అటువంటి చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

BD ని కలపండి. ΔBAD మరియు ΔDCB సర్వసమానంగా కనిపిస్తాయి. ఈ వాదనను మనం సమర్థించగలమా?

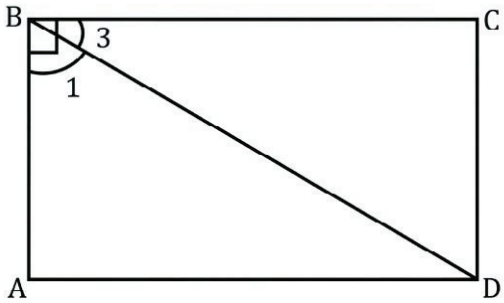


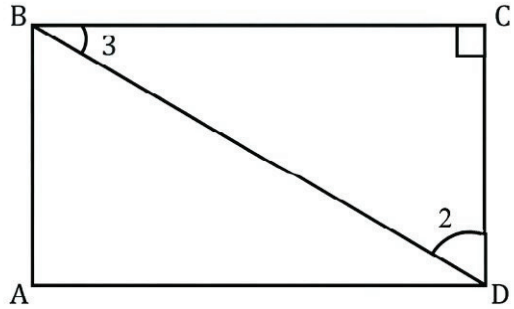
ఈ త్రిభుజాలలో రెండు సమానతలను నేరుగా చూడవచ్చు.

$\angle 1$ మరియు $\angle 2$ గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

AP SCERT

Recall that we tackled a very similar problem in Deduction 2. We can use the same reasoning here.





Since B = 90°,

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$.

In $\angle$BCD, since

$\angle 3 + \angle 2 + 90° = 180°$,

$\angle 3 + \angle 2 = 90°$.

So, $\angle 1 = \angle 2$.

Thus, by the AAS congruence condition, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$.

Therefore, AD = CB, and DC = BA, since these are corresponding sides of congruent triangles.

? Is it wrong to write $\Delta BAD \cong \Delta CDB$? Why?

Thus, we have established that if all the angles of a quadrilateral are right angles, then the opposite sides have equal lengths. Therefore, the quadrilateral is a rectangle. Thus, a rectangle can simply be defined as follows-

Rectangle: A rectangle is a quadrilateral in which the angles are all 90°. Let us list the properties of a rectangle.

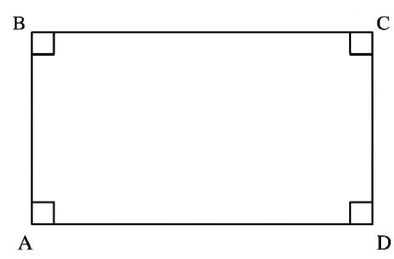
Property 1: All the angles of a rectangle are 90°.

Property 2: The opposite sides of a rectangle are equal.

? Are the opposite sides of a rectangle parallel?

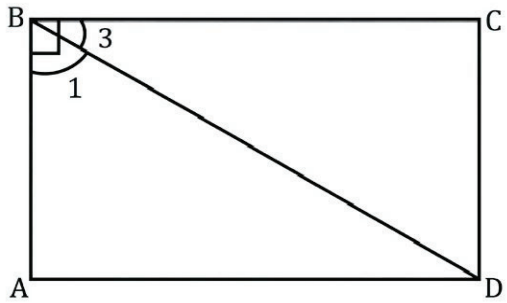
They definitely seem so. This fact can be justified using one of the transversal properties.

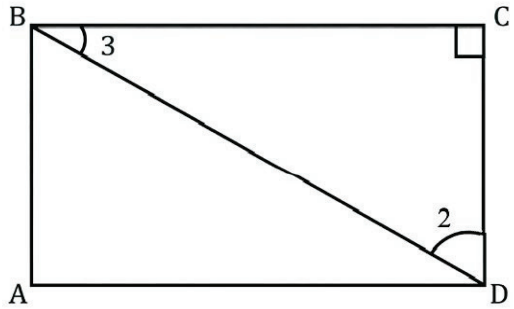
Notice that AB acts as a transversal to AD and BC, and that $\angle A + \angle B = 90° + 90° = 180°$. When the sum of the internal angles on the same side of the transversal is 180°, the lines are parallel. We can use this fact to conclude that the lines AD and BC are parallel, which we represent as AD || BC.



AP SCERT

ఊహ – 2 లో మనం ఇలాంటి సమస్యను పరిష్కరించామని గుర్తించుకోండి. మనం ఇక్కడ కూడా అదే తార్కికతను ఉపయోగించవచ్చు.





$B = 90^\circ$ కాబట్టి,

$\angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$.

$\angle BCD$, లో,

$\angle 3 + \angle 2 + 90^\circ = 180^\circ$ కావున,

$\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$.

కావున, $\angle 1 = \angle 2$.

అందువలన, కో.కో.భు. సర్వ సమానత్వ నియమం ద్వారా, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$.

కాబట్టి, $AD = CB$, మరియు $DC = BA$, ఎందుకంటే, అవి సర్వ సమాన త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు.

? $\Delta BAD \cong \Delta CDB$? అని రాయడం తప్పా? ఎందుకు?

ఈ విధంగా ఒక చతుర్భుజం యొక్క అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు అయితే వ్యతిరేక భుజాలు సమాన పొడవులను కలిగి ఉంటాయని మేము నిర్ధారించాము.. కాబట్టి, ఆ చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. అందువల్ల దీర్ఘ చతురస్రాన్ని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

దీర్ఘ చతురస్రం : ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అనేది అన్ని కోణాలు 90^0 ఉన్న చతుర్భుజం.

ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ధర్మాలను చూద్దాం.

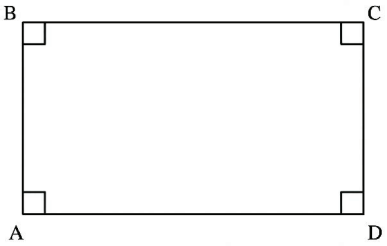
ధర్మం 1: దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క అన్ని కోణాలు 90^0.

ధర్మం 2: దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి

? దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్నాయా?

అవి ఖచ్చితంగా అలాగే అనిపిస్తాయి. ఈ వాస్తవాన్ని తిర్యగ్రేఖ ధర్మాలలో ఒక దాన్ని ఉపయోగించి సమర్థించవచ్చు.

AB అనేది AD మరియు BC లకు తిర్యగ్రేఖగా పనిచేస్తుంది మరియు $A + B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.. తిర్యగ్రేఖ కు ఒకే వైపున వున్న అంతర కోణాల మొత్తం 180^0 అయినప్పుడు, రేఖలు సమాంతరంగా వుంటాయి. ఈ వాస్తవాన్ని ఉపయోగించి AD మరియు BC రేఖలు సమాంతరంగా వున్నాయని నిర్ధారించవచ్చు, వీటిని మనం $AD \parallel BC$ గా సూచిస్తాము.



AP SCERT

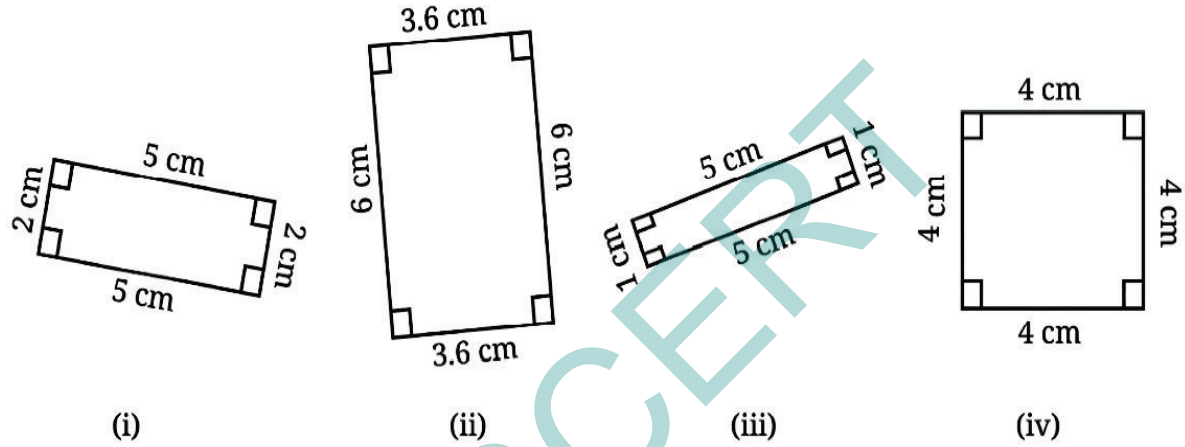
Can you similarly show that AB is parallel to DC (AB | | DC)?

Property 3: The opposite sides of a rectangle are parallel to each other.

Property 4: The diagonals of a rectangle are of equal length and they bisect each other.

A Special Rectangle

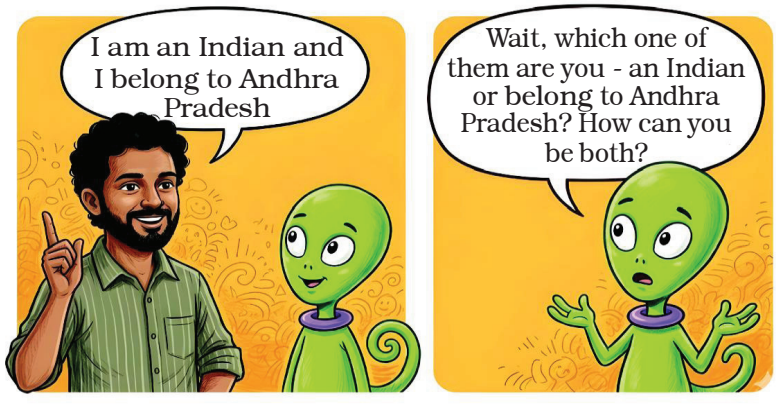
In the quadrilaterals below, are there any non-rectangles?



All these quadrilaterals are rectangles, including (iv). Quadrilateral (iv) is a rectangle because all its angles are 90°. However, it is a special kind of rectangle with all sides of equal length. We know that this quadrilateral is also called a square.

Square: A square is a quadrilateral in which all the angles are equal to 90°, and all the sides are of equal length.

Thus, every square is also a rectangle, but clearly every rectangle is not a square.



AP SCERT

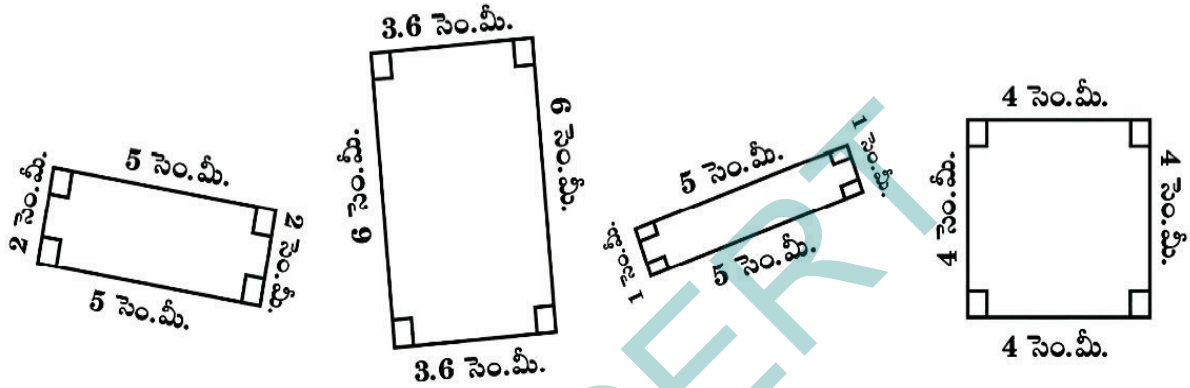
అదే విధంగా, AB అనేది DC (AB||DC) కి సమాంతరంగా వుందని మీరు చూపించగలరా?

ధర్మం 3: దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

ధర్మం 4: దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమాన పొడవు కలిగి ఉంటాయి మరియు అవి ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

ఒక ప్రత్యేక దీర్ఘ చతురస్రం

క్రింద ఇచ్చిన చతుర్భుజాలలో దీర్ఘ చతురస్రాలు కానివి ఏవైనా ఉన్నాయా?

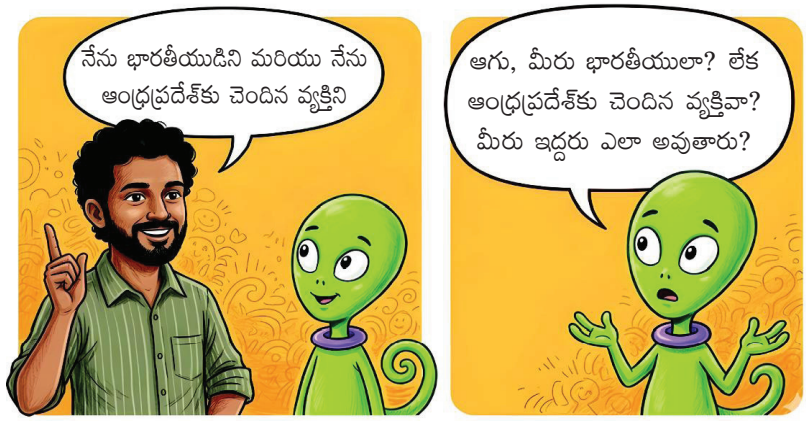


(i) (ii) (iii) (iv)

ఈ చతుర్భుజాలన్నీ (iv) తో సహా దీర్ఘ చతురస్రాలు, చతుర్భుజం (iv) అనేది ఒక దీర్ఘ చతురస్రం ఎందుకంటే దాని అన్ని కోణాలు 90^0. అయితే, ఇది అన్ని వైపులా సమాన పొడవు కలిగిన ఒక ప్రత్యేక రకమైన దీర్ఘ చతురస్రం. ఈ చతుర్భుజాన్ని చతురస్రం అని కూడా అంటారు.

చతురస్రం : చతురస్రం అనేది ఒక చతుర్భుజం. దీనిలో అన్నీ కోణాలు 90^0 కి సమానం మరియు అన్ని భుజాలు సమాన పొడవు కలిగి ఉంటాయి.

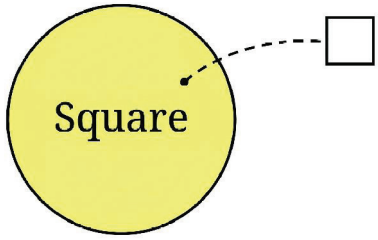
అందువలన ప్రతి చతురస్రం కూడా ఒక దీర్ఘ చతురస్రమే, కానీ స్పష్టంగా ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రం ఒక చతురస్రం కాదు.



AP SCERT

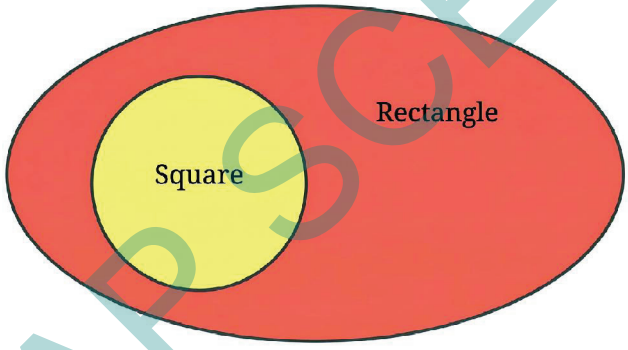
This relation can be pictorially represented using a **Venn diagram**. We have seen these diagrams before. In a Venn diagram, a set of objects is represented as points inside a closed curve. Typically, these closed curves are ovals or circles.

For example, the set of all squares is represented as



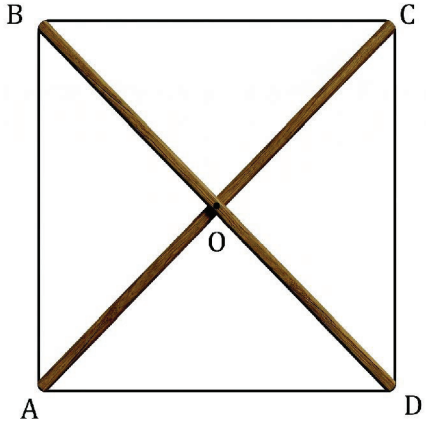
Each point in the region represents a square, thereby covering all the possible squares.

Since every square is a rectangle, the Venn diagram representation of these two sets would be as follows -



AP SCERT

? Let us consider the Carpenter's Problem again. If the wooden strips have to be placed such that the thread passing through their endpoints forms a square, what must be done?



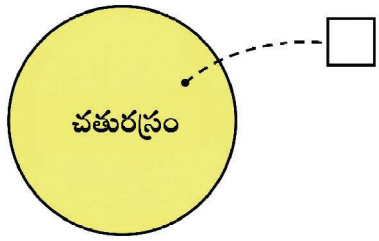
As in the previous case, let us try to construct a square, one of whose diagonals is of length 8 cm. While solving the Carpenter's Problem for the case of a rectangle, we have seen that to get a quadrilateral with all angles 90° (and opposite sides of equal length), the diagonals have to be drawn such that -

(i) they are of equal lengths, and

(ii) they bisect each other.

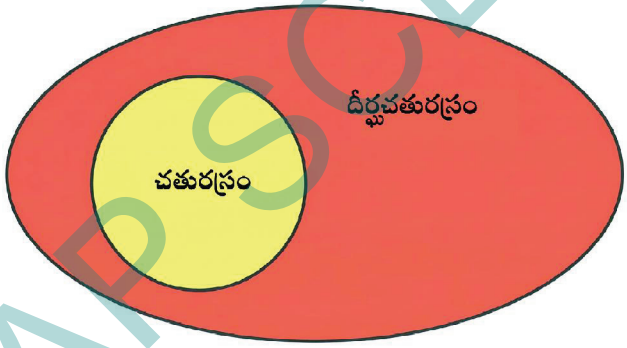
ఈ సంబంధాన్ని వెన్ రేఖా చిత్రం ఉపయోగించి సూచించవచ్చు ఈ రేఖా చిత్రాలను మనం ఇంతకుముందు చూసాము. వెన్ రేఖా చిత్రంలో వస్తువుల సమితిని ఒక సంవృత వక్ర రేఖ లోపల బిందువులుగా సూచిస్తారు. సాధారణంగా ఈ సంవృత వక్రాలు దీర్ఘ వృత్తాలు లేదా వృత్తాలు.

ఉదాహరణకు అన్ని చతురస్రాల సమితిని ఇలా సూచిస్తారు.



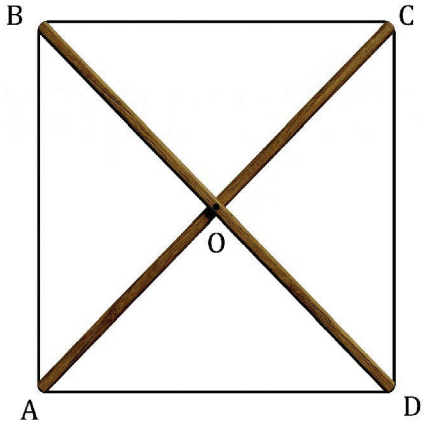
ఆ ప్రాంతంలోని ప్రతిబిందువు ఒక చతురస్రాన్ని సూచిస్తుంది. తద్వారా సాధ్యమయ్యే అన్ని చతురస్రాలను ప్రాతినిధ్యం పరుస్తుంది.

ప్రతి చతురస్రం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం కాబట్టి, ఈ రెండు సమితుల యొక్క వెన్ రేఖా చిత్ర ప్రాతినిధ్యం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది –



AP SCERT

? మళ్లీ వడ్రంగి సమస్యను పరిశీలిద్దాం. చెక్క పట్టీలను వాటి చివరల గుండా వెళ్లే దారం చతురస్రాన్ని ఏర్పరిచే విధంగా ఉంచవలసి వస్తే ఏమి చేయాలి?



మునపటి సందర్భంలో వలె 8 సెం.మీ పొడవు గల ఒక చతురస్రాన్ని నిర్మించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

ఒక దీర్ఘ చతురస్రం విషయంలో వడ్రంగి సమస్యను పరిష్కరిస్తున్నప్పుడు అన్ని కోణాలు 90^0 మరియు సమాన పొడవు గల ఎదురెదురు భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజాన్ని పొందడానికి కర్ణాలను గీయాలి. అంటే,

(i) అవి సమాన పొడవులు కలిగి ఉంటాయి. మరియు

(ii) అవి ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

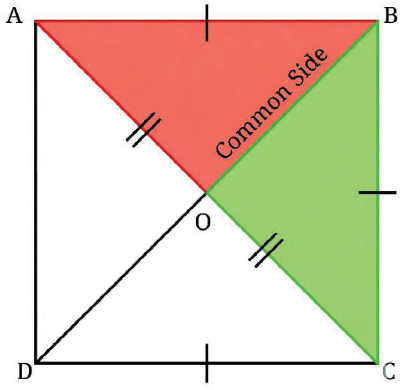
? What more needs to be done to get equal sidelengths as well? Can this be achieved by properly choosing the angle between the diagonals?

See if you can reason and/or experiment to figure this out!

Deduction 5 - What should be the angle formed by the diagonals?

The angle between the diagonals can be found using the notion of congruence! Suppose we join the equal diagonals such that they bisect each other and result in a square. Let us label the square ABCD.

To find the angle formed by the diagonals, what are the two triangles we should consider for congruence?



By the SSS condition for congruence, $\Delta BOA \cong \Delta BOC$

? Can this be used to find the angles **$\angle$BOA and $\angle$BOC** formed by the diagonals?

Since these angles are corresponding parts of congruent triangles, they are equal. Further, these angles together form a straight angle. So **$\angle$BOA + $\angle$BOC = 180°**. Thus, these angles have to be 90° each.

This shows that the diagonals of a square bisect each other at right angles. This means that the diagonals have to be drawn such that they are of equal lengths and bisect each other at right angles. Since the endpoints of the diagonals uniquely determine the vertices of a quadrilateral, we will get a square when the diagonals are joined this way.

? Using this fact, construct a square with a diagonal of length 8 cm.

Properties of a Square

Since a square is a special type of rectangle, all the properties of a rectangle hold true for a square.

AP SCERT

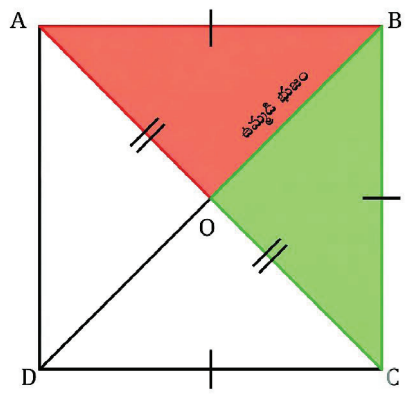
? సమాన భుజాల పొడవులు పొందడానికి ఇంకా ఏమి చేయాలి? కర్ణాల మధ్య కోణాన్ని సరిగ్గా ఎంచుకోవడం ద్వారా దీనిని సాధించవచ్చా?

దీనిని గుర్తించడానికి మీరు విశ్లేషణ మరియు / లేదా ప్రయోగం చేయగలరో చూడండి.

ఊహ – 5: కర్ణాల మధ్య ఏర్పడే కోణం ఎంత ఉండాలి?

కర్ణాల మధ్య కోణాన్ని సర్వసమానత్వము అనే భావనను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును. మనం సమాన కర్ణాలను కలుపుతాము. తద్వారా అవి ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయి. మరియు ఫలితంగా ఒక చతురస్రం వస్తుంది. ఈ చతురస్రాన్ని ABCD అని పేరు పెడదాం.

కర్ణాల ద్వారా ఏర్పడిన కోణాన్ని కనుగొనడానికి, సర్వసమానత్వము కోసం మనం పరిగణించవలసిన రెండు త్రిభుజాలు ఏమిటి?



భు.భు.భు సర్వ సమానత నియమం ప్రకారం,

$\Delta BOA \cong \Delta BOC$

? కర్ణాల ద్వారా ఏర్పడిన కోణాలను $\angle$**BOA** మరియు $\angle$**BOC** లను కనుగొనడానికి దీనిని ఉపయోగించవచ్చా?

ఈ కోణాలు సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు కాబట్టి అవి సమానంగా ఉంటాయి ఇంకా ఈ కోణాలు కలిసి ఒక సరళ కోణాన్ని ఏర్పరుస్తాయి కాబట్టి, $\angle$**BOA +** $\angle$**BOC = 180°**. కావున ఈ కోణాలు ఒక్కొక్కటి 90^0 ఉండాలి.

దీని అర్థం ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు లంబకోణాలలో ఒకదానికొకటి సమద్విఖండించుకుంటాయి. అంటే, కర్ణాలను సమాన పొడవులు ఉండేలా గీయాలి. మరియు ఒకదానికొకటి లంబకోణాలలో సమద్వి ఖండించుకోవాలి. కర్ణాల అంత్య బిందువులు చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలను ప్రత్యేకంగా నిర్ణయిస్తాయి కాబట్టి కర్ణాలను ఈ విధంగా కలిపినప్పుడు మనకు ఒక చతురస్రం లభిస్తుంది.

? ఈ వాస్తవాన్ని ఉపయోగించి 8 సెం.మీ పొడవు గల ఒక చతురస్రాన్ని నిర్మించండి.

చతురస్రం యొక్క ధర్మాలు

చతురస్రం ఒక ప్రత్యేక రకమైన దీర్ఘచతురస్రం కాబట్టి దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క అన్ని ధర్మాలు చతురస్రానికి వర్తిస్తాయి.

AP SCERT

? Verify if this is true by going through geometric reasoning in Deduction 1 and Deduction 2, and see if they apply to a square as well.

Property 1: All the sides of a square are equal to each other.

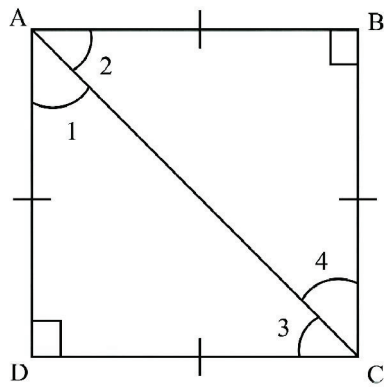
Property 2: The opposite sides of a square are parallel to each other.

Property 3: The angles of a square are all 90°.

Property 4: The diagonals of a square are of equal length and they bisect each other at 90°.

There is one more special property of a square.

? What are the measures of $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, and $\angle 4$? See if you can reason and/or experiment to figure this out!



In ΔADC, we have,

$\angle 1 + \angle 3 + 90 = 180$

Since AD = DC, we have $\angle 1 = \angle 3$.

Thus, $\angle 1 = \angle 3 = 45°$.

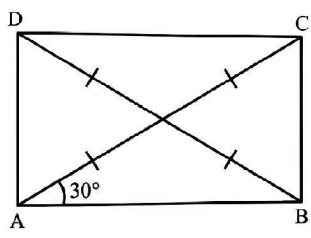
Similarly, find $\angle 2$ and $\angle 4$.

Thus, we have another property of a square -

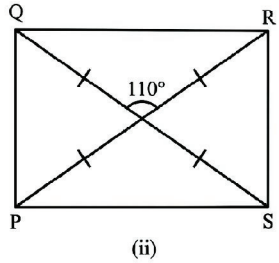
Property 5 : The diagonals of a square divide the angles of the square into equal halves. This can also be expressed as - The diagonals of a square bisect the angles of the square.

Figure it Out - 4.1

1. Find all the other angles inside the following rectangles.



(i)



(ii)

AP SCERT

? ఊహ – 1 మరియు ఊహ – 2 లలో రేఖాగణిత తార్కికం ద్వారా ఇది నిజమో? కాదో ? ధ్రువీకరించండి. మరియు అవి చతురస్రానికి కూడా వర్తిస్తాయో? లేదో? చూడండి.

ధర్మం 1 : చతురస్రం యొక్క అన్ని భుజాలు ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయి.

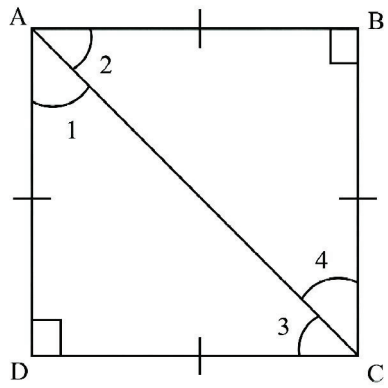
ధర్మం 2: చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

ధర్మం 3: చతురస్రం యొక్క కోణాలన్నీ 90^0.

ధర్మం 4: ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమాన పొడవు కలిగి ఉంటాయి మరియు అవి 90^0 వద్ద ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయి.

చతురస్రానికి మరొక ప్రత్యేక ధర్మం ఉంది.

? $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ యొక్క కొలతలు ఏమిటి? మీరు దీనిని గుర్తించడానికి విశ్లేషణ? మరియు/ లేదా ప్రయోగం చేయగలరా? అని చూడండి.



ΔADC లో, మనకు,

$\angle 1 + \angle 3 + 90 = 180$ ఉంటుంది.

$AD = DC$ కావున, మనకు $\angle 1 = \angle 3$ ఉంటుంది.

అందువలన, $\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ$.

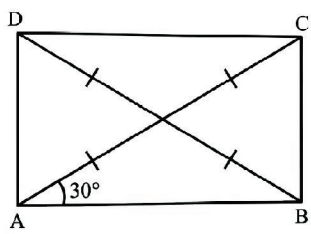
అదే విధంగా $\angle 2$ మరియు $\angle 4$ లను కనుగొనండి.

అందువలన మనకు చతురస్రం యొక్క మరొక ధర్మం ఉంది –

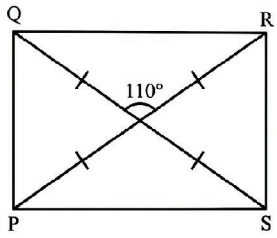
ధర్మం 5: ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు ఆ చతురస్రం యొక్క కోణాలను సమాన సగ భాగాలుగా విభజిస్తాయి. దీనిని ఒక చతురస్రం కర్ణాలు చతురస్రం యొక్క కోణాలను సమద్వి ఖండించినట్లుగా కూడా చెప్పవచ్చు.

ఆలోచించండి-చేయండి - 4.1

1. క్రింది దీర్ఘ చతురస్రాల లోపల అన్ని ఇతర కోణాలను కనుగొనండి..



(i)



(ii)

AP SCERT

2. Draw a quadrilateral whose diagonals have equal lengths of 8 cm that bisect each other, and intersect at an angle of
   (i) 30° (ii) 40° (iii) 90° (iv) 140°
3. Consider a circle with centre O. Line segments PL and AM are two perpendicular diameters of the circle. What is the figure APML? Reason and/or experiment to figure this out.
4. We have seen how to get 90° using paper folding. Now, suppose we do not have any paper but two sticks of equal length, and a thread. How do we make an exact 90° using these?

5. We saw that one of the properties of a rectangle is that its opposite sides are parallel. Can this be chosen as a definition of a rectangle? In other words, is every quadrilateral that has opposite sides parallel and equal, a rectangle?

Try This

4.2. Angles in a Quadrilateral

? Is it possible to construct a quadrilateral with three angles equal to 90° and the fourth angle not equal to 90°?

You might have observed through constructions that this may not be possible.

? But why not?

This is due to a general property of quadrilaterals related to their angles.

We have seen that the sum of the angles of a triangle is 180°. There is a similar regularity in the sum of the angles of a quadrilateral.

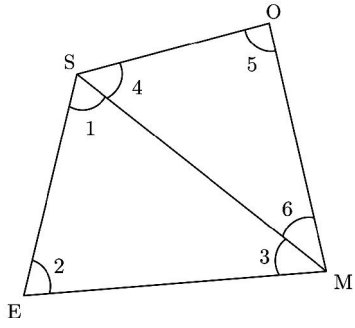
Consider a quadrilateral SOME.

Draw a diagonal SM. We get two triangles ΔSEM and ΔSOM.

In ΔSEM, we have $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

And in ΔSOM, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$.

What do we get when we add all six angles?



We will have

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180° + 180°$$
$$= 360°.$$

Or, $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 2 + \angle 5 = 360°$.

Since $(\angle 1 + \angle 4)$, $(\angle 3 + \angle 6)$, $\angle 2$ and $\angle 5$ are the angles of this quadrilateral, we have the following result -

AP SCERT

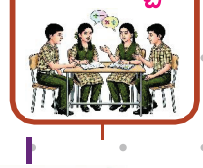
2. 8 సెం. మీ సమాన పొడవు గల కర్ణాలు మరియు అవి క్రింది ఒక కోణంలో ఒక దానికొకటి సమద్విఖండించుకునే చతుర్భుజాన్ని గీయండి.

(i) 30° (ii) 40° (iii) 90° (iv) 140°

3. O కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తాన్ని తీసుకుని PL మరియు PM అనే రేఖాఖండాలు వృత్తం యొక్క రెండు లంబ వ్యాసాలు. APML అనే పటం ఏమిటి? దీనిని గుర్తించడానికి కారణం మరియు/లేదా ప్రయోగం చేయండి.

4. కాగితం మడత పెట్టడం ద్వారా 90^0 ఎలా పొందాలో మనం చూసాము. ఇప్పుడు మన దగ్గర కాగితం లేదు కానీ సమాన పొడవు గల రెండు కర్రలు మరియు ఒక దారం ఉన్నాయని అనుకుందాం వీటిని ఉపయోగించి మనం ఖచ్చితమైన 90^0 ని ఎలా తయారు చేయగలం?

గణిత చర్చ



5. దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ధర్మాలలో ఒకటి దాని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండటం అని మనం చూసాం. దీనిని దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క నిర్వచనంగా ఎంచుకోవచ్చా? మరో మాటలు చెప్పాలంటే ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా మరియు సమానంగా ఉన్న ప్రతి చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్రమా?

ప్రయత్నించండి

4.2 చతుర్భుజం లోని కోణాలు

? మూడు కోణాలు 90^0 కి సమానం మరియు నాలుగవ కోణం 90^0 కి సమానం కానీ చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడం సాధ్యమేనా?

నిర్మాణాల ద్వారా ఇది సాధ్యం కాకపోవచ్చు అని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు.

? కానీ ఎందుకు కాదు?

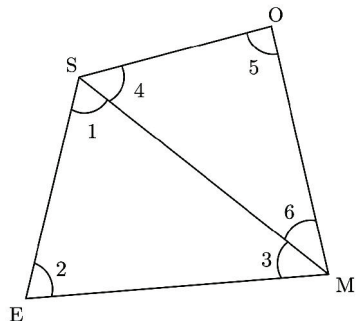
ఇది చతుర్భుజాల యొక్క కోణాలకు సంబంధించిన సాధారణ ధర్మం. ఒక త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం 180^0 అని మనం చూసాం. చతుర్భుజం యొక్క కోణాల మొత్తంలో కూడా ఇలాంటి క్రమబద్ధత ఉంటుంది.

చతుర్భుజం SOME ని పరిశీలించండి.

ఒక కర్ణం SM ను గీయండి. మనకు ΔSEM మరియు ΔSOM అనే రెండు త్రిభుజాలు లభిస్తాయి.

ΔSEM లో, మనకు $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

మరియు ΔSOM లో, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$.



ఆరు కోణాలను కలిపితే మనకు ఏమి లభిస్తుంది?

మనకు

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ + 180^\circ$$
$$= 360^\circ.$$

లేదా, $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 2 + \angle 5 = 360^\circ$.

$(\angle 1 + \angle 4)$, $(\angle 3 + \angle 6)$, $\angle 2$ మరియు $\angle 5$ ఈ చతుర్భుజం యొక్క కోణాలు కాబట్టి ఈ క్రింది ఫలితం వస్తుంది –

AP SCERT

The sum of all angles in any quadrilateral is 360°.

This explains why it is impossible for a quadrilateral to have three right angles, with the fourth angle not right angle.

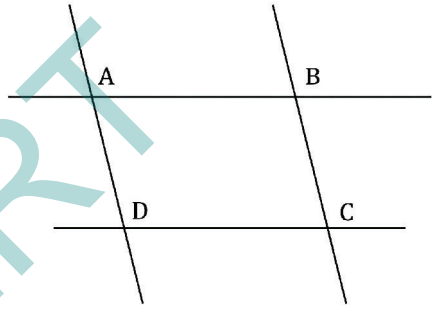
4.3. More Quadrilaterals with Parallel Opposite Sides

Rectangles (and therefore squares) have parallel opposite sides.

? Are there quadrilaterals that have parallel opposite sides that are not rectangles?

Let us try constructing one.

This can be easily done by drawing two pairs of parallel lines, ensuring that they do not meet at right angles.



? Construct such a figure by recalling how parallel lines can be constructed using a ruler and a set-square, or a compass and a ruler.

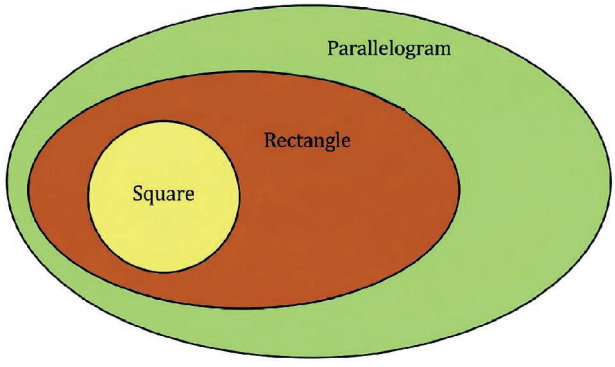
Observe the quadrilateral ABCD. It has parallel opposite sides but is not a rectangle.

Thus, a larger set of quadrilaterals exists in which the opposite sides are parallel. Such quadrilaterals are called **parallelograms.**

? Is a rectangle a parallelogram?

A rectangle has opposite sides parallel. So, it satisfies the parallelogram's definition. Hence, it is indeed a parallelogram. More specifically, a rectangle is a special kind of parallelogram with all its angles equal to 90°.

Let us represent this relation using a Venn diagram.



AP SCERT

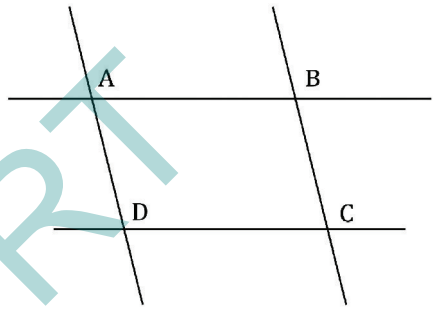
ఏదైనా చతుర్భుజం లోని అన్ని కోణాల మొత్తం 360^0.

ఇది ఒక చతుర్భుజానికి నాలుగవ కోణం లంబకోణం కాకుండా మూడు లంబకోణాలు ఉండటం ఎందుకు అసాధ్యమో? వివరిస్తుంది.

4.3 ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్న మరిన్ని చతుర్భుజాలు

దీర్ఘ చతురస్రాలు (మరియు చతురస్రాలు) లలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా వుంటాయి.

? దీర్ఘ చతురస్రాలు కాని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరం కలిగిన చతుర్భుజాలు ఉన్నాయా? ఒకదానిని నిర్మించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.



రెండు జతల సమాంతర రేఖలను గీచి అవి లంబకోణాలలో కలుసుకోకుండా చూసుకోవడం ద్వారా దీన్ని సులభంగా చేయవచ్చు.

? స్కేలు మరియు మూలమట్టం లేదా వృత్తలేఖిని మరియు స్కేలు ను ఉపయోగించి సమాంతర రేఖలను ఎలా నిర్మించవచ్చో గుర్తు చేసుకోవడం ద్వారా అటువంటి పటంను నిర్మించండి.

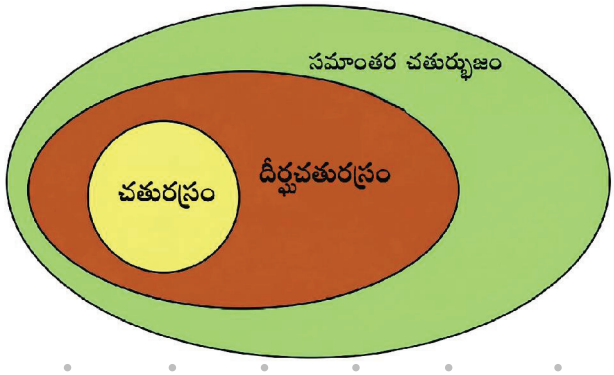
ABCD చతుర్భుజాన్ని గమనించండి. దీనికి ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి కానీ. ఇది దీర్ఘచతురస్రం కాదు.

అందువల్ల ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే పెద్ద చతుర్భుజాల సమితి ఉంది. అటువంటి చతుర్భుజాలను సమాంతర **చతుర్భుజాలు** అంటారు.

? దీర్ఘ చతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమా?

ఒక దీర్ఘ చతురస్రం రెండు జతల ఎదురెదురు భుజాలను సమాంతరం కలిగి ఉంటుంది. కాబట్టి, ఇది సమాంతర చతుర్భుజం నిర్వచనాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది. అందువల్ల ఇది నిజానికి ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. మరింత ప్రత్యేకంగా చెప్పాలంటే ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అనేది దాని అన్ని కోణాలు 90^0 సమానమైన ఒక ప్రత్యేక రకమైన సమాంతర చతుర్భుజం.

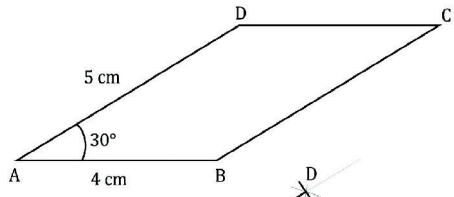
ఈ సంబంధాన్ని వెన్ చిత్రం ఉపయోగించి సూచించవచ్చు. కింది విధంగా చూపించవచ్చు.



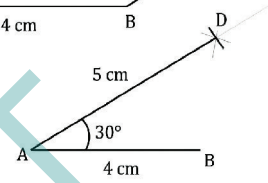
AP SCERT

To understand the relations between the sides and the angles of a parallelogram, let us construct the following figure.

? Draw a parallelogram with adjacent sides of lengths 4 cm and 5 cm, and an angle of 30° between them.

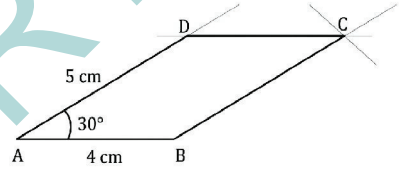


Step 1: Draw line segments AB = 4 cm and AD = 5 cm with an angle of 30° between them.



Step 2: Draw a line parallel to AB through the point D, and a line parallel to AD through B. Mark the point at which these lines intersect as C.

ABCD is the required parallelogram.



? What are the remaining angles of the parallelogram? What are the lengths of the remaining sides? See if you can reason out and/or experiment to figure these out.

AP SCERT

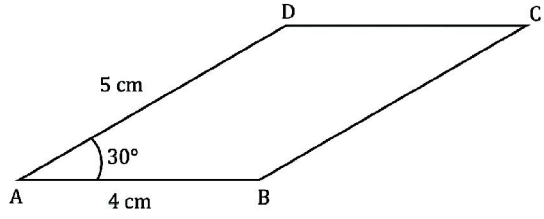
? Deduction 6 - What can we say about the angles of a parallelogram?

In the parallelogram ABCD, AB||CD, and AD is a transversal to them.

$\angle A + \angle D = 180°$ (sum of the internal angles on the same side of a transversal).

Therefore,

D = 180 - A = 180 - 30 = 150°.



Similarly, AD||BC, and AB and CD are transversals to them.

So, $\angle A + \angle B = 180°$.

So, $\angle C + \angle D = 180°$.

Using these equations, we get $\angle B = 150°$ and $\angle C = 30°$.

We see that in this parallelogram, the **adjacent pairs of angles add up to 180° and opposite pairs of angles are equal.**

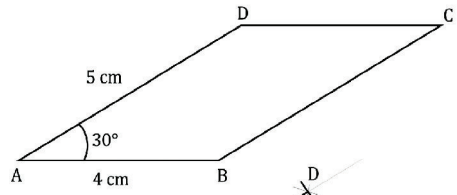
Thus,

$\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$, and $\angle B + \angle C = 180°$.

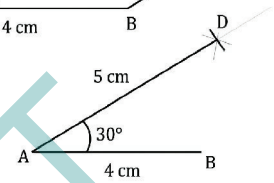
And, $\angle A = \angle C$, and $\angle B = \angle D$.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భుజాలు మరియు కోణాల మధ్య సంబంధాలను అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది పటాన్ని నిర్మిస్తాము.

? 4 సెం. మీ మరియు 5 సెం. మీ పొడవు గల ఆసన్న భుజాలు మరియు వాటి మధ్య 30^0 కోణం ఉండేలా ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీయండి.

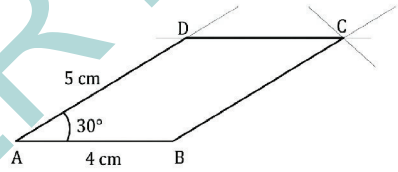


సోపానం 1: AB = 4 మరియు AD = 5 రేఖాఖండాల ను వాటి మధ్య 30^0 కోణంతో గీయండి.



సోపానం 2: D బిందువు ద్వారా AB కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను, మరియు B ద్వారా AD కి సమాంతరంగా మరొక రేఖను గీయండి. ఈ రేఖలు ఖండించుకునే బిందువును C గా గుర్తించండి.

ABCD అనేది కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.



? సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మిగిలిన కోణాలు ఏమిటి? మిగిలిన భుజాల పొడవులు ఏమిటి? వీటిని గుర్తించడానికి మీరు విశ్లేషించగలరా? మరియు / లేదా ప్రయోగం చేయగలరా? అని చూడండి.

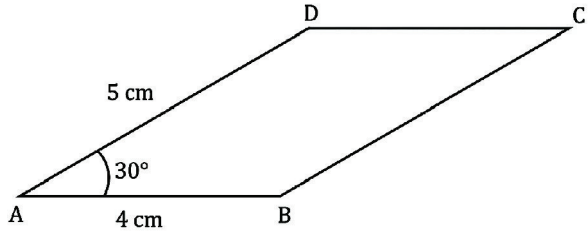
? **ఊహ - 6 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కోణాల గురించి ఏమి చెప్పగలం?**

సమాంతర చతుర్భుజము ABCDలో, AB||CD, మరియు AD వాటికి ఒక తిర్యగ్రేఖ.

A + D = 180° (తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున వున్న అంతర కోణాల మొత్తం).

అందువలన,

D = 180 - A = 180 - 30 = 150°.



అదేవిధంగా, AD||BC, మరియు AB మరియు CD లు తిర్యగ్రేఖలు గా ఉంటాయి.

కావున, $\angle A + \angle B = 180°$.

మరియు, $\angle C + \angle D = 180°$.

ఈ సమీకరణాలను ఉపయోగించి మనకు $\angle B = 150°$ మరియు $\angle C = 30°$ వస్తుంది.

ఈ సమాంతర **చతుర్భుజంలో ఆసన్న కోణాల జతల మొత్తం 180^0** అవుతుందని మరియు ఎదురెదురు కోణాల జతలు సమానం అని మనము చూస్తాము.

కావున,

$\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$, మరియు $\angle B + \angle C = 180°$.

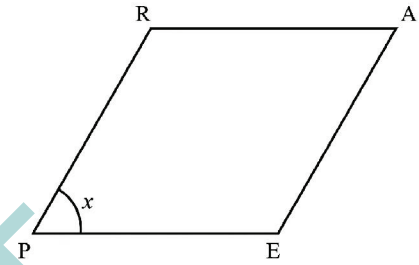
మరియు, $\angle A = \angle C$, మరియు $\angle B = \angle D$.

APSCERT

Since the adjacent angles are the interior angles on the same side of a transversal to a pair of parallel lines, they must add up to 180°.

? What about the opposite angles? Will they be equal in all parallelograms? If yes, how can we be sure?

Let us take one of the angles to be x. What are the other angles?



Since $\angle P + \angle R = 180°$,

$\angle R = 180 - \angle P = 180 - x$.

Similarly, since $\angle A + \angle R = 180°$,

$\angle A = 180 - \angle R = 180 - (180 - x) = 180 - 180 + x = x$.

Thus, $\angle P = \angle A = x$.

Similarly, we can deduce that $\angle R = \angle E = 180 - x$.

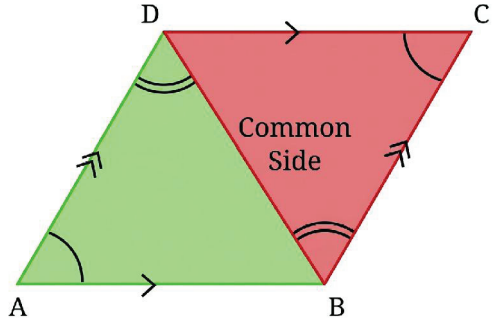
Therefore, this shows that **the opposite angles of a parallelogram are always equal.**

? Deduction 7 - What can we say about the sides of a parallelogram?

By looking at a parallelogram, it appears that the opposite sides are equal.

Can we again use congruence to show this? Which two triangles can be considered for this?

In ΔABD and ΔCDB, the angles marked with a single arc are equal as they are the opposite angles of a parallelogram.



Since AD | | BC, and BD is a transversal to it, the angles marked with double arcs are equal as they are alternate angles.

So, by the AAS condition, the triangles are congruent, that is,

$\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

Therefore, AD = CB, and AB = CD.

Thus, **the opposite sides of a parallelogram are equal.**

? Is it wrong to write $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? Why?

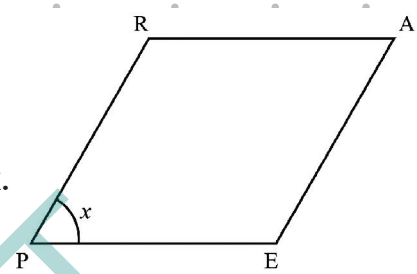
From these deductions we can find the remaining sides and angles of the parallelogram.

AP SCERT

ఆసన్న కోణాలు ఒక జత సమాంతర రేఖలను ఖండించే తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున ఉన్న అంతర కోణాలు ఆసన్న కోణాలు కాబట్టి వాటి మొత్తం 180° ఉండాలి.

? ఎదురెదురు కోణాల గురించి ఏమి చెప్పగలవు? సమాంతర చతుర్భుజాలలో అవి సమానంగా ఉంటాయా? అవును అయితే మనం ఖచ్చితంగా ఎలా చెప్పగలం?

కోణాలలో ఒక దానిని x గా తీసుకుందాం. ఇతర కోణాలు ఏమిటి?



$\angle P + \angle R = 180^\circ$ కావున,

$\angle R = 180 - \angle P = 180 - x.$

అదేవిధంగా, $\angle A + \angle R = 180^\circ$ కావున,

$\angle A = 180 - \angle R = 180 - (180 - x) = 180 - 180 + x = x.$

కాబట్టి, $\angle P = \angle A = x.$

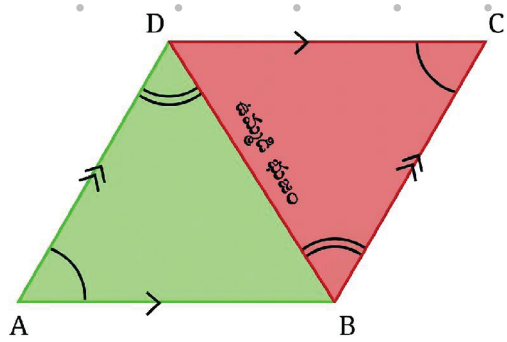
అదేవిధంగా, మనము $\angle R = \angle E = 180 - x$ అని ఊహించవచ్చు.

కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు కోణాలు ఎల్లప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయని ఇది చూపిస్తుంది.

? ఊహ – 7: సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భుజాల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

సమాంతర చతుర్భుజాన్ని చూస్తే ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తుంది.

దీనిని నిరూపించడానికి మళ్లీ సర్వసమానత్వ నియమాలను ఉపయోగించవచ్చా? దీనికి ఏ రెండు త్రిభుజాలను గమనించవచ్చు?



ΔABD మరియు ΔCDB లలో, ఒకే చాపముతో గుర్తించబడిన కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. ఎందుకంటే అవి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు కోణాలు.

ఎందుకంటే $AD \parallel BC$, మరియు BD వాటికి తిర్యగ్రేఖగా ఉంటుంది.

కాబట్టి రెండు చాపాలతో గుర్తించబడిన కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

ఎందుకంటే అవి ఏకాంతర కోణాలు. కాబట్టి కో.కో.భు. నియమం ప్రకారం త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

అంటే, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$..

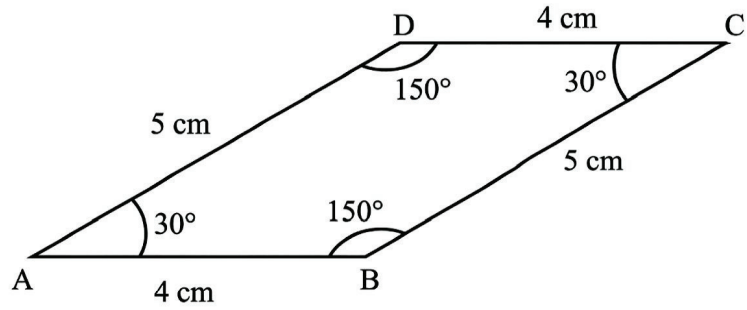
కావున, $AD = CB$, మరియు $AB = CD$.

అందువలన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి.

? $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? అని వ్రాయడం తప్పా? ఎందువలన?

ఈ ఊహ నుండి మనం సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మిగిలిన భుజాలు మరియు కోణాలను కనుగొనవచ్చు.

AP SCERT



Let us list the properties of a parallelogram.

Property 1: The opposite sides of a parallelogram are equal.

Property 2: The opposite sides of a parallelogram are parallel.

Property 3: In a parallelogram, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

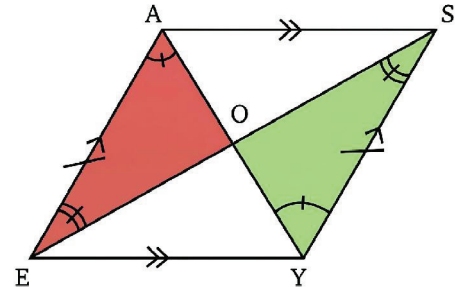
? Are the diagonals of a parallelogram always equal? Check with the parallelogram that you have constructed.

We see that the diagonals of a parallelogram need not be equal.

? Do they bisect each other (do they intersect at their midpoints)? Reason and/or experiment to figure this out.

Deduction 8 - What is the point of intersection of the two diagonals in a parallelogram?

As in the case of a rectangle, we can find out if the diagonals bisect each other by examining the congruence of ΔAOE and ΔYOS in the parallelogram EASY.



AE = YS (as they are the opposite sides of the parallelogram)

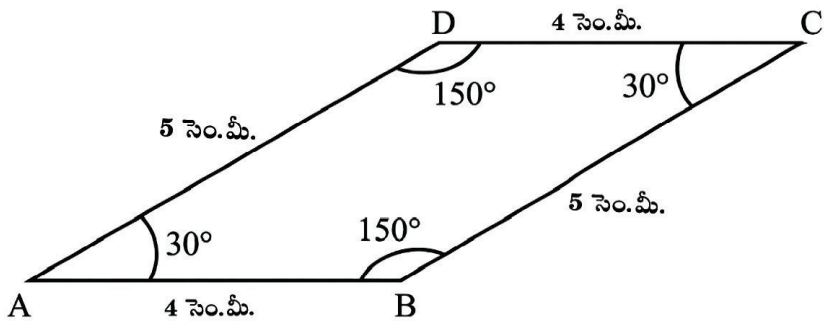
The angles marked using a single arc are equal, and so are the angles marked using a double arc, since they are alternate angles of parallel lines.

Thus, by the ASA condition, the triangles are congruent, that is,

$\Delta AOE \cong \Delta YOS$.

Therefore, OA = OY, and OE = OS, since they are corresponding parts of congruent triangles.

AP SCERT



సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాల జాబితా చూద్దాం.

ధర్మం 1 : సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి.

ధర్మం 2 : సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

ధర్మం 3 : సమాంతర చతుర్భుజంలో ఆసన్న ఉన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అవుతుంది మరియు ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

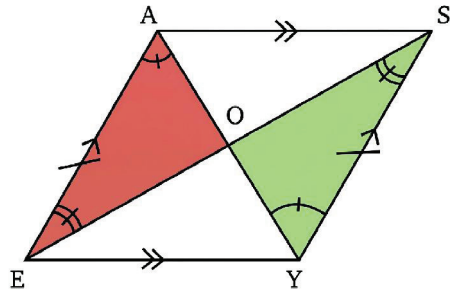
? సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఎల్లప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయా? మీరు నిర్మించిన సమాంతర చతుర్భుజంతో పరిశీలన చేయండి.

? సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు సమానంగా ఉండనవసరం లేదని మనము గమనిస్తాం. అవి ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయా? (వాటి మధ్య బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటాయా?) దీనిని గుర్తించడానికి కారణము లేదా ప్రయోగము చేయండి.

ఊహ – 8: సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు ఏమిటి?

దీర్ఘ చతురస్రం విషయంలో లాగా, EASY సమాంతర చతుర్భుజంలో, ΔAOE మరియు ΔYOS ల సర్వ సమానత్వాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయో? లేదో? మనం కనుగొనవచ్చును.

$AE = YS$ (అవి సమాంతర చతుర్భుజానికి ఎదురెదురు భుజాలు కావున)



ఒకే చాపాన్ని ఉపయోగించి గుర్తించబడిన కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి మరియు రెండు చాపాలను ఉపయోగించి గుర్తించబడిన కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. ఎందుకంటే, అవి సమాంతర రేఖల యొక్క ఏకాంతర కోణాలు.

కాబట్టి కో.భు.కో. నియమం ప్రకారం $\Delta AOE \cong \Delta YOS$. త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

అందువలన, $OA = OY$, మరియు $OE = OS$ ఎందుకంటే, అవి సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు.

AP SCERT

Thus, O is the midpoint of both diagonals.

? Is it wrong to write $\Delta AOE \cong \Delta SOY$? Why?

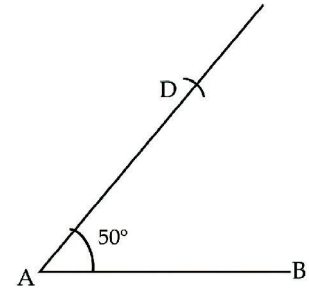
Property 4: The diagonals of a parallelogram bisect each other.

? Do the diagonals of a parallelogram intersect at a particular angle?

4.4. Quadrilaterals with Equal Sidelengths

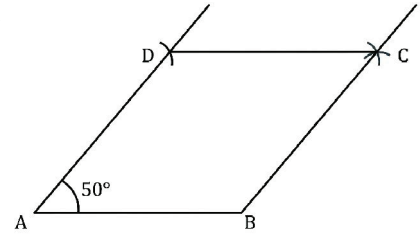
? Are squares the only quadrilaterals that have equal sidelengths? Let us explore this question through construction.

Draw two equal sides AD and AB, that are not perpendicular to each other.



? Can we complete this quadrilateral so that all its sides are of the same length?

Mark a point C whose distance from B and D is equal to AB (or AD). To do this, measure AB using a compass. Keeping this length as the radius, cut arcs from B and D.



Now we have a quadrilateral with equal sidelengths and one of its angles 50°. Note that we could have constructed such a quadrilateral by taking any angle less than 180° (in place of 50°).

A quadrilateral in which all the sides have the same length is a rhombus.

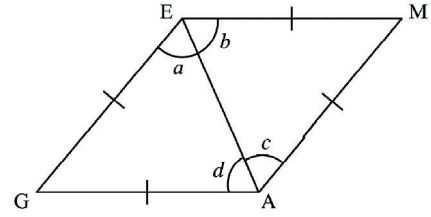
? What are the other angles of the rhombus ABCD that we have constructed? Reason and/or experiment to figure this out.

Deduction 9 - What can we say about the angles in a rhombus?

Consider a rhombus GAME.

In ΔGAE, since GE = GA, a = d. Similarly, in ΔMAE, since ME = MA, b = c.

? It can be seen that $\Delta GAE \cong \Delta MAE$ (How?)



AP SCERT

అందువలన, O అనేది రెండు కర్ణాల మధ్య బిందువు.

? $\Delta AOE \cong \Delta SOY$ అని రాయడం తప్పా? ఎందువలన?

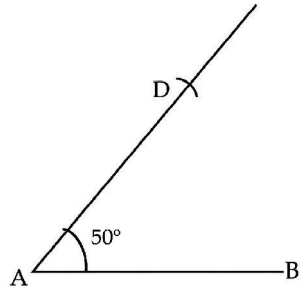
ధర్మం 4 : సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

? సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒక నిర్దిష్ట కోణంలో ఖండించుకుంటాయా?

4.4 సమాన పొడవు గల భుజాలతో చతుర్భుజాలు

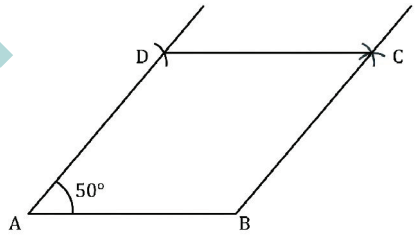
? సమాన భుజాల పొడవు కలిగిన చతుర్భుజాలు చతురస్రాలు మాత్రమేనా? నిర్మాణం ద్వారా ఈ ప్రశ్నను అన్వేషిద్దాం

ఒకదానికొకటి లంబంగా లేని రెండు సమాన భుజాలు AD మరియు AB లను గీయండి.



? ఈ చతుర్భుజం యొక్క అన్ని భుజాలు ఒకే పొడవును ఉండేలా మనం దానిని పూర్తి చేయగలమా?

B మరియు D ల దూరం నుండి AB (లేదా AD) కు సమానమైన బిందువు C ని గుర్తించండి. దీనికోసం వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి AB ని కొలవండి ఈ పొడవును వ్యాసార్థంగా ఉంచుకొని B మరియు D ల నుండి చాపాలను గీచి ఖండించండి.



ఇప్పుడు మనకు సమానమైన భుజాల పొడవు మరియు ఒకదాని కోణాలలో ఒకటి 50^0 కలిగిన చతుర్భుజం ఉంది. 180^0 కంటే తక్కువ గల ఏ కోణాన్నైనా (50^0 స్థానంలో) మనం అటువంటి చతుర్భుజాన్ని నిర్మించవచ్చని గమనించండి.

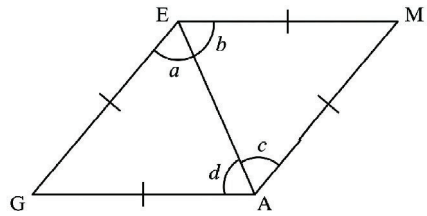
అన్ని భుజాలు ఒకే పొడవు కలిగిన చతుర్భుజాన్ని రాంబస్ లేదా సమ చతుర్భుజం అంటారు.

? మనం నిర్మించిన రాంబస్ ABCD యొక్క ఇతర కోణాలు ఏమిటి? దీనిని గుర్తించడానికి కారణం మరియు / లేదా ప్రయోగం చేయండి.

ఊహ - 9 : రాంబస్‌లోని కోణాల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?

GAME అనే రాంబస్‌ని గమనించండి.

ΔGAE లో, GE = GA, కావున, a = d. అదేవిధంగా, ΔMAE లో, ME = MA కావున, b = c.

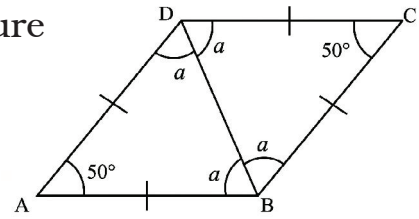


? $\Delta GAE \cong \Delta MAE$ అని మనం చూడవచ్చు. (ఎలా ?)

AP SCERT

So, a = b, c = d and G = M (since they are corresponding parts of congruent triangles). Thus, we have, a = b = c = d.

These facts hold for any rhombus. Let us apply them to the rhombus ABCD that we constructed earlier. Let the four equal angles formed by the diagonal be a, as shown in the figure

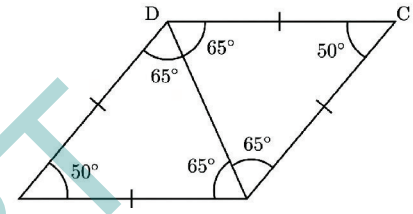


In ΔADB, we have

a + a + 50 = 180°.

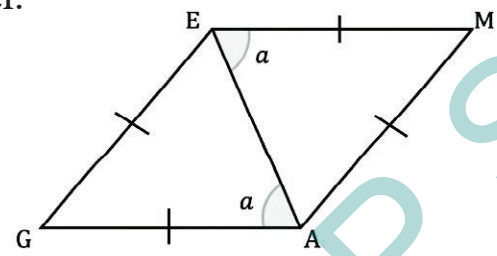
So, a = 65°.

Thus, the angles of the rhombus ABCD are 50°, 130°, 50°, and 130°.

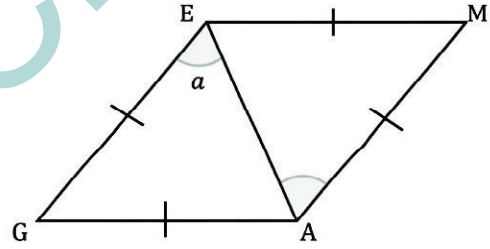


So, in a rhombus opposite angles are equal to each other.

Interestingly, there is one more way by which we could have figured out the other angles of the rhombus ABCD. We have shown that in a general rhombus GAME, the four angles formed by a diagonal are equal to each other.

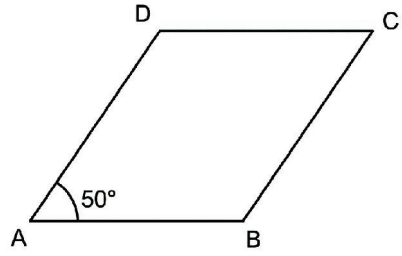


Consider the lines EM and GA and its transversal AE. Since the alternate angles are equal, EM||GA.



Similarly consider the lines GE and AM and its transversal AE. Since the alternate angles are equal, GE||AM.

As opposite sides are parallel, GAME is also a parallelogram. Thus, every rhombus is a parallelogram, and the properties of a parallelogram hold true for a rhombus as well. Thus, the adjacent angles of a rhombus add up to 180°, and the opposite angles are equal (verify that the arguments in Deduction 6 can be applied to a rhombus as well!).

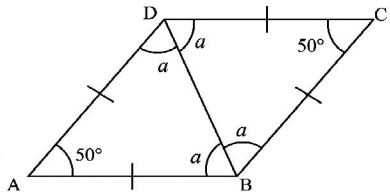


Thus, in rhombus ABCD,

AP SCERT

కావున, $a = b$, $c = d$ మరియు $G = M$ (ఎందుకంటే, అవి సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు).అందువలన, మనకు, $a = b = c = d$.

ఈ వాస్తవాలు ఏ రాంబస్ కు అయిన వర్తిస్తాయి. మనం ముందుగా నిర్మించిన రాంబస్ ABCD కి వీటిని వర్తింప చేద్దాం. చిత్రంలో చూపిన విధంగా కర్ణము ద్వారా ఏర్పడిన నాలుగు సమాన కోణాలను 'a' గా భావించండి.



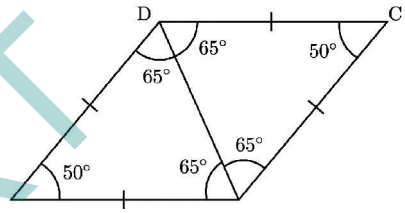
ΔADB లో,

మనకు $a + a + 50 = 180°$.

కావున, $a = 65°$.

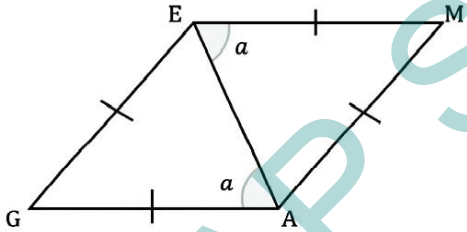
అందువలన, ABCD రాంబస్ యొక్క కోణాలు

$50°, 130°, 50°$, మరియు $130°$.

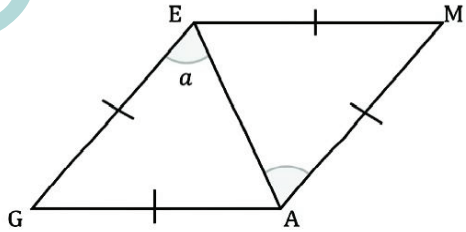


కాబట్టి, ఒక రాంబస్‌లో ఎదురెదురు కోణాలు ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయి.

ఆసక్తికరంగా, రాంబస్ ABCD యొక్క ఇతర కోణాలను మనం కనుగొనగలిగే మరో మార్గం ఉంది. సాధారణంగా రాంబస్ GAMEలో కర్ణం ద్వారా ఏర్పడిన నాలుగు కోణాలు ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయని మనకు చూపబడింది.

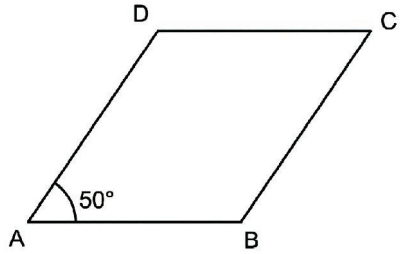


EM మరియు GA రేఖలను మరియు వాటికి తిర్యగ్రేఖగా ఉండే AE ని పరిగణించండి. ఏకాంతర కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. కాబట్టి, $EM \parallel GA$.



అదే విధంగా GE మరియు AM రేఖలను మరియు వాటికి తిర్యగ్రేఖగా ఉండే AE ని పరిగణించండి. ఏకాంతర కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. కాబట్టి, $GE \parallel AM$.

ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరం కావున GAME కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. అందువల్ల ప్రతి రాంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం మరియు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాలు రాంబస్‌కు కూడా వర్తిస్తాయి. అందువల్ల రాంబస్ యొక్క ఆసన్న ఉన్న కోణాల మొత్తం 180^0 ఉంటుంది మరియు ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి ఊహ – 6 లోని వాదనలు రాంబస్ కూడా వర్తించవచ్చని ధ్రువీకరించండి.



అందువలన, ABCD రాంబస్ లో,

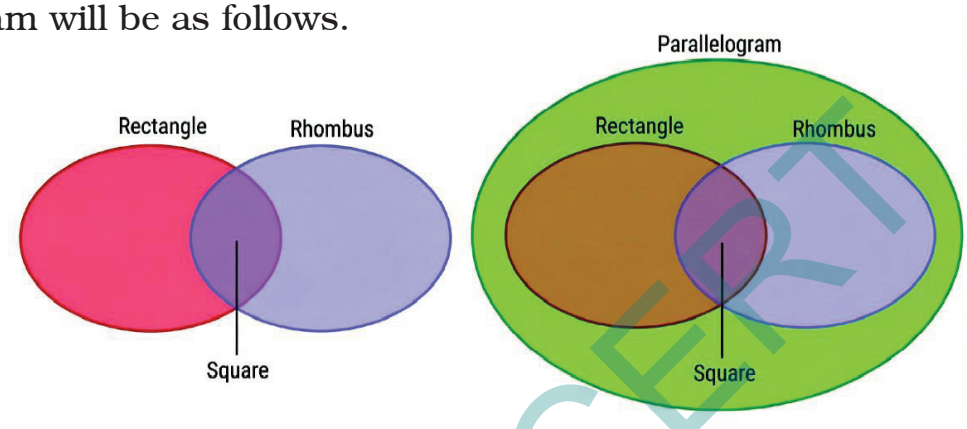
AP SCERT

$$\angle A = \angle C = 50^\circ, \text{ and}$$
$$\angle D = \angle B = 180 - 50 = 130^\circ.$$

? So a rhombus is a parallelogram, and a rectangle is also a parallelogram. How can this be represented using a Venn diagram?

? Where will the set of squares occur in this diagram?

We know that a square is a rectangle. Since the opposite sides of a square are parallel, a square is also a parallelogram. Further, since all the sides of a square have the same length, a square is also a rhombus. Thus, the Venn diagram will be as follows.



Let us list the properties of a rhombus.

Property 1: All the sides of a rhombus are equal to each other.

Property 2: The opposite sides of a rhombus are parallel to each other.

Property 3: In a rhombus, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

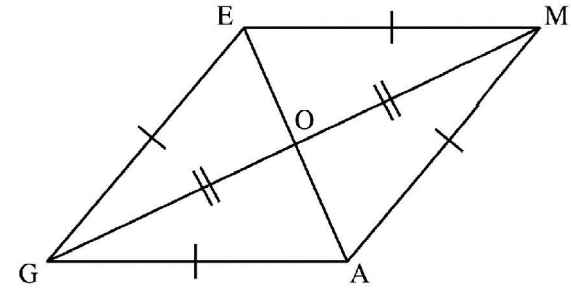
? Are the diagonals of a rhombus equal?

Property 4: The diagonals of a rhombus bisect each other.

Property 5: The diagonals of a rhombus bisect its angles.

? Do the diagonals of a rhombus intersect at any particular angle? Reason out and/or experiment to figure this out!

Deduction 10 - What can we say about the angles formed by the diagonals of a rhombus at their point of intersection?



? In the rhombus GAME, we have $\Delta GEO \cong \Delta MEO$ (why?).

So, $\angle GOE = \angle MOE$, as they are corresponding parts of congruent triangles.

AP SCERT

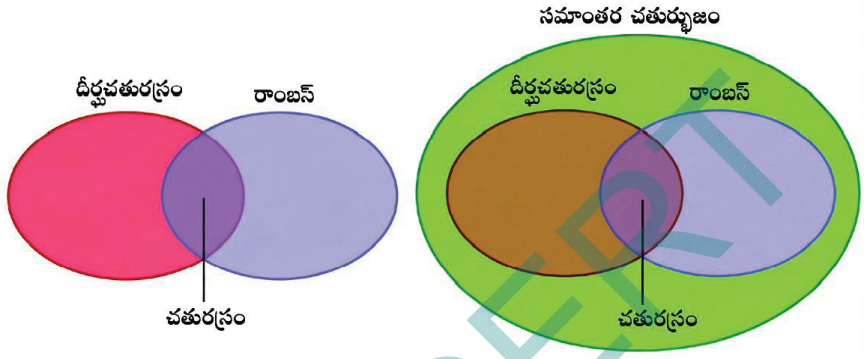
$$\angle A = \angle C = 50^\circ, \text{ మరియు}$$

$$\angle D = \angle B = 180 - 50 = 130^\circ.$$

? కాబట్టి రాంబస్ అనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం మరియు దీర్ఘ చతురస్రం కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజ అవుతుంటే వెన్ రేఖా చిత్రం ఉపయోగించి దీనిని ఎలా సూచించవచ్చు?

? ఈ రేఖా చిత్రంలో చతురస్రాల సమితి ఎక్కడ ఏర్పడుతుంది?

చతురస్రం అనేది ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అని మనకు తెలుసు. చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి, చతురస్రం కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజమే ఇంకా చతురస్రం యొక్క అన్ని భుజాలు ఒకే పొడవు కలిగి ఉంటాయి కాబట్టి చతురస్రం కూడా రాంబస్ అవుతుంది. అందువలన వెన్ రేఖా చిత్రం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.



రాంబస్ యొక్క ధర్మాలను జాబితా చూద్దాం.

ధర్మం 1: రాంబస్ యొక్క అన్ని భుజాలు ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయి.

ధర్మం 2: రాంబస్ యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

ధర్మం 3: ఒక రాంబస్‌లో ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అవుతుంది మరియు ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి

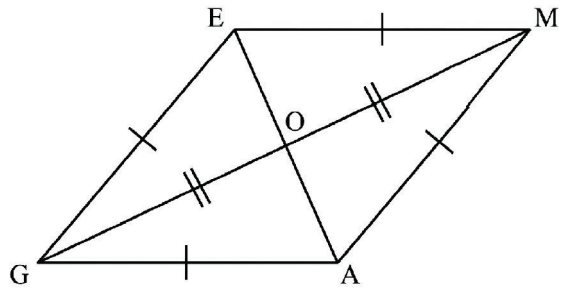
? రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు సమానంగా ఉన్నాయా?

ధర్మం 4: రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండన చేసుకుంటాయి.

ధర్మం 5: రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు దాని కోణాలను సమద్వి ఖండన చేస్తాయి.

? రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు ఏదైనా నిర్దిష్ట కోణంలో ఖండించుకుంటాయా? దీనిని గుర్తించడానికి కారణం చెప్పండి. మరియు / లేదా ప్రయోగం చేయండి!

ఊహ – 10: రాంబస్ యొక్క కర్ణాల ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాల గురించి మనం ఏమి చెప్పగలం?



? GAME రాంబస్ లో, మనకు

$\Delta GEO \cong \Delta MEO$ (ఎలా?).

కాబట్టి, $\angle GOE = \angle MOE$, ఎందుకంటే అవి సర్వసమాన

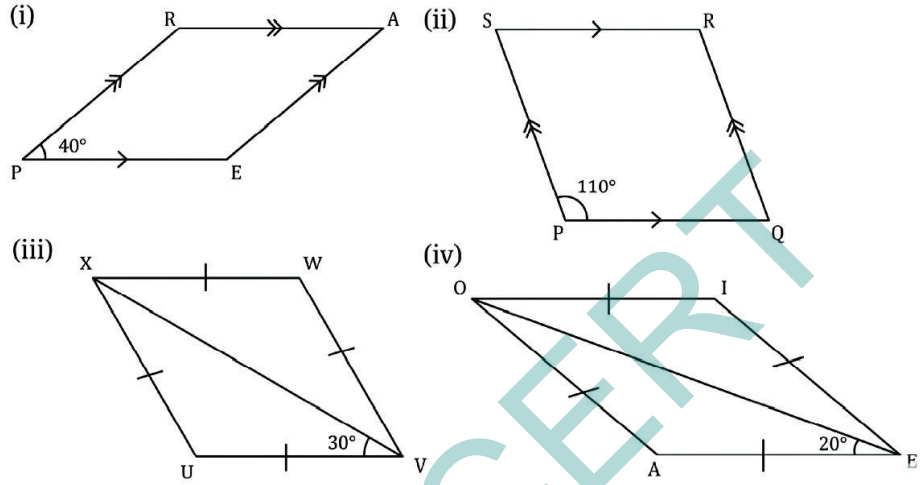
APSCERT

As they add up to 180°, they should be 90° each.

Property 6: Diagonals of a rhombus intersect each other at an angle of 90°.

Figure it Out - 4.2

1. Find the remaining angles in the following quadrilaterals.



2. Using the diagonal properties, construct a parallelogram whose diagonals are of lengths 7 cm and 5 cm, and intersect at an angle of 140°.
3. Using the diagonal properties, construct a rhombus whose diagonals are of lengths 4 cm and 5 cm.

4.5. Playing with Quadrilaterals

Geoboard Activity

Take a geoboard and some rubber bands. If you do not have these, you could just use the dot grid papers for this activity.

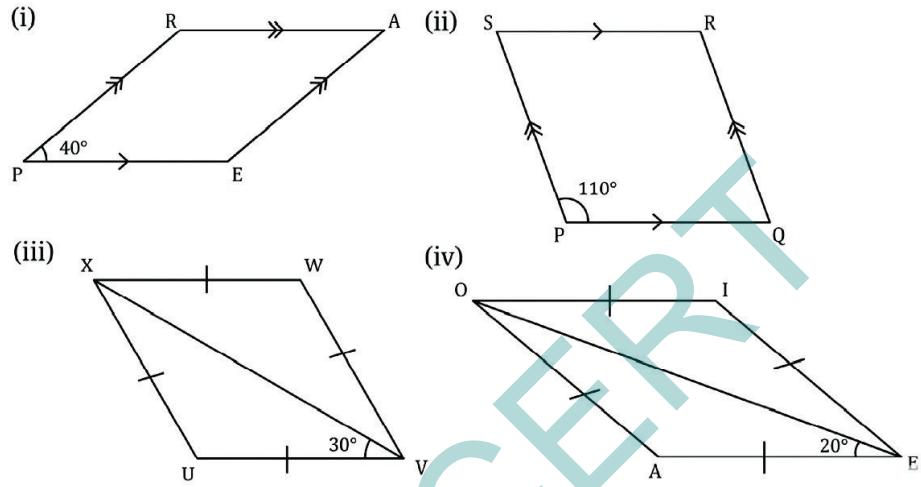
AP SCERT

త్రిభుజాల యొక్క అనురూప భాగాలు అవి కలిపినప్పుడు 180° మరియు అవి ఒక్కొక్కటి 90° ఉండాలి.

ధర్మం 6 : రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి 90° కోణం వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

ఆలోచించండి-చేయండి - 4.2

1. క్రింది చతుర్భుజాలలో మిగిలిన కోణాలను కనుగొనండి.



2. కర్ణాల యొక్క ధర్మాలను ఉపయోగించి 7 సెం.మీ మరియు 5 సెం.మీ పొడవు గల కర్ణాలు మరియు అవి 140° కోణంలో ఖండించుకునేట్లు సమాంతర చతుర్భుజాన్ని నిర్మించండి.
3. కర్ణాల యొక్క ధర్మాలను ఉపయోగించి 4 సెం.మీ మరియు 5 సెం.మీ పొడవు గల కర్ణాలు కలిగిన రాంబస్‌ను నిర్మించండి.

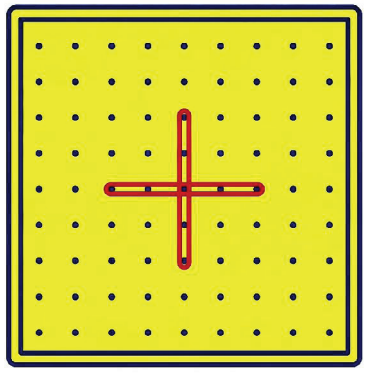
4.5 చతుర్భుజాలతో ఆడుకుందాం

జియో బోర్డ్ కృత్యము

ఒక జియో బోర్డు మరియు కొన్ని రబ్బరు బ్యాండ్లు తీసుకోండి. మీ దగ్గర ఇవి లేకపోతే డాట్ గ్రిడ్ పేపర్లను ఈ కృత్యం కోసం ఉపయోగించవచ్చు.

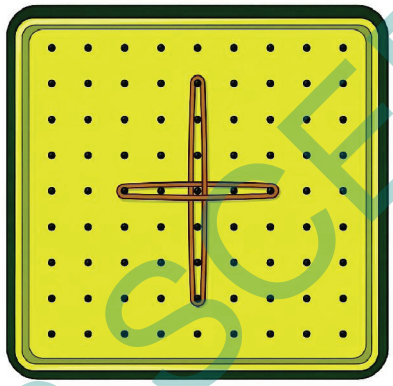
AP SCERT

Place two rubber bands perpendicular to each other, forming diagonals of equal length. Join the ends.



? What is the quadrilateral that you get? Justify your answer.

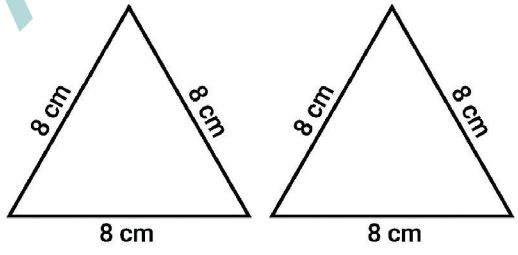
Extend one of the diagonals on both sides by 2 cm.



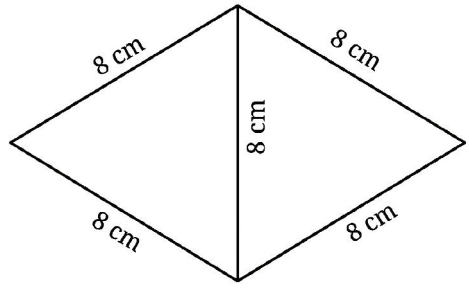
? What quadrilateral will you get now? Justify your answer.

Joining Triangles

1. Take two cardboard cutouts of an equilateral triangle of sidelength 8 cm.

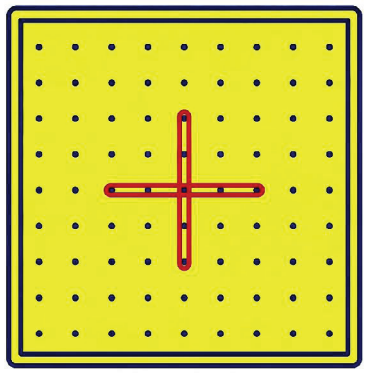


? Can you join them to get a quadrilateral?



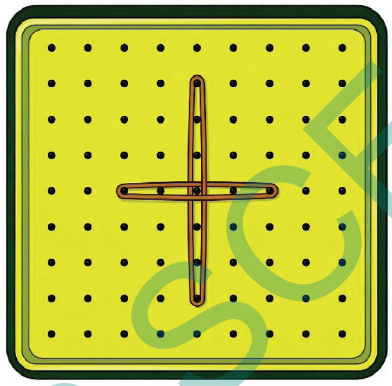
AP SCERT

రెండు రబ్బరు బ్యాండ్లను ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంచి, సమాన పొడవు గల కర్ణాలను ఏర్పరచుకోండి. చివరలను కలపండి.



? మీకు లభించిన ఈ చతుర్భుజం ఏమిటి? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

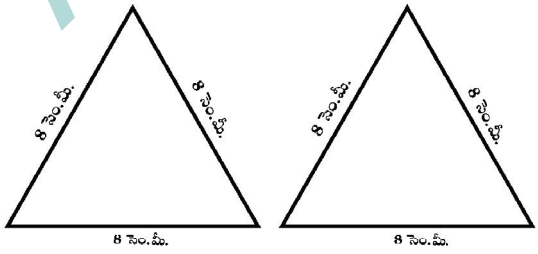
రెండు వైపులా ఉన్న కర్ణాలతో ఒక దానిని 2 సెం. మీ పొడిగించండి.



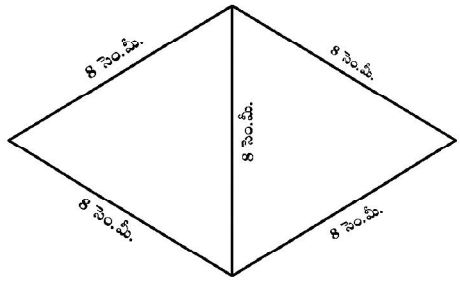
? ఇప్పుడు మీకు ఏ చతుర్భుజం లభిస్తుంది? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

త్రిభుజాలను కలపడం

1. 8 సెం. మీ పొడవు ఉన్న సమబాహు త్రిభుజం గల రెండు కార్డ్ బోర్డు ముక్కలను తీసుకోండి.



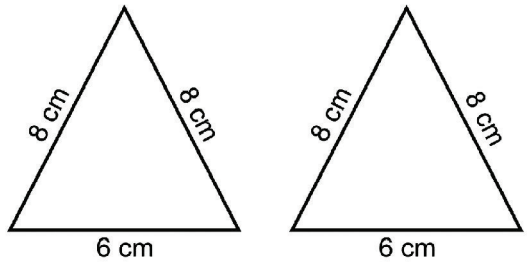
? చతుర్భుజం పొందడానికి మీరు వాటిని కలపగలరా?



AP SCERT

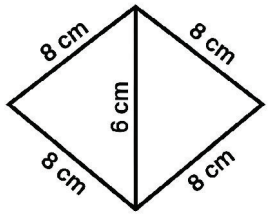
? What type of a quadrilateral is this? Justify your answer.

2. Take two cardboard cutouts of an isosceles triangle with sidelengths 8 cm, 8 cm, and 6 cm.

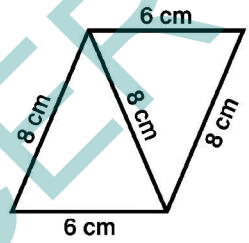


? What are the different ways they can be joined to get a quadrilateral?

Joining them in this way you get

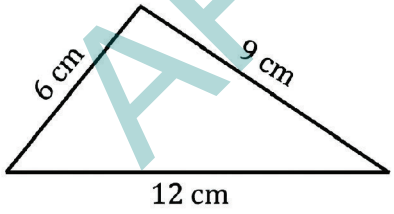


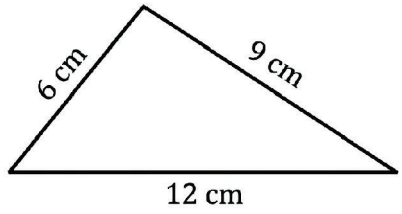
Joining them in this way you get



? What quadrilaterals are these? Justify your answers.

3. Take two cardboard cutouts of a scalene triangle with sides 6 cm, 9 cm, and 12 cm.





? What are the different ways they can be joined to get a quadrilateral?

? Are you able to identify the different quadrilaterals that are obtained by joining the triangles? Justify your answer whenever you identify a quadrilateral.

4.6. Kite and Trapezium

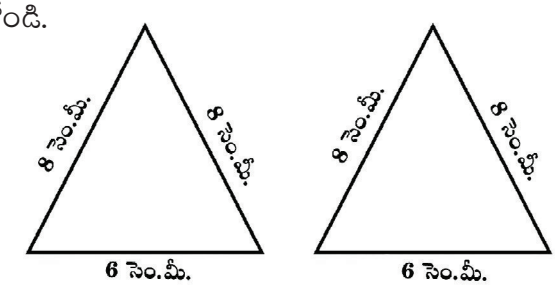
Kite

One of the ways the two triangles of sides 6 cm, 9 cm and 12 cm can be joined together is as follows -

AP SCERT

? ఇది ఏ రకమైన చతుర్భుజం? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

2. 8 సెం.మీ, 8 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ పొడవు ఉన్న సమద్విబాహు త్రిభుజం గల రెండు కార్డు బోర్డు ముక్కలను తీసుకోండి.



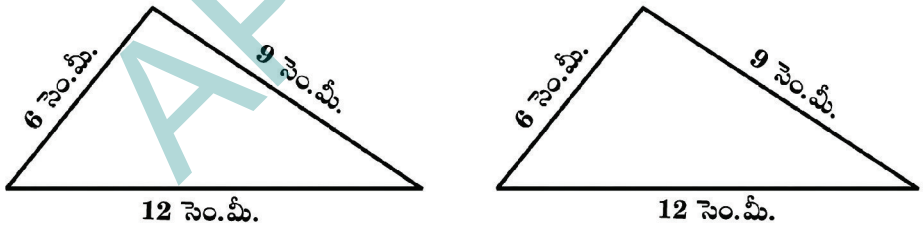
? చతుర్భుజం పొందడానికి వాటిని ఏ వివిధ మార్గాల్లో కలపవచ్చు?

ఈ విధంగా వాటిని కలపడం వల్ల మీరు చతుర్భుజంను పొందుతారు.

ఈ విధంగా వాటిని కలపడం వల్ల మీరు చతుర్భుజంను పొందుతారు.

? ఇవి ఏ చతుర్భుజాలు? మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

3. 6 సెం.మీ, 9 సెం.మీ, మరియు 12 సెం.మీ. భుజాలు కలిగిన విషమ బాహు త్రిభుజం గల రెండు కార్డు బోర్డు ముక్కలను తీసుకోండి.



? చతుర్భుజం ఏర్పడటానికి వాటిని ఎన్ని విధాలుగా కలపవచ్చు?

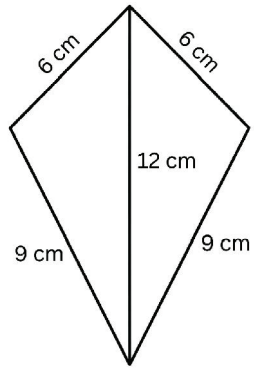
? త్రిభుజాలను కలపడం ద్వారా లభించే వివిధ చతుర్భుజాలను మీరు గుర్తించగలరా? మీరు చతుర్భుజాన్ని గుర్తించినప్పుడల్లా మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

4.6 గాలి పటము మరియు ట్రెపీజియం

గాలి పటము

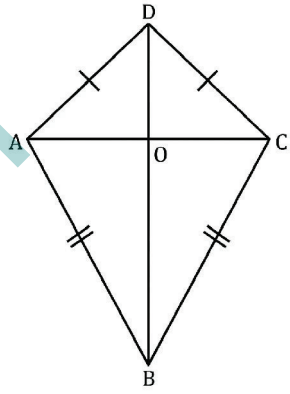
6 సెం.మీ, 9 సెం. మీ, మరియు 12 సెం. మీ. భుజాలు కలిగిన రెండు త్రిభుజాలను కలిపే మార్గాలలో ఒకటి ఈ క్రింది విధంగా ఉంది –

AP SCERT



This quadrilateral looks like a kite. Observe that the adjacent sides are of the same length.

Kite: A kite is a quadrilateral that can be labelled ABCD such that AB = BC, and CD = DA.



? **Property 1:** In the kite, show that the diagonal BD

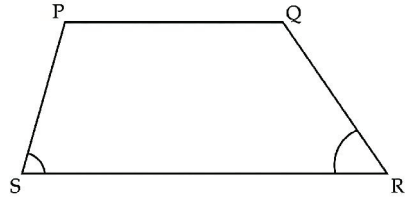
(i) bisects $\angle ABC$ and $\angle ADC$,

(ii) bisects the diagonal AC, that is, AO = OC, and is perpendicular to it.

Hint: Is $\Delta AOB \cong \Delta COB$?

Trapezium

Parallelograms are quadrilaterals that have parallel opposite sides. We get a new type of quadrilateral if we relax this condition. **Trapezium:** A trapezium is a quadrilateral with at least one pair of parallel opposite sides.



? Construct a trapezium. Measure the base angles (marked in the figure).

? Can you find the remaining angles without measuring them?

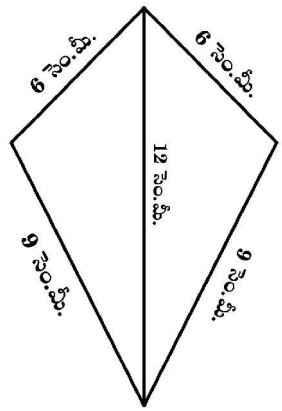
Since PQ || SR, we have

Property 1: $\angle S + \angle P = 180°$ and $\angle R + \angle Q = 180°$.

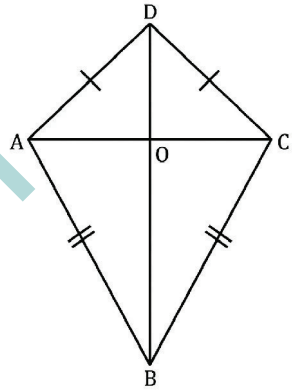
Using these facts, the remaining angles can easily be found. Verify your answer after finding them.

When the non-parallel sides of a trapezium have the same lengths, the trapezium is called an **isosceles trapezium**.

AP SCERT



ఈ చతుర్భుజము గాలిపటంలా కనిపిస్తుంది. ఆసన్న భుజాలు ఒకే పొడవును కలిగి ఉన్నాయని గమనించండి.



గాలిపటం : గాలిపటం అనేది ఒక చతుర్భుజం. ABCD గాలిపటంలో AB = BC మరియు CD = DA.

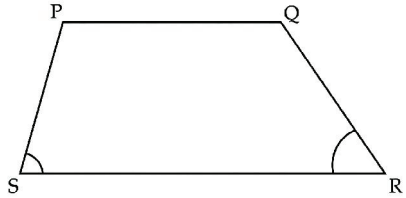
ధర్మం 1: ABCD గాలిపటం లో కర్ణం BD

(i) $\angle ABC$ మరియు $\angle ADC$ లను సమద్వి ఖండన చేయును.

(ii) AC కర్ణంను సమద్వి ఖండన చేయును. అనగా, AO = OC, మరియు దానికి లంబంగా ఉండును.

సూచన : $\Delta AOB \cong \Delta COB$ అవుతుందా?

ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం)



సమాంతర చతుర్భుజాలు అంటే ఎదురెదురు భుజాలుగాగల సమాంతరం కలిగిన చతుర్భుజాలు. ఈ పరిస్థితిని మనం సడలిస్తే మనకు కొత్తరకమైన చతుర్భుజం లభిస్తుంది.

ట్రెపీజియం అనేది కనీసం ఒక జత ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్న కలిగిన చతుర్భుజం.

ఒక ట్రెపీజియంను నిర్మించండి. ఆధార కోణాలను కొలవండి. (చిత్రంలో గుర్తించబడినది.)

మిగిలిన కోణాలను కొలవకుండానే మీరు కనుగొనగలరా?

PQ || SR నుండి, మనకు

ధర్మం 1 : $\angle S + \angle P = 180^\circ$ మరియు $\angle R + \angle Q = 180^\circ$.

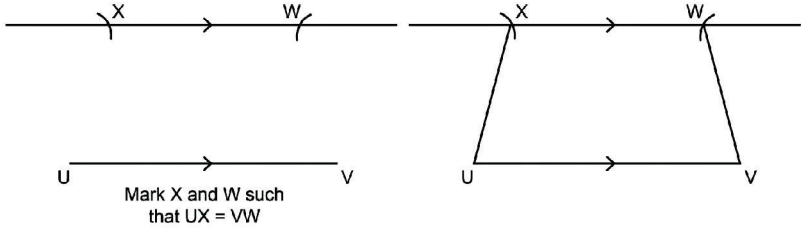
ఈ వాస్తవాలను ఉపయోగించి మిగిలిన కోణాలను సులభంగా కనుగొనవచ్చును. వాటిని కనుగొన్న తర్వాత మీ సమాధానాన్ని ధృవీకరించండి.

ఒక ట్రెపీజియంలో సమాంతరంగా లేని భుజాలు ఒకే పొడవు కలిగి ఉన్నప్పుడు ఆ ట్రెపీజియంను సమద్విబాహు ట్రెపీజియం (సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజం) అని అంటారు.

AP SCERT

? How do we construct an isosceles trapezium?

? Construct an isosceles trapezium UVWX, with UV||XW. Measure $\angle U$.



Can you find the remaining angles without measuring them?

Does it appear that the angles opposite to the equal sides - $\angle U$ and $\angle V$ - are also equal? Can we find congruent triangles here? Consider line segments XY and WZ perpendicular to UV.

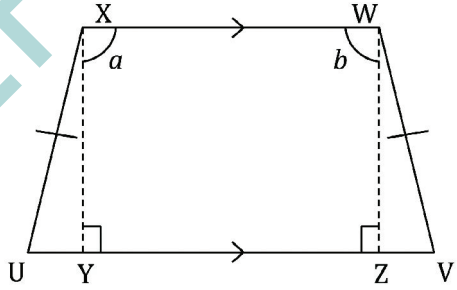
? What type of quadrilateral is XWZY?

Since XW||UV,

a = 180° - $\angle XYZ$ = 90°, and

b = 180° - $\angle WZY$ = 90° (since the internal angles on the same side of a transversal add up to 180°)

Hence, XWZY is a rectangle.



? Now, it can be shown that $\Delta UXY \cong \Delta VWZ$. (How?)

Thus, $\angle U = \angle V$.

Using this fact, the remaining angles of the isosceles trapezium can be determined. Verify the angles by measurement.

Property 2: In an isosceles trapezium, the angles opposite to the equal sides are equal.

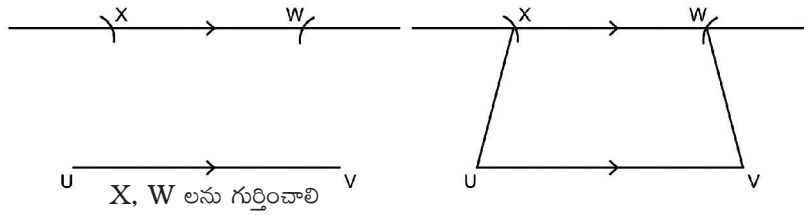
Figure it Out - 4.3

1. Find all the sides and the angles of the quadrilateral obtained by joining two equilateral triangles with sides 4 cm.
2. Construct a kite whose diagonals are of lengths 6 cm and 8 cm.

AP SCERT

? సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజంను ఎలా నిర్మిస్తాము?

? UVWX అగునట్లు UV||XW అనే సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజాన్ని నిర్మించి, $\angle U$ ని కొలవండి.



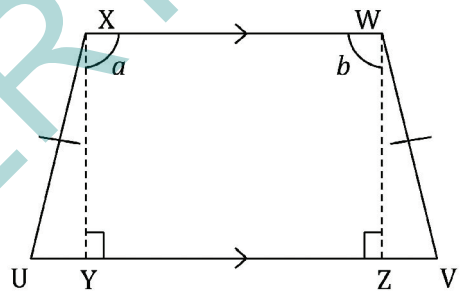
X, W లను గుర్తించాలి

UX = VW

మిగిలిన కోణాలను కొలవకుండానే మీరు కనుగొనగలరా?

సమాన భుజాలకు ఎదురెదురు కోణాలు $\angle U$ మరియు $\angle V$ కూడా సమానంగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తున్నాయా ? ఇక్కడ మనం సర్వసమాన త్రిభుజాలను కనుగొనగలమా?

XY కి లంబంగా ఉన్న WZ మరియు UV రేఖా ఖండాలను పరిశీలించండి.



? XWZY అనునది ఎలాంటి చతుర్భుజము?

XW||UV కావున,

$a = 180^\circ - \angle XYZ = 90^\circ$, మరియు

$b = 180^\circ - \angle WZY = 90^\circ$ (ఒక తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపు అంతర కోణాల మొత్తం 180^0 ఉంటుంది కావున)

అందువలన , XWZY ఒక దీర్ఘ చతురస్రం.

? ఇప్పుడు, మనం $\Delta UXY \cong \Delta VWZ$ అని చూపవచ్చు. (ఎలా?) అందువలన, $\angle U = \angle V$.

ఈ వాస్తవాన్ని ఉపయోగించి సమద్విబాహు ట్రెపీజియం యొక్క మిగిలిన కోణాలను నిర్ణయించవచ్చు. కొలత ద్వారా కోణాలను ధృవీకరించండి.

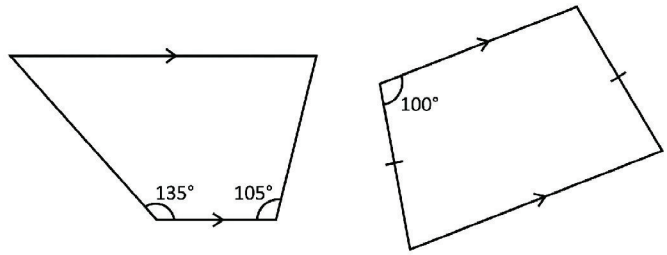
ధర్మం 2 : సమద్విబాహు ట్రెపీజియంలో సమాన భుజాలకు ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

ఆలోచించండి-చేయండి - 4.3

1. 4 సెం.మీ భుజాలు కలిగిన రెండు సమబాహు త్రిభుజాలను కలపడం ద్వారా ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క అన్ని భుజాలు మరియు కోణాలను కనుగొనండి.
2. 6 సెం.మీ మరియు 8 సెం.మీ పొడవు గల కర్ణాలు కలిగిన గాలిపటాన్ని నిర్మించండి.

AP SCERT

3. Find the remaining angles in the following trapeziums -



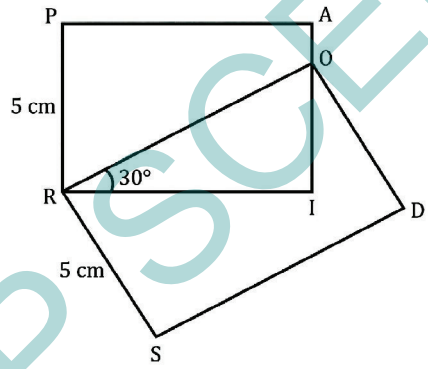
4. Draw a Venn diagram showing the set of parallelograms, kites, rhombuses, rectangles, and squares. Then, answer the following questions -

   (i) What is the quadrilateral that is both a kite and a parallelogram?

   (ii) Can there be a quadrilateral that is both a kite and a rectangle?

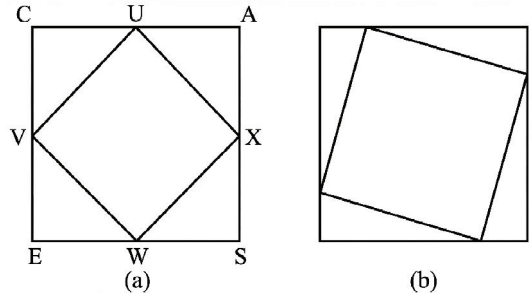
   (iii) Is every kite a rhombus? If not, what is the correct relationship between these two types of quadrilaterals?

5. If PAIR and RODS are two rectangles, find $\angle$IOD.



6. Construct a square with diagonal 6 cm without using a protractor.

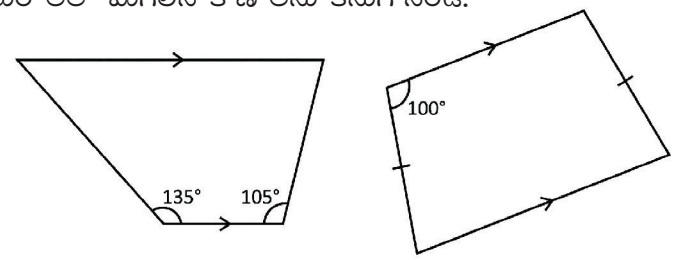
7. CASE is a square. The points U, V, W and X are the midpoints of the sides of the square. What type of quadrilateral is UVWX? Find this by using geometric reasoning, as well as by construction and measurement. Find other ways of constructing a square within a square such that the vertices of the inner square lie on the sides of the outer square, as shown in Figure (b).



(a) (b)

APSCERT

3. క్రింది ట్రెపీజియం లలో మిగిలిన కోణాలను కనుగొనండి.



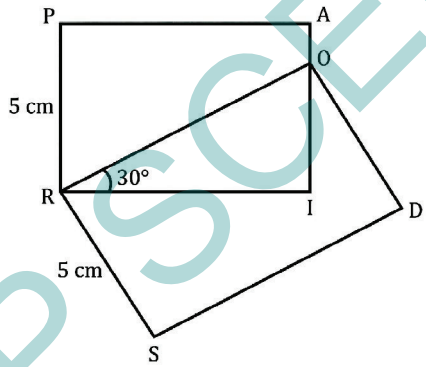
4. సమాంతర చతుర్భుజాలు, గాలిపటాలు, రాంబస్ లు, దీర్ఘ చతురస్రాలు మరియు చతురస్రాల సమితిని చూపించే వెన్ రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి. తర్వాత ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి.

(i) గాలిపటం మరియు సమాంతర చతుర్భుజం రెండింటినీ కలిగి ఉండే చతుర్భుజం ఏమిటి?

(ii) గాలిపటం మరియు దీర్ఘచతురస్రం రెండింటిని కలిగి ఉంటే చతుర్భుజం ఉంటుందా?

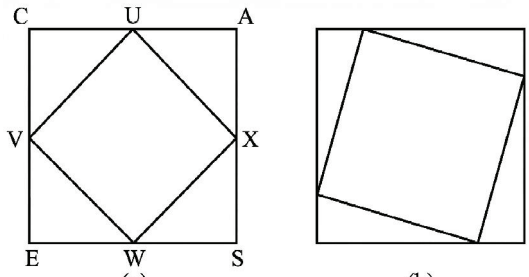
(iii) ప్రతి గాలిపటం ఒక రాంబస్ అవునా? లేకపోతే ఈ రెండు రకాల చతుర్భుజాల మధ్య సరైన సంబంధం ఏమిటి?

5. PAIR మరియు RODS లు రెండు దీర్ఘ చతురస్రాలు అయితే, $\angle IOD$ ని కనుగొనుము.



6. కోణమానిని ఉపయోగించకుండా 6 సెం.మీ పొడవు గల కర్ణంతో ఒక చతురస్రాన్ని నిర్మించండి.

7. CASE అనేది ఒక చతురస్రం. U, V, W మరియు X బిందువులు చతురస్రం యొక్క భుజాల మధ్య బిందువులు. UVWX ఏ రకమైన చతుర్భుజం? చతురస్రం రేఖాగణిత పరిశీలన ఉపయోగించి అలాగే నిర్మాణం మరియు కొలతల ద్వారా దీనిని కనుగొనండి. పటం (b) లో చూపిన విధంగా లోపలి చతురస్రం యొక్క శీర్షాలు బయట చతురస్రం భుజాలపై ఉండేలా చతురస్రం లోపల చతురస్రాన్ని నిర్మించడానికి ఇతర మార్గాలను కనుగొనండి.



(a) (b)

AP SCERT

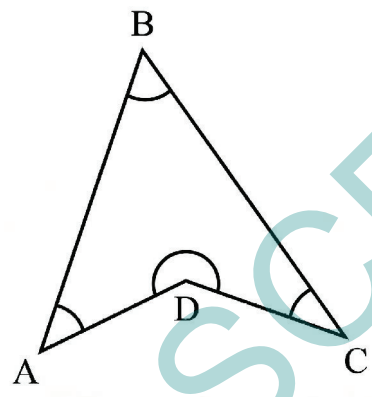
8. If a quadrilateral has four equal sides and one angle of 90°, will it be a square? Find the answer using geometric reasoning as well as by construction and measurement.

9. What type of a quadrilateral is one in which the opposite sides are equal? Justify your answer.

   Hint: Draw a diagonal and check for congruent triangles.

10. Will the sum of the angles in a quadrilateral such as the following one also be 360°? Find the answer using geometric reasoning as well as by constructing this figure and measuring.

Try This



11. State whether the following statements are true or false. Justify your answers.

(i) A quadrilateral whose diagonals are equal and bisect each other must be a square.

(ii) A quadrilateral having three right angles must be a rectangle.

(iii) A quadrilateral whose diagonals bisect each other must be a parallelogram.

(iv) A quadrilateral whose diagonals are perpendicular to each other must be a rhombus.

(v) A quadrilateral in which the opposite angles are equal must be a parallelogram.

(vi) A quadrilateral in which all the angles are equal is a rectangle.

(vii) Isosceles trapeziums are parallelograms.

AP SCERT

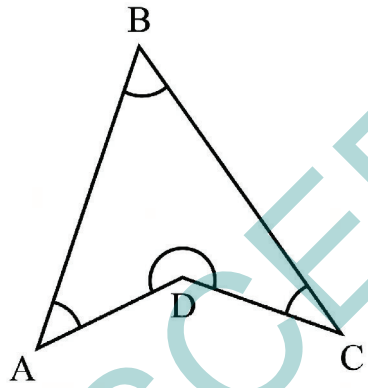
8. ఒక చతుర్భుజానికి నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు 90 డిగ్రీల కోణం ఉంటే అది చతురస్రం అవుతుందా? రేఖాగణిత తార్కికం ఉపయోగించి అలాగే నిర్మాణం మరియు కొలత ద్వారా సమాధానాన్ని కనుగొనండి.

9. ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉండే చతుర్భుజం ఏ రకమైనది? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

సూచన: ఒక కర్ణాన్ని గీసి సర్వసమాన త్రిభుజాల కోసం తనిఖీ చేయండి.

ప్రయత్నించండి

10. క్రింది చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం కూడా 360° అవుతుందా? రేఖాగణిత తార్కికతను ఉపయోగించి అలాగే పటము నిర్మించి కొలవడం ద్వారా సమాధానాన్ని కనుగొనండి.



11. క్రింది ప్రకటనలు సత్యమో? కాదో? మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

(i) కర్ణాలు సమానంగా ఉండి, అవి ఒకదానికొకటి సమద్విఖండించుకునే చతుర్భుజం ఒక చతురస్రం అయి ఉండాలి.

(ii) మూడు లంబకోణాలు కలిగిన చతుర్భుజం తప్పనిసరిగా దీర్ఘ చతురస్రం అయి ఉండాలి.

(iii) కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండించుకునే చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజం అయి ఉండాలి.

(iv) కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్న చతుర్భుజం తప్పనిసరిగా రాంబస్ అయి ఉండాలి.

(v) ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉండే చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజం అయి ఉండాలి.

(vi) అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉండే చతుర్భుజాన్ని దీర్ఘ చతురస్రం అంటారు.

(vii) సమద్విబాహు ట్రెపీజియం లు సమాంతర చతుర్భుజాలు అవుతాయి.

AP SCERT

SUMMARY

- A rectangle is a quadrilateral in which the angles are all 90°.

  Properties of a rectangle -

  • Opposite sides of a rectangle are equal.

  • Opposite sides of a rectangle are parallel to each other.

  • Diagonals of a rectangle are of equal length and they bisect each other.

- A square is a quadrilateral in which all the angles are 90°, and all the sides are of equal length.

  Properties of a square -

  • The opposite sides of a square are parallel to each other.

  • The diagonals of a square are of equal lengths and they bisect each other at 90°.

  • The diagonals of a square bisect the angles of the square.

- **A parallelogram** is a quadrilateral in which opposite sides are parallel.

  Properties of a parallelogram -

  • The opposite sides of a parallelogram are equal.

  • In a parallelogram, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

  • The diagonals of a parallelogram bisect each other.

- A **rhombus** is a quadrilateral in which all the sides have the same length.

  Properties of a rhombus -

  • The opposite sides of a rhombus are parallel to each other.

  • In a rhombus, the adjacent angles add up to 180°, and the opposite angles are equal.

  • The diagonals of a rhombus bisect each other at right angles.

  • The diagonals of a rhombus bisect its angles.

AP SCERT

సారాంశం

- దీర్ఘ చతురస్రం అనేది ఒక చతుర్భుజం దీనిలో అన్ని కోణాలు 90^0 ఉంటాయి.

దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ధర్మాలు –

• ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి.

• ఒక దీర్ఘ చతురసం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

• ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమాన పొడవు కలిగి ఉంటాయి మరియు అవి ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయి.

- చతురస్రం అనేది ఒక చతుర్భుజం దీనిలో అన్నీ కోణాలు 90^0 మరియు అన్ని భుజాలపొడవులు సమాన పొడవు కలిగి ఉంటాయి.

చతురస్రం యొక్క ధర్మాలు –

- ఒక చతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.
- ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమాన పొడవులు కలిగి ఉంటాయి మరియు అవి 90^0 ల వద్ద ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయి.
- ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు ఆ చతురస్రం యొక్క కోణాలను సమద్విఖండిస్తాయి.
- సమాంతర చతుర్భుజం అనేది ఒక చతుర్భుజం దీనిలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాలు –

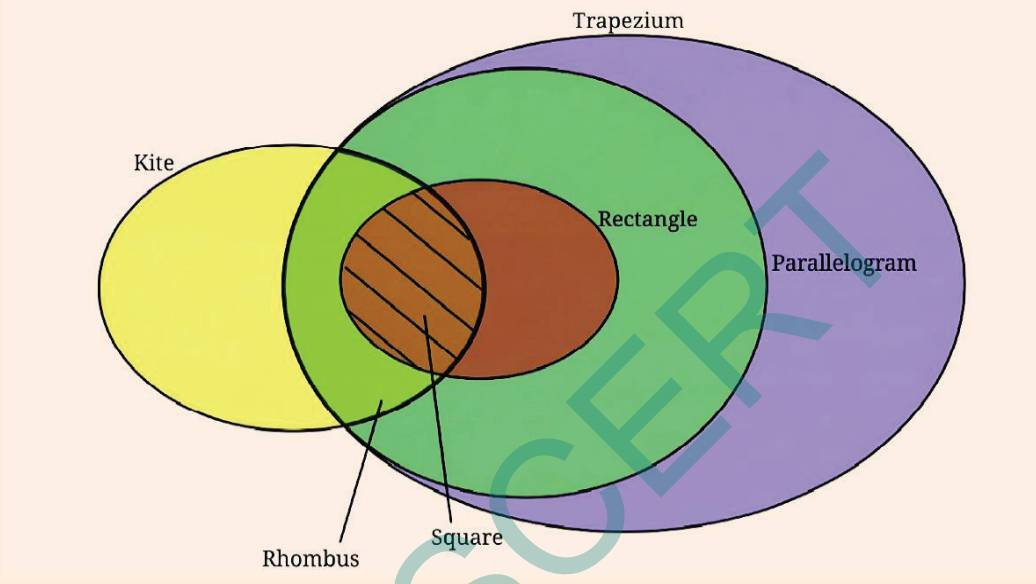
- సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి.
- ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అవుతుంది మరియు ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.
- సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్వి ఖండించుకుంటాయి.
- రాంబస్ అనేది ఒక చతుర్భుజం దీనిలో అన్ని భుజాలు ఒకే పొడవు కలిగి ఉంటాయి.

రాంబస్ యొక్క ధర్మాలు –

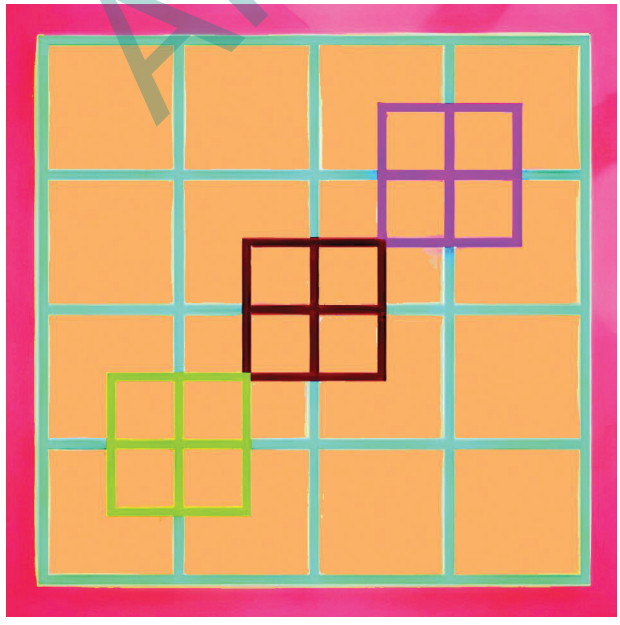
- రాంబస్ యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.
- ఒక రాంబస్ లో ఆసన్న ఉన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అవుతుంది మరియు ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.
- రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు లంబకోణంలో ఒకదానికొకటి సమద్విఖండించుకుంటాయి.
- ఒక రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు దాని కోణాలను సమద్వి ఖండన చేస్తాయి.

AP SCERT

- A **kite** is a quadrilateral with two non-overlapping adjacent pairs of sides having the same length.
- A **trapezium** is a quadrilateral having at least one pair of parallel opposite sides.
- The sum of the angle measures in a quadrilateral is 360°.

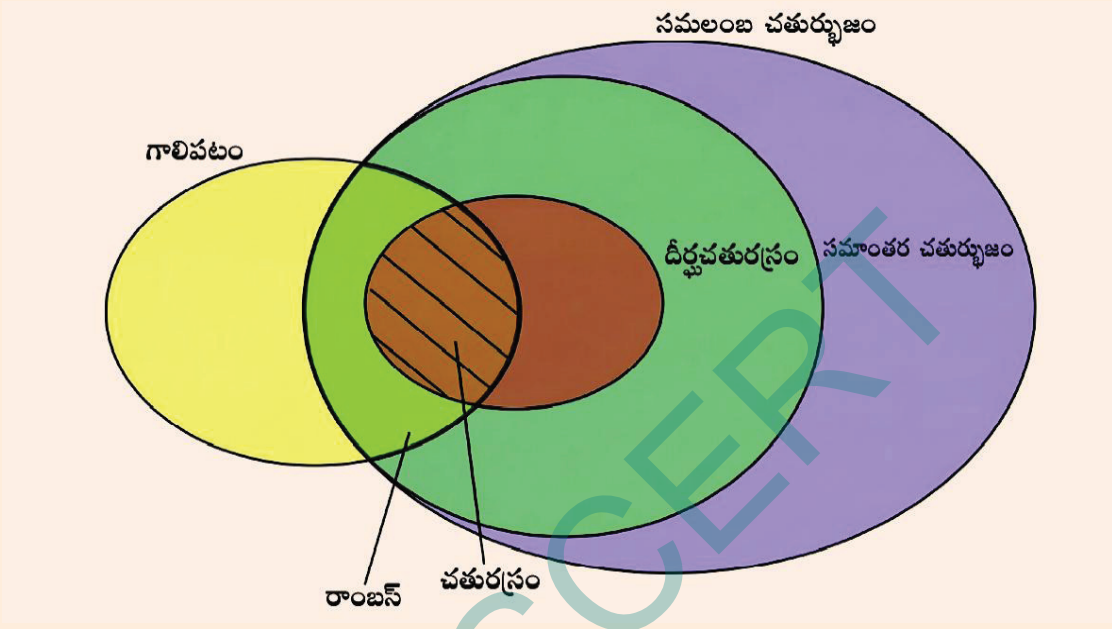


How many squares?

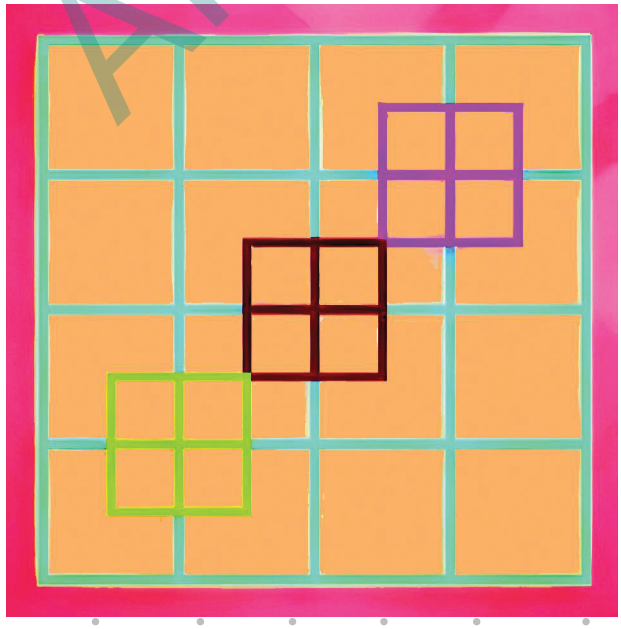


AP SCERT

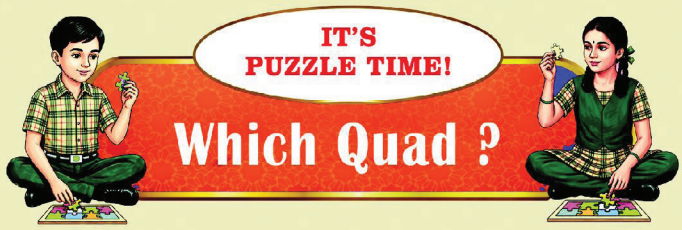
- గాలిపటం అనేది ఒకే పొడవు కలిగిన రెండు అధ్యారోపణం చెందని ఆసన్న భుజల జతలతో కూడిన చతుర్భుజం.
- ట్రెపిజియం అనేది కనీసం ఒక జత సమాంతర ఎదురెదురు భుజాలను కలిగే ఉండే చతుర్భుజం
- ఒక చతుర్భుజంలో కోణాల మొత్తం 360^0.



చతురస్రాలు ఎన్ని?

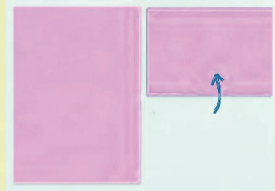


AP SCERT

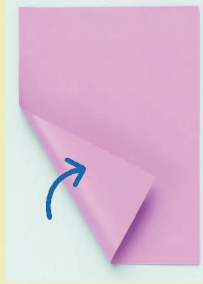


Gameplay

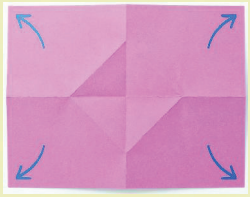
1. Fold a sheet into half.



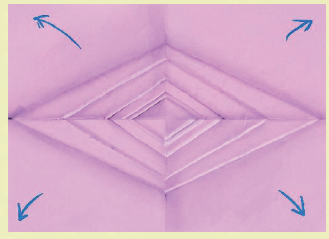
2. Now, fold it once more into a quarter.



3. Make a triangular crease at the corner that is at the middle of the paper.



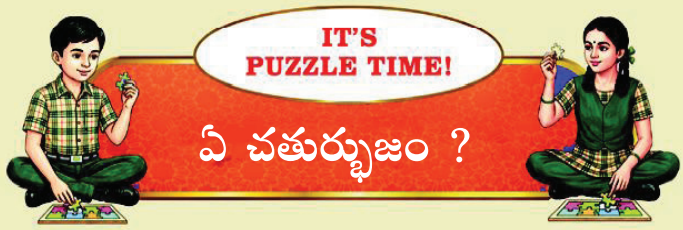
4. Open the sheet. What is the shape formed by the creases?



5. How would you fold the quarter paper to get the kinds of creases shown in the following image.

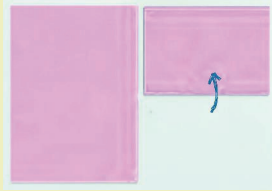
6. How would you fold the quarter paper such that a square is formed?

AP SCERT

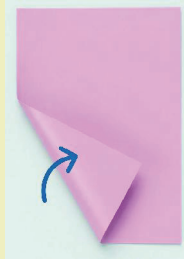


ఏ చతుర్భుజం ?

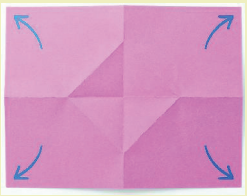
1. ఒక షీట్ ని సగానికి మడవండి.



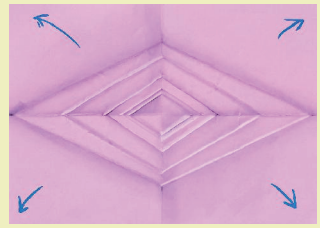
2. ఇప్పుడు దాన్ని మరోసారి నాల్గవ భాగంగా మడవండి.



3. కాగితం మధ్యలో ఉన్న మూలలో త్రిభుజాకార మడత పెట్టండి.



4. షీట్ తెరవండి, మడతల వల్ల ఏర్పడిన ఆకారం ఏమిటి?



5. క్రింది చిత్రంలో చూపిన మడతల రకాలను పొందడానికి మీరు నాల్గవ భాగం కాగితాన్ని ఎలా మడుస్తారు?

6. చతురస్రం ఏర్పడేలా నాల్గవ భాగం కాగితాన్ని మీరు ఎలా మడుస్తారు?

AP SCERT

5 NUMBER PLAY

Learning outcomes : Learners will be able to

- Understand properties of numbers (even, odd) and their behaviour under operations (CG-6)
- Recognise and describe patterns related to divisibility and remainders (CG-1)
- Represent numbers using variables and general algebraic expressions (CG-2)
- Apply logical, inductive, and deductive reasoning to analyse statements and solve problems (CG-6)
- Explore relationships among factors, multiples, and divisibility rules to develop number sense (CG-1)
- Communicate mathematical ideas clearly using symbols and expressions (CG-6)
- Engage confidently and creatively in number-based activities and puzzles (CG-7)

Q7E1X2

AP SCERT

5.0 Introduction - Number Play

Dheeraj and Dhatri are playing a number game. Dheeraj chooses a number that is even, divisible by 5, and leaves a remainder of 2 when divided by 3. Dhatri tries to guess the number by thinking about the properties of numbers and the patterns they follow. Instead of checking every number one by one, she represents the situation using symbols and simple expressions to narrow down the possibilities.

5 సంఖ్యలతో ఆట

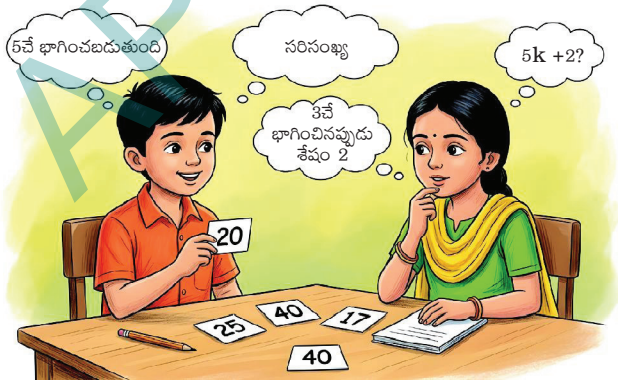
అభ్యసన ఫలితాలు : అభ్యాసకులు

A1A9S8

- సంఖ్యల ధర్మాలు (సరి సంఖ్యలు, బేసి సంఖ్యలు) మరియు గణిత ప్రక్రియలలో వాటి స్వభావాన్ని అర్థం చేసుకకుంటారు. (CG-6)
- భాజనీయత మరియు శేషాలకు సంబంధిత నమూనాలను గుర్తించి వివరిస్తారు. (CG-1)
- చరరాశులు మరియు సాధారణ బీజగణిత సమాసాల ద్వారా సంఖ్యలను సూచిస్తారు. (CG-2)
- తార్కిక, ఆగమన మరియు నిగమన తర్కాన్ని ఉపయోగించి వాక్యాలను విశ్లేషించి సమస్యలను పరిష్కరిస్తారు. (CG-6)
- కారణాంకాలు, గుణిజాలు, భాజనీయత నియమాల మధ్య సంబంధాలను అన్వేషించి సంఖ్యాభావనను అభివృద్ధి చేస్తారు. (CG-1)
- సంకేతాలు మరియు సమాసాలతో గణిత ఆలోచనలను స్పష్టంగా వ్యక్తపరుస్తారు. (CG-6)
- సంఖ్యల ఆధారిత కృత్యాలు మరియు పజిల్స్‌ను ఆత్మవిశ్వాసంతో మరియు సృజనాత్మకంగా చేస్తారు. (CG-7)

AP SCERT

5.0 పరిచయం – సంఖ్యలతో ఆట



ధీరజ్ మరియు ధాత్రి ఒక సంఖ్యల ఆట ఆడుతున్నారు. ధీరజ్ ఒక సంఖ్యను ఎంచుకుంటాడు. ఆ సంఖ్య ఒక సరి సంఖ్య, 5తో భాగించబడేది, మరియు 3తో భాగించినప్పుడు శేషం 2 వస్తుంది. ధాత్రి ఆ సంఖ్యను ఊహించడానికి సంఖ్యల లక్షణాలు మరియు వాటిలో కనిపించే సంఖ్యాక్రమం గురించి ఆలోచిస్తుంది. ప్రతి సంఖ్యను ఒక్కొక్కటిగా పరీక్షించకుండా, ఆమె చిహ్నాలు మరియు సరళ సమాసాలను ఉపయోగించి ఆ సంఖ్య ఏమి వుంటుందో ఆలోచిస్తుంది.

This kind of thinking shows how numbers follow certain rules and patterns. In everyday life, we often use such reasoning while arranging objects, sharing items equally, or solving puzzles. Some numbers behave in predictable ways when added, multiplied, or divided, and these behaviours can be explained using general forms and algebraic expressions.

In this chapter, Number Play, we explore interesting patterns in numbers, study divisibility and remainders, and use variables to describe general rules. We learn to decide whether certain statements are always true, sometimes true, or never true, and justify our answers logically. Through puzzles and playful activities, this chapter helps develop number sense, logical reasoning, and algebraic thinking, making mathematics both meaningful and enjoyable.

5.1. Is This a Multiple Of?

Sum of Consecutive Numbers

Aravind is exploring sums of consecutive numbers. He has written the following -

$7 = 3 + 4$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$12 = 3 + 4 + 5$
$15 = 7 + 8$
$= 4 + 5 + 6$
$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Now, he is wondering -

- "Can I write every natural number as a sum of consecutive numbers?"
- "Which numbers can I write as the sum of consecutive numbers in more than one way?"
- "Ohh, I know all odd numbers can be written as a sum of two consecutive numbers. Can we write all even numbers as a sum of consecutive numbers?"
- "Can I write 0 as a sum of consecutive numbers? Maybe I should use negative numbers."

? Explore these questions and any others that may occur to you. Discuss them with the class.

? Take any 4 consecutive numbers. For example, 3, 4, 5, and 6. Place '+' and '-' signs in between the numbers. How many different possibilities exist? Write all of them.

$3 + 4 - 5 + 6$

$3 - 4 - 5 - 6$

AP SCERT

ఈ విధమైన ఆలోచన సంఖ్యలు ఏ విధంగా కొన్ని నియమాలు మరియు నమూనాలను అనుసరిస్తాయో చూపిస్తుంది. మన రోజువారీ జీవితంలో కూడా వస్తువులను సరిచేయడం, సమానంగా పంచుకోవడం లేదా పజిల్స్ పరిష్కరించడం వంటి సందర్భాల్లో ఇలాంటి తార్కిక ఆలోచనను ఉపయోగిస్తాము. కొన్ని సంఖ్యలు కూడిక, గుణాకారం లేదా భాగహారం చేసినప్పుడు నిర్దిష్టమైన విధంగా ప్రవర్తిస్తాయి. ఈ ప్రవర్తనలను సాధారణ రూపాలు మరియు బీజగణిత సమాసాల ద్వారా వివరించవచ్చు.

ఈ అధ్యాయంలో "సంఖ్యలతో ఆట" ద్వారా సంఖ్యలలో కనిపించే ఆసక్తికరమైన నమూనాలను పరిశీలిస్తాము. భాజనీయత మరియు శేషాలపై అధ్యయనం చేస్తాము. సాధారణ నియమాలను వివరించడానికి చరరాశులను ఉపయోగించడం నేర్చుకుంటాము. కొన్ని గణిత వాక్యాలు ఎల్లప్పుడూ నిజమా, కొన్నిసార్లు నిజమా, లేక ఎప్పుడూ అసత్యమా అనే విషయాన్ని నిర్ణయించి, వాటిని తార్కికంగా సమర్థించడం నేర్చుకుంటాము. పజిల్స్ మరియు సరదా కార్యకలాపాల ద్వారా ఈ అధ్యాయం సంఖ్యా అవగాహన, తార్కిక ఆలోచన మరియు బీజగణిత ఆలోచనను అభివృద్ధి చేసి, గణితాన్ని అర్థవంతంగా మరియు ఆసక్తికరంగా మారుస్తుంది.

5.1. ఇది దేని గుణిజమో?

వరుస సంఖ్యల మొత్తం

$$\begin{aligned} 7 &= 3 + 4 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 12 &= 3 + 4 + 5 \\ 15 &= 7 + 8 \\ &= 4 + 5 + 6 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

అరవింద్ వరుస సంఖ్యల మొత్తాలను పరిశీలిస్తున్నాడు. అతను క్రింది విధంగా వ్రాశాడు –

ఇప్పుడు అతను ఆలోచిస్తున్నాడు –

- "ప్రతి సహజ సంఖ్యను వరుస సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయగలనా?"
- "ఏ సంఖ్యలను వరుస సంఖ్యల మొత్తంగా ఒకటి కంటే ఎక్కువ విధాలుగా వ్రాయగలము?"
- "అహా! అన్ని బేసి సంఖ్యలను రెండు వరుస సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చు అని నాకు తెలుసు. మరి అన్ని సరి సంఖ్యలను కూడా వరుస సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయగలమా?"
- "0 ను వరుస సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయగలనా? బహుశా ఋణ సంఖ్యలను ఉపయోగించాలి."

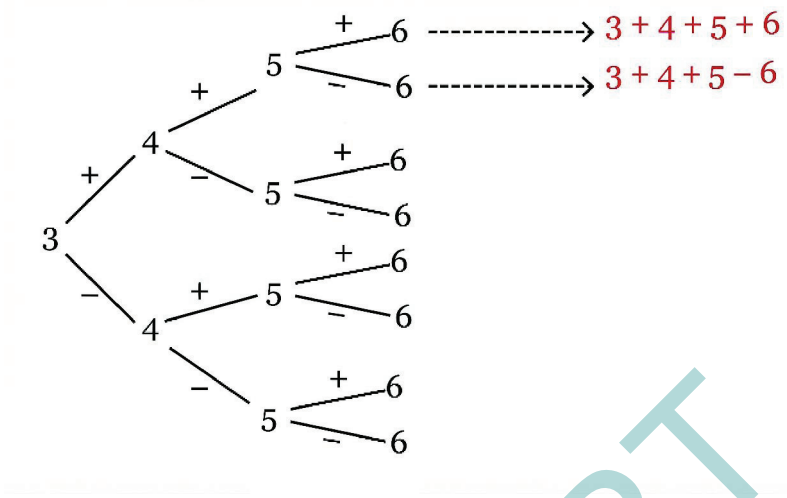
? ఈ ప్రశ్నలను మరియు మీకు తలెత్తే ఇతర ప్రశ్నలను పరిశీలించండి. వాటిని తరగతిలో చర్చించండి.

? ఏవైనా 4 వరుస సంఖ్యలను తీసుకోండి. ఉదాహరణకు 3, 4, 5 మరియు 6. ఆ సంఖ్యల మధ్య '+' మరియు '–' గుర్తులను ఉంచండి. ఎన్ని భిన్నమైన అవకాశాలు ఉంటాయి? వాటన్నింటినీ వ్రాయండి.

$$3 + 4 - 5 + 6$$
$$3 - 4 - 5 - 6$$

AP SCERT

Eight such expressions are possible. You can use the diagram below to systematically list all the possibilities.



? Evaluate each expression and write the result next to it. Do you notice anything interesting?

? Now, take four other consecutive numbers. Place the '+' and '-' signs as you have done before. Find out the results of each expression. What do you observe?

? Repeat this for one more set of 4 consecutive numbers. Share your findings.

3 + 4 − 5 + 6 = 8	5 + 6 − 7 + 8 = 12	__ + __ − __ + __ = __
3 − 4 − 5 − 6 = −12	5 − 6 − 7 − 8 = −16	__ − __ − __ − __ = __
. . .	. . .	. . .

Some sums appear always no matter which 4 consecutive numbers are chosen. Isn't that interesting?

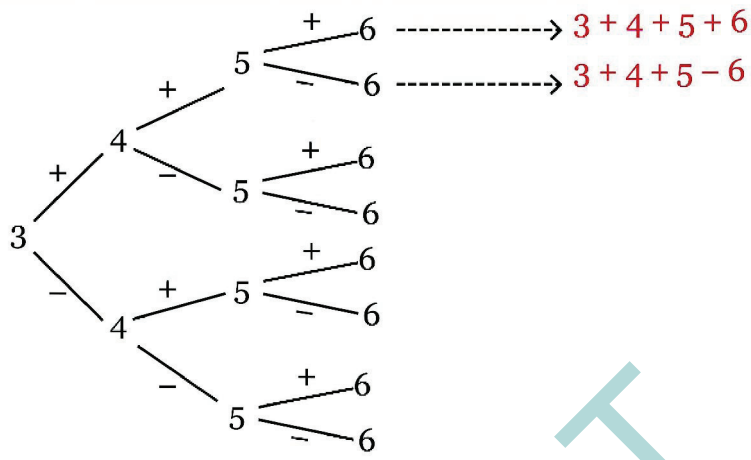
? Do these patterns occur no matter which 4 consecutive numbers are chosen? Is there a way to find out through reasoning?

Hint: Use algebra and describe the 8 expressions in a general form.

You might have noticed that the results of all expressions are even numbers. Even numbers have a factor of 2. Negative numbers having a factor 2 are also even numbers, for example, - 2, - 4, - 6, and so on. Check if anyone in your class got an odd number.

AP SCERT

ఇలాంటి మొత్తం ఎనిమిది రకాల సమాసాలు సాధ్యమవుతాయి. అన్ని అవకాశాలను క్రమబద్ధంగా జాబితా చేయడానికి క్రింది బొమ్మను ఉపయోగించవచ్చు.



? ప్రతి సమాసాన్ని గణించి, దాని పక్కన ఫలితాన్ని వ్రాయండి. మీకు ఏదైనా ఆసక్తికరమైన విషయం కనిపిస్తుందా?

? ఇప్పుడు మరో నాలుగు వరుస సంఖ్యలను తీసుకోండి. ముందుగా చేసినట్లే వాటి మధ్య '+' మరియు '−' గుర్తులను ఉంచండి. ప్రతి సమాసం యొక్క ఫలితాలను కనుగొనండి. మీరు ఏమి గమనించారు.

? ఇంకా ఒక సమూహం నాలుగు వరుస సంఖ్యలతో ఇదే ప్రక్రియను పునరావృతం చేయండి.

మీ పరిశీలనలను తరగతితో పంచుకోండి.

3 + 4 − 5 + 6 = 8	5 + 6 − 7 + 8 = 12	__ + __ − __ + __ = __
3 − 4 − 5 − 6 = −12	5 − 6 − 7 − 8 = −16	__ − __ − __ − __ = __
. . .	. . .	. . .

కొన్ని మొత్తాలు మీరు ఎలాంటి నాలుగు వరుస సంఖ్యలను ఎంచుకున్నా కూడా ఎల్లప్పుడూ కనిపిస్తాయి. ఇది నిజంగా ఆసక్తికరంగా లేదు?

? ఈ క్రమం ప్రతి సందర్భంలోనూ కనిపిస్తాయా? ఎలాంటి నాలుగు వరుస సంఖ్యలను తీసుకున్నా కూడా ఇదే ఫలితం వస్తుందా? దీనిని తార్కికంగా నిర్ధారించడానికి మార్గం ఉందా?

సూచన: బీజగణితాన్ని ఉపయోగించి ఈ 8 సమాసాలను సాధారణ రూపంలో వ్రాయండి మరియు పరిశీలించండి.

మీరు గమనించి ఉండవచ్చు – అన్ని సమాసాల ఫలితాలు ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యలుగా వస్తాయి. సరి సంఖ్యలకు 2 కారణాంకంగా ఉంటుంది. 2 కారణాంకం కలిగిన ఋణ సంఖ్యలు కూడా సరి సంఖ్యలే (ఉదాహరణకు −2, −4, −6 మొదలైనవి). మీ తరగతిలో ఎవరికైనా బేసి సంఖ్య ఫలితంగా వచ్చిందా అని పరిశీలించండి.

AP SCERT

When 4 consecutive numbers are chosen, no matter how the '+' and '-' signs are placed between them, the resulting expressions always have even parity.

Now take any 4 numbers, place '+' and '-' signs in the eight different ways, and evaluate the resulting expression. What do you observe about their parities?

Repeat this with other sets of 4 numbers.

? Is there a way to explain why this happens?

Hint: Think of the rules for parity of the sum or difference of two numbers.

Explanation 1: Let us consider any of the 8 expressions formed by four numbers a, b, c, and d. When one of its signs is switched, its value always increases or decreases by an even number! Let us see why.

Consider one of the expressions: a + b - c - d.

Replacing +b by - b, we get

a - b - c - d.

By how much has the number changed? It has changed by

(a + b - c - d) - (a - b - c - d)

= a + b - c - d - a + b + c + d (notice how the signs changed when we opened the second set of brackets)

= 2b (this is an even number).

If the difference between two numbers is even, can they have different parities? No! So either both are even or both are odd.

Now, let us see what happens when a negative sign is switched to a positive sign.

? Replace any negative sign in the expression a + b - c - d with a positive sign and find the difference between the two numbers.

? What do you conclude from this observation?

Starting from any expression, we can get 7 expressions by switching one or more '+' and '-' signs. Thus, all the expressions have the same parity!

Explanation 2: We know that

odd ± odd = even

even ± even = even

odd ± even = odd.

AP SCERT

నాలుగు వరుస సంఖ్యలను ఎంచుకున్నప్పుడు, వాటి మధ్య '+' మరియు '–' గుర్తులను ఎలాంటి క్రమంలో ఉంచినా, వచ్చిన ఫలితాలు ఎల్లప్పుడూ సరి స్వభావం కలిగినవే అవుతాయి.

ఇప్పుడు ఏవైనా నాలుగు సంఖ్యలను తీసుకోండి. వాటి మధ్య '+' మరియు '–' గుర్తులను ఎనిమిది విధాలుగా ఉంచి, వచ్చిన ప్రతి సమాసం గణించండి. వాటి సరి–బేసి స్వభావం గురించి మీరు ఏమి గమనిస్తున్నారు?

ఇదే ప్రక్రియను మరికొన్ని నాలుగు సంఖ్యల సమూహాలతో పునరావృతం చేయండి.

? ఇది ఎందుకు జరుగుతుందో వివరించడానికి ఏదైనా మార్గం ఉందా?

సూచన: రెండు సంఖ్యల మొత్తము లేదా తేడా యొక్క సరి–బేసి స్వభావ నియమాలను ఆలోచించండి.

వివరణ 1 : నాలుగు సంఖ్యలు a, b, c, d లతో ఏర్పడిన ఎనిమిది సమాసాలలో ఏదో ఒకదాన్ని పరిగణించండి. అందులో ఒక గుర్తును మార్చినప్పుడు (ఉదాహరణకు '+' ను '–'గా లేదా '–' ను '+' గా మార్చినప్పుడు), దాని విలువ ఎల్లప్పుడూ ఒక సరి సంఖ్య మేరకు పెరుగుతుంది లేదా తగ్గుతుంది. ఇది ఎందుకు జరుగుతుందో చూద్దాం.

ఉదాహరణకు ఈ సమాసమును పరిగణించండి: $a + b - c - d$.

ఇందులో $+b$ స్థానంలో $-b$ ను ఉంచితే, మనకు లభించేది

$$a - b - c - d.$$

ఈ రెండు సమాసాల మధ్య విలువ ఎంత మారింది?

$$\text{మార్పు} = (a + b - c - d) - (a - b - c - d)$$

$$= a + b - c - d - a + b + c + d$$

(రెండవ బ్రాకెట్లను తీసేసినప్పుడు గుర్తులు ఎలా మారాయో గమనించండి.)

$= 2b$ ఇది ఒక సరి సంఖ్య.

రెండు సంఖ్యల మధ్య భేదం సరి సంఖ్య అయితే, అవి భిన్నమైన సరి–బేసి స్వభావం కలిగి ఉండగలవా? కాదు. అవి రెండూ సరి సంఖ్యలే కావాలి లేదా రెండూ బేసి సంఖ్యలే కావాలి.

ఇప్పుడు ఒక ఋణ గుర్తును ధన గుర్తుగా మార్చితే ఏమి జరుగుతుందో చూద్దాం.

? $a + b - c - d$ అనే సమాసంలో ఏదైనా ఒక '–' గుర్తును '+' గా మార్చండి. వచ్చిన కొత్త సమాసం మరియు పాత సమాసం మధ్య భేదంను కనుగొనండి.

? ఈ పరిశీలన ద్వారా మీరు ఏమి నిర్ధారించగలరు?

ఏదైనా ఒక సమాసంతో ప్రారంభిస్తే, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ '+' మరియు '–' గుర్తులను మార్చడం ద్వారా మిగిలిన 7 సమాసాలను పొందవచ్చు. అందువల్ల, అన్ని సమాసాలు ఒకే సరి–బేసి స్వభావాన్ని కలిగి ఉంటాయి.

వివరణ 2 : మనకు తెలిసినది ఏమనగా –

బేసి ± బేసి = సరి

సరి ± సరి = సరి

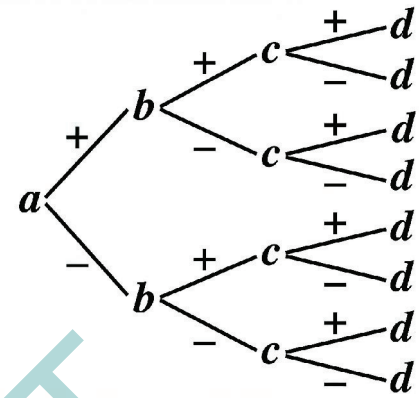
బేసి ± సరి = బేసి

AP SCERT

We have seen that the parity of a + b and a - b is the same, regardless of the parities of a and b.

In short, a ± b have the same parity. By the same argument, a ± b + c and a ± b - c have the same parity. Extending this further, we can say that all the expressions a ± b ± c ± d have the same parity.

Explanation 3 : This can also be explained using the positive and negative token model you studied in the chapter on Integers. Try to think how.



The number of ways to choose any 4 numbers a, b, c, d and combine them using a '+' and '-' signs is infinite. Mathematical reasoning allows us to prove that all the combinations a ± b ± c ± d always have the same parity, without having to go through them one by one.

Several problems in mathematics can be thought about and solved in different ways. While the method you came up with may be dear to you, it can be amusing and enriching to know how others thought about it. Two tidbits: 'share' and 'listen'.

? Is the phenomenon of all the expressions having the same parity limited to taking 4 numbers? What do you think?

'What if ...?', 'Will it always happen?'- Wondering and posing questions and conjectures is as much a part of mathematics as problem solving.

Breaking Even

We know how to identify even numbers. Without computing them, find out which of the following arithmetic expressions are even.

43 + 37	672 – 348	4 × 347 × 3	708 – 477
809 + 214	119 × 303	543 – 479	513^3

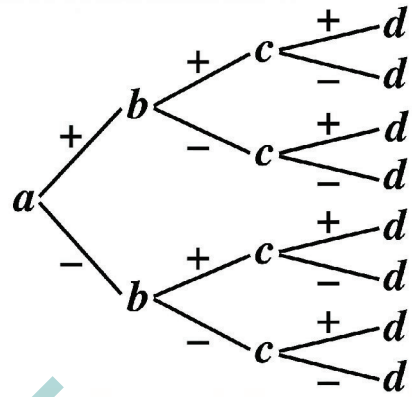
? Using our understanding of how parity behaves under different operations, identify which of the following algebraic expressions give an even number for any integer values for the letter-numbers.

$2a + 2b$	$3g + 5h$	$4m + 2n$	$2u - 4v$
$13k - 5k$	$6m - 3n$	$x^2 + 2$	$b^2 + 1$	$4k \times 3j$

AP SCERT

a మరియు b సంఖ్యల సరి-బేసి స్వభావం ఏదైనా అయినా, a + b మరియు a - b రెండింటి సరి-బేసి స్వభావం ఒకటే అని మనం గమనించాము.

సంక్షిప్తంగా చెప్పాలంటే, a ± b రెండింటికీ ఒకే సరి-బేసి స్వభావం ఉంటుంది. అదే విధంగా, a ± b + c మరియు a ± b - c సమాసాల సరి-బేసి స్వభావం కూడా ఒకటే. ఇది మరింత విస్తరించి చెప్పాలంటే, a ± b ± c ± d రూపంలోని అన్ని సమాసాలు ఒకే సరి-బేసి స్వభావం కలిగి ఉంటాయి.



వివరణ 3: ఇది పూర్ణాంకాల అధ్యాయంలో మీరు నేర్చుకున్న ధన మరియు ఋణ గుర్తుల ఆధారిత నమూనాను ఉపయోగించి కూడా వివరించవచ్చు. అది ఎలా సాధ్యమో ఆలోచించండి.

ఏవైనా నాలుగు సంఖ్యలు a, b, c, d లను ఎంచుకుని, వాటిని '+' మరియు '−' గుర్తులతో కలిపే విధానాల సంఖ్య అనంతం. అయితే, ప్రతి సమాసాలను ఒక్కొక్కటిగా పరిశీలించకుండా కూడా, గణిత తార్కికతను ఉపయోగించి a ± b ± c ± d రూపంలోని అన్ని కలయికలు ఎల్లప్పుడూ ఒకే సరి-బేసి స్వభావం కలిగి ఉంటాయని నిరూపించవచ్చు.

గణితంలో అనేక సమస్యలను వివిధ విధాలుగా ఆలోచించి పరిష్కరించవచ్చు. మీరు ఆలోచించిన పద్ధతి మీకు ఎంతో నచ్చినదై ఉండవచ్చు. అయితే, ఇతరులు అదే సమస్యను ఎలా ఆలోచించి పరిష్కరించారో తెలుసుకోవడం ఆసక్తికరంగా మరియు జ్ఞానవర్ధకంగా ఉంటుంది. రెండు చిన్న సూచనలు: "పంచుకోవడం" మరియు "వినడం".

? అన్ని సమాసాలు ఒకే సరి-బేసి స్వభావం కలిగి ఉండే ఈ లక్షణం కేవలం నాలుగు సంఖ్యలను తీసుకున్నప్పుడే పరిమితమా?

"ఒకవేళ ఇలా జరిగితే ?", "ఇది ఎల్లప్పుడూ జరుగుతుందా?" – ఇలా ఆశ్చర్యపడుతూ ప్రశ్నలు అడగడం, ఊహాగానాలు (conjectures) చేయడం అనేది సమస్యలను పరిష్కరించడంలో ఎంత ముఖ్యమో గణితంలో కూడా అంతే ముఖ్యమైన భాగం.

సరి సంఖ్యల పరిశీలన

మనకు సరి సంఖ్యలను ఎలా గుర్తించాలో తెలుసు. లెక్కలు చేయకుండా, క్రింది అంకగణిత సమాసాలలో ఏవీ సరి సంఖ్యలవో కనుగొనండి.

43 + 37	672 – 348	4 × 347 × 3	708 – 477
809 + 214	119 × 303	543 – 479	513^3

? వివిధ గణిత చర్యలలో సరి-బేసి స్వభావం ఎలా ప్రవర్తిస్తుందో మన అవగాహనను ఉపయోగించి, క్రింది బీజగణిత సమాసాలలో ఏవీ అక్షరాల స్థానంలో ఏ పూర్ణ సంఖ్యలను ఉంచినా ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యను ఇస్తాయో గుర్తించండి.

$2a + 2b$	$3g + 5h$	$4m + 2n$	$2u - 4v$

$13k - 5k$	$6m - 3n$	$x^2 + 2$	$b^2 + 1$	$4k \times 3j$

AP SCERT

The expression 4m + 2q will always evaluate to an even number for any integer values of m and q. We can justify this in two different ways -

- We know 4m is even and 2q is even for any integers m and q. Therefore, their sum will also be even.
- The expression 4m + 2q is equal to the expression 2(2m + q). Here, the expression 2(2m + q) means 2 times 2m + q. In other words, 2 is a factor of this expression. Therefore, this expression will always give an even number for any integers m and q.

  For example, if m = 4 and q = - 9, the expression 4m + 2q becomes $4 \times 4 + 2 \times (-9) = -2$, which is an even number.

In the expression $x^2 + 2$, x^2 is even if x is even, and x^2 is odd if x is odd. Therefore, the expression $x^2 + 2$ will not always give an even number. An example and a non-example for when the expression evaluates to an even number - (i) if x = 6, then $x^2 + 2 = 38$, and (ii) if x = 3, then $x^2 + 2 = 11$.

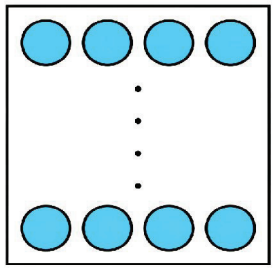
? Similarly, determine and explain which of the other expressions always give even numbers. Write a couple of examples and non-examples, as appropriate, for each expression.

? Write a few algebraic expressions which always give an even number.

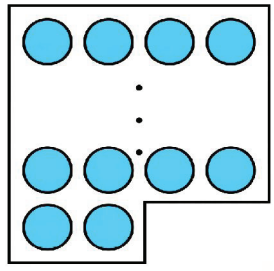
Pairs to Make Fours

? Take a pair of even numbers. Add them. Is the sum divisible by 4? Try this with different pairs of even numbers. When is the sum a multiple of 4, and when is it not? Is there a general rule or a pattern?

Even numbers can be of two types based on the remainders they leave when divided by 4.



Even numbers that are multiples of 4 leave a remainder of 0 when divided by 4.



Even numbers that are not multiples of 4 leave a remainder 2 when divided by 4.

AP SCERT

$4m + 2q$ అనే సమాసంలో, m మరియు q స్థానాల్లో ఏ పూర్ణ సంఖ్యలను ఉంచినా, ఫలితం ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యగానే వస్తుంది. దీనిని రెండు విధాలుగా సమర్థించవచ్చు ---

- ఏ పూర్ణ సంఖ్య m అయిన $4m$ సరిసంఖ్య. అలాగే ఏ పూర్ణ సంఖ్య 'q' కు 2 కూడా సరిసంఖ్య. రెండు సరి సంఖ్యల మొత్తము కూడా సరి సంఖ్యనే అవుతుంది.
- $4m + 2q$ ను $2(2m + q)$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ $2(2m + q)$ అంటే $2 \times (2m + q)$. అంటే ఈ సమాసంకు 2 ఒక కారణాంకం. కాబట్టి m మరియు q ఏ పూర్ణ సంఖ్యలైనా ఫలితం ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యగానే ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు, $m = 4$ మరియు $q = -9$ అయితే, $4m + 2q = 4 \times 4 + 2 \times (-9) = 16 - 18 = -2$ ఇది సరి సంఖ్య.

$x^2 + 2$ అనే సమాసంను పరిగణించండి. x సరి సంఖ్య అయితే x^2 కూడా సరి సంఖ్య అవుతుంది. x బేసి సంఖ్య అయితే x^2 కూడా బేసి సంఖ్య. కాబట్టి $x^2 + 2$ అనే సమాసం ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యను ఇవ్వదు.

ఉదాహరణలు: (i) $x = 6$ అయితే, $x^2 + 2 = 36 + 2 = 38$ (సరి సంఖ్య) (ii) $x = 3$ అయితే, $x^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ (బేసి సంఖ్య)

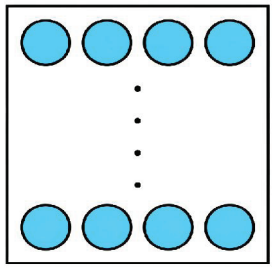
? ఇదే విధంగా, మిగిలిన సమాసాలలో ఏవీ ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యలను ఇస్తాయో గుర్తించి, కారణంతో వివరించండి. ప్రతి సమాసంకు తగిన ఉదాహరణలు మరియు ఉదాహరణలు కాని వాటిని వ్రాయండి.

? ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యను ఇచ్చే కొన్ని బీజగణిత సమాసాలను మీరు స్వయంగా వ్రాయండి.

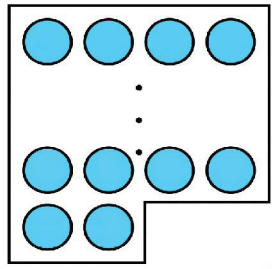
నాలుగులు చేయడానికి జతలు

? ఏవైనా రెండు సరి సంఖ్యలను తీసుకోండి. వాటిని కలపండి. వచ్చిన మొత్తం 4తో భాగించబడుతుందా? వివిధ సరి సంఖ్యల జంటలతో ఇదే ప్రక్రియను చేయండి. ఎప్పుడు మొత్తం 4 యొక్క గుణితమవుతుంది? ఎప్పుడు కాదు? దీనికి సంబంధించిన సాధారణ నియమం లేదా నమూనా ఏదైనా ఉందా?

4తో భాగించినప్పుడు మిగిలే శేషం ఆధారంగా, సరి సంఖ్యలను రెండు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.



4 యొక్క గుణిజములు అయిన సరి సంఖ్యలు, వాటిని 4తో భాగించినప్పుడు శేషం 0 ను ఇస్తాయి.



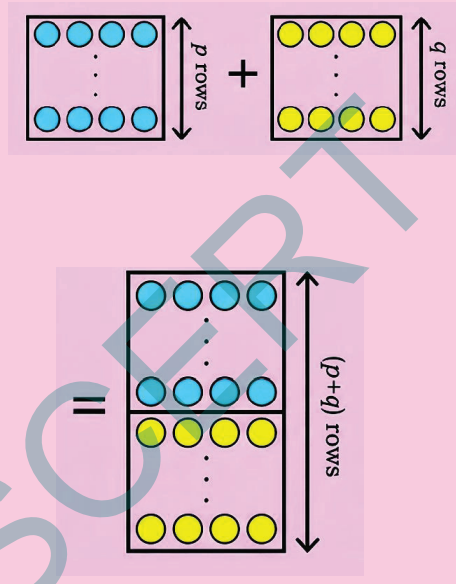
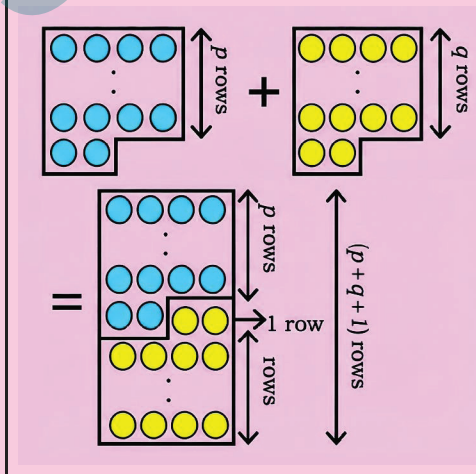
4 యొక్క గుణిజములు కాని సరి సంఖ్యలు, వాటిని 4తో భాగించినప్పుడు శేషం 2 ను ఇస్తాయి.

AP SCERT

When will two even numbers add up to give a multiple of 4?

This problem is similar to the question of identifying when adding two numbers will result in an even number. Can you see this?

There are three cases to examine:

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
Adding two (even) numbers that are multiples of 4 will always give a multiple of 4	4p and 4q. 4p + 4q = 4 (p + q).		4, 12, 16, 24, 36. 12 + 16 = 4 (3 + 4) = 28. 16 + 28 = 4 (4 + 7) = 44.
Adding two even numbers that are not multiples of 4 will always give a multiple of 4 because their remainders of 2 add up to 4.	(4p + 2) and (4q + 2). (4p + 2) + (4q + 2) = 4p + 4q + 4 = 4 (p + q + 1).		2, 6, 10, 18, 22, 42. 2 + 6 = 8. 6 + 10 = 16. 22 + 6 = 28.

What happens when we add a multiple of 4 to an even number that is not a multiple of 4? Is it similar to the case of the parity of the sum of an even and an odd number?

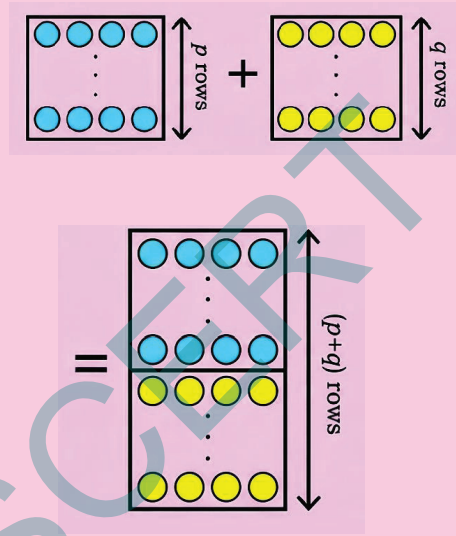
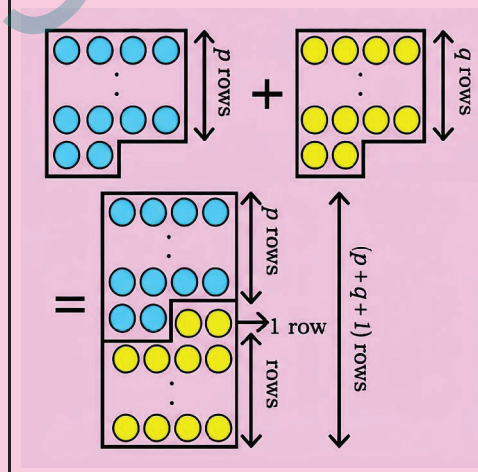
Look at the following expressions and the visualisation. Write the corresponding explanation and examples.

AP SCERT

? రెండు సరి సంఖ్యలను కలిపినప్పుడు, ఎప్పుడు వాటి మొత్తం 4 యొక్క గుణిజమవుతుంది?

ఈ సమస్య, రెండు సంఖ్యలను కలిపినప్పుడు ఎప్పుడు సరి సంఖ్య వస్తుందో గుర్తించే ప్రశ్నతో పోలి ఉంటుంది. మీరు ఈ పోలికను గమనించగలరా?

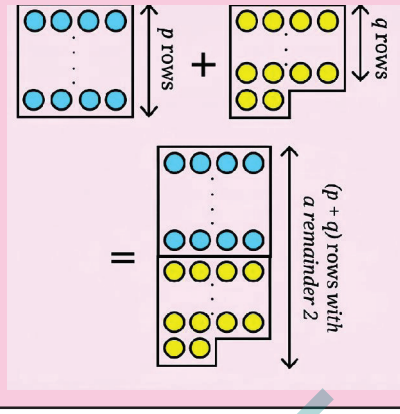
పరిశీలించాల్సిన మూడు సందర్భాలు ఉన్నాయి:

బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
రెండు (సరి) సంఖ్యలను జోడించడం 4 యొక్క గుణిజాలుగా ఉన్న సంఖ్యలు ఎల్లప్పుడూ 4 యొక్క గుణిజాన్ని ఇస్తాయి.	4p మరియు 4q. 4p + 4q = 4 (p + q).		4, 12, 16, 24, 36. 12 + 16 = 4 (3 + 4) = 28. 16 + 28 = 4 (4 + 7) = 44.
4 యొక్క గుణిజాలు కాని రెండు సరి సంఖ్యలను కూడితే ఎల్లప్పుడూ 4 యొక్క గుణిజం వస్తుంది ఎందుకంటే వాటి 2 యొక్క శేషాలు కూడితే 4 వస్తుంది.	(4p + 2) మరియు (4q + 2). (4p + 2) + (4q + 2) = 4p + 4q + 4 = 4 (p + q + 1).		2, 6, 10, 18, 22, 42. 2 + 6 = 8. 6 + 10 = 16. 22 + 6 = 28.

4 యొక్క గుణిజమైన ఒక సరి సంఖ్యను, 4 యొక్క గుణిజం కాని ఒక సరి సంఖ్యతో కలిపితే ఏమి జరుగుతుంది? ఇది సరి సంఖ్య మరియు బేసి సంఖ్యలను కలిపినప్పుడు వచ్చే సరి–బేసి స్వభావంతో పోలి ఉందా?

? క్రింది సమాసం మరియు చిత్రీకరణను పరిశీలించండి. వాటికి అనుగుణమైన వివరణను మరియు ఉదాహరణలను వ్రాయండి.

AP SCERT

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
	4p and (4q + 2) = 4p + (4q + 2) = 4p + 4q + 2 = 4 (p + q) + 2.		

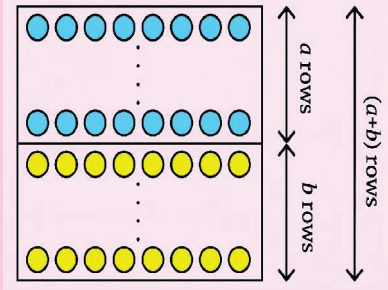
Notice how we are able to generalise and prove properties of arithmetic using algebra and also using visualisation.

Always, Sometimes, or Never

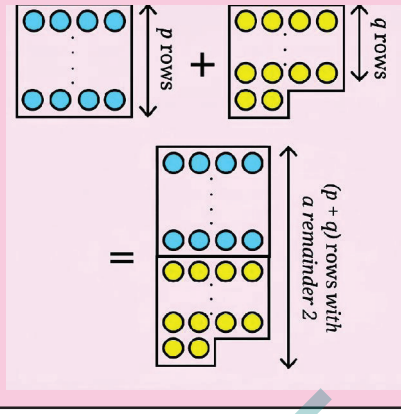
We examine different statements about factors and multiples and determine whether a statement is 'Always True', 'Sometimes True', or 'Never True'.

We know that the sum of any two multiples of 2 is also a multiple of 2.

1. If 8 exactly divides two numbers separately, it must exactly divide their sum.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
The two numbers have 8 as a factor; in other words, the two numbers are multiples of 8.	8a and 8b.		8 and 16. 16 and 56. 80 and 120.
As multiples of 8 are obtained by repeatedly adding 8, the sum of two multiples of 8 will also be a multiple of 8.	8a + 8b = 8 (a + b).		8 + 16 = 8 (1 + 2) = 24. 16 + 56 = 72. 80 + 120 = 200.

AP SCERT

బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
	4p మరియు (4q + 2) = 4p + (4q + 2) = 4p + 4q + 2 = 4 (p + q) + 2.		

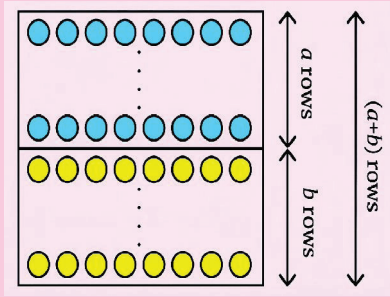
బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణ సహాయంతో గణిత సమాసాలను ఎలా సాధారణీకరించి నిరూపించ గలుగుతున్నామో గమనించండి.

ఎల్లప్పుడూ, కొన్నిసార్లు, లేదా ఎప్పుడూ కాదు

? ఇప్పుడు కారణాంకాలు మరియు గుణిజాలకి సంబంధించిన వివిధ ప్రవచనాలను పరిశీలించి, అవి "ఎల్లప్పుడూ సత్యం", "కొన్నిసార్లు సత్యం", లేదా "ఎప్పుడూ సత్యం కాదు" అనే వర్గాలలో దేనికి చెందినవో నిర్ణయిద్దాం.

ఏ రెండు 2 యొక్క గుణిజాలను కలిపినా, వచ్చిన మొత్తం కూడా 2 యొక్క గుణిజమే అని మనకు తెలుసు.

? 1. 8 అనే సంఖ్య రెండు సంఖ్యలను వేరువేరుగా పూర్తిగా భాగిస్తే, వాటి మొత్తాన్ని కూడా 8 పూర్తిగా భాగించాలి.

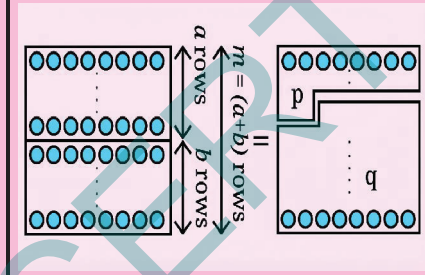
బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
రెండు సంఖ్యలకు 8 అనేది కారణాంకంగా ఉంటుంది; మరో మాటలో చెప్పాలంటే, ఆ రెండు సంఖ్యలు 8 యొక్క గుణిజాలు.	8a మరియు 8b.		8 మరియు 16. 16 మరియు 56. 80 మరియు 120.
8 అనే సంఖ్యను పదేపదే కూడితే 8 యొక్క గుణిజాలు వస్తాయి. 8 యొక్క రెండు గుణిజాల మొత్తం కూడా 8 యొక్క గుణిజం అవుతుంది	8a + 8b = 8 (a + b).		8 + 16 = 8(1+ 2) = 24. 16 + 56 = 72. 80 + 120 = 200.

APSCERT

Statement 1 is always true. Determine if it is true with subtraction.

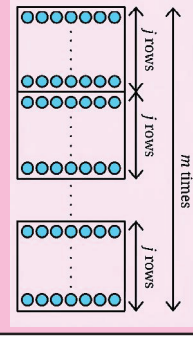
In general, **if a divides M and a divides N, then a divides M + N and a divides M - N. In other words, if M and N are multiples of a, then M + N and**

2. If a number is divisible by 8, then 8 also divides any two numbers (separately) that add up to the number.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
A number divisible by 8 is a multiple of 8.	8m		8, 16, 56, 72
A number divisible by 8 can be expressed as a sum of two multiples of 8 or sum of two non-multiples of 8.	8m = 8a + 8b 8m = p + q (p, q not multiples of 8)		72 = 48 + 24 (8 × 9 = 8×6 + 8×3). 72 = 50 + 22

So, Statement 2 is sometimes true.

3. If a number is divisible by 7, then all multiples of that number will be divisible by 7.

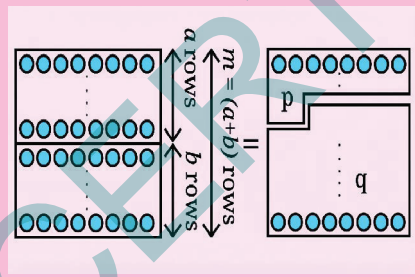
Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
Number dvisible by 7 will have 7 as a factor.	7j		14 = 7 × 2 (j = 2) 42 = 7 × 6 (j = 6) 98 = 7 × 14 (j = 14)
This contains a total of mj rows. So this is also a multiple of 7.	(7j) × m		Some multiples of 14: 28 = (7 × 2) × 2. 70 = (7 × 2) × 5. 154 = (7 × 2) × 11.

The number 7jm or (7 × j × m) has a factor of 7. We can see that statement 3 is always true.

AP SCERT

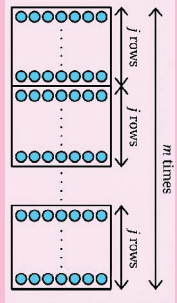
వాక్యం 1 ఎల్లప్పుడూ సత్యమే. ఇప్పుడు ఇదే విషయం తీసివేత విషయంలో కూడా సత్యమా కాదా అనేది పరిశీలించండి. సాధారణంగా, a అనే సంఖ్య M ను మరియు N ను పూర్తిగా భాగిస్తే, a అనే సంఖ్య M + N ను మరియు M – N ను కూడా పూర్తిగా భాగిస్తుంది. అంటే, M మరియు N సంఖ్యలు a యొక్క గుణిజములు అయితే, M + N మరియు M – N కూడా a యొక్క గుణిజములు అవుతాయి.

? 2. ఒక సంఖ్య 8తో భాగించబడితే, ఆ సంఖ్యకు సమానమయ్యే ఏవైనా రెండు సంఖ్యలను (వేర్వేరుగా) కూడా 8 భాగిస్తుందా?

బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
8చే భాగించబడే సంఖ్య 8 యొక్క గుణకం అవుతుంది.	8m		8, 16, 56, 72
8 ద్వారా భాగించబడే సంఖ్యను 8 యొక్క రెండు గుణిజాల మొత్తంగా లేదా 8 గుణిజాలు కాని రెండు సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు.	8m = 8a + 8b 8m = p + q (p, q లు 8 యొక్క గుణిజాలు కాదు.)		72 = 48 + 24 (8 × 9 = 8×6 + 8×3). 72 = 50 + 22

కావున 2 ప్రకటన కొన్నిసార్లు నిజం

? 3. ఒక సంఖ్య 7 చేత భాగించబడితే, ఆ సంఖ్య యొక్క అన్ని గుణిజాలు కూడా 7 చేత భాగించబడతాయి.

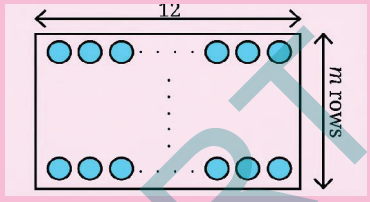
బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
7తో భాగించబడే సంఖ్యలకు 7 ఒక కారణాంకంగా ఉంటుంది.	7j		14 = 7 × 2 (j = 2) 42 = 7 × 6 (j = 6) 98 = 7 × 14 (j = 14)
ఇందులో మొత్తం mj వరుసలు ఉన్నాయి. కాబట్టి ఇది కూడా 7 యొక్క గుణకం	(7j) × m		14: యొక్క కొన్ని గుణిజాలు 28 = (7 × 2) × 2. 70 = (7 × 2) × 5. 154 = (7 × 2) × 11.

7jm లేదా సంఖ్యకు (7 × j × m) 7 ఒక కారణాంకం ప్రకటన 3 ఎల్లప్పుడూ నిజమని మనం చూడవచ్చు.

AP SCERT

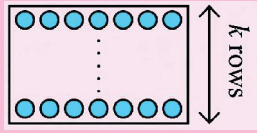
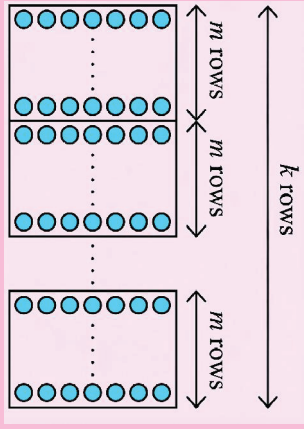
In general, **if A is divisible by k, then all multiples of A are divisible by k.**

4. If a number is divisible by 12, then the number is also divisible by all the factors of 12.

Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
A number divisible by 12 is a multiple of 12.	12m		12, 24, 36, 48, 108, 132.
Factors of multiples of 12 will include factors of 12.	12m = 2 × 6 × m = 3 × 4 × m	 A factor of 12 covers a row fully. Hence, it covers all multiples of 12 fully.	Factors of 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

In general, **if A is divisible by k, then all multiples of A are divisible by k.** Hence statement 4 is always true.

5. If a number is divisible by 7, then it is also divisible by any multiple of 7.

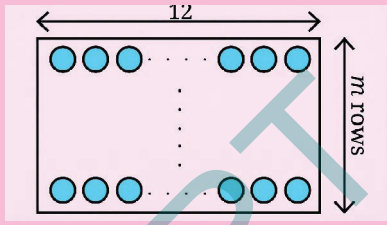
Explanation with Algebra and Visualisation			Examples
Numbers divisible by 7 are multiples of 7.	7k		
Multiples of 7. 7k will be divisible by 7m if and only if m is a factor of k.	7m If k = ym then 7k ÷ 7m = 7ym ÷ 7m = y		42 (7 × 6) is divisible by 7 but it is not divisible by 28 (7 × 4). 42 (7 × 6) is divisible by 7 and it is divisible

We can see that this statement is only sometimes true.

AP SCERT

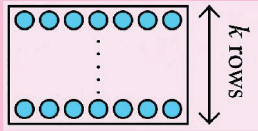
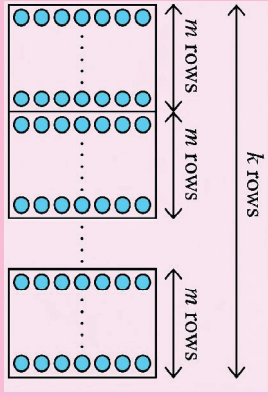
సాధారణంగా, **A అనే సంఖ్య k తో భాగించబడితే, A యొక్క అన్ని గుణిజాలు కూడా k తో భాగించబడతాయి.**

? 4. ఒక సంఖ్య 12 తో భాగించబడితే, ఆ సంఖ్య 12 యొక్క అన్ని గుణిజాలతో కూడా భాగించబడుతుంది.

బీజగణితం మరియు దృశ్యకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
12చే భాగించబడే సంఖ్య 12 యొక్క గుణిజం.	12m		12, 24, 36, 48, 108, 132.
12 యొక్క గుణిజాల కారణాంకాలలో 12 యొక్క కారణాంకాలు ఉంటాయి.	12 m = 2 × 6 × m = 3 × 4 × m	 12 యొక్క కారణాంకం ఒక అడ్డు వరుసను పూర్తిగా ఆక్రమిస్తుంది. కాబట్టి, ఇది 12 యొక్క అన్ని గుణిజాలను పూర్తిగా ఆక్రమిస్తుంది.	24 యొక్క కారకాలు :1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

A అనే సంఖ్య k తో భాగించబడితే, A యొక్క అన్ని గుణిజాలు కూడా k తో భాగించబడతాయి. అందువల్ల ప్రకటన 4 ఎల్లప్పుడూ నిజం

? 5. ఒక సంఖ్య 7చే భాగించబడితే, అది 7 యొక్క ఏదైనా గుణిజంతో కూడా భాగించబడుతుంది.

బీజగణితం మరియు దృశ్యీకరణతో వివరణ			ఉదాహరణలు
7చే భాగించబడే సంఖ్యలు 7 యొక్క గుణిజాలు.	7k		
7 యొక్క గుణిజాలు. m అనేది k యొక్క కారణాంకం అయినప్పుడు మాత్రమే 7k ను 7m భాగిస్తుంది.	7m If k = ym అప్పుడు 7k ÷ 7m = 7ym ÷ 7m = y		42 (7×**6**) ను 7 చే భాగించవచ్చు కానీ 28 (7×**4**) చే భాగించబడదు. 42 (7×**6**) ను 7చే భాగించవచ్చు మరియు 14 (7×**2**) చే భాగించబడుతుంది.

- ఈ ప్రకటన కొన్నిసార్లు మాత్రమే నిజమని మనం చూడవచ్చు.

AP SCERT

✪ Examine each of the following statements, and determine whether it is 'Always true', 'Sometimes true', Never true'.

6. If a number is divisible by both 9 and 4, it must be divisible by 36.

7. If a number is divisible by both 6 and 4, it must be divisible by 24.

In general, if A is divisible by k and A is also divisible by m, then A is divisible by the LCM of k and m. This is because A is a multiple of k and also a multiple of m, so A's prime factorisation should contain the prime factorisation of LCM (k, m).

8. When you add an odd number to an even number we get a multiple of 6.

We know that multiples of 6 are all even numbers.

The sum of an odd number and an even number will be an odd number. Therefore, this statement is never true. We can also explain this algebraically. Suppose,

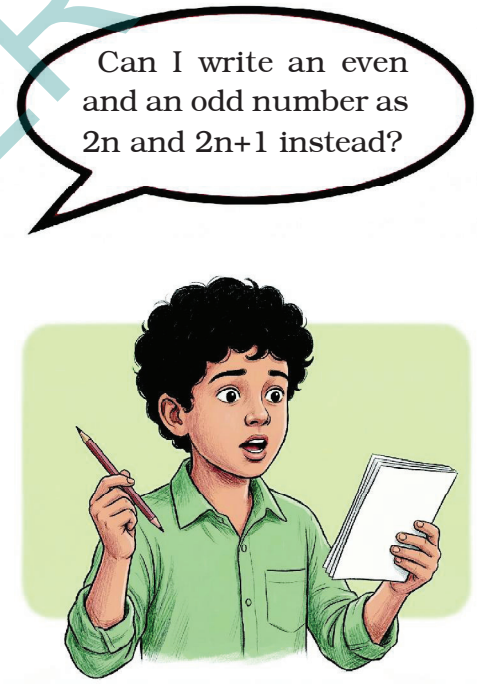
$$(2n) + (2m + 1) = 6j,$$

where 2n is an even number, 2m + 1 is an odd number, and 6j is a multiple of 6. Then

$$2n + 2m = 6j - 1$$

$$2(n + m) = 6j - 1$$

which means 2(n + m), which is an even number, should be equal to 6j - 1, which is an odd number. This is never true.



What Remains?

Find a number that has a remainder of 3 when divided by 5. Write more such numbers.

Which algebraic expression(s) capture all such numbers?

(i) 3k + 5 (ii) 3k - 5 (iii) $\frac{3k}{5}$ (iv) 5k + 3 (v) 5k - 2 (vi) 5k - 3

AP SCERT

✪ క్రింది ప్రతీ వాఖ్యాన్ని పరిశీలించి, అది 'ఎల్లప్పుడూ నిజం', 'కొన్నిసార్లు నిజం', లేదా 'ఎప్పుడూ నిజం కాదు' అని నిర్ణయించండి.

? 6. ఒక సంఖ్య 9 మరియు 4 రెండింటితో భాగించబడితే, అది తప్పనిసరిగా 36తో కూడా భాగించబడాలి.

? 7. ఒక సంఖ్య 6 మరియు 4 రెండింటితో భాగించబడితే, అది తప్పనిసరిగా 24తో కూడా భాగించబడాలి.

సాధారణంగా, ఒక సంఖ్య A, k తో భాగించబడితే మరియు అదే సంఖ్య A, m తో కూడా భాగించబడితే, A అనేది k మరియు m యొక్క కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (LCM) తో భాగించబడుతుంది. ఎందుకంటే A అనేది k యొక్క గుణిజం మరియు m యొక్క గుణిజం కూడా. కాబట్టి A యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజనలో LCM (k,m) యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు ఉండాలి.

? 8. ఒక బేసి సంఖ్యను ఒక సరి సంఖ్యకు కలిపితే 6 యొక్క గుణిజం వస్తుంది. మనకు తెలుసు 6 యొక్క గుణిజాలు అన్నీ సరి సంఖ్యలే. ఒక బేసి సంఖ్యను సరి సంఖ్యకు కలిపితే ఫలితం బేసి సంఖ్య అవుతుంది. అందువల్ల, ఈ ప్రకటన ఎప్పుడూ నిజం కాదు. దీనిని బీజగణిత పద్ధతిలో కూడా వివరించవచ్చు.

నేను సరి మరియు బేసి సంఖ్యలను 2n మరియు 2n+1 గా వ్రాయవచ్చా?

$$(2n) + (2m + 1) = 6j,$$

ఇక్కడ 2n ఒక సరి సంఖ్య, 2m + 1 ఒక బేసి సంఖ్య, మరియు 6j అనేది 6 యొక్క గుణిజం.

అప్పుడు,

$$2n + 2m = 6j - 1$$

$$2(n + m) = 6j - 1$$

అంటే 2(n + m) అనేది ఒక సరి సంఖ్య. 6j – 1 కు సమానం కావాలి. కానీ ఇది ఒక బేసి సంఖ్య.

సరి సంఖ్య ఒక బేసి సంఖ్యకు సమానం కావడం అసాధ్యం. కాబట్టి ఇది ఎప్పుడూ నిజం కాదు.

ఇంకా ఏమి మిగిలింది?

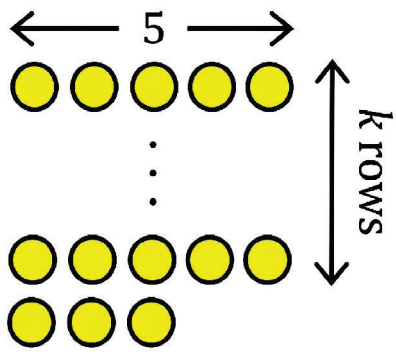
? 5తో భాగించినప్పుడు 3 శేషం వచ్చు ఒక సంఖ్యను కనుగొనండి. ఇలాంటి మరికొన్ని సంఖ్యలను రాయండి.

? ఈ విధమైన అన్ని సంఖ్యలను సూచించే బీజగణిత సమాసాలు ఏవి?

(i) 3k + 5 (ii) 3k - 5 (iii) $\frac{3k}{5}$ (iv) 5k + 3 (v) 5k - 2 (vi) 5k - 3

AP SCERT

The numbers that leave a remainder of 0 when divided by 5 are the multiples of 5. But we want numbers that leave a remainder of 3 when divided by 5. These numbers are 3 more than multiples of 5. Multiples of 5 are of the form 5k. So, numbers that leave a remainder of 3 when divided by 5 are those of the form 5k + 3



=	0	1	2	3	4
5 + 3 =	3	8	13	18	23

? Let us consider another expression, 5k - 2, and see the values it takes for different values of k.

Numbers that leave a remainder of 3 when divided by 5 can also be seen as 2 less than multiples of 5; 5k - 2, where k $\geq$ 1.

=	1	2	3	4	5
5 - 2 =	3	8	13	18	23

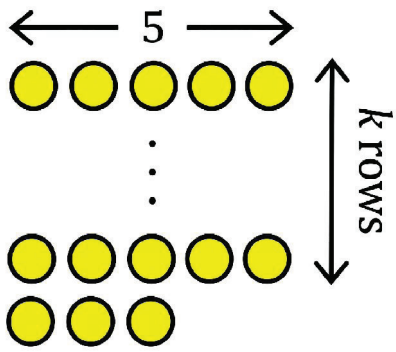
? Are there other expressions that generate numbers that are 3 more than a multiple of 5?

Figure it Out - 5.1

1. The sum of four consecutive numbers is 34. What are these numbers?
2. Suppose p is the greatest of five consecutive numbers. Describe the other four numbers in terms of p.
3. For each statement below, determine whether it is always true, sometimes true, or never true. Explain your answer. Mention examples and non-examples as appropriate. Justify your claim using algebra.
   (i) The sum of two even numbers is a multiple of 3.
   (ii) If a number is not divisible by 18, then it is also not divisible by 9.
   (iii) If two numbers are not divisible by 6, then their sum is not divisible by 6.

AP SCERT

5తో భాగించినప్పుడు 0 శేషం మిగిలే సంఖ్యలు 5 యొక్క గుణిజాలు. కానీ మనకు కావలసింది 5తో భాగించినప్పుడు 3 శేషం మిగిలే సంఖ్యలు. అవి 5 యొక్క గుణిజాల కంటే 3 ఎక్కువగా ఉంటాయి. 5 యొక్క గుణిజాలు 5k రూపంలో ఉంటాయి. అందువల్ల, 5తో భాగించినప్పుడు 3 శేషం మిగిలే సంఖ్యలు 5k + 3 రూపంలో ఉంటాయి.



=	0	1	2	3	4
5 + 3 =	3	8	13	18	23

? మరొక సమాసం 5k - 2 ను పరిశీలిద్దాం. k కి వేర్వేరు విలువలు ఇచ్చినప్పుడు అది తీసుకునే విలువలను చూద్దాం.

5తో భాగించినప్పుడు 3 శేషం మిగిలే సంఖ్యలను, 5 యొక్క గుణిజాల కంటే 2 తక్కువగా ఉన్న సంఖ్యలుగా కూడా చూడవచ్చు;

అవి 5k - 2 రూపంలో ఉంటాయి, ఇక్కడ $k \geq 1$.

=	1	2	3	4	5
5 - 2 =	3	8	13	18	23

? 5 యొక్క గుణిజం కంటే 3 ఎక్కువగా ఉన్న సంఖ్యలను ఇవ్వగల ఇతర సమాసాలు ఉన్నాయా?

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.1

1. నాలుగు వరుస సంఖ్యల మొత్తం 34. అయిన ఆ సంఖ్యలు ఏవి?
2. p అనేది ఐదు వరుస సంఖ్యల్లో పెద్దది అని అనుకుందాం. మిగిలిన నాలుగు సంఖ్యలను p పరంగా వివరించండి.
3. క్రింది ప్రతి వాక్యానికి, అది ఎల్లప్పుడూ నిజమా, కొన్నిసార్లు నిజమా, లేక ఎప్పుడూ నిజం కాదా అని నిర్ణయించండి. మీ సమాధానాన్ని వివరించండి. అవసరమైతే ఉదాహరణలు మరియు ప్రత్యుదాహరణలు ఇవ్వండి. మీ వాదనను బీజగణితంతో సమర్థించండి.

   (i) రెండు సరి సంఖ్యల మొత్తం 3 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

   (ii) ఒక సంఖ్య 18తో భాగించబడకపోతే, అది 9తో కూడా భాగించబడదు.

   (iii) రెండు సంఖ్యలు 6తో భాగించబడకపోతే, వాటి మొత్తం కూడా 6తో భాగించబడదు.

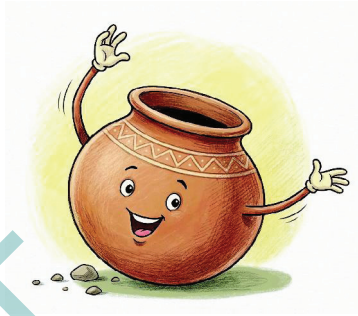
AP SCERT

(iv) The sum of a multiple of 6 and a multiple of 9 is a multiple of 3.

(v) The sum of a multiple of 6 and a multiple of 3 is a multiple of 9.

4. Find a few numbers that leave a remainder of 2 when divided by 3 and a remainder of 2 when divided by 4. Write an algebraic expression to describe all such numbers.

5. "I hold some pebbles, not too many, When I group them in 3's, one stays with me. Try pairing them up - it simply won't do, A stubborn odd pebble remains in my view. Group them by 5, yet one's still around, But grouping by seven, perfection is found. More than one hundred would be far too bold, Can you tell me the number of pebbles I hold?"



6. Tilak has written several numbers that leave a remainder of 2 when divided by 6. He claims, "If you add any three such numbers, the sum will always be a multiple of 6." Is Tilak's claim true?

7. When divided by 7, the number 661 leaves a remainder of 3, and 4779 leaves a remainder of 5. Without calculating, can you say what remainders the following expressions will leave when divided by 7? Show the solution both algebraically and visually.

   (i) 4779 + 661 (ii) 4779 - 661

8. Find a number that leaves a remainder of 2 when divided by 3, a remainder of 3 when divided by 4, and a remainder of 4 when divided by 5. What is the smallest such number? Can you give a simple explanation of why it is the smallest?

5.2 Checking Divisibility Quickly

Earlier, you have learnt shortcuts to check whether a given number, written in the Indian number system is divisible by 2, 4, 5, 8, and 10. Let us revisit them.

Divisibility by 10, 5, and 2: If the units digit of a number is '0', then it is divisible by 10. Let us understand why this works through algebra. We can write the general form of a number in the Indian system using a set of letter-numbers. For example, a 5-digit number can be expressed as, edcba denoting $e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a$. The letter-numbers e, d, c, b, and a denote each digit of a 5-digit number.

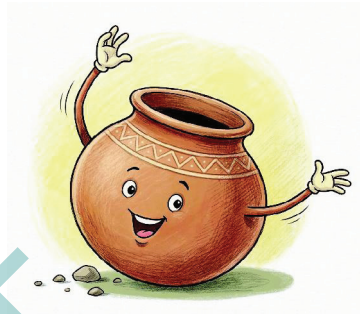
AP SCERT

(iv) 6 యొక్క గుణిజం మరియు 9 యొక్క గుణిజం యొక్క మొత్తం 3 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

(v) 6 యొక్క గుణిజం మరియు 3 యొక్క గుణిజం యొక్క మొత్తం 9 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

4. 3తో భాగించినప్పుడు 2 శేషం మరియు 4తో భాగించినప్పుడు 2 శేషం మిగిలే కొన్ని సంఖ్యలను కనుగొనండి. అలాంటి అన్ని సంఖ్యలను సూచించే ఒక బీజగణిత సమాసంను వ్రాయండి.

5. "నా చేతిలో కొన్ని రాళ్లు ఉన్నాయి, చాలా ఎక్కువ కాదు. నేను వాటిని 3 చొప్పున సమూహపరిస్తే ఒక రాయి మిగులుతుంది. వాటిని జతలుగా చేయడానికి ప్రయత్నిస్తే – సాధ్యపడదు, ఒక మొండి బేసి రాయి మిగిలిపోతుంది. 5 చొప్పున సమూహపరిచినా ఇంకా ఒకటి మిగులుతుంది. కానీ 7 చొప్పున సమూహపరిస్తే చేస్తే, పూర్తిగా సరిపోతాయి. ఇంకా ఆ సంఖ్య 100 కంటే ఎక్కువ వుంటే అది చాలా పెద్దది అవుతుంది. నా దగ్గర ఎన్ని రాళ్లు ఉన్నాయో చెప్పగలరా?"



6. తిలక్ 6తో భాగించినప్పుడు 2 శేషం మిగిలే కొన్ని సంఖ్యలను వ్రాశాడు. అతను ఇలా అంటున్నాడు:

"అటువంటి ఏ మూడు సంఖ్యలనైనా కలిపితే, వచ్చే మొత్తం ఎల్లప్పుడూ 6 యొక్క గుణిజం అవుతుంది." తిలక్ చెప్పిన వాదన నిజమేనా?

7. 661 ని 7తో భాగించినప్పుడు శేషం 3 మిగులుతుంది, మరియు 4779 ను భాగించినపుడు 5 శేషం మిగులుతుంది. లెక్కించకుండా, క్రింది సమాసం 7తో భాగించినప్పుడు ఏ శేషం మిగులుతుందో చెప్పగలరా? పరిష్కారాన్ని బీజగణిత పద్ధతిలో మరియు దృశ్యరూపంలో చూపించండి.

(i) 4779 + 661 (ii) 4779 - 661

8. 3తో భాగించినప్పుడు శేషం 2, 4తో భాగించినప్పుడు శేషం 3, మరియు 5తో భాగించినప్పుడు శేషం 4ను ఇచ్చే ఒక సంఖ్యను కనుగొనండి. అలాంటి అతి చిన్న సంఖ్య ఏమిటి? అది ఎందుకు అతి చిన్నదో సరళమైన వివరణ ఇవ్వగలరా?

5.2 వేగంగా భాజనీయతను పరిశీలించుట

ఇప్పటికే మీరు భారతీయ సంఖ్యా పద్ధతిలో వ్రాసిన ఒక సంఖ్య 2, 4, 5, 8 మరియు 10తో భాగించబడుతుందో లేదో తెలుసుకోవడానికి కొన్ని సులభ మార్గాలను నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు వాటిని మళ్లీ పరిశీలిద్దాం.

10, 5 మరియు 2 యొక్క భాజనీయత : ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో '0' ఉంటే, ఆ సంఖ్య 10తో భాగించబడుతుంది. ఇది ఎందుకు పనిచేస్తుందో బీజగణిత పద్ధతిలో అర్థం చేసుకుందాం. భారతీయ సంఖ్యా పద్ధతిలో ఒక సంఖ్య యొక్క సాధారణ రూపాన్ని విస్తరణ పద్ధతి ద్వారా వ్రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు, ఒక 5 అంకెల సంఖ్యను edcba అని వ్రాయవచ్చు.

ఇది $e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a$ ను సూచిస్తుంది. ఇక్కడ e, d, c, b, మరియు a అనేవి ఆ 5 అంకెల సంఖ్యలోని ప్రతి అంకెను సూచిస్తాయి.

AP SCERT

Any number can be written in general as … dcba, where the letter- numbers a, b, c and d represent the units, tens, hundreds and thousands digit, respectively, and so on. As a sum of place values, this number is - … +1000d + 100c + 10b + a.

(For example, in the number 4075, d = 4, c = 0, b = 7, and a = 5.)

We know that each place value, with the exception of the units place, is a multiple of 10. So, 10b, 100c, … all will be multiples of 10. Hence, the number will be divisible by 10 if and only if the units digit a is 0.

? Similarly, explain using algebra why the divisibility shortcuts for 5, 2, 4, and 8 work.

Let us now examine shortcuts to check divisibility by some other numbers and explain why they work!

A Shortcut for Divisibility by 9

? Can you say, without actually calculating, which of these numbers are divisible by 9: 999, 909, 900, 90, 990?

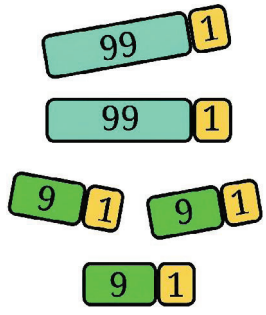
All of them.

? Can we say that any number made up of only the digits '0' and '9', in any order, will always be divisible by 9?

Yes, if each digit is either 0 or 9, then each term in its expanded form will be 9 × □ or 0 × □ (the '□' denotes a place value). This means each term will be a multiple of 9, for example,

$$99009 = 9 \times 10000 + 9 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1.$$

But this shortcut alone cannot identify all the multiples of 9. Unlike the numbers 2, 5, and 10, we cannot identify the multiples of 9 by just looking at the unit's digit. 99 and 109 are two numbers with 9 as the units digit; but 99 is divisible by 9, while 109 is not.



? Is 10 divisible by 9? If not, what is the remainder?

Check the divisibility of other multiples of 10 (10, 20, 30, ...) by 9.

You will notice that for any multiple of 10, the remainder is the same as the number of tens.

? Similarly, look at the remainder when the multiples of 100 (100, 200, 300, …) are divided by 9. What do you notice?

The remainder is the same as the number of hundreds for any multiple of 100.

? Using this observation, find the remainder when 427 is divided by 9.

APSCERT

సాధారణంగా, ఏ సంఖ్యనైనా ... dcba రూపంలో వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ a, b, c, d అనేవి వరుసగా ఒకట్ల, పదుల, వందల, వేల స్థానాల అంకెలను సూచిస్తాయి.

స్థాన విలువల మొత్తం రూపంలో, ఈ సంఖ్య –

... +1000d + 100c + 10b + a.

(ఉదాహరణకు, 4075 అనే సంఖ్యలో d = 4, c = 0, b = 7,a = 5.)

మనకు తెలుసు ఒకట్ల స్థానం తప్ప మిగిలిన ప్రతి స్థాన విలువ 10 యొక్క గుణిజం. కాబట్టి 10b, 100c, ... ఇవన్నీ 10 యొక్క గుణిజాలు. అందువల్ల, ఒక సంఖ్య 10తో భాగించబడాలంటే మరియు భాగించబడితే మాత్రమే, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె a = 0 అయి ఉండాలి.

? ఇదే విధంగా, 5, 2, 4 మరియు 8లు భాగించబడతాయో లేదో తెలుసుకునే సులభ మార్గాలు ఎందుకు పనిచేస్తాయో బీజగణితంతో వివరించండి.

ఇప్పుడు మరికొన్ని సంఖ్యలతో భాగించబడుతుందో లేదో తెలుసుకునే సులభ మార్గాలను పరిశీలించి, అవి ఎందుకు పనిచేస్తాయో వివరిద్దాం!

9చే భాజనీయతకు సులభ మార్గం

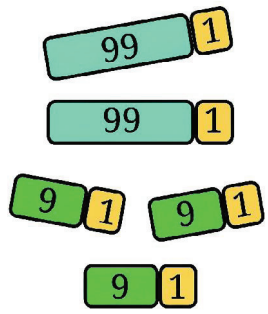
? లెక్కించకుండా, ఈ సంఖ్యల్లో ఏవి 9తో భాగించబడతాయో చెప్పగలరా: 999, 909, 900, 90, 990? అన్నీ.

? '0' మరియు '9' అంకెలతో మాత్రమే, ఏ క్రమంలోనైనా ఏర్పడిన ప్రతి సంఖ్య 9తో ఎల్లప్పుడూ భాగించబడుతుందని చెప్పగలమా?

అవును. ప్రతి అంకె 0 లేదా 9 అయితే, ఆ సంఖ్యను విస్తరించిన రూపంలో వ్రాసినప్పుడు ప్రతి పదం 9 × □ (స్థాన విలువ) లేదా 0 × □ (స్థాన విలువ) రూపంలో ఉంటుంది. ఇక్కడ '□' అనేది స్థాన విలువను సూచిస్తుంది. అంటే ప్రతి పదం 9 యొక్క గుణిజం అవుతుంది. ఉదాహరణకు,

$$99009 = 9 \times 10000 + 9 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1.$$

కాబట్టి, ఇటువంటి ప్రతి సంఖ్య 9తో భాగించబడుతుంది.



కానీ ఈ సులభ మార్గం ఒక్కటితోనే 9 యొక్క అన్ని గుణిజాలను గుర్తించలేం. 2, 5 మరియు 10 వంటి సంఖ్యల మాదిరిగా, కేవలం ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను చూసి 9 యొక్క గుణిజాలను గుర్తించలేం. ఉదాహరణకు, 99 మరియు 109 అనే రెండు సంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానంలో 9 ఉంది. కానీ 99 అనేది 9తో భాగించబడుతుంది, అయితే 109 అనేది 9తో భాగించబడదు.

? 10 అనేది 9తో భాగించబడుతుందా? భాగింపబడకపోతే శేషం ఏమిటి?

10 ను 9తో భాగిస్తే, భాగఫలం 1 మరియు శేషం 1 వస్తుంది.

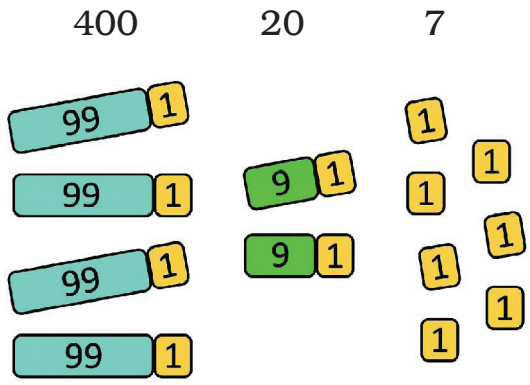
ఇప్పుడు 10 యొక్క ఇతర గుణిజాలను (10, 20, 30, ...) 9తో భాగించబడుతాయో లేదో పరిశీలించండి.

10 యొక్క ఏ గుణిజాన్నైనా 9తో భాగించినప్పుడు, శేషం ఆ సంఖ్యలో ఉన్న "పదుల సంఖ్య"తో సమానంగా ఉంటుందని మీరు గమనిస్తారు.

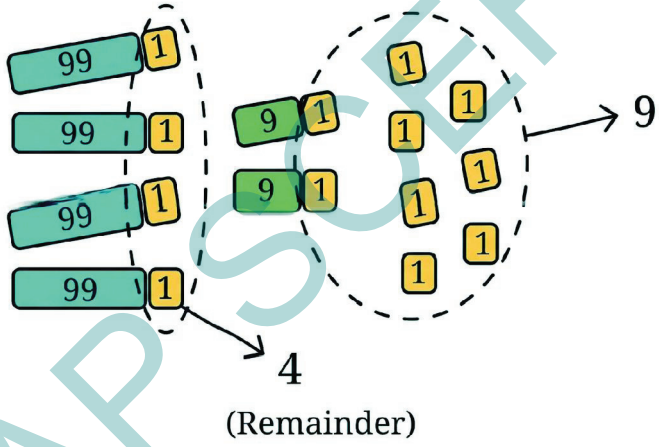
? అలాగే, 100 యొక్క గుణిజాలను (100, 200, 300, ...) 9తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాన్ని పరిశీలించండి. మీరు ఏమి గమనించారు? 100 యొక్క ఏ గుణిజాన్నైనా 9తో భాగించినప్పుడు, శేషం ఆ సంఖ్యలో ఉన్న "వందల సంఖ్య"తో సమానంగా ఉంటుంది.

? ఈ పరిశీలన ఆధారంగా, 427 ను 9తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాన్ని కనుగొనండి.

AP SCERT



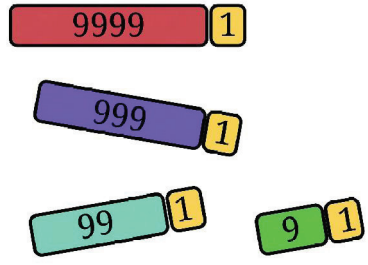
We see that 427 has 4 hundreds; thus, its corresponding remainder (upon division by 9) would be 4. 427 has 2 tens, and its corresponding remainder would be 2. We have 7 units also remaining. Adding all the remainders, we get 4 + 2 + 7 = 13. We can make one more group of 9 with 13, leaving a remainder of 4. Therefore, 427 ÷ 9 gives a remainder of 4.



APSCERT

? Will this work with bigger numbers?

You can see that this is true for any place value:



1 = 0 + 1

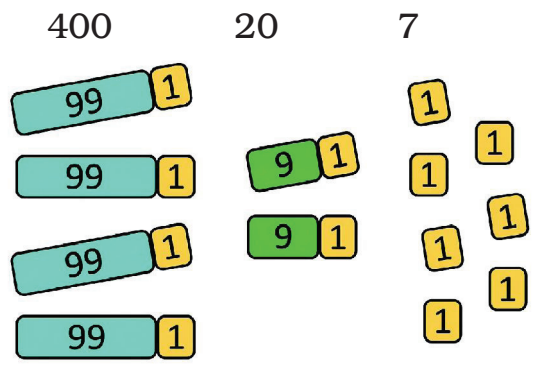
10 = 9 + 1

100 = 99 + 1

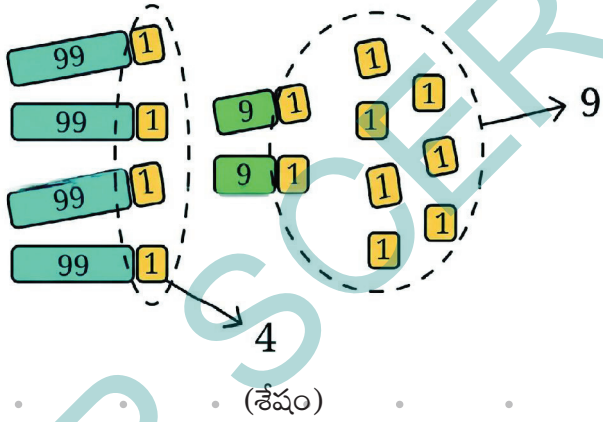
1000 = 999 + 1

10000 = 9999 + 1, and so on. Each digit thus denotes the remainder when the corresponding place value is divided by 9.

For example, to find the remainder of 7309 when divided by 9, we can just add all the digits - 7 + 3 + 0 + 9 - to get 19. This can be seen as follows:



427 లో 4 వందలు ఉన్నాయి; కాబట్టి 9తో భాగించినప్పుడు వాటికి సంబంధించిన శేషం 4 అవుతుంది. 427 లో 2 పదులు ఉన్నాయి; వాటికి సంబంధించిన శేషం 2 అవుతుంది. ఇంకా 7 ఒకట్లు కూడా ఉన్నాయి. 9 చే భాగించిన ఈ శేషాలన్నింటినీ కలిపితే: $4 + 2 + 7 = 13$ వస్తుంది. 13 తో మరో 9 గుణిజాల సమూహం ఏర్పచవచ్చు. అప్పుడు $13 - 9 = 4$ శేషం మిగులుతుంది. అందువల్ల, 427 ను 9తో భాగించినప్పుడు శేషం 4 వస్తుంది.



AP SCERT

? ఇది పెద్ద సంఖ్యలకూ పనిచేస్తుందా?

ఏ స్థాన విలువకైనా ఇది నిజమేనని మీరు గమనించవచ్చు:

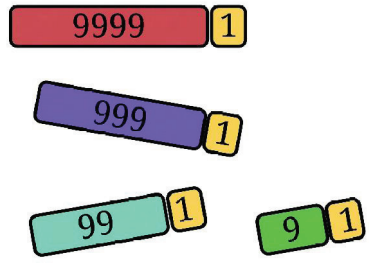
$1 = 0 + 1$

$10 = 9 + 1$

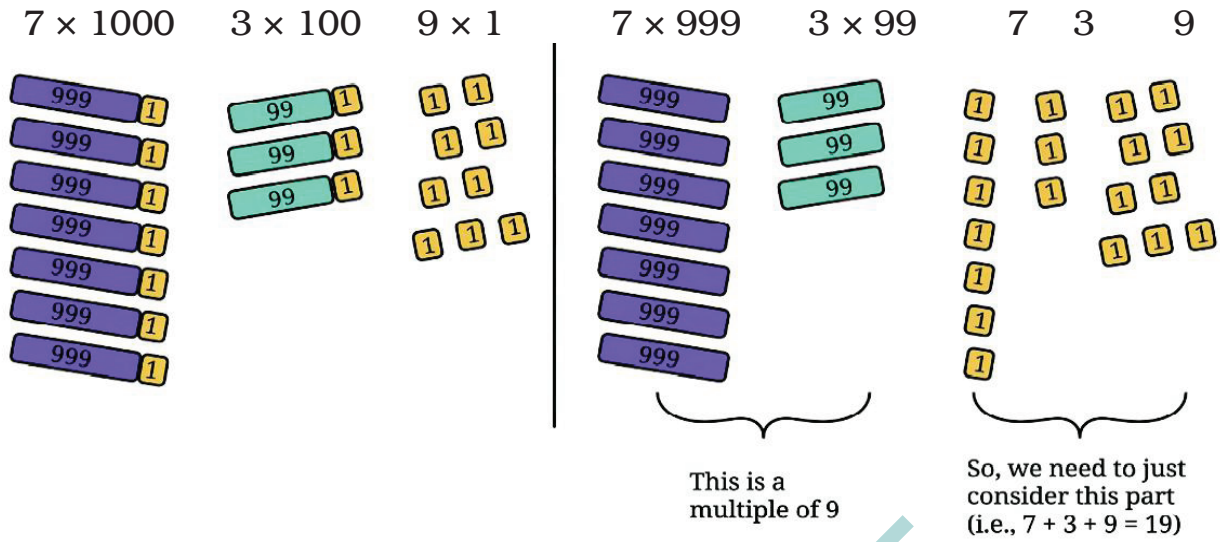
$100 = 99 + 1$

$1000 = 999 + 1$

$10000 = 9999 + 1$, ఇలా కొనసాగుతుంది. కాబట్టి ప్రతి స్థాన విలువను 9తో భాగించినప్పుడు శేషం 1 అవుతుంది. అందువల్ల ప్రతి అంకె, దాని స్థాన విలువను 9తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాన్ని సూచిస్తుంది.



ఉదాహరణకు, 7309 ను 9తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాన్ని కనుగొనాలంటే, అన్ని అంకెలను కలిపితే సరిపోతుంది: $7 + 3 + 0 + 9 = 19$ దీనిని ఈ విధంగా కూడా అర్థం చేసుకోవచ్చు: ఇది 9 యొక్క గుణిజం.



$7 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$

$= 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 0 \times (9 + 1) + 9 \times (0+1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 9 \times 1)$

$= \underline{(7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0)} + \underline{(7 + 3 + 0 + 9)}$.

This is a multiple of 9 So, we need to just consider this part

This means that the number 7309 is 19 more than some multiple of 9. The digits 1 and 9 can further be added to get 1 + 9 = 10. Now, we can say that 7309 is 10 more than a multiple of 9. And repeating this step for the number 10, we get the remainder to be 1 + 0 = 1, meaning 7309 is 1 more than a multiple of 9. Therefore, 7309 ÷ 9 gives a remainder of 1.

A number is divisible by 9 if and only if the sum of its digits is divisible by 9. Also, we can add the digits of a number repeatedly till a single digit is obtained. This single digit is the remainder when the number is divided by 9.

? Look at each of the following statements. Which are correct and why?

(i) If a number is divisible by 9, then the sum of its digits is divisible by 9.

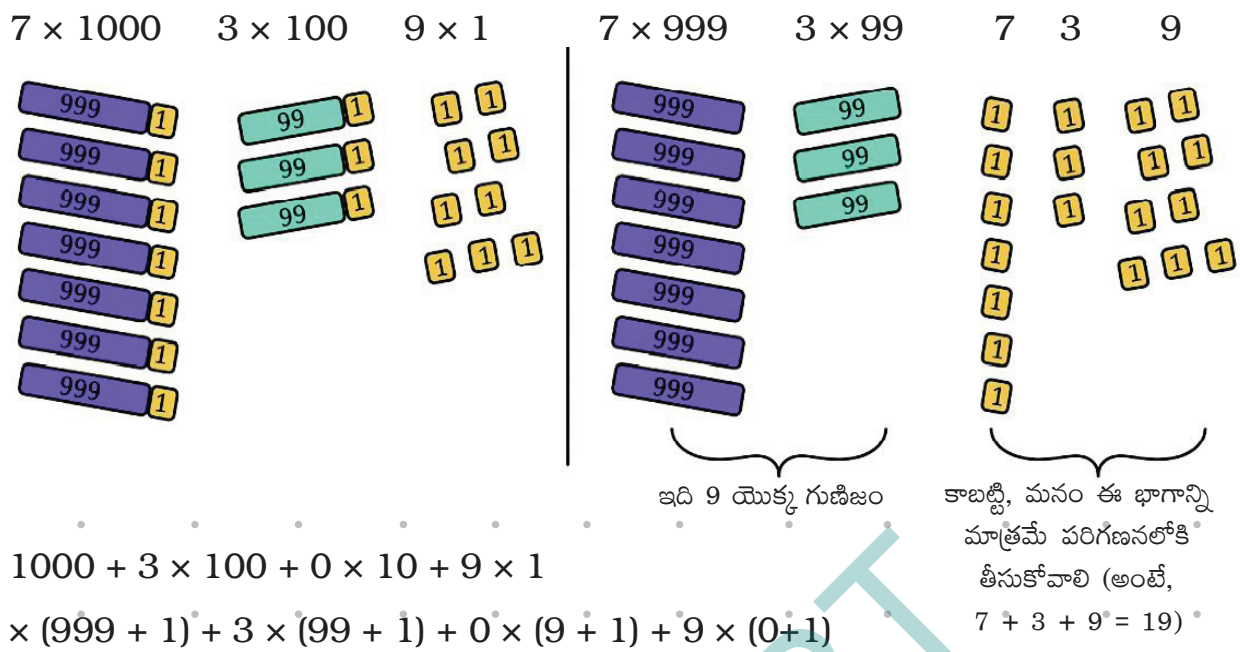
(ii) If the sum of the digits of a number is divisible by 9, then the number is divisible by 9.

(iii) If a number is not divisible by 9, then the sum of its digits is not divisible by 9.

(iv) If the sum of the digits of a number is not divisible by 9, then the number is not divisible by 9.

Learning maths is not just about knowing some shortcuts and following procedures but about understanding 'why' something works.

AP SCERT



$7 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$

$= 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 0 \times (9 + 1) + 9 \times (0+1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 9 \times 1)$

$= \underline{(7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0)} + \underline{(7 + 3 + 0 + 9)}.$

ఇది 9 యొక్క గుణిజం కాబట్టి, మనం ఈ భాగాన్ని మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి

అంటే 7309 అనేది 9 యొక్క ఏదో ఒక గుణిజం కంటే 19 ఎక్కువ. ఇప్పుడు 1 మరియు 9 అంకెలను మళ్లీ కలిపితే 1 + 9 = 10. అప్పుడు 7309 అనేది 9 యొక్క గుణిజం కంటే 10 ఎక్కువ అని చెప్పవచ్చు. ఈ ప్రక్రియను 10 పై మళ్లీ వర్తింపజేస్తే, 1 + 0 = 1. అంటే 7309 అనేది 9 యొక్క గుణిజం కంటే 1 ఎక్కువ. అందువల్ల, 7309 ÷ 9 చేసినప్పుడు శేషం 1 వస్తుంది.

ఒక సంఖ్య 9తో భాగించబడాలంటే మరియు భాగించబడితే మాత్రమే, దాని అంకెల మొత్తం 9తో భాగించబడాలి. అలాగే, ఒక సంఖ్య యొక్క అంకెలను మళ్లీ మళ్లీ కలుపుతూ ఒక అంకె వచ్చే వరకు కొనసాగించవచ్చు. ఆ ఒక్క అంకెనే ఆ సంఖ్యను 9తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషం.

? క్రింది ప్రతి ప్రకటనను పరిశీలించండి. ఏవి సరైనవి? ఎందుకు?

(i) ఒక సంఖ్య 9తో భాగించబడితే, దాని అంకెల మొత్తం కూడా 9తో భాగించబడుతుంది.

(ii) ఒక సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం 9తో భాగించబడితే, ఆ సంఖ్య కూడా 9తో భాగించబడుతుంది.

(iii) ఒక సంఖ్య 9తో భాగించబడకపోతే, దాని అంకెల మొత్తం కూడా 9తో భాగించబడదు.

(iv) ఒక సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం 9తో భాగించబడకపోతే, ఆ సంఖ్య కూడా 9తో భాగించబడదు.

గణితం నేర్చుకోవడం అంటే కేవలం కొన్ని సులభ మార్గాలను తెలుసుకుని విధానాలను అనుసరించడం మాత్రమే కాదు; ఏదైనా ఎందుకు పనిచేస్తుందో అర్థం చేసుకోవడం కూడా ముఖ్యము.

AP SCERT

Figure it Out - 5.2

1. Find, without dividing, whether the following numbers are divisible by 9.
   (i) 123 (ii) 405 (iii) 8888 (iv) 93547 (v) 358095
2. Find the smallest multiple of 9 with no odd digits.
3. Find the multiple of 9 that is closest to the number 6000.
4. How many multiples of 9 are there between the numbers 4300 and 4400?

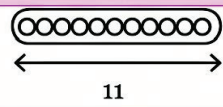
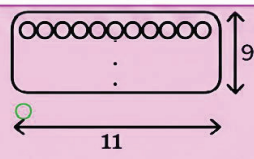
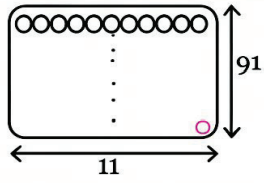
A Shortcut for Divisibility by 3

We know that all the multiples of 9 are also multiples of 3. That is, if a number is divisible by 9, it will also be divisible by 3. However, there are other multiples of 3 that are not multiples of 9 for example - 15, 33, and 87.

? The shortcut to find the divisibility by 3 is similar to the method for 9. A number is divisible by 3 if the sum of its digits is divisible by 3. Explore the remainders when powers of 10 are divided by 3. Explain why this method works.

A Shortcut for Divisibility by 11

Interestingly, the shortcut for 11 is also based on checking the remainders with place value. Let us see how.

Units place (1)	$11 \times 0 = 0$ $1 = 11 \times 0 + 1$	1 is one more than a multiple of 11.	
Tens place (10)	$11 \times 1 = 11$ $10 = 11 \times 1 - 1$	10 is one less than a multiple of 11.	
Hundreds place (100)	$11 \times 9 = 99$ $100 = 11 \times 9 + 1$	100 is one more than a multiple of 11.	
Thousands place (1000)	$11 \times 91 = 1001$ $1000 = 11 \times 91 - 1$	1000 is one less than a multiple of 11.	
⋮	⋮	⋮	⋮

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.2

1. భాగించకుండా, క్రింది సంఖ్యలు 9తో భాగించబడుతాయో లేదో కనుగొనండి:

   (i) 123 (ii) 405 (iii) 8888 (iv) 93547 (v) 358095

2. బేసి అంకెలు లేకుండా ఉండే 9 యొక్క అతి చిన్న గుణిజాన్ని కనుగొనండి.
3. 6000కు అత్యంత సమీపంలో ఉన్న 9 యొక్క గుణిజాన్ని కనుగొనండి.
4. 4300 మరియు 4400 మధ్య 9 యొక్క గుణిజాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

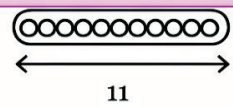
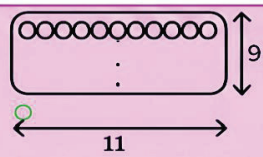
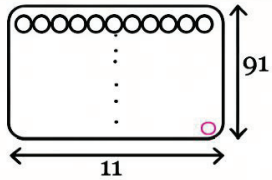
3చే భాజనీయతకు సులభ మార్గం

9 యొక్క అన్ని గుణిజాలు 3 యొక్క గుణిజాలే అని మనకు తెలుసు. అంటే ఒక సంఖ్య 9తో భాగించబడితే, అది 3తో కూడా భాగించబడుతుంది. అయితే 3 యొక్క కొన్ని గుణిజాలు 9 యొక్క గుణిజాలు కావు. ఉదాహరణకు – 15, 33 మరియు 87.

? 3తో భాగించబడుతుందో లేదో తెలుసుకునే సులభ మార్గం, 9 కోసం ఉపయోగించిన పద్ధతిని పోలి ఉంటుంది. ఒక సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం 3తో భాగించబడితే, ఆ సంఖ్య 3తో భాగించబడుతుంది. 10 యొక్క ఘాతాలను 3తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాలను పరిశీలించండి. ఈ పద్ధతి ఎందుకు పనిచేస్తుందో వివరించండి.

11చే భాజనీయతకు సులభ మార్గం

ఆసక్తికరంగా, 11 కోసం ఉన్న సులభ మార్గం కూడా స్థాన విలువతో శేషాలను పరిశీలించడం ఆధారంగా ఉంటుంది. ఇప్పుడు చూద్దాం.

ఒకట్ల స్థానం (1)	$11 \times 0 = 0$ $1 = 11 \times 0 + 1$	1 అనేది 11 యొక్క గుణిజం కంటే 1 ఎక్కువ	
పదుల స్థానం (10)	$11 \times 1 = 11$ $10 = 11 \times 1 - 1$	10 అనేది 11 యొక్క గుణిజం కంటే 1 తక్కువ	
వందల స్థానం (100)	$11 \times 9 = 99$ $100 = 11 \times 9 + 1$	100 అనేది 11 యొక్క గుణిజం కంటే 1 ఎక్కువ	
వేల స్థానం (1000)	$11 \times 91 = 1001$ $1000 = 11 \times 91 - 1$	1000 అనేది 11 యొక్క గుణిజం కంటే 1 తక్కువ	
⋮	⋮	⋮	⋮

AP SCERT

This alternating pattern of one more than 11 and one less than 11 continues for higher place values.

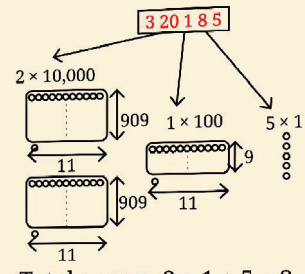
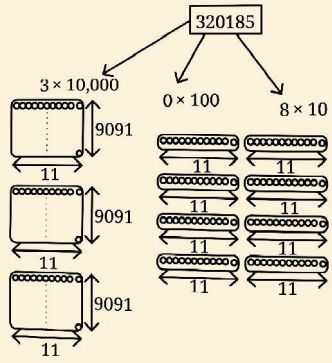
Since 400 contains 4 hundreds, 400 is 4 more than a multiple of 11 (396 + 4). Since 60 contains 6 tens, 60 is 6 less than a multiple of 11 (66 - 6). Since 2 contains 2 units, 2 is 2 more than a multiple of 11,

i.e., 2 = (0 + 2).

? Using these observations, can you tell whether the number 462 is divisible 11?

? What could be a general method or shortcut to check divisibility by 11?

We saw that the place values alternate as 1 more and 1 less than a multiple of 11. Using this observation,

Steps	Purpose	Example for the Number 320185
1. Add the digits of place values which are 1 more (than a multiple of 11), i.e., place values corresponding to 1,00,10000, and so on.	To know how much in excess we are with respect to a multiple of 11 for these place values	 Total excess, 2 + 1 + 5 = 8.
2. Add the digits of place values which are 1 less (than a multiple of 11 (, i.e., place values corresponding to 10, 1000, 100000, and so on.	To know how short we are with respect to a multiple of 11 for these palce values.	 Total short, 3 + 0 + 8 = 11.
3. Compute the difference between these two sums, i.e., (number in excess) - (number short).	To know the remainder obtained when divided by 11.	8–11 = –3 (3 short of a multiple of 11)

AP SCERT

11 కంటే ఒకటి ఎక్కువ, 11 కంటే ఒకటి తక్కువ అనే ఈ మార్పిడి విధానం, పెద్ద స్థాన విలువలకూ కొనసాగుతుంది.

400 లో 4 వందలు ఉన్నాయి. కాబట్టి 400 అనేది 11 యొక్క ఒక గుణిజం కంటే 4 ఎక్కువ. (396 + 4)

60 లో 6 పదులు ఉన్నాయి. కాబట్టి 60 అనేది 11 యొక్క ఒక గుణిజం కంటే 6 తక్కువ. (66 – 6)

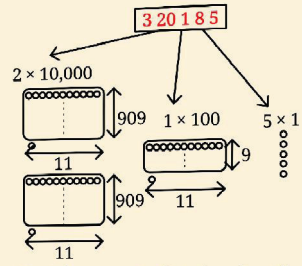
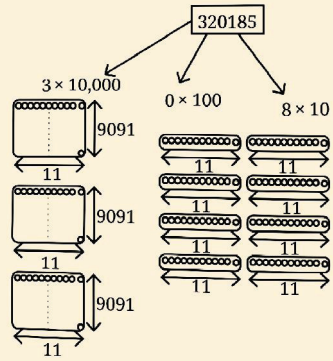
2 లో 2 ఒకట్లు ఉన్నాయి. కాబట్టి 2 అనేది 11 యొక్క ఒక గుణిజం కంటే 2 ఎక్కువ.

అంటే 2 = (0 + 2)

? ఈ పరిశీలనలను ఉపయోగించి, 462 అనేది 11తో భాగించబడుతుందో లేదో చెప్పగలరా?

? 11తో భాగించబడుతుందో లేదో తెలుసుకోవడానికి ఒక సాధారణ పద్ధతి లేదా సులభ మార్గం ఏమిటి?

మనం గమనించినట్లుగా, స్థాన విలువలు 11 యొక్క గుణిజం కన్నా ఒకసారి 1 ఎక్కువగా, మరొకసారి 1 తక్కువగా మారుతూ ఉంటాయి. ఈ పరిశీలనను ఉపయోగించి వివరించవచ్చు.

దశలు	ప్రయోజనం	320185 సంఖ్యకు ఉదాహరణ
1. 11 యొక్క గుణిజాల కంటే 1 ఎక్కువగా వుంటే స్థాన విలువలలోని అంకెలను కలపడం ఉదా: 1,100, 10000 ..... మొదలైన వాటికి అనుగుణమైన స్థాన విలువలు	ఈ స్థాన విలువల పరంగా 11 గుణిజం కంటే మనం ఎంత, ఎక్కువగా ఉన్నామో తెలుసుకోవడం కోసం.	 Total excess, 2 + 1 + 5 = 8.
2. 11 యొక్క గుణిజాల కంటే 1 తక్కువగా వుండే స్థాన విలువలలోని అంకెలను కలపడం. అంటే, 10,1000, 100000.... మొదలైన వాటికి అనుగుణమైన స్థాన విలువలు	ఈ స్థాన విలువలకు 11 గుణిజానికి సంబంధించి మనం ఎంత, తక్కువగా ఉన్నామో తెలుసుకోవడం కోసం.	 Total short, 3 + 0 + 8 = 11.
2. ఈ రెండు మొత్తాల మధ్య వ్యత్యాసాన్ని లెక్కించండి, అనగా, (అదనపు సంఖ్య) – (సంఖ్య చిన్నది).	11తో భాగించినప్పుడు లభించే శేషాన్ని తెలుసుకోవడ కోసం.	8 – 11= –3. (11 యొక్క గుణిజానికి 3 తక్కువ)

AP SCERT

The difference between these two sums 8 - 11 = - 3, indicating that the number 3,28,105 is 3 short of or 8 more than a multiple of 11.

? If this difference is 11 or a multiple of 11, what does that say about the remainder obtained when the number is divisible by 11?

? Using this shortcut, find out whether the following numbers are divisible by 11. Further, find the remainder if the number is not divisible by 11.

(i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076

Look at the following procedure -

Steps to follow	**Example for the number 328105**
1. Place alternating '+' and '-' signs before every digit starting from the unit's digit.	-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5
2. Evaluate the expression.	-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5 = - 3
3. The result denotes the remainder obtained when the number is divided by 11.	328105 is 3 less than or 8 more than a multiple of 11

? Is this method similar to or different from the method we saw just before?

? Fill in the following table. Find a quick way to do this?

Number	Divisible by								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
128	Yes	No	No	No	No	Yes	No	No	No
990									
1586									
275									
6686									
639210									
429714									
2856									
3060									
406839									

AP SCERT

ఈ రెండు మొత్తాల మధ్య తేడా 8 – 11 = –3. ఇది 3,28,105 అనే సంఖ్య 11 యొక్క గుణిజం కన్నా 3 తక్కువగా లేదా 8 ఎక్కువగా ఉందని సూచిస్తుంది.

? ఈ తేడా 11 లేదా 11 యొక్క గుణిజమైతే, ఆ సంఖ్యను 11తో భాగించినప్పుడు మిగులు గురించి ఏమి చెప్పగలం?

? ఈ సరళ విధానాన్ని ఉపయోగించి, క్రింది సంఖ్యలు 11తో భాగించబడతాయో లేదో తెలుసుకోండి. అలాగే, సంఖ్య 11తో పూర్తిగా భాగించబడకపోతే, మిగిలే శేషాన్ని కనుగొనండి.

(i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076

క్రింది విధానాన్ని గమనించండి –

అనుసరించాల్సిన దశలు	సంఖ్య 328105 కు ఉదాహరణ
1. ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభిస్తూ ప్రతి అంకె ముందు ప్రత్యామ్నాయంగా '+' మరియు '–' గుర్తులను ఉంచండి.	-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5
2. ఆ సమాసాన్ని గుణించండి.	-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5 = - 3
3. వచ్చే ఫలితం ఆ సంఖ్యను 11తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాన్ని సూచిస్తుంది.	328105 అనేది 11 యొక్క గుణిజం కన్నా 3 తక్కువ లేదా 8 ఎక్కువ

? ఈ విధానం మనం ముందుగా చూసిన విధానంతో సమానమా? లేక భిన్నమైనదా?

? క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయండి. దీన్ని వేగంగా చేయడానికి ఒక సరళమైన మార్గాన్ని కనుగొనండి.

సంఖ్య	భాగించే సంఖ్య								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
128	అవును	కాదు	కాదు	కాదు	కాదు	అవును	కాదు	కాదు	కాదు
990									
1586									
275									
6686									
639210									
429714									
2856									
3060									
406839									

AP SCERT

More on Divisibility Shortcuts

Divisibility Shortcuts for Other Numbers

? How can we find out if a number is divisible by 6?

? Will checking its divisibility by its factors 2 and 3 work? Use the shortcuts for 2 and 3 on these numbers and divide each number by 6 to verify - 38, 225, 186, 64.

? How about checking divisibility by 24? Will checking the divisibility by its factors, 4 and 6, work? Why or why not?

Determining divisibility by 24 by checking divisibility by 4 and by 6 does not work. For example, the number 12 is divisible by both 4 and 6, but not by 24.

To check for the divisibility by 24, we can instead check for the divisibility by 3 and divisibility by 8.

Explain using prime factorisation why checking divisibility by 3 and 8 works for checking divisibility by 24, but checking divisibility by 4 and 6 is not sufficient for checking divisibility by 24.

There are such shortcuts to check divisibility by every number until 100, and for some numbers beyond 100. You may try to understand how these work after learning certain concepts in higher grades.

AP SCERT

Digital Roots

Take a number. Add its digits repeatedly till you get a single-digit number. This single-digit number is called the digital root of the number. For example, the digital root of the number 489710 will be 2

$$4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29,\ 2 + 9 = 11,\ 1 + 1 = 2$$

? What property do you think this digital root will have? Recall that we did this while finding the divisibility shortcut for 9.

? Between the numbers 600 and 700, which numbers have the digital root: (i) 5, (ii) 7, (iii) 3?

? Write the digital roots of any 12 consecutive numbers. What do you observe?

We saw that the digital root of multiples of 9 is always 9.

మరికొన్ని భాజనీయత సులభ మార్గాలు

మరికొన్ని సంఖ్యల భాజనీయతకు సులభ మార్గాలు

? ఒక సంఖ్య 6తో భాగించబడుతుందో లేదో ఎలా తెలుసుకోవాలి?

? దాని కారణాంకాలు అయిన 2 మరియు 3తో భాగించబడుతుందో లేదో పరిశీలించడం సరిపోతుందా? 38, 225, 186, 64 అనే సంఖ్యలపై 2 మరియు 3 కోసం ఉన్న సరళ నియమాలను ఉపయోగించండి. ఆ తరువాత ప్రతి సంఖ్యను 6తో భాగించి మీ ఫలితాన్ని ధృవీకరించండి.

? 24తో భాగించుట ఎలా పరిశీలించాలి? ఒక సంఖ్య 24తో భాగించబడుతుందో లేదో ఎలా తెలుసుకోవాలి? దాని కారణాంకాలు 4 మరియు 6తో భాగించబడుతుందో లేదో చూసి నిర్ణయించవచ్చా? ఎందుకు?

24తో భాగించుటను 4 మరియు 6తో భాగించుటను పరీక్షించడం ద్వారా నిర్ణయించడం సరిపోదు. ఉదాహరణకు, 12 అనే సంఖ్య 4తోను 6తోను భాగించబడుతుంది, కానీ 24తో భాగించబడదు.

24తో భాగించుటను పరిశీలించాలంటే, 3తో మరియు 8తో భాగించబడుతుందో లేదో చూడాలి. ప్రధాన కారణాంక విభజన ద్వారా వివరణ 24తో భాగించబడటాన్ని తనిఖీ చేయడానికి 3 మరియు 8తో భాగించబడటాన్ని తనిఖీ చేయడం ఎందుకు సరిపోతుందో, కాని 4 మరియు 6తో భాగించబడటాన్ని తనిఖీ చేయడం 24తో భాగించబడటాన్ని తనిఖీ చేయడానికి ఎందుకు సరిపోదో ప్రధాన కారణాంకాలు విభజన ఉపయోగించి వివరించండి.

100 వరకు ప్రతి సంఖ్యకు ఇటువంటి సరళ నియమాలు ఉన్నాయి. 100కు మించి కొన్ని సంఖ్యలకూ ఉన్నాయి. పై తరగతుల్లో మరిన్ని భావనలు నేర్చుకున్న తర్వాత వాటి పని విధానాన్ని అర్థం చేసుకోవచ్చు.

అంకమూలాలు

ఒక సంఖ్యను తీసుకుని, దాని అంకెలను కలుపుతూ చివరికి ఒక అంకె మాత్రమే మిగిలే వరకు కలుపుతూ వెళ్లాలి. ఆ ఒక్క అంకెను ఆ సంఖ్య యొక్క అంక మూలం అంటారు. ఉదాహరణకు 489710 సంఖ్య యొక్క అంకమూలం 2.

$$4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29,\ 2 + 9 = 11,\ 1 + 1 = 2$$

? ఈ అంక మూలానికి ఏ లక్షణం ఉందని మీరు భావిస్తున్నారు? 9తో భాగించుటకు సరళ నియమాన్ని గుర్తు చేసుకోండి.

? 600 మరియు 700 మధ్య ఉన్న సంఖ్యలలో అంక మూలం (i) 5, (ii) 7, (iii) 3 ఉన్న సంఖ్యలను కనుగొనండి.

? ఏదైనా వరుసగా ఉన్న 12 సంఖ్యల అంక మూలాలను వ్రాయండి. మీరు ఏమి గమనిస్తున్నారు?

9 యొక్క గుణిజాల అంక మూలం ఎల్లప్పుడూ 9 అవుతుంది.

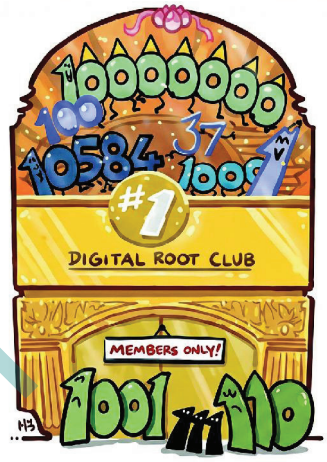
AP SCERT

? Now, find the digital roots of some consecutive multiples of (i) 3, (ii) 4, and (iii) 6.

? What are the digital roots of numbers that are 1 more than a multiple of 6? What do you notice?

Try to explain the patterns noticed.

? I'm made of digits, each tiniest and odd, No shared ground with root #1 - how odd!
My digits count, their sum, my root - All point to one bold number's pursuit -
The largest odd single-digit I proudly claim. What's my number? What's my name?



Aryabhata II's (c. 950 CE) work mentions the method of computing the digital root of a number by repeatedly adding the digits till a single-digit number is obtained. This method is known to have been used to perform checks on calculations of arithmetic operations.

Figure it Out - 5.3

1. The digital root of an 8-digit number is 5. What will be the digital root of 10 more than that number?
2. Write any number. Generate a sequence of numbers by repeatedly adding 11. What would be the digital roots of this sequence of numbers? Share your observations.
3. What will be the digital root of the number 9a + 36b + 13?
4. Make conjectures by examining if there are any patterns or relations between
   (i) the parity of a number and its digital root.
   (ii) the digital root of a number and the remainder obtained when the number is divided by 3 or 9.

5.3 Digits in Disguise

Last year, we saw cryptarithms - puzzles where each letter stands for a digit, each digit is represented by at most one letter, and the first digit of a number is never 0.

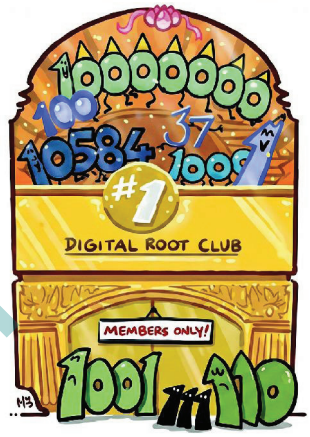
APSCERT

? ఇప్పుడు (i) 3, (ii) 4, (iii) 6 యొక్క వరుస గుణిజాల అంక మూలాలను కనుగొనండి..

? 6 యొక్క గుణిజంకన్నా 1 ఎక్కువగా ఉన్న సంఖ్యల అంక మూలాలు ఏమిటి? మీరు ఏమి గమనిస్తున్నారు? గమనించిన నమూనాలను వివరించడానికి ప్రయత్నించండి.

పద్య రహస్యం నేను అంకెలతో నిర్మితుడిని, ప్రతి అంకె బేసి సంఖ్య. 1తో నాకు ఏ సాధారణ గుణకం లేదు.

? నేను అంకెలతో కూడిన ఒక సంఖ్యను. నా అంకెలలో ప్రతి ఒక్కటి చిన్నదైన బేసి సంఖ్య; అవి #1తో ఏ సంబంధం కలిగి లేవు. ఆశ్చర్యంగా ఉంది కదా! నా అంకెల సంఖ్య, వాటి మొత్తం, వాటి మూలం – ఇవన్నీ ఒకే ప్రత్యేక సంఖ్యను సూచిస్తున్నాయి. నేను అతి పెద్ద బేసి ఒక అంకె సంఖ్యను. చెప్పండి, నా సంఖ్య ఏమిటి? నా పేరు ఏమిటి?



ఆర్యభట్టు – II (సుమారు క్రీస్తుశకం 950) రచించిన మహాసిద్ధాంత గ్రంథంలో, ఒక సంఖ్య యొక్క అంక మూలాన్ని దాని అంకెలను మరలా మరలా / పదే పదే కలుపుతూ చివరకు ఒక అంకె మాత్రమే మిగిలే వరకు పొందే విధానాన్ని పేర్కొన్నారు. ఈ విధానాన్ని అంక గణిత ప్రక్రియల ఫలితాలను తనిఖీ చేయడానికి ఉపయోగించినట్లు తెలుస్తుంది.

ఆలోచించండి–చేయండి – 5.3

1. ఒక ఎనిమిది అంకెల సంఖ్య యొక్క అంక మూలం 5 అయితే, ఆ సంఖ్యకు 10ను కలిపితే వచ్చే కొత్త సంఖ్య యొక్క అంక మూలం ఎంత అవుతుంది?
2. ఏదైనా ఒక సంఖ్యను వ్రాయండి. దానికి వరుసగా 11ను కలుపుతూ సంఖ్యల శ్రేణిని తయారు చేయండి. ఆ శ్రేణిలో వచ్చే సంఖ్యల అంక మూలాలు ఏమిటి? మీ పరిశీలనలను పంచుకోండి.
3. $9a + 36b + 13$ అనే సంఖ్య యొక్క అంక మూలం ఎంత అవుతుంది?
4. క్రింది విషయాల మధ్య ఏవైనా నమూనాలు లేదా సంబంధాలు ఉన్నాయేమో పరిశీలించి ఊహించండి.
   (i) ఒక సంఖ్య సరి సంఖ్యా లేదా బేసి సంఖ్యా అనే లక్షణం మరియు దాని అంక మూలం మధ్య సంబంధం.
   (ii) ఒక సంఖ్య యొక్క అంక మూలం మరియు ఆ సంఖ్యను 3 లేదా 9తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషం మధ్య సంబంధం.

5.3 వివిధ రూపాల్లో అంకెలు

గత సంవత్సరం మనం క్రిప్టారిథమ్స్ మరియు పజిల్స్ చూశాం – ఇందులో ప్రతి అక్షరం ఒక అంకెకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. ప్రతి అంకెకు గరిష్టంగా ఒకే అక్షరం ఉంటుంది. అలాగే ఏ సంఖ్యలోనైనా మొదటి అంకె 0 కాకూడదు.

AP SCERT

Solve the cryptarithms given below.

(i)
$$\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} ON \\ ON \\ +\ ON \\ \hline PO \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} QR \\ QR \\ +\ QR \\ \hline PRR \end{array}$$

Let us now try solving some cryptarithms involving multiplication.

(v) PQ × 8 = RS.

Guna says, "Oh, this means a 2-digit number multiplied by 8 should give another 2-digit number. I know that 10 × 8 = 80. But the units digits of 10 and 80 are the same, which we don't want. For the same reason PQ cannot be 11 as P and Q correspond to different digits. 12 × 8 = 96 fits all the conditions". Can PQ be 13? Think.

It is not possible because 13 × 8 = 104. For all 2-digit numbers greater than 12, the product with 8 is a 3-digit number.

(vi) Try this now: GH × H = 9K.

This means a 2-digit number multiplied by a 1-digit number gives another 2-digit number in the 90s. Observe the letters corresponding to the units digits in this cryptarithm. Pick the solution to this question from the options given below:

11 × 9 = 99, 12 × 8 = 96, 46 × 2 = 92, 24 × 4 = 96, 47 × 2 = 94, 31 × 3 = 93, 16 × 6 = 96.

(vii) Here is one more: BYE × 6 = RAY.

Anu says, "Since the product is a 3-digit number, B can't be 2 or more. If B = 2, i.e., 2 hundreds, the product will be more than 1200. So, B = 1."

What can you say about 'Y'? What digits are possible/not possible?

"Y cannot be 7 or more because, if Y = 7, then 170 × 6 = 1020; but we want a 3-digit product. Also, Y will be even", Anu explains.

We can solve cryptarithms using patterns, properties, and reasoning related to numbers and operations.

Solve the following:

(i) UT × 3 = PUT (ii) AB × 5 = BC (iii) L2N × 2 = 2NP

(iv) XY × 4 = ZX (v) PP × QQ = PRP (vi) JK × 6 = KKK

AP SCERT

? క్రింది అక్షర క్రిప్టారిధమ్స్‌ను పరిష్కరించండి.

(i)
$$\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} ON \\ ON \\ +\ ON \\ \hline PO \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} QR \\ QR \\ +\ QR \\ \hline PRR \end{array}$$

ఇప్పుడు గుణకారాన్ని కలిగిన కొన్నిక్రిప్టారిధమ్స్ ను పరిష్కరించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

? (v) $PQ \times 8 = RS$.

గుణ ఇలా చెప్పను. "అయ్యో! అంటే ఒక రెండు అంకెల సంఖ్యను 8తో గుణిస్తే మరో రెండు అంకెల సంఖ్య రావాలి. $10 \times 8 = 80$ అని నాకు తెలుసు. కానీ 10 మరియు 80లో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు ఒకేలా ఉన్నాయి. అది మనకు అవసరం లేదు. అదే కారణంతో $PQ = 11$ కూడా కాదు, ఎందుకంటే P మరియు Q వేర్వేరు అంకెలకు ప్రతినిధ్యం వహించాలి. $12 \times 8 = 96$ అన్ని నిబంధనలకు సరిపోతుంది." $PQ = 13$ కావచ్చా? ఆలోచించండి.

అది సాధ్యం కాదు, ఎందుకంటే $13 \times 8 = 104$. 12 కంటే పెద్దవైన రెండు అంకెల సంఖ్యలన్నింటినీ 8తో గుణిస్తే, ఫలితం మూడు అంకెల సంఖ్య అవుతుంది.

? (vi) ఇప్పుడు దీన్ని ప్రయత్నించండి: $GH \times H = 9K$.

ఇది ఒక రెండు అంకెల సంఖ్యను ఒక ఒక అంకెల సంఖ్యతో గుణిస్తే, 90లలో ఉండే మరో రెండు అంకెల సంఖ్య వస్తుందని సూచిస్తుంది. ఈ అక్షర గణితంలో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలకు సంబంధించిన అక్షరాలను గమనించండి క్రింది ఎంపికలలో ఈ ప్రశ్నకు సరైన పరిష్కారాన్ని గుర్తించండి:

$11 \times 9 = 99$, $12 \times 8 = 96$, $46 \times 2 = 92$, $24 \times 4 = 96$, $47 \times 2 = 94$, $31 \times 3 = 93$, $16 \times 6 = 96$.

? (vii) ఇంకొకటి చూద్దాం: $BYE \times 6 = RAY$

అను ఇలా చెప్పను: "ఫలితం మూడు అంకెల సంఖ్య కావాలి కాబట్టి, $B = 2$ లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా ఉండదు. $B = 2$ అయితే (అంటే 200లలో ఉంటే), గుణిత ఫలితం 1200 కంటే ఎక్కువ అవుతుంది. అందువల్ల $B = 1$." ఇప్పుడు Y గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఏ అంకెలు సాధ్యం? ఏవి సాధ్యం కావు?

? $Y = 7$ లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా ఉండదు. ఎందుకంటే $Y = 7$ అయితే, $170 \times 6 = 1020$ అవుతుంది. కానీ మనకు మూడు అంకెల ఫలితం కావాలి. అలాగే సరిసంఖ్య అయి ఉండాలి," అని అను వివరిస్తుంది.

సంఖ్యల లక్షణాలు, సంఖ్యాక్రమం నియమాలు, మరియు తార్కిక ఆలోచనలను ఉపయోగించి క్రిప్టారిధమ్స్ ను పరిష్కరించవచ్చు.

? ఇప్పుడు క్రింది సమస్యలను పరిష్కరించండి.

(i) $UT \times 3 = PUT$ (ii) $AB \times 5 = BC$ (iii) $L2N \times 2 = 2NP$

(iv) $XY \times 4 = ZX$ (v) $PP \times QQ = PRP$ (vi) $JK \times 6 = KKK$

AP SCERT

Figure it Out - 5.4

1. If 31z5 is a multiple of 9, where z is a digit, what is the value of z? Explain why there are two answers to this problem.
2. "I take a number that leaves a remainder of 8 when divided by 12. I take another number which is 4 short of a multiple of 12. Their sum will always be a multiple of 8", claims Sonu. Examine his claim and justify your conclusion.
3. When is the sum of two multiples of 3, a multiple of 6 and when is it not? Explain the different possible cases, and generalise the pattern.
4. Sreelatha says, "I have a number that is divisible by 9. If I reverse its digits, it will still be divisible by 9".

(i) Examine if her conjecture is true for any multiple of 9.

(ii) Are any other digit shuffles possible such that the number formed is still a multiple of 9?

5. If 48a23b is a multiple of 18, list all possible pairs of values for a and b.
6. If 3p7q8 is divisible by 44, list all possible pairs of values for p and q.
7. Find three consecutive numbers such that the first number is a multiple of 2, the second number is a multiple of 3, and the third number is a multiple of 4.

   Are there more such numbers? How often do they occur?

Try This

8. Write five multiples of 36 between 45,000 and 47,000. Share your approach with the class.
9. The middle number in the sequence of 5 consecutive even numbers is 5p. Express the other four numbers in sequence in terms of p.
10. Write a 6-digit number that it is divisible by 15, such that when the digits are reversed, it is divisible by 6.
11. Deepak claims, "There are some multiples of 11 which, when doubled, are still multiples of 11. But other multiples of 11 don't remain multiples of 11 when doubled". Examine if his conjecture is true; explain your conclusion.

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.4

1. 31z 5 అనే సంఖ్య 9 యొక్క గుణిజం అయితే (ఇక్కడ z ఒక అంకె), z విలువ ఎంత? ఈ ప్రశ్నకు రెండు సమాధానాలు ఎందుకు వస్తాయో వివరించండి.
2. "12తో భాగించినప్పుడు 8 మిగులు వచ్చే ఒక సంఖ్యను తీసుకుంటాను. మరొక సంఖ్య 12 యొక్క గుణిజం కంటే 4 తక్కువగా ఉంటుంది. వాటి మొత్తం ఎల్లప్పుడూ 8 యొక్క గుణిజం అవుతుంది" అని సోను అంటున్నాడు. ఆయన వాదనను పరిశీలించి, మీ నిర్ణయాన్ని సమర్థించండి.
3. 3 యొక్క రెండు గుణిజాల మొత్తం ఎప్పుడు 6 యొక్క గుణిజం అవుతుంది? ఎప్పుడు కాదు? వివిధ సందర్భాలను వివరించి, సాధారణ నియమాన్ని చెప్పండి.
4. శ్రీలత ఇలా అంటుంది: "నా వద్ద 9తో భాగించబడే ఒక సంఖ్య ఉంది. దాని అంకెలను తిరగబెడితే కూడా అది 9తో భాగించబడుతుంది."

(i) ఆమె ఊహ 9 యొక్క ఏ గుణిజానికైనా సరిపోతుందో లేదో పరిశీలించండి.

(ii) అంకెలను ఇతర విధాలుగా మార్చినా కూడా, ఏర్పడే సంఖ్య 9 యొక్క గుణిజంగా ఉండే అవకాశాలున్నాయా?

5. 48a23b అనే సంఖ్య 18 యొక్క గుణిజం అయితే, a మరియు b కు సాధ్యమైన అన్ని విలువల జతలను వ్రాయండి.
6. 3p7q8 అనే సంఖ్య 44తో భాగించబడితే, p మరియు qకు సాధ్యమైన అన్ని విలువల జతలను వ్రాయండి.
7. మొదటి సంఖ్య 2 యొక్క గుణిజం, రెండవ సంఖ్య 3 యొక్క గుణిజం, మూడవ సంఖ్య 4 యొక్క గుణిజమయ్యే విధంగా వరుసగా ఉన్న మూడు సంఖ్యలను కనుగొనండి. ఇలాంటి మరిన్ని సంఖ్యలున్నాయా? అవి ఎంత తరచుగా వస్తాయి?

ప్రయత్నించండి

8. 45,000 మరియు 47,000 మధ్య ఉన్న 36 యొక్క ఐదు గుణిజాలను వ్రాయండి. మీ విధానాన్ని తరగతితో పంచుకోండి.
9. వరుసగా ఉన్న ఐదు సరి సంఖ్యలలో మధ్య సంఖ్య 5p అయితే, మిగిలిన నాలుగు సంఖ్యలను p రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
10. అంకెలను తిరగరాసినప్పుడు 6తో భాగించబడేలా, అలాగే అసలు సంఖ్య 15తో భాగించబడేలా ఒక ఆరు అంకెల సంఖ్యను వ్రాయండి.
11. దీపక్ ఇలా అంటున్నాడు: "11 యొక్క కొన్ని గుణిజాలను రెండింతలు చేసినా అవి 11 యొక్క గుణిజాలుగానే ఉంటాయి. కానీ కొన్ని 11 యొక్క గుణిజాలు రెండింతలు చేసినప్పుడు 11 యొక్క గుణిజాలుగా ఉండవు." అతని ఊహ సరైందో కాదో పరిశీలించి, మీ నిర్ణయాన్ని వివరించండి.

AP SCERT

12. Determine whether the statements below are 'Always True', 'Sometimes True', or 'Never True'. Explain your reasoning.

(i) The product of a multiple of 6 and a multiple of 3 is a multiple of 9.

(ii) The sum of three consecutive even numbers will be divisible by 6.

(iii) If abcdef is a multiple of 6, then badcef will be a multiple of 6.

(iv) 8 (7b - 3) - 4 (11b + 1) is a multiple of 12.

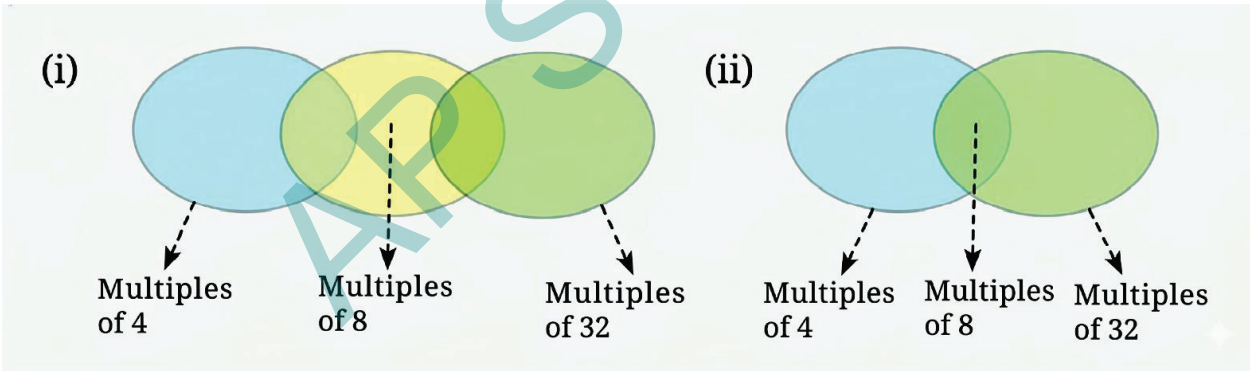
13. Choose any 3 numbers. When is their sum divisible by 3? Explore all possible cases and generalise.

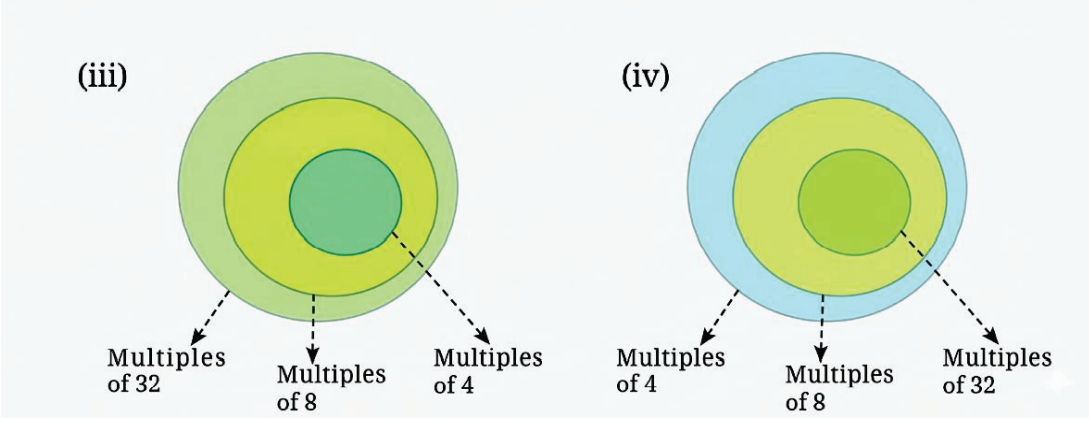
14. Is the product of two consecutive integers always multiple of 2? Why? What about the product of these consecutive integers? Is it always a multiple of 6? Why or why not? What can you say about the product of 4 consecutive integers? What about the product of five consecutive integers?

15. Solve the cryptarithms -

(i) EF × E = GGG (ii) WOW × 5 = MEOW

16. Which of the following Venn diagrams captures the relationship between the multiples of 4, 8, and 32?





APSCERT

12. క్రింది వాక్యాలు 'ఎల్లప్పుడూ సత్యం', 'కొన్ని సందర్భాల్లో సత్యం', లేదా 'ఎప్పుడూ సత్యం కాదు' అని నిర్ణయించండి. మీ కారణాన్ని వివరించండి.

(i) 6 యొక్క గుణిజం మరియు 3 యొక్క గుణిజాల లబ్ధం 9 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

(ii) మూడు వరుసగా ఉన్న సరిసంఖ్యల మొత్తం 6తో భాగించబడుతుంది.

(iii) abcdef అనే సంఖ్య 6 యొక్క గుణిజం అయితే, badcef కూడా 6 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

(iv) 8 (7b - 3) - 4 (11b + 1) అనేది 12 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.

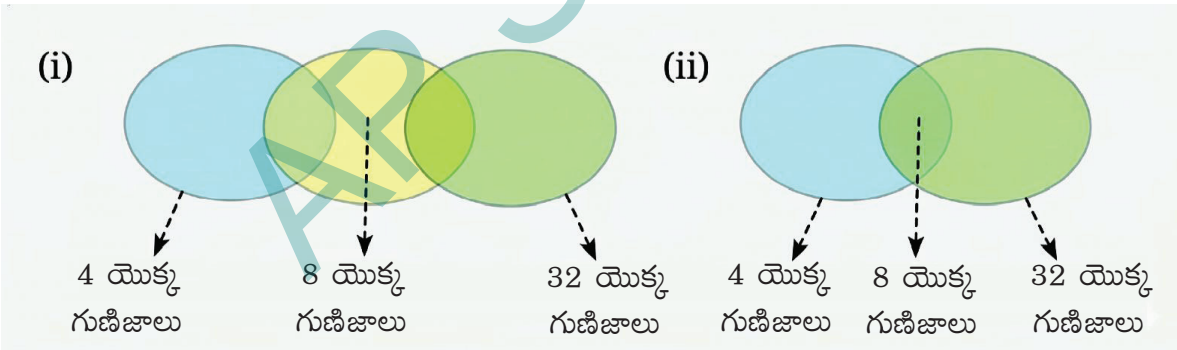
13. ఏవైనా మూడు సంఖ్యలను ఎంచుకోండి. వాటి మొత్తం ఎప్పుడు 3తో భాగించబడుతుంది? అన్ని సాధ్యమైన సందర్భాలను పరిశీలించి సాధారణ నియమాన్ని చెప్పండి.

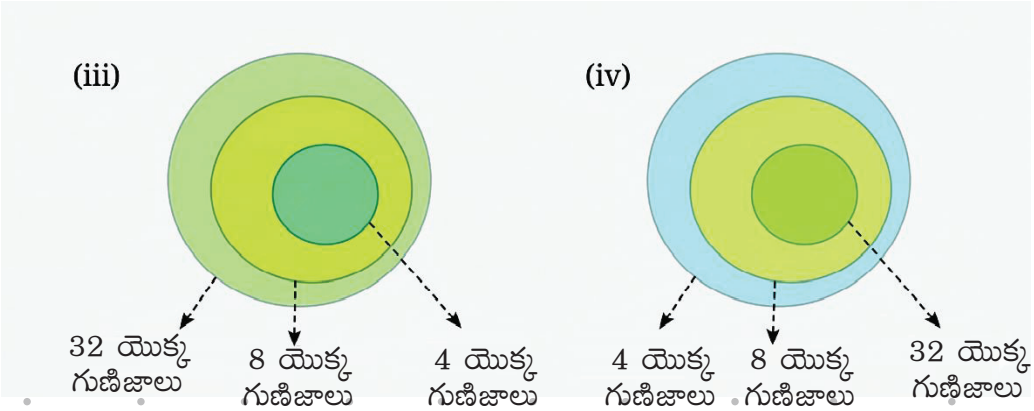
14. రెండు వరుస పూర్ణాంకాల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ 2 కి గుణిజమా? ఎందుకు? ఈ వరుస పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం గురించి ఏమిటి? ఇది ఎల్లప్పుడూ 6 కి గుణిజమా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు? 4 వరుస పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఐదు వరుస సంఖ్యల లబ్ధం గురించి ఏమి చెప్పగలవు?

15. క్రింది క్రిప్టారిథమ్స్ ను పరిష్కరించండి –

(i) EF × E = GGG (ii) WOW × 5 = MEOW

16. క్రింది వెన్ చిత్రాలలో 4, 8, 32 యొక్క గుణిజాల మధ్య సంబంధాన్ని సరైన విధంగా చూపేది ఏది?





AP SCERT

SUMMARY

- We explored and learnt various properties of divisibility-
  - If a is divisible by b, then all multiples of a are divisible by b.
  - If a is divisible by b, then a is divisible by all the factors of b.
  - If a divides m and a divides n, then a divides m + n and m - n.
  - If a is divisible by b and is also divisible by c, then a is divisible by the LCM of b and c.
- We learnt shortcuts to check divisibility by 3, 9 and 11, and why they work.
- Through all this we were exposed to the power of mathematical thinking and reasoning, using algebra, visualisation, examples and counterexamples.

APSCERT

Think and Disscuss

1. The Palindrome Secret - 4-Digit Number

A four-digit "palindrome" reads the same forward and backward, like 5225 or 7117.

- Check if 5225 is divisible by 11.
- Check if 7117 is divisible by 11.

Is every four-digit palindrome a multiple of 11?

2. The Repeating Triple

Write down a six-digit number where the first three digits repeat exactly, such as 123,123 or 456,456.

- Divide your number by 11. Is there a remainder?

సారాంశం

- మనం భాగించుటకు సంబంధించిన వివిధ లక్షణాలను పరిశీలించి నేర్చుకున్నాం–
  - a అనే సంఖ్య, b తో భాగించబడితే, a యొక్క అన్ని గుణిజాలు కూడా bతో భాగించబడతాయి.
  - a అనే సంఖ్య, b తో భాగించబడితే, b యొక్క అన్ని కారణాంకాలు కూడా a ని భాగిస్తాయి.
  - a అనే సంఖ్య, b ను మరియు n ను భాగిస్తే, m + n ను మరియు m - n అను కూడా భాగిస్తుంది.
  - a అనే సంఖ్య, b తో మరియు cతో భాగించబడితే, a అనేది b మరియు cల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు) తో భాగించబడుతుంది.
- 3, 9 మరియు 11తో భాగించుటను పరిశీలించడానికి సరళ నియమాలను నేర్చుకున్నాం, అలాగే అవి ఎందుకు పనిచేస్తాయో అర్థం చేసుకున్నాం.
- ఈ ప్రక్రియల ద్వారా బీజగణితం, దృశ్యీకరణ, ఉదాహరణలు మరియు (ప్రత్యుదాహరణలు) ఉపయోగిస్తూ గణిత ఆలోచనా శక్తి మరియు తార్కికత యొక్క ప్రభావాన్ని గ్రహించాము.

AP SCERT

ఆలోచించండి మరియు చర్చించండి

1. పాలిండ్రోమ్ రహస్యం – 4–అంకెల సంఖ్య

ముందు నుండి చదివినా, వెనుక నుండి చదివినా ఒకేలా ఉండే నాలుగంకెల సంఖ్యలను "పాలిండ్రోమ్" అంటారు (ఉదాహరణకు: 5225 లేదా 7117).

- 5225సంఖ్య 11 చేత నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుందో లేదో చూడండి.
- 7117సంఖ్య 11 చేత నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుందో లేదో చూడండి.

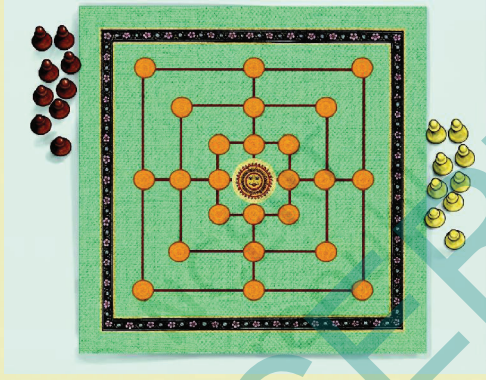
ప్రతి నాలుగంకెల పాలిండ్రోమ్ సంఖ్య 11 యొక్క గుణిజమేనా?

2. రిపీటింగ్ ట్రిపుల్

మొదటి మూడు అంకెలు మళ్ళీ పునరావృతమయ్యేలా ఒక ఆరంకెల సంఖ్యను రాయండి. (ఉదాహరణకు: 123, 123 లేదా 456, 456).

- మీరు రాసిన ఆ సంఖ్యను 11 తో భాగించండి. శేషం ఎంత వస్తుంది?

Navakankari, also known as Salu Mane ata, Char-Par, or Navkakri, is a traditional Indian board game that is the same as ?Nine Men's Morris' or 'Mills in the West'. It is a strategy game for two players where the goal is to form lines of three pawns to eliminate the opponent's pawns or block their movement.



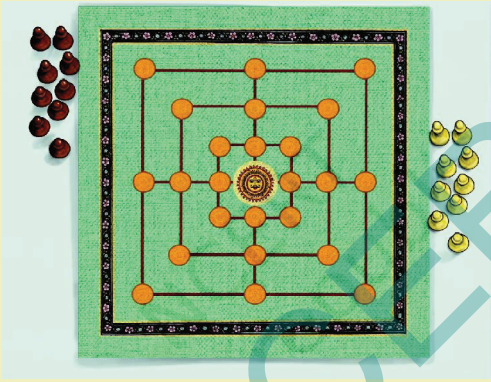
Gameplay

1. Each player starts with 9 pawns. The players take turns in placing their pawns on the marked intersections. An intersection can have at most one pawn.
2. Once all the pawns are placed, the players take turns to move one of their pawns to adjacent empty intersections to form lines of three. The line can be horizontal or vertical.
3. Once a player makes a line with their pawns they can remove any one of the opponent's pawns as long as it is not a part of one of their lines.
   A player wins if the opponent has less than 3 pawns or is unable to make a move.

AP SCERT

నవకంకరి

నవకంకరి, సాలు మానే అటా, చార్–పార్ లేదా నవకాక్రి అని కూడా పిలుస్తారు, ఇది ఒక సాంప్రదాయ భారతీయ బోర్డు గేమ్, ఇది పాశ్చాత్య దేశాలలో ప్రసిద్ధి చెందిన 'నైన్ మెన్స్ మోరిస్' లేదా 'మిల్స్ ఇన్ ది వెస్ట్' లాంటిది. ఇది ఇద్దరు ఆటగాళ్లకు ఒక వ్యూహాత్మక గేమ్, ఇక్కడ లక్ష్యం ప్రత్యర్థి బంటులను తొలగించడానికి లేదా వారి కదలికను నిరోధించడానికి మూడు బంటుల రేఖలను ఏర్పరచడం.



ఆట విధానం

1. ప్రతి ఆటగాడు 9 బంటులతో ఆటను ప్రారంభిస్తాడు. ఆటగాళ్లు మారుమారుగా తమ బంటులను గుర్తించిన కూడళ్లపై ఉంచుతారు. ప్రతి కూడలిలో గరిష్టంగా ఒక బంటి మాత్రమే ఉండాలి.
2. అన్ని బంటులను ఉంచిన తరువాత, ఆటగాళ్లు మారుమారుగా తమ బంటులలో ఒకదాన్ని పక్కనున్న ఖాళీ కూడలికి కదిలిస్తూ మూడు బంటులు ఒక సరళ రేఖలో రావడానికి ప్రయత్నిస్తారు. ఆ రేఖ అడ్డంగా లేదా నిలువుగా ఉండవచ్చు.
3. ఒక ఆటగాడు తన బంటులతో మూడు బంటులు ఒక రేఖలో అమర్చినప్పుడు, ప్రత్యర్థి బంటులలో ఒకదాన్ని తీసివేయవచ్చు. అయితే అది ప్రత్యర్థి ఇప్పటికే ఏర్పరచిన మూడు బంటుల రేఖలో భాగంగా ఉండకూడదు. ప్రత్యర్థి వద్ద మూడు కంటే తక్కువ బంటులు మిగిలినా లేదా కదలిక చేయలేని స్థితిలో ఉన్నా, ఆ ఆటగాడు గెలుస్తాడు.

AP SCERT

6 WE DISTRIBUTE, YET THINGS MULTIPLY

Learning outcomes

F1X5K2

By the end of this chapter, learner will be able to:

- Reduce complex expressions into simpler forms using distribution. (CG-2)
- Simplify algebraic expressions, expand brackets, perform rapid mental calculations. (CG-2)
- Apply these techniques to algebraic problems and practical scenarios. (CG-10)
- Utilize distribution to calculate products quickly. (CG-2)
- Identify patterns in numeric and algebraic expressions. (CG-1)
- Use distributive property as the foundation for algebra. (CG-2)
- Identify that this chapter acts as a bridge between basic arithmetic and more complex algebraic thinking. (CG-2)

AP SCERT

6.0 Introduction

We have seen how algebra makes use of letter symbols to write general statements about patterns and relations in a compact manner. Algebra can also be used to justify or prove claims and conjectures (like the many properties you saw in the previous chapter) and to solve problems of various kinds.

Distributivity is a property relating multiplication and addition that is captured concisely using algebra. In this chapter, we explore different types of multiplication patterns and show how they can be described in the language of algebra by making use of distributivity.

6.1 Some Properties of Multiplication

Increments in Products

Consider the multiplication of two numbers, say, 23 × 27.

? 1. By how much does the product increase if the first number (23) is increased by 1?

6 విభాగ న్యాయం-రాశుల గుణకారం

అభ్యసన ఫలితాలు : అభ్యాసకులు

F6D6E2

- విస్తరణను ఉపయోగించి సంక్లిష్టమైన సమాసంను సరళమైన రూపాల్లోకి తగ్గించగలరు. (CG-2)
- బీజీయ సమాసాలను సరళీకరించడం, బ్రాకెట్లను విస్తరించడం, వేగవంతమైన మానసిక గణనలను చేయగలరు. (CG-2)
- ఈ పద్ధతులను బీజీయ సమస్యలకు మరియు ఆచరణాత్మక సందర్భాలకు వర్తింపజేయగలరు. (CG-10)
- లబ్ధాలను త్వరగా లెక్కించడానికి విస్తరణను ఉపయోగించగలరు. (CG-2)
- సంఖ్యా మరియు బీజీయ సమాసాలలోని నమూనాలను గుర్తించగలరు. (CG-1)
- బీజగణితానికి పునాదిగా విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించగలరు. (CG-2)
- ఈ అధ్యాయం ప్రాథమిక అంకగణితానికి మరియు మరింత సంక్లిష్టమైన బీజీయ ఆలోచనకు మధ్య వారధిగా పనిచేస్తుందని గుర్తించగలరు. (CG-2)

6.0 పరిచయం

నమూనాలు మరియు సంబంధాల గురించిన సాధారణ ప్రకటనలను సంక్షిప్త పద్ధతిలో వ్రాయడానికి బీజగణితం అక్షర చిహ్నాలను ఎలా ఉపయోగించుకుంటుందో మనం చూశాం. వాదనలు మరియు ఊహలను (గత అధ్యాయంలో మీరు చూసిన అనేక ధర్మాల వంటివి) సమర్థించడానికి లేదా నిరూపించడానికి, మరియు వివిధ రకాల సమస్యలను పరిష్కరించడానికి కూడా బీజగణితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

విభాగ న్యాయం అనేది గుణకారం మరియు సంకలనానికి సంబంధించిన ఒక న్యాయం, దీనిని బీజగణితం ఉపయోగించి సంక్షిప్తంగా వివరించవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో, మనం వివిధ రకాల గుణకార నమూనాలను అన్వేషిస్తాము మరియు విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి వాటిని బీజగణిత భాషలో ఎలా వర్ణించవచ్చో చూపిస్తాము.

6.1 గుణకారం యొక్క కొన్ని ధర్మాలు

లబ్ధంలో పెరుగుదల

రెండు సంఖ్యల గుణకారాన్ని పరిశీలిద్దాం, ఉదాహరణకు, 23 × 27.

? 1. మొదటి సంఖ్య (23)ను 1 పెంచితే లబ్ధం ఎంత పెరుగుతుంది?

AP SCERT

2. What if the second number (27) is increased by 1?

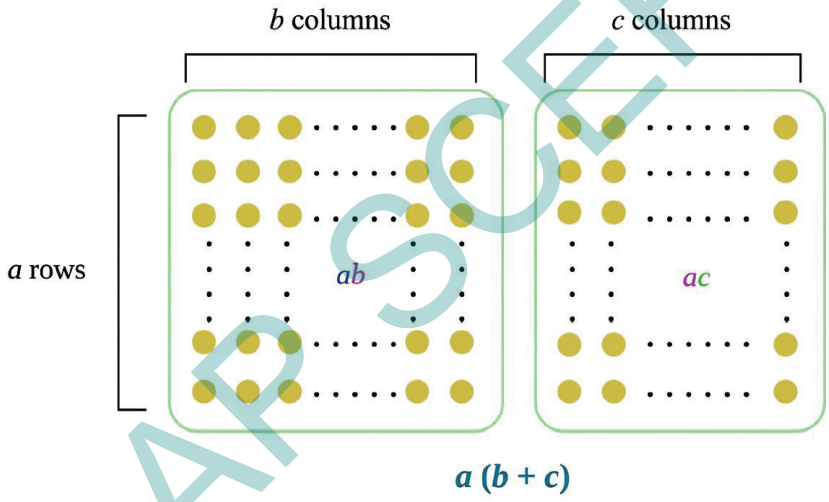
3. How about when both numbers are increased by 1?

Do you see a pattern that could help generalise our observations to the product of any two numbers?

Let us first consider a simpler problem - find the increase in the product when 27 is increased by 1. From the definition of multiplication (and the commutative property), it is clear that the product increases by 23. This can be seen from the distributive property of multiplication as well. If a, b and c are three numbers, then -

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

This property can be visualised nicely using a diagram :



This is called the **distributive property** of multiplication over addition.

Using the identity a (b + c) = ab + ac with a = 23, b = 27, and c = 1, we have

$$23\,(27 + 1) = 23 \times 27 + \boxed{23}$$

Increase

Remember that here, a (b + c) and 23 (27 + 1) mean a × (b + c), and 23 × (27 + 1), respectively. We usually skip writing the '×' symbol before or after brackets, just as in the case of expressions like 5a, xy, etc.

AP SCERT

2. రెండవ సంఖ్య (27)ను 1 పెంచితే ఎంత పెరుగుతుంది?

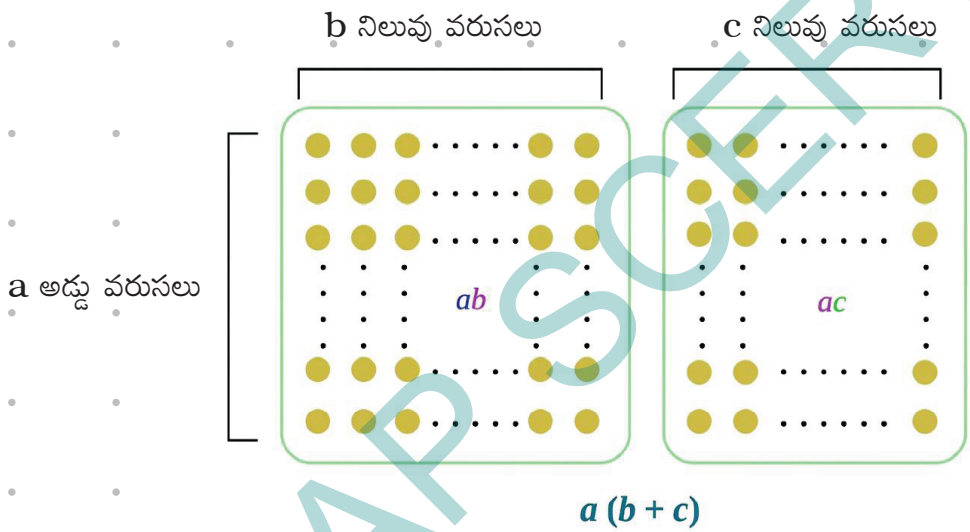
3. రెండు సంఖ్యలనూ 1 పెంచినప్పుడు మార్పు ఏమి?

ఏవైనా రెండు సంఖ్యల లబ్ధానికి మన పరిశీలనలను సాధారణీకరించడంలో సహాయపడే ఒక నమూనా మీకు కనిపిస్తోందా?

మనం ముందుగా ఒక సులభమైన సమస్యను పరిశీలిద్దాం – 27ను 1 పెంచినప్పుడు లబ్ధంలో పెరుగుదలను కనుగొందాం. గుణకారం యొక్క నిర్వచనం (మరియు వినిమయ న్యాయం) నుండి, లబ్ధం 23 పెరుగుతుందని స్పష్టమవుతుంది. గుణకారం యొక్క విభాగ న్యాయం నుండి కూడా దీనిని చూడవచ్చు. a, b మరియు c అనేవి మూడు సంఖ్యలు అయితే,

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

ఈ నియమాన్ని చక్కగా పటాన్ని ఉపయోగించి దృశ్యరూపంలో చూడవచ్చు.:



దీనిని కూడికపై గుణకారం యొక్క విభాగ న్యాయం అని అంటారు.

$a\,(b + c) = ab + ac$, $a = 23$, $b = 27$, మరియు $c = 1$, అయినప్పుడు మనకు ఈ క్రింది ఫలితం లభిస్తుంది:

$$23\,(27 + 1) = 23 \times 27 + \boxed{23}$$

పెరుగుదల

ఇక్కడ, $a\,(b + c)$ మరియు $23\,(27 + 1)$ లు వరసగా $a \times (b + c)$ మరియు $23 \times (27 + 1)$ అని అర్థం. 5a, xy,, మొదలైన సమాసాల విషయంలో మాదిరిగానే, బ్రాకెట్లకు ముందు లేదా తరువాత '×' చిహ్నాన్ని రాయడాన్ని సాధారణంగా దాటవేస్తాము.

AP SCERT

We can also similarly expand (a + b) c using the distributive property as follows -

$$(a + b)\, c = c\,(a + b) \text{ (commutativity of multiplication)}$$
$$= ca + cb \text{ (distributivity)}$$
$$= ac + bc \text{ (commutativity of multiplication)}$$

We can use the distributive property to find, in general, how much a product increases if one or both the numbers in the product are increased by 1. Suppose the initial two numbers are a and b. If one of the numbers, say b, is increased by 1, then we have -

$$a\,(b + 1) = ab + \underbrace{\boxed{a}}_{\text{Increase}}$$

Now let us see what happens if both numbers in a product are increased by 1. If in a product ab, both a and b are increased by 1, then we obtain (a + 1) (b + 1).

? How do we expand this?

Let us consider (a + 1) as a single term. Then, by the distributive property, we have

$$(a + 1)\,(b + 1) = (a + 1)\,b + (a + 1)\,1$$

Again applying the distributive property, we obtain

$$(a + 1)\,(b + 1) = (a + 1)\,b + (a + 1)\,1$$
$$= ab + \underbrace{\boxed{(b + a + 1)}}_{\text{Increase}} \;\ldots\ldots\; 1$$

If a = 23, and, b = 27, we get

$$(23 + 1)\,(27 + 1) = (23 + 1)\,27 + (23 + 1)\,1$$
$$= 23 \times 27 + \underbrace{\boxed{(27 + 23 + 1)}}_{\text{Increase}}$$

Thus, the product ab increases by a + b + 1 when each of a and b are increased by 1.

? What would we get if we had expanded (a + 1) (b + 1) by first taking (b + 1) as a single term? Try it?

AP SCERT

ఇదేవిధంగా విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి $(a + b) c$ ని కూడా ఈ క్రింది విధంగా విస్తరించవచ్చు –

$$(a + b)\, c = c\,(a + b) \text{ (గుణకారం యొక్క వినిమయ న్యాయం)}$$

$$= ca + cb \text{ (విభాగ న్యాయం)}$$

$$= ac + bc \text{ (గుణకారం యొక్క వినిమయ న్యాయం)}$$

ఒక లబ్ధంలోని రెండు సంఖ్యలలో ఒకటి లేదా రెండూ ఒకటి మేర పెరిగినప్పుడు, ఆ లబ్ధం సాధారణంగా ఎంత పెరుగుతుందో కనుగొనడానికి మనం విభాగ న్యాయాన్ని (distributive property) ఉపయోగించవచ్చు. ప్రారంభంలోని రెండు సంఖ్యలు a మరియు b అని అనుకుందాం. ఆ సంఖ్యలలో ఒకటి, ఉదాహరణకు b, 1 మేర పెరిగినట్లయితే, అప్పుడు మనకు ఈ విధంగా లభిస్తుంది:

$$a\,(b + 1) = ab + \boxed{a}$$

– పెరుగుదల

ఒక లబ్ధంలోని రెండు సంఖ్యలను 1 పెంచినట్లయితే ఏమి జరుగుతుందో మనం ఇప్పుడు చూద్దాం. ఒకవేళ ab లబ్ధంలో, a మరియు b రెండింటినీ 1 చేత పెంచినట్లయితే, అప్పుడు మనకు $(a + 1)\,(b + 1)$ లభిస్తుంది.

? దీన్ని మనం ఎలా విస్తరించాలి?

$(a + 1)$ ను ఒకే పదంగా పరిశీలిద్దాం. అప్పుడు, విభాగ న్యాయం ద్వారా, మనకు

$$(a + 1)\,(b + 1) = (a + 1)\,b + (a + 1)\,1$$

మళ్ళీ విభాగ నియమాన్ని వర్తింపజేయగా, మనం కింది విధంగా పొందుతాము.

$$(a + 1)\,(b + 1) = (a + 1)\,b + (a + 1)\,1$$

$$= ab + \boxed{(b + a + 1)} \;\ldots\ldots\; 1$$

పెరుగుదల

ఒకవేళ $a = 23$, మరియు $b = 27$, అయితే, మనం కింది విధంగా పొందుతాము.

$$(23 + 1)\,(27 + 1) = (23 + 1)\,27 + (23 + 1)\,1$$

$$= 23 \times 27 + \boxed{(27 + 23 + 1)}$$

పెరుగుదల

అందువలన, a మరియు b లను 1 పెంచినప్పుడు ab లబ్ధం $a + b + 1$ పెరుగుతుంది.

? మొదట $(b + 1)$ ని ఒకే పదంగా తీసుకోవడం ద్వారా మనం $(a + 1)\,(b + 1)$ ని విస్తరించినట్లయితే మనకు ఏమి వస్తుంది? ప్రయత్నించండి.

AP SCERT

? What happens when one of the numbers in a product is increased by 1 and the other is decreased by 1? Will there be any change in the product?

Let us again take the product ab of two numbers a and b. If a is increased by 1 and b is decreased by 1, then their product will be (a + 1) (b - 1). Expanding this, we get

$$(a + 1)(b - 1) = (a + 1)\,b - (a + 1)\,1$$
$$= ab + b - (a + 1)$$
$$= ab + \boxed{b - a - 1} \quad \ldots (2)$$

Increase

$(b - a - 1 > 0)$

If a = 23, and b = 27, we get

$$(23 + 1)(27 - 1) = (23 + 1)\,27 - (23 + 1)\,1$$
$$= 23 \times 27 + 27 - (23 + 1)$$
$$= 23 \times 27 + \boxed{27 - 23 - 1}$$

Increase

? Will the product always increase? Find 3 examples where the product decreases.

? What happens when a and b are negative integers?

Check by substituting different values for a and b in each of the above cases. For example, a = –5, b = 8; a = –4, b = –5; etc.

We have seen that integers also satisfy the distributive property, that is, if x, y and z are any three integers, then x (y + z) = xy + xz.

Thus, the expressions we have for increase of products hold when the letter-numbers take on negative integer values as well i.e., the expressions in 1 and 2 hold good for negative integers values also.

Recall that two algebraic expressions are equal if they take on the same values when their letter-numbers are replaced by numbers. These numbers could be any integers. Mathematical statements that express the equality of two algebraic expressions, such as

$$a\,(b + 8) = ab + 8a,$$
$$(a + 1)(b - 1) = ab + b - a - 1, \text{ etc.},$$

are called **identities**.

? By how much will the product of two numbers change if one of the numbers is increased by m and the other by n?

AP SCERT

? ఒక లబ్ధంలోని రెండు సంఖ్యలలో ఒకదానిని 1 పెంచి, మరొకదానిని 1 తగ్గిస్తే ఏమవుతుంది? ఆ లబ్ధంలో ఏదైనా మార్పు వస్తుందా?

రెండు సంఖ్యలు a మరియు b ల లబ్ధం ab ని మనం మళ్ళీ తీసుకుందాం. ఒకవేళ a ను 1 పెంచి, b ను 1 తగ్గిస్తే, వాటి లబ్ధం (a + 1) (b - 1) అవుతుంది. దీనిని విస్తరిస్తే, మనకు ఈ క్రింది ఫలితం లభిస్తుంది:

$$(a + 1)(b - 1) = (a + 1)b - (a + 1)1$$
$$= ab + b - (a + 1)$$
$$= ab + \boxed{b - a - 1} \quad \ldots (2)$$

పెరుగుదల

$(b - a - 1 > 0)$

ఒకవేళ $a = 23$, మరియు $b = 27$, మనం దీనిని పొందుతాం

$$(23 + 1)(27 - 1) = (23 + 1)27 - (23 + 1)1$$
$$= 23 \times 27 + 27 - (23 + 1)$$
$$= 23 \times 27 + \boxed{27 - 23 - 1}$$

పెరుగుదల

? లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ పెరుగుతుందా? లబ్ధం తగ్గడానికి 3 ఉదాహరణలు కనుగొనండి.

? a మరియు b రుణ పూర్ణ సంఖ్యలు అయినప్పుడు ఏమి జరుగుతుంది?

పైన పేర్కొన్న ప్రతి సందర్భంలో a మరియు b కొరకు విభిన్న విలువలను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వారా తనిఖీ చేయండి. ఉదాహరణకు, $a = -5, b = 8$; $a = -4, b = -5$; మొదలైనవి.

పూర్ణ సంఖ్యలు విభాగ న్యాయంను కూడా సంతృప్తిపరుస్తాయని మనం చూశాము, అనగా, ఒకవేళ x, y మరియు z లు ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే, అప్పుడు $x(y + z) = xy + xz$.

అందువల్ల, అక్షర-సంఖ్యలు రుణ పూర్ణ సంఖ్యల విలువలను తీసుకున్నప్పుడు కూడా లబ్ధాల పెరుగుదలకు సంబంధించిన మన సమాసాలు చెల్లుబాటు అవుతాయి, అనగా 1 మరియు 2 లోని సమాసాలు రుణ పూర్ణ సంఖ్య విలువలకు కూడా చెల్లుబాటు అవుతాయి.

రెండు బీజీయ సమాసాలలోని అక్షరాలను సంఖ్యలతో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు, అవి ఒకే విలువలను పొందితే ఆ రెండు సమాసాలు సమానమవుతాయని గుర్తుంచుకోండి.. ఈ సంఖ్యలు ఏవైనా పూర్ణ సంఖ్యలు కావచ్చు. రెండు బీజీయ సమాసాల సమానత్వాన్ని వ్యక్తం చేసే గణిత ప్రవచనం, ఉదాహరణకు

$$a(b + 8) = ab + 8a,$$

$$(a + 1)(b - 1) = ab + b - a - 1,$$ మొదలైనవి

సర్వసమీకరణాలు అని అంటారు.

? రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్యను m మరియు మరొక సంఖ్యను n పెంచితే, ఆ సంఖ్యల లబ్ధం ఎంత మారుతుంది?

AP SCERT

If a and b are the initial numbers being multiplied, they become a + m and b + n.

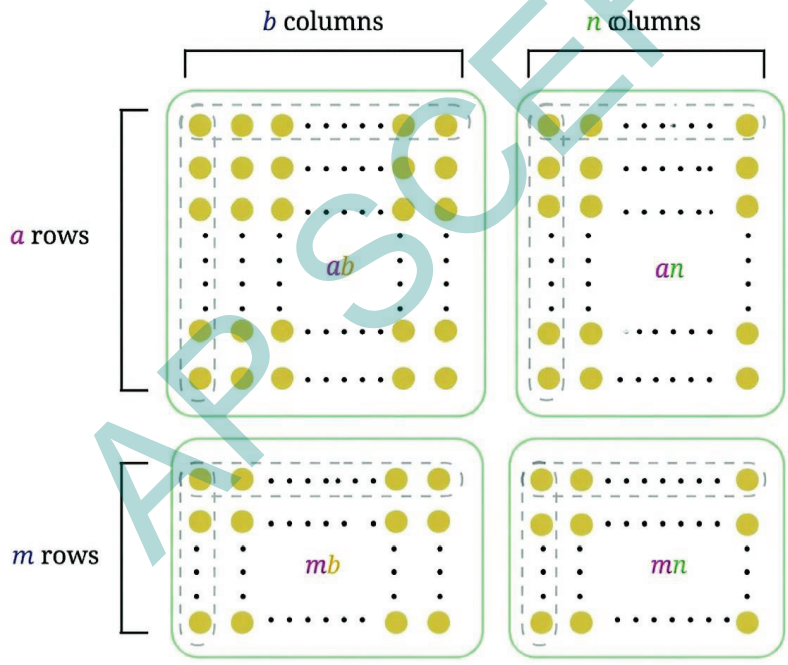
$$(a + m)(b + n) = (a + m)b + (a + m)n$$
$$= ab + mb + an + mn$$

The increase is an + bm + mn.

Notice that the product is the sum of the product of each term of (a + m) with each term of (b + n).

Identity 1 $\quad (a + m)(b + n) = ab + mb + an + mn$

This identity can be visualised as follows -



$(a + m)(b + n)$

This identity can be used to find how products change when the numbers being multiplied are increased or decreased by any amount. Can you see how this identity can be used when one or both numbers are decreased?

For example, let us reconsider the case when one number is increased by 1 and the other decreased by 1. Let us write the product (a + 1) (b - 1) as (a + 1) (b + (-1). Taking m = 1 and n = -1 in Identity 1, we have

AP SCERT

గుణించబడుతున్న ప్రాథమిక సంఖ్యలు గణాంకాలు a మరియు b అయితే, అవి a + m మరియు b + n అవుతాయి.

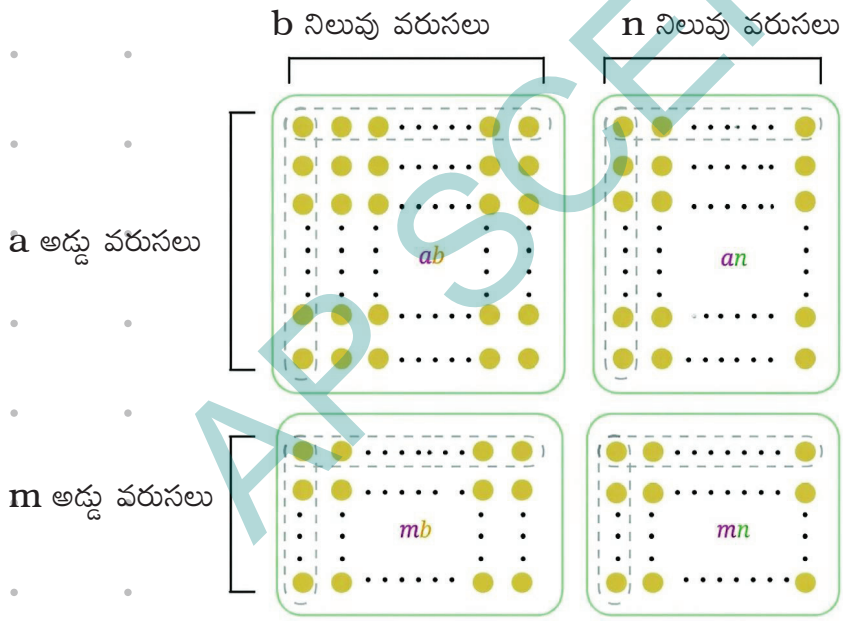
$$(a + m)(b + n) = (a + m)b + (a + m)n$$
$$= ab + mb + an + mn$$

పెరుగుదల an + bm + mn.

ఈ లబ్ధం అనేది, (a + m) లోని ప్రతి పదంతో (b + n) లోని ప్రతి పదాన్ని గుణించగా వచ్చే లబ్ధాల మొత్తమని గమనించండి.

సర్వసమీకరణం 1 $\quad (a + m)(b + n) = ab + mb + an + mn$

ఈ సర్వసమీకరణాన్ని ఈ విధంగా దృశ్యమానం చేయవచ్చు. –



$(a + m)(b + n)$

? గుణించబడే సంఖ్యలను ఏదైనా పరిమాణంలో పెంచినప్పుడు లేదా తగ్గించినప్పుడు, ఆ లబ్ధం (product) ఏ విధంగా మారుతుందో కనుగొనడానికి ఈ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించవచ్చు. గుణించబడే సంఖ్యలలో ఒకటి లేదా రెండు సంఖ్యలూ తగ్గించబడినప్పుడు, ఈ సర్వసమీకరణాన్ని ఏ విధంగా ఉపయోగించవచ్చో మీరు గమనించగలరా?

ఉదాహరణకు, ఒక సంఖ్యను 1 పెంచి, మరొక సంఖ్యను 1 తగ్గించిన సందర్భాన్ని మనం మరొకసారి పరిశీలిద్దాం. లబ్ధం (a + 1) (b - 1) ను (a + 1) (b + (-1) గా రాసుకుందాం.

సర్వసమీకరణం 1 లో m = 1 మరియు n = -1 అని తీసుకుంటే, మనకు ఈ క్రింది ఫలితం లభిస్తుంది:

AP SCERT

$$ab + (1) \times b + a \times (-1) + (1) \times (-1) = ab + b - a - 1,$$

which is the same expression that we obtain earlier.

? Use Identity 1 to find how the product changes when

(i) one number is decreased by 2 and the other increased by 3;

(ii) both numbers are decreased, one by 3 and the other by 4.

? Verify the answers by finding the products without converting the subtractions to additions.

Generalising this, we can find the product (a + u) (b - v) as follows.

$$(a + u)(b - v) = (a + u)\,b - (a + u)\,v$$
$$= ab + ub - (av + uv)$$
$$= ab + ub - av - uv.$$

Check that this is the same as taking m = u and n = -v in Identity 1.

As in Identity 1, the product (a + u) (b - v) is the sum of the product of each term of a + u (a and u) with each term of b - v (b and (-v)). Notice that the signs of the terms in the products can be determined using the usual rules of integer multiplication.

See how the rules of integer multiplication allows us to handle multiple cases using a single identity!

? Expand (i) (a - u) (b + v), (ii) (a - u) (b - v).

We get

$$(a - u)(b + v) = ab - ub + av - uv, \text{ and}$$
$$(a - u)(b - v) = ab - ub - av + uv.$$

The distributive property is not restricted to two terms within a bracket.

? Example 1: Expand $\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right)$

$$\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3a}{2} \times a\right) - \left(\frac{3a}{2} \times b\right) + \left(\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5}\right)$$

The terms can be simplified as follows -

$$\frac{3a}{2} \times a = \frac{3}{2} \times (a \times a)$$

AP SCERT

$$ab + (1) \times b + a \times (-1) + (1) \times (-1) = ab + b - a - 1,$$

ఇది మనం ఇంతకు ముందు పొందిన సమాసమే.

? (i) ఒక సంఖ్యను 2 తగ్గించి, మరొక సంఖ్యను 3 పెంచినప్పుడు;

(ii) రెండు సంఖ్యలను–ఒకదానిని 3, మరొకదానిని 4 చొప్పున తగ్గించినప్పుడు.

లబ్ధం (product) ఏ విధంగా మారుతుందో కనుగొనడానికి 'సర్వసమీకరణం 1' (Indentity 1) ను ఉపయోగించండి.

? వ్యవకలనాలను సంకలనాలుగా మార్చకుండానే, నేరుగా లబ్ధాలను కనుగొనడం ద్వారా మీ సమాధానాలను సరిచూసుకోండి.

దీనిని సాధారణీకరిస్తూ, మనం $(a + u)(b - v)$ లబ్ధాన్ని ఈ క్రింది విధంగా కనుగొనవచ్చు:

$$(a + u)(b - v) = (a + u)b - (a + u)v$$
$$= ab + ub - (av + uv)$$
$$= ab + ub - av - uv.$$

'సర్వసమీకరణం 1' లో $m = u$ మరియు $n = -v$ అని ప్రతిక్షేపించినప్పుడు వచ్చే ఫలితమే ఇది, అని సరి చూసుకోండి. 'సర్వసమీకరణం 1' లో వలెనే, $(a + u)(b - v)$ లబ్ధం అనేది–$(a + u)$ లోని ప్రతి పదాన్ని (అంటే a మరియు u లను), $(b - v)$ లోని ప్రతి పదంతో (అంటే b మరియు $(-v)$ లతో) గుణించడం ద్వారా వచ్చే లబ్ధాల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది. ఈ లబ్ధాలలో వచ్చే పదాల గుర్తులను (signs), పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారానికి సంబంధించిన సాధారణ నియమాలను ఉపయోగించి నిర్ణయించవచ్చని గమనించండి.

పూర్ణ సంఖ్యల గుణకార నియమాలు, ఒకే ఒక సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి బహుళ సందర్భాలను పరిష్కరించడానికి మనకు ఎలా వీలు కల్పిస్తాయో చూడండి!

? (i) $(a - u)(b + v)$, (ii) $(a - u)(b - v)$ లను విస్తరించండి.

$(a - u)(b + v) = ab - ub + av - uv,$ మరియు

$(a - u)(b - v) = ab - ub - av + uv.$ మనకు లభించేవి

విభాగ న్యాయం బ్రాకెట్లోని రెండు పదాలకే పరిమితం కాదు.

? ఉదాహరణ 1: $\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right)$ విస్తరించండి.

$$\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3a}{2} \times a\right) - \left(\frac{3a}{2} \times b\right) + \left(\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5}\right)$$

పదాలను ఈ క్రింది విధంగా సూక్ష్మీకరించవచ్చు –

$$\frac{3a}{2} \times a = \frac{3}{2} \times (a \times a)$$

AP SCERT

Using exponent notation, we can write $\frac{3}{2} \times (a \times a) = \frac{3}{2}a^2$

$$\frac{3a}{2} \times b = \frac{3}{2} \times (a \times b) = \frac{3}{2}ab$$

$$\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5} = (\frac{3}{2} \times \frac{1}{5})a = \frac{3}{10}a$$

So we get

$$\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5}) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{10}a.$$

? Can any two terms be added to get a single term?

For example, can $\frac{3}{2}a^2$ and $\frac{3}{10}a$ be added to get a single term?

We see that no two terms have exactly the same letter-numbers, which would have allowed them to be simplified into a single term. So, a further simplification of the expression is not possible.

Recall that we call terms having the same letter-numbers as **like terms**.

? Example 2: Expand (a + b) (a + b).

We have $(a + b)(a + b) = (a+b)a + (a + b)b = a \times a + b \times a + ab + b \times b$

$$= a^2 + ba + ab + b^2$$

Since ba = ab, we have two terms having the same letter-numbers ab (or, that are like terms), and so can be added

$$ba + ab = ab + ab = 2ab$$

So we get

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

? Example 3: Expand $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$.

$(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)a^2 + (a + b) \times 2ab + (a + b)b^2$

$$= (a \times a^2) + ba^2 + (a \times 2ab) + (b \times 2ab) + ab^2 + (b \times b^2)$$

The terms can be simplified as follows -

$$a \times a^2 = a^3 \text{ (why?)}$$

$$ba^2 = a^2b$$

$$a \times 2ab = 2 \times a \times a \times b = 2a^2b$$

$$b \times 2ab = 2 \times a \times b \times b = 2ab^2$$

$$b \times b^2 = b^3$$

AP SCERT

ఘాతాంక సంజ్ఞామానమును ఉపయోగించి, మనము $\frac{3}{2} \times (a \times a) = \frac{3}{2}a^2$ అని వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{3a}{2} \times b = \frac{3}{2} \times (a \times b) = \frac{3}{2}ab$$

$$\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5} = (\frac{3}{2} \times \frac{1}{5})a = \frac{3}{10}a$$

కాబట్టి

$$\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5}) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{10}a.$$

? ఒకే పదాన్ని పొందడం కొరకు ఏవైనా రెండు పదాలను కలపవచ్చా?

ఉదాహరణకు, ఒకే పదాన్ని పొందడం కొరకు $\frac{3}{2}a^2$ మరియు $\frac{3}{10}a$ లను కలపవచ్చా?

ఏ రెండు పదాలకూ సరిగ్గా ఒకే అక్షర-సంఖ్యలు లేవని మనం చూస్తాము, అలా ఉండి ఉంటే వాటిని ఒకే పదంగా సూక్ష్మీకరించడానికి వీలయ్యేది. కాబట్టి, ఈ సమాసంను మరింత సూక్ష్మీకరించడం సాధ్యం కాదు.

ఒకే అక్షర-సంఖ్యలు కలిగిన పదాలను సజాతి పదాలు అని పిలుస్తామని గుర్తుంచుకోండి.

? ఉదాహరణ 2: $(a + b)(a + b)$. ను విస్తరించండి.

$$(a + b)(a + b) = (a+b)a + (a + b)b = a \times a + b \times a + ab + b \times b$$
$$= a^2 + ba + ab + b^2$$

$ba = ab$ అయినందున, మనకు ఒకే అక్షర-సంఖ్యలు ab కలిగిన రెండు పదాలు ఉన్నాయి (లేదా, అవి సజాతి పదాలు), కాబట్టి వాటిని కలపవచ్చు

$$ba + ab = ab + ab = 2ab$$

కాబట్టి

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

? ఉదాహరణ 3: $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$ ను విస్తరించండి.

$$(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)a^2 + (a + b) \times 2ab + (a + b)b^2$$
$$= (a \times a^2) + ba^2 + (a \times 2ab) + (b \times 2ab) + ab^2 + (b \times b^2)$$

పదాలను క్రింది విధంగా సూక్ష్మీకరించవచ్చు -

$$a \times a^2 = a^3 \text{ (ఎందుకు?)}$$

$$ba^2 = a^2b$$

$$a \times 2ab = 2 \times a \times a \times b = 2a^2b$$

$$b \times 2ab = 2 \times a \times b \times b = 2ab^2$$

$$b \times b^2 = b^3$$

AP SCERT

So, $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$.

We see that a^2b and $2a^2b$ have the same letter-numbers (or, are like

$$a^2b + 2a^2b = (1 + 2)\, a^2\, b = 3a^2\, b.$$

Similarly, ab^2 and $2ab^2$ are like terms and so can be added

$$ab^2 + 2ab^2 = (1 + 2)ab^2 = 3ab^2.$$

Thus, we have

$$(a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A Pinch of History

The distributive property of multiplication over addition was implicit in the calculations of mathematicians in many ancient civilisations, particularly in ancient Egypt, Mesopotamia, Greece, China, and India. For example, the mathematicians Euclid (in geometric form) and Aryabhata (in algebraic form) used the distributive law in an implicit manner extensively in their mathematical and scientific works. The first explicit statement of the distributive property was given by Brahmagupta in his work Brahmasphutasiddhanta (Verse 12.55), who referred to the use of the property for multiplication as khanda-gunanam (multiplication by parts). His verse states, "The multiplier is broken up into two or more parts whose sum is equal to it; the multiplicand is then multiplied by each of these and the results added". That is, if there are two parts, then using letter symbols this is equivalent to the identity $(a + b)\, c = ac + bc$. In the next verse (Verse 12.56), Brahmagupta further describes a method for doing fast multiplication using this distributive property, which we explore further in the next section.

Figure it Out - 6.1

1. Observe the multiplication grid below. Each number inside the grid is formed by multiplying two numbers. If the middle number of a 3×3 frame is given by the expression pq, as shown in the figure, write the expressions for the other numbers in the grid.

AP SCERT

కాబట్టి, $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$.

a^2b మరియు $2a^2b$ లలో ఒకే అక్షర-సంఖ్యలు ఉన్నాయని మనం చూస్తాము (లేదా, ఇలా ఉంటాయి)

$$a^2b + 2a^2b = (1 + 2)\, a^2\, b = 3a^2\, b.$$

అందువల్ల, ab^2 మరియు $2ab^2$ లు ఒకే అక్షర సంఖ్యలను కలిగి ఉన్నాయి (లేదా, సజాతి పదాలు) కాబట్టి వాటిని కలపవచ్చు.

$$ab^2 + 2ab^2 = (1 + 2)ab^2 = 3ab^2.$$

కాబట్టి, మనకు ఈ విధంగా లభిస్తుంది:

$$(a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

చరిత్రలో గణితం

అనేక ప్రాచీన నాగరికతలలో, ముఖ్యంగా ప్రాచీన ఈజిప్ట్, మెసొపొటేమియా, గ్రీస్, చైనా మరియు భారతదేశంలో, గణిత శాస్త్రవేత్తల గణనలలో సంకలనంపై గుణకారం యొక్క విభాగ న్యాయం అంతర్లీనంగా ఉండేది. ఉదాహరణకు, గణిత శాస్త్రవేత్తలైన యూక్లిడ్ (జ్యామితీయ రూపంలో) మరియు ఆర్యభట్ట (బీజగణిత రూపంలో) తమ గణిత మరియు శాస్త్రీయ రచనలలో విభాగ నియమాన్ని అంతర్లీనంగా విస్తృతంగా ఉపయోగించారు. విభాగ న్యాయం యొక్క మొట్టమొదటి స్పష్టమైన ప్రకటనను బ్రహ్మగుప్తుడు తన బ్రహ్మస్ఫుటసిద్ధాంతం (శ్లోకం 12.55) అనే గ్రంథంలో ఇచ్చాడు. అతను గుణకారం కోసం ఈ నియమాన్ని ఉపయోగించడాన్ని 'ఖండ-గుణనం' (భాగాల వారీగా గుణించడం) అని పేర్కొన్నాడు. అతని శ్లోకం ఇలా చెబుతుంది, "గుణకాన్ని రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ భాగాలుగా విభజించి, వాటి మొత్తం దానికి సమానంగా ఉండేలా చేస్తారు; ఆ తర్వాత గుణ్యాన్ని వీటిలో ప్రతి దానితో గుణించి, ఆ ఫలితాలను కలుపుతారు". అంటే, రెండు భాగాలు ఉన్నట్లయితే, అక్షర సంకేతాలను ఉపయోగించి చూస్తే, ఇది $(a + b)\, c = ac + bc$ అనే సర్వసమానతకు తుల్యమవుతుంది.. తర్వాతి శ్లోకంలో (శ్లోకం 12.56), బ్రహ్మగుప్తుడు ఈ విభాగ నియమాన్ని ఉపయోగించి వేగవంతమైన గుణకారం చేసే పద్ధతిని మరింతగా వివరిస్తాడు, దీనిని మనం తర్వాతి విభాగంలో మరింతగా పరిశీలిస్తాము.

ఆలోచించండి-చేయండి - 6.1

1. దిగువన ఉన్న గుణకార గ్రిడ్‌ను గమనించండి. గ్రిడ్‌లోని ప్రతి సంఖ్య, రెండు సంఖ్యలను గుణించడం ద్వారా ఏర్పడింది. పటంలో చూపినట్లుగా, ఒక 3×3 చట్రం యొక్క మధ్య సంఖ్యను 'pq' అనే సమాసం సూచిస్తే, గ్రిడ్‌లోని మిగిలిన సంఖ్యలకు సంబంధించిన సమాసాలను రాయండి.

AP SCERT

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3×5	3×6	3×7
4×5	4×6	4×7
5×5	5×6	5×7

	pq	

2. Expand the following products.

   (i) $(3 + u)(v - 3)$ (ii) $\frac{2}{3}(15 + 6a)$

   (iii) $(10a + b)(10c + d)$ (iv) $(3 - x)(x - 6)$

   (v) $(-5a + b)(c + d)$ (vi) $(5 + z)(y + 9)$

3. Find 3 examples where the product of two numbers remains unchanged when one of them is increased by 2 and the other is decreased by 4. For an example, $1 \times 6 = (1 + 2) \times (6 - 4)$

4. Expand (i) $(a + ab - 3b^2)(4 + b)$, and (ii) $(4y + 7)(y + 11z - 3)$.

5. Expand (i) $(a - b)(a + b)$, (ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ and (iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, Do you see a pattern? What would be the next identity in the pattern that you see? Can you check it by expanding?

6.1.1 Fast Multiplications Using the Distributive Property

The distributive property can be used to come up with quick methods of multiplication when certain types of numbers are multiplied.

When one of the numbers is 11, 101, 1001, ...

? Use the following multiplications to find the product of a number with 11 in a single step.

(a) 3874×11 (b) 5678×11

Let us take the first multiplication.

$$3874 \times 11 = 3874\,(10 + 1) = 38740 + 3874$$

$$\begin{array}{r} 38740 \\ +\ 3874 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

AP SCERT

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3×5	3×6	3×7
4×5	4×6	4×7
5×5	5×6	5×7

	pq	

2. కింది లబ్ధాలను విస్తరించండి.

(i) $(3 + u)(v - 3)$ (ii) $\frac{2}{3}(15 + 6a)$

(iii) $(10a + b)(10c + d)$ (iv) $(3 - x)(x - 6)$

(v) $(-5a + b)(c + d)$ (vi) $(5 + z)(y + 9)$

3. రెండు సంఖ్యలలో ఒకదానిని 2 పెంచి, మరొకదానిని 4 తగ్గించినప్పుడు, ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్ధం మారకుండా ఉండే 3 ఉదాహరణలను కనుగొనండి. ఉదాహరణకు:

$1 \times 6 = (1 + 2) \times (6 - 4)$

4. (i) $(a + ab - 3b^2)(4 + b)$, మరియు (ii) $(4y + 7)(y + 11z - 3)$ లను విస్తరించండి.

5. (i) $(a - b)(a + b)$, (ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ మరియు

(iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ లను విస్తరించండి. మీరు ఏదైనా క్రమాన్ని గమనిస్తున్నారా? మీరు చూస్తున్న ఆ క్రమంలో తర్వాత ఏమి గుర్తించారు? దానిని విస్తరించడం ద్వారా మీరు సరిచూసుకోగలరా?

6.1.1 విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి వేగవంతమైన గుణకారాలు చేయటం.

కొన్ని నిర్దిష్ట రకాల సంఖ్యలను గుణించేటప్పుడు, గుణకారాన్ని వేగంగా చేసే పద్ధతులను రూపొందించడానికి విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

గుణించబడే సంఖ్యలలో ఒకటి 11, 101, 1001, ... అయినప్పుడు

? ఏదైనా సంఖ్యను 11తో గుణించినప్పుడు వచ్చే లబ్ధాన్ని ఒకే దశలో కనుగొనడానికి, కింది గుణకార పద్ధతులను ఉపయోగించండి.

(ఎ) 3874×11 (బి) 5678×11

మొదటి గుణకారాన్ని తీసుకుందాం.

$$3874 \times 11 = 3874\,(10 + 1) = 38740 + 3874$$

$$\begin{array}{r} 38740 \\ +\ 3874 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

AP SCERT

Notice how the digits are getting added.

Let us take a 4-digit number dcba, that is, the number that has d in the thousands place, c in the hundreds place, b in the tens place and a in the units place.

$$dcba \times (10 + 1) = dcba \times 10 + dcba.$$

This becomes

d	c	b	a	o
+	d	c	b	a
d	(c + d)	(b + c)	(a + b)	a

This can be used to obtain the product in one line.

Step 1

387④ × 11
4

Step 2

① +
3874 × 11
14

Step 3

①① +
3874 × 11
614

Step 4

①①① +
0 1
3874 × 11
2614

Step 5

①①①
1
③874 × 11
42614

? Describe a general rule to multiply a number (of any number of digits) by 11 and write the product in one line.

Evaluate (i) 94 × 11, (ii) 495 × 11, (iii) 3279 × 11, (iv) 4791256 × 11.

? Can we come up with a similar rule for multiplying a number by 101?

? Multiply 3874 by 101.

Let us take a 4-digit number dcba.

$$dcba \times 101 = dcba \times (100 + 1) = dcba \times 100 + dcba.$$

This becomes

d	c	b	a	o	o
+		d	c	b	a
d	c	(b + d)	(a + c)	b	a

? Use this to multiply 3874 × 101 in one line.

AP SCERT

అంకెలు ఎలా కలుపబడుతున్నాయో గమనించండి.

మనం dcba అనే 4-అంకెల సంఖ్యను తీసుకుందాం, అంటే, వేల స్థానంలో d, వందల స్థానంలో c, పదుల స్థానంలో b మరియు ఒకట్ల స్థానంలో a ఉన్న సంఖ్య.

$$dcba \times (10 + 1) = dcba \times 10 + dcba.$$

ఇది ఈ విధంగా మారుతుంది.

d	c	b	a	o
+	d	c	b	a
d	(c + d)	(b + c)	(a + b)	a

లబ్ధాన్ని ఒకే వరుసలో పొందడానికి దీనిని ఉపయోగించవచ్చు..

దశ 1

387④× 11
4

దశ 2

①+
3874 × 11
14

దశ 3

①①+
3874 × 11
614

దశ 4

①①①+
0 1
3874 × 11
2614

దశ 5

①①①
1
③874 × 11
42614

? ఏదైనా ఒక సంఖ్యను(ఎన్ని అంకెలు ఉన్నా సరే) 11తో గుణించి, ఆ లబ్ధాన్ని ఒకే వరుసలో రాసేందుకు ఉపయోగపడే ఒక సాధారణ నియమాన్ని వివరించండి.

కింది వాటిని గణించండి: (i) 94 × 11, (ii) 495 × 11,

(iii) 3279 × 11, (iv) 4791256 × 11.

? ఒక సంఖ్యను 101తో గుణించడానికి మనం ఇదే విధమైన నియమాన్ని రూపొందించగలమా?

? 3874ను 101 తో గుణించండి.

ఇప్పుడు మనం ఒక 4 అంకెల సంఖ్య dcba తీసుకుందాం.

$$dcba \times 101 = dcba \times (100 + 1) = dcba \times 100 + dcba.$$

ఇది ఈ విధంగా మారుతుంది.

d	c	b	a	o	o
+		d	c	b	a
d	c	(b + d)	(a + c)	b	a

? 3874 × 101 ను ఒక లైనులో గుణించడానికి దీనిని ఉపయోగించండి.

AP SCERT

? What could be a general rule to multiply a number by 101 and write the product in one line? Extend this rule for multiplication by 1001, 10001, ...

? Use this to find (i) 89 × 101, (ii) 949 × 101, (iii) 265831 × 1001, (iv) 1111 × 1001, (v) 9734 × 99 and (vi) 23478 × 999.

Such methods of applying the distributive property to easily multiply two numbers were discussed extensively in the ancient mathematical works of Brahmagupta (628 CE), Sridharacharya (750 CE) and Bhaskaracharya (Lilavati, 1150 CE). In his work (Verse 12.56), Brahmagupta refers to such methods for fast multiplication using the distributive property as **ista-gunana.**

6.2 Special Cases of the Distributive Property

Square of the Sum/Difference of Two Numbers

? The area of a square of sidelength 60 units is 3600 sq. units (60^2) and that of a square of sidelength 5 units is 25 sq. units (5^2). Can we use this to find the area of a square of sidelength 65 units?

A square of sidelength 65 can be split into 4 regions as shown in the figure - a square of sidelength 60, a square of sidelength 5, and two rectangles of sidelengths 60 and 5. The area of the square of sidelength 65 is the sum of the areas of all its constituent parts. Can you find the areas of the four parts in the figure above?

We get

$65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 5^2 + 2 \times (60 \times 5)$.

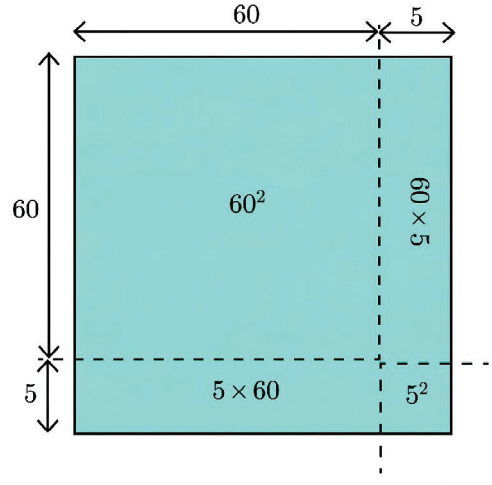
$= 3600 + 25 + 600 = 4225$ sq. units.

Let us multiply $(60 + 5) \times (60 + 5)$ using the distributive property.

$(60 + 5) \times (60 + 5)$

$= 60 \times 60 + 5 \times 60 + 60 \times 5 + 5 \times 5$

$= 60^2 + 2 \times (60 \times 5) + 5^2$.



AP SCERT

? ఒక సంఖ్యను 101తో గుణించి, ఆ లబ్ధాన్ని ఒకే వరుసలో రాయడానికి సాధారణ నియమం ఏమిటి? ఈ నియమాన్ని 1001, 10001 లతో గుణించడానికి కూడా విస్తరించండి.

? దీనిని ఉపయోగించి కింది వాటిని కనుగొనండి: (i) 89×101, (ii) 949×101, (iii) 265831×1001, (iv) 1111×1001, (v) 9734×99 and (vi) 23478×999.

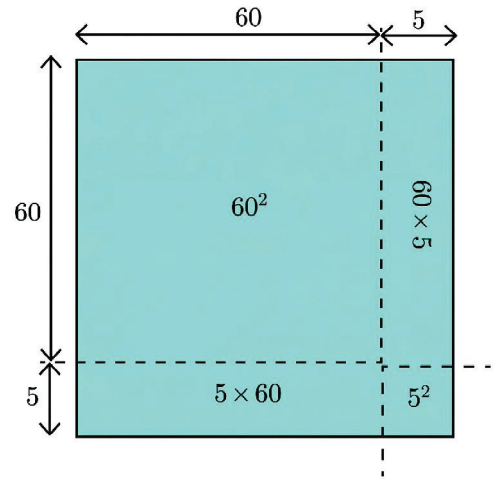
రెండు సంఖ్యలను సులభంగా గుణించడానికి విభాగ న్యాయాన్ని వినియోగించే ఇటువంటి పద్ధతుల గురించి, బ్రహ్మగుప్తుడు (సా.శ. 628), శ్రీధరాచార్యుడు (సా.శ. 750), భాస్కరాచార్యుడు (లీలావతి, సా.శ. 1150) వంటి ప్రాచీన గణితవేత్తల గ్రంథాలలో విస్తృతంగా చర్చించబడింది. తన గ్రంథమైన 'బ్రహ్మస్ఫుటసిద్ధాంతం' (శ్లోకం 12.56)లో, విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి వేగంగా గుణించే ఇటువంటి పద్ధతులను బ్రహ్మగుప్తుడు 'ఇష్ట-గుణన'గా పేర్కొన్నాడు.

6.2 విభాగ న్యాయం యొక్క ప్రత్యేక సందర్భాలు

రెండు సంఖ్యల మొత్తము లేదా భేదము యొక్క వర్గము

? 60 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం 3600 చ. యూనిట్లు (60^2) మరియు 5 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం 25 చ. యూనిట్లు (5^2). దీనిని ఉపయోగించి 65 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని మనం కనుగొనగలమా? 60 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం 3600 చ. యూనిట్లు (60^2) మరియు 5 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం 25 చ. యూనిట్లు (5^2). దీనిని ఉపయోగించి 65 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని మనం కనుగొనగలమా?

65 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రాన్ని పటంలో చూపిన విధంగా 4 ప్రాంతాలుగా విభజించవచ్చు – 60 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల ఒక చతురస్రం, 5 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల ఒక చతురస్రం, మరియు 60, 5 యూనిట్ల భుజాల పొడవులు గల రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు. 65 యూనిట్ల భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం, దానిలోని అన్ని భాగాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. మీరు ఆ వైశాల్యాలను కనుగొనగలరా?



మనకు ఇలా లభిస్తుంది:

$65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 5^2 + 2 \times (60 \times 5)$.

$= 3600 + 25 + 600 = 4225$ చదరపు యూనిట్లు.

విభాగ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి $(60 + 5) \times (60 + 5)$ ను గుణించి చూద్దాం.

$(60 + 5) \times (60 + 5)$

$= 60 \times 60 + 5 \times 60 + 60 \times 5 + 5 \times 5$

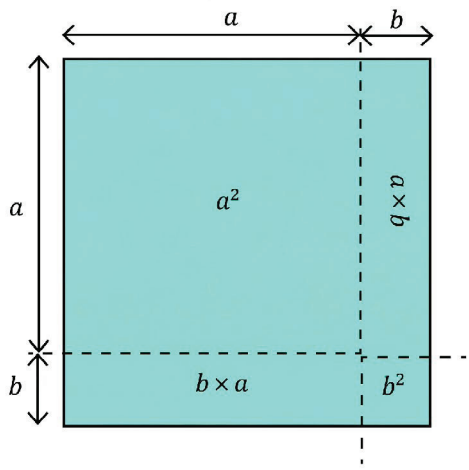
$= 60^2 + 2 \times (60 \times 5) + 5^2$.

AP SCERT

? What if we write 65^2 as $(30 + 35)^2$ or $(52 + 13)^2$?

Draw the figures and check the area that you get.

Let us look at the general expression for the square of sum of two numbers, $(a + b)^2$.



Using the distributive property, $(a+b)^2$ can be expanded as

$$(a+b) \times (a+b) = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2,$$

as we had already seen in Example 2.

Identity 1A $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

? If a and b are any two integers, is $(a + b)^2$ always greater than $a^2 + b^2$? If not, when is it greater?

? Use Identity 1A to find the values of 104^2, 37^2. (Hint: Decompose 104 and 37 into sums or differences of numbers whose squares are easy to compute.)

? Use Identity 1A to write the expressions for the following.

(i) $(m + 3)^2$ (ii) $(6 + p)^2$

? Expand $(6x + 5)^2$.

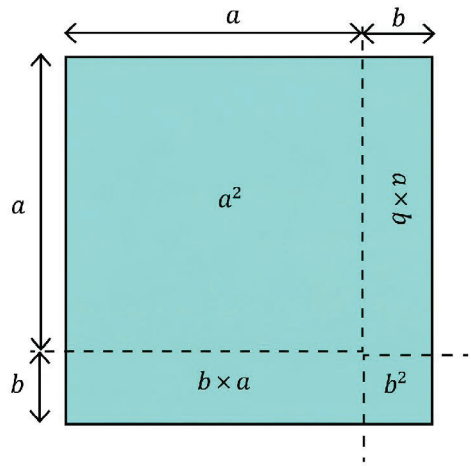
Using the Distributive Property	Using the Identity
$(6x + 5)^2 = (6x + 5)(6x + 5)$ $= (6x \times 6x) + (5 \times 6x)$ $+(6x \times 5) + 5 \times 5$ $= (6x)^2 + 2(6x \times 5) + 5^2$ $= 36x^2 + 60x + 25.$	$(6x + 5)^2 = (6x)^2 + 5^2 + 2 \times (6x \times 5)$ $= 36x^2 + 25 + 60x.$ $= 36x^2 + 60x + 25$

AP SCERT

? మనం 65^2 ను $(30 + 35)^2$ గా లేదా $(52 + 13)^2$ గా రాస్తే ఎలా ఉంటుంది?

పటాలను గీసి, మీకు లభించే వైశాల్యాన్ని సరిచూసుకోండి.

రెండు సంఖ్యల మొత్తపు వర్గానికి సంబంధించిన సాధారణ సమాసాన్ని, $(a + b)^2$ ను పరిశీలిద్దాం..



విభజన ధర్మాన్ని ఉపయోగించి, $(a + b)^2$ ను ఈ విధంగా విస్తరించవచ్చు

$$(a+b) \times (a+b) = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2,$$

ఉదాహరణ 2లో మనం ఇంతకు ముందే చూసినట్లుగా.

సర్వసమీకరణం 1A $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

? a మరియు b అనేవి ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు $(a + b)^2$ అనేది ఎల్లప్పుడూ $a^2 + b^2$ కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా? ఒకవేళ కాకపోతే, అది ఎప్పుడు ఎక్కువగా ఉంటుంది?

? సర్వసమానత 1A ను ఉపయోగించి 104^2, 37^2 విలువలని కనుగొనండి. (సూచన: 104 మరియు 37 లను, వాటి వర్గాలను సులభంగా లెక్కించగల సంఖ్యల మొత్తాలుగా లేదా భేదాలుగా విడగొట్టండి.)

? కింది వాని సమాసాలను రాయడానికి సర్వసమీకరణం 1A ను ఉపయోగించండి..

(i) $(m + 3)^2$ (ii) $(6 + p)^2$

? $(6x + 5)^2$ ను విస్తరించండి.

విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి	సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి
$(6x + 5)^2 = (6x + 5)(6x + 5)$ $= (6x \times 6x) + (5 \times 6x)$ $+(6x \times 5) + 5 \times 5$ $= (6x)^2 + 2(6x \times 5) + 5^2$ $= 36x^2 + 60x + 25.$	$(6x + 5)^2 = (6x)^2 + 5^2 + 2 \times (6x \times 5)$ $= 36x^2 + 25 + 60x.$ $= 36x^2 + 60x + 25$

AP SCERT

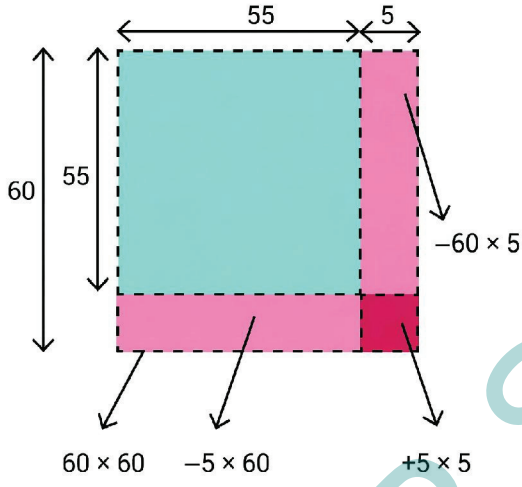
If you have difficulty remembering or using the general rule, you can just apply the distributive property to multiply and get the desired result.

? Expand $(3j + 2k)^2$ using both the identity and by applying the distributive property.

? Can we use 60^2 (= 3600) and 5^2 (= 25) to find the value of $(60 - 5)^2$ or 55^2?

Let us approach this through geometry by drawing a square of side length 55 sitting inside a square of side length 60.

Area of a square of sidelength 55 is $(60 - 5)^2 = 55^2$.



We can get the area of the square of sidelength 55 by taking the area of the square of sidelength 60 and removing the areas of the two rectangles of sidelengths 60 and 5, i.e., $60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60)$. By doing this, we remove the area of the small square of sidelength 5 twice. What can we do with this expression to get the actual area?

We can add back the area of the square of sidelength 5 to this expression. That way, we are only subtracting this area once.

So,

$$(60 - 5)^2 = 60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60) + 5^2$$
$$= 3600 - 300 - 300 + 25$$
$$= 3025.$$

The area of the square of sidelength 55 is 3025 sq. units.

We have seen what $(a + b)^2$ gives when expanded. What is the expansion of $(a - b)^2$?

Using the distributive property,

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$$
$$= (a)^2 - ba - ab + (b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

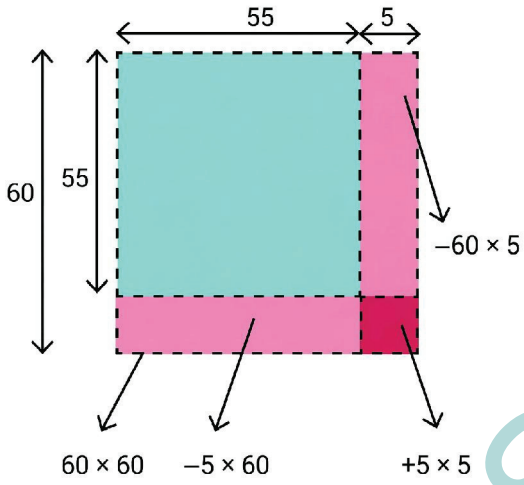
AP SCERT

సాధారణ నియమాన్ని గుర్తుంచుకోవడం లేదా ఉపయోగించడంలో మీకు ఇబ్బంది ఉంటే, మీరు గుణించడానికి మరియు కావలసిన ఫలితాన్ని పొందడానికి విభాగ న్యాయాన్ని వర్తింపజేయవచ్చు.

? $(3j + 2k)^2$ ను సర్వసమీకరణాన్ని మరియు విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి విస్తరించండి.

? $(60 - 5)^2$ లేదా 55^2 విలువను కనుగొనడానికి మనం 60^2 (= 3600) మరియు 5^2 (= 25) లను ఉపయోగించవచ్చా? 60 యూనిట్ల భుజం పొడవు కలిగిన ఒక చతురస్రం లోపల, 55 యూనిట్ల భుజం పొడవు కలిగిన మరొక చతురస్రాన్ని గీయడం ద్వారా, జ్యామితీయ పద్ధతిలో దీనిని పరిశీలిద్దాం.

భుజం 55 గా కలిగిన ఒక చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం $(60 - 5)^2 = 55^2$.



భుజం పొడవు 60 గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం నుండి 60 మరియు 5 భుజాల పొడవులు గల రెండు దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలను తీసివేయడం ద్వారా మనం భుజం పొడవు 55 గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని పొందవచ్చు, అనగా, $60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60)$. ఇలా చేయడం ద్వారా, మనం భుజం పొడవు 5 గల చిన్న చతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని రెండుసార్లు తీసివేస్తాము. అసలు వైశాల్యాన్ని పొందడానికి ఈ సమీకరణంతో మనం ఏమి చేయవచ్చు?

మనం భుజం పొడవు 5 గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని ఈ సమీకరణానికి తిరిగి కలపవచ్చు. ఆ విధంగా, మనం ఈ వైశాల్యాన్ని ఒక్కసారి మాత్రమే తీసివేస్తున్నాము.

కాబట్టి,

$$(60 - 5)^2 = 60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60) + 5^2$$
$$= 3600 - 300 - 300 + 25$$
$$= 3025.$$

55 భుజం పొడవు గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం 3025 చ. యూనిట్లు.

$(a + b)^2$ ను విస్తరించినప్పుడు ఏమి వస్తుందో మనం చూశాము. $(a - b)^2$ యొక్క విస్తరణ ఏమిటి?

విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి,

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$$
$$= (a)^2 - ba - ab + (b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

AP SCERT

? We can also use the expansion of $(a + b)^2$ to find the expansion of $(a - b)^2$. Think how.

Hint: $(a - b)^2 = (a + (-b)^2$.

We can now directly use the expansion of $(a + b)^2$.

$(a + (-b)^2 = (a)^2 + (-b)^2 + 2 \times (a) \times (-b)$

Identity 1B $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

? Find the general expansion of $(a - b)^2$ using geometry, as we did for 55^2.

? Use the identity $(a - b)^2$ to find the values of (a) 99^2 and (b) 58^2.

? Expand the following using both Identity 1B and by applying the distributive property

(i) $(b - 6)^2$ (ii) $(- 2a + 3)^2$ (iii) $\left(7y - \frac{3}{4z}\right)^2$

Investigating Patterns

Pattern 1

Look at the following pattern.

$$2\,(2^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2$$
$$2\,(3^2 + 1^2) = 4^2 + 2^2$$
$$2\,(6^2 + 5^2) = 11^2 + 1^2$$
$$2\,(5^2 + 3^2) = 8^2 + 2^2.$$

? Take a pair of natural numbers. Calculate the sum of their squares. Can you write twice this sum as a sum of two squares? (i.e., as the above Pattern 1)

Try this with other pairs of numbers. Have you figured out a pattern? Notice that $2\,(6^2 + 5^2) = (6 + 5)^2 + (6 - 5)^2$.

? Do the identities below help in explaining the observed pattern?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

Adding the like terms $a^2 + a^2 = 2a^2$, $b^2 + b^2 = 2b^2$ and $2ab - 2ab = 0$, we get

$$2\,(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

Pattern 2

? Here is a related pattern. Try to describe the pattern using algebra to determine if the pattern always holds.

AP SCERT

? $(a + b)^2$ యొక్క విస్తరణను ఉపయోగించి, మనం $(a - b)^2$ యొక్క విస్తరణను కూడా కనుగొనవచ్చు. అది ఎలాగో ఆలోచించండి.

సూచన: $(a - b)^2 = (a + (-b)^2$.

మనం ఇప్పుడు $(a + b)^2$ యొక్క విస్తరణను నేరుగా ఉపయోగించవచ్చు.

$(a + (-b)^2 = (a)^2 + (-b)^2 + 2 \times (a) \times (-b)$

సర్వసమీకరణం 1B $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

? 55^2 కోసం మనం చేసిన విధంగానే, జ్యామిత్రిని ఉపయోగించి $(a - b)^2$ యొక్క సాధారణ విస్తరణను కనుగొనండి.

? $(a - b)^2$ అనే సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి, (a) 99^2 మరియు (b) 58^2 విలువలను కనుగొనండి..

? సర్వసమీకరణం 1B మరియు విభాగ న్యాయాన్ని (distributive property) ఉపయోగించి కింది వాటినిని విస్తరించండి.

(i) $(b - 6)^2$ (ii) $(- 2a + 3)^2$ (iii) $\left(7y - \frac{3}{4z}\right)^2$

నమూనాలను పరిశోధించడం

నమూనా 1

దిగువ నమూనాలని గమనించండి.

$$2\,(2^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2$$
$$2\,(3^2 + 1^2) = 4^2 + 2^2$$
$$2\,(6^2 + 5^2) = 11^2 + 1^2$$
$$2\,(5^2 + 3^2) = 8^2 + 2^2.$$

? ఏవైనా రెండు సహజ సంఖ్యలను తీసుకోండి. వాటి వర్గాల మొత్తాన్ని లెక్కించండి. ఈ మొత్తం యొక్క రెట్టింపును, రెండు వర్గాల మొత్తంగా మీరు రాయగలరా? (అంటే, పైన పేర్కొన్న 'నమూనా 1' రూపంలో).

దీనిని ఇతర సంఖ్యల జతలతో ప్రయత్నించి చూడండి. మీరు ఏదైనా క్రమాన్ని గుర్తించారా?

$2\,(6^2 + 5^2) = (6 + 5)^2 + (6 - 5)^2$ అని గమనించండి.

? మీరు గమనించిన ఈ క్రమాన్ని వివరించడంలో, క్రింద ఇవ్వబడిన సర్వసమీకరణాలు సహాయపడతాయా?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

ఇందులో సజాతి పదాలను (like terms) కూడగా, మనకు ఈ ఫలితం లభిస్తుంది: $a^2 + a^2 = 2a^2$, $b^2 + b^2 = 2b^2$ మరియు $2ab - 2ab = 0$,

$$2\,(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

నమూనా 2

? ఇక్కడ ఒక సంబంధిత నమూనా ఉంది. ఈ నమూనా ఎల్లప్పుడూ వర్తిస్తుందో లేదో నిర్ధారించడానికి, బీజగణితాన్ని ఉపయోగించి దీనిని వివరించడానికి ప్రయత్నించండి.

AP SCERT

$$9 \times 9 - 1 \times 1 = 10 \times 8$$

$$8 \times 8 - 6 \times 6 = 14 \times 2$$

$$7 \times 7 - 2 \times 2 = 9 \times 5$$

$$10 \times 10 - 4 \times 4 = 14 \times 6$$

The pattern here appears to be $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$.

Is this a true identity? Using the distributive property, we get

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - ab + ba - a^2.$$

Adding the like terms, $ab + (- ab) = 0$, we see that indeed

Identity 1C $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$.

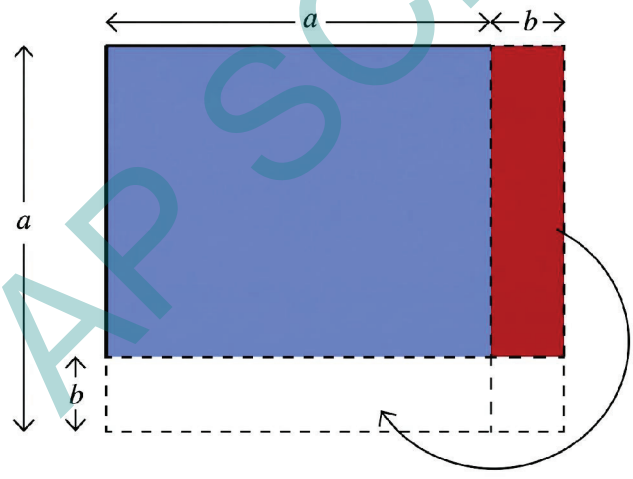
You had seen this identity earlier in Figure it Out 6.1 - 5 (i).

Try This

? Use Identity 1C to calculate 98×102, and 45×55.

? Show that $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ geometrically.

Hint :



What do we get when this piece is moved?

Sridharacharya (750 CE) gave an interesting method to quickly compute the squares of numbers using Identity 1C! Consider the following modified form of this identity -

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

? Why is this identity true?

Now, for example, 31^2 can be found by taking $a = 31$ and $b = 1$.

AP SCERT

$$9 \times 9 - 1 \times 1 = 10 \times 8$$
$$8 \times 8 - 6 \times 6 = 14 \times 2$$
$$7 \times 7 - 2 \times 2 = 9 \times 5$$
$$10 \times 10 - 4 \times 4 = 14 \times 6$$

ఇక్కడ ఉన్న నమూనా $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$ లాగా కనిపిస్తోంది.

ఇది నిజమైన సర్వసమానత్వమా? విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి, మనకు

$(a + b) \times (a - b) = a^2 - ab + ba - a^2$. లభిస్తుంది.

సజాతి పదాలను కలపగా, $ab + (- ab) = 0$, ఇది నిజమేనని మనం గమనిస్తాము.

సర్వసమీకరణం 1C $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$.

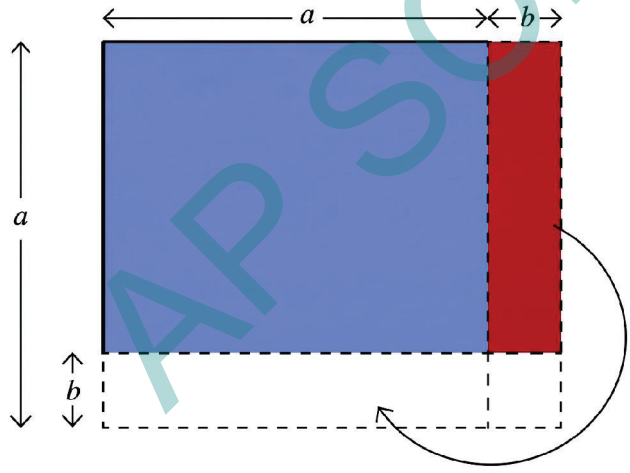
మీరు ఈ సర్వసమీకరణాన్ని ఇంతకుముందు 'ఆలోచించండి–చేయండి 6.1 లో 5(i)'లో చూశారు..

? 98×102 మరియు 45×55 లను లెక్కించడానికి సర్వసమీకరణం 1C ని ఉపయోగించండి.

? $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ అని జ్యామితీయంగా చూపండి.

ప్రయత్నించండి

సూచన :



మన ఈ భాగాన్ని సూచించిన విధంగా కదిపినప్పుడు మనకు ఏమి లభిస్తుంది?

శ్రీధరాచార్యుడు (క్రీ.శ. 750) సర్వసమీకరణం 1C ని ఉపయోగించి సంఖ్యల వర్గాలను వేగంగా గణించడానికి ఒక ఆసక్తికరమైన పద్ధతిని అందించారు! ఈ సర్వసమీకరణం యొక్క ఈ క్రింది సవరించిన రూపాన్ని పరిగణించండి

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

? ఈ సర్వసమీకరణం ఎందుకు సత్యం?

ఇప్పుడు, ఉదాహరణకు, $a = 31$ మరియు $b = 1$ అని తీసుకుని 31^2 ను కనుగొనవచ్చు.

AP SCERT

$$31^2 = (31 + 1)(31 - 1) + 1^2$$
$$= 32 \times 30 + 1$$
$$= 961.$$

197^2 can be found by taking a = 197, and b = 3.

$$197^2 = (197 + 3)(197 - 3) + 3^2$$
$$= 200 \times 194 + 9$$
$$= 38809.$$

Figure it Out - 6.2

1. Which is greater: $(a - b)^2$ or $(b - a)^2$? Justify your answer.
2. Express 100 as the difference of two squares.
3. Find 406^2, 72^2, 145^2, 1097^2, and 124^2 using the identities you have learnt so far.
4. Do Patterns 1 and 2 hold only for counting numbers? Do they hold for negative integers as well? What about fractions? Justify your answer.

6.3 Mind the Mistake, Mend the Mistake

We have expanded and simplified some algebraic expressions below to their simplest forms.

(i) Check each of the simplifications and see if there is a mistake.

(ii) If there is a mistake, try to explain what could have gone wrong.

(iii) Then write the correct expression

1. $-3p(-5p + 2q)$
$= -3p + 5p - 2q$
$= p - 2q$

2. $2(x - 1) + 3(x + 4)$
$= 2x - 1 + 3x + 4$
$= 5x + 3$

3. $y + 2(y + 2)$
$= (y + 2)^2$
$= y^2 + 4y + 4$

4. $(5m + 6n)^2$
$= 25m^2 + 36n^2$

5. $(-q + 2)^2$
$= q^2 - 4q + 4$

6. $3a(2b \times 3c)$
$= 6ab + 9ac$
$= 54a2bc$

AP SCERT

$$31^2 = (31 + 1)(31 - 1) + 1^2$$
$$= 32 \times 30 + 1$$
$$= 961.$$

$a = 197$, మరియు $b = 3$ అని తీసుకున్నప్పుడు, 197^2 విలువను కనుగొనవచ్చు.

$$197^2 = (197 + 3)(197 - 3) + 3^2$$
$$= 200 \times 194 + 9$$
$$= 38809.$$

ఆలోచించండి-చేయండి - 6.2

1. $(a - b)^2$ లేదా $(b - a)^2$ లలో ఏది ఎక్కువ? మీ జవాబును సమర్థించండి..
2. 100ను రెండు వర్గాల మధ్య భేదంగా వ్యక్తపరచండి..
3. ఇప్పటివరకు మీరు నేర్చుకున్న సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి 406^2, 72^2, 145^2, 1097^2 మరియు 124^2 విలువ లను కనుగొనండి.
4. నమూనాలు 1 మరియు 2 కేవలం లెక్కింపు సంఖ్యలకు (సహజ సంఖ్యలకు) మాత్రమే వర్తిస్తాయా? అవి రుణ పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా వర్తిస్తాయా? భిన్నాలకు కూడా వర్తిస్తాయా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

6.3 పొరపాటును గమనించండి, పొరపాటును సరిదిద్దండి

మేము క్రింద కొన్ని బీజగణిత సమాసాలను విస్తరించి వాటిని సూక్ష్మ రూపాల్లోకి సూక్ష్మీకరించాము.

(i) ప్రతి సూక్ష్మీకరణను తనిఖీ చేసి, ఏదైనా తప్పు ఉందో లేదో చూడండి.

(ii) ఒకవేళ తప్పు ఉంటే, ఎక్కడ పొరపాటు జరిగిందో వివరించడానికి ప్రయత్నించండి.

(iii) ఆ తర్వాత సరైన సమాసాన్ని రాయండి.

1. $-3p(-5p + 2q)$
$= -3p + 5p - 2q$
$= p - 2q$

2. $2(x - 1) + 3(x + 4)$
$= 2x - 1 + 3x + 4$
$= 5x + 3$

3. $y + 2(y + 2)$
$= (y + 2)^2$
$= y^2 + 4y + 4$

4. $(5m + 6n)^2$
$= 25m^2 + 36n^2$

5. $(-q + 2)^2$
$= q^2 - 4q + 4$

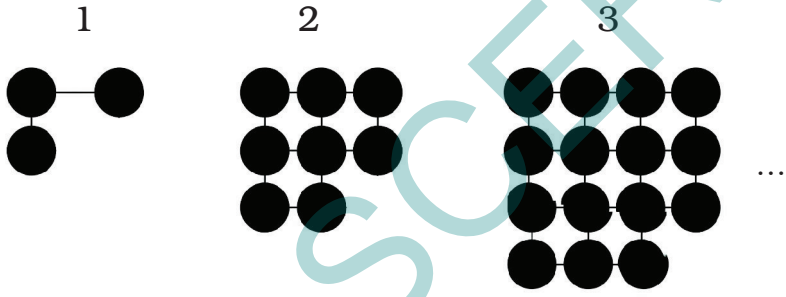
6. $3a(2b \times 3c)$
$= 6ab + 9ac$
$= 54a2bc$

AP SCERT

7 $\frac{1}{2}(10s-6)+3$ $= 5s - 3 + 3$ $= 5s$	8 $5w^2 + 6w$ $= 11w^2$	9 $2a^3 + 3a^3 + 6a^2b + 6ab^2$ $= 5a^3 + 12a^2b^2$
10 $(x+2)(x+5)$ $= (x+2)x + (x+2)5$ $= x^2 + 2x + 5x + 10$ $= x^2 + 7x + 10$	11 $(a+2)(b+4)$ $= ab + 8$	12 $ah^2 + a^2b + a^2b^2$ $= ab\,(a + b + ab)$

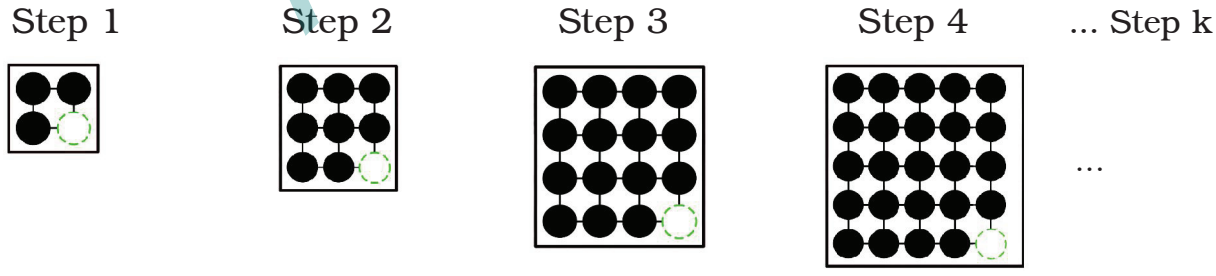
6.4 This Way or That Way, All Ways Lead to the Bay

Observe the pattern in the figure below. Draw the next figure in the sequence. How many circles does it have? How many total circles are there in Step 10? Write an expression for the number of circles in Step k.



There are many ways of interpreting this pattern. Here are some possibilities:

Method 1



Step 1	Step 2	Step 3	Step 4	... Step k
$2^2 - 1$	$3^2 - 1$	$4^2 - 1$	$5^2 - 1$	
$= (1 + 1)^2 - 1$	$= (2 + 1)^2 - 1$	$= (3 + 1)^2 - 1$	$= (4 + 1)^2 - 1$	$\ldots(k + 1)^2 - 1$

AP SCERT

(7) $\frac{1}{2}(10s-6)+3$
$= 5s - 3 + 3$
$= 5s$

(8) $5w^2 + 6w$
$= 11w^2$

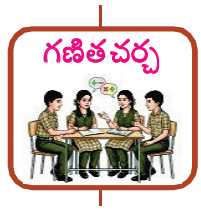
(9) $2a^3 + 3a^3 + 6a^2b + 6ab^2$
$= 5a^3 + 12a^2b^2$

(10) $(x+2)(x+5)$
$= (x+2)x + (x+2)5$
$= x^2 + 2x + 5x + 10$
$= x^2 + 7x + 10$

(11) $(a+2)(b+4)$
$= ab + 8$

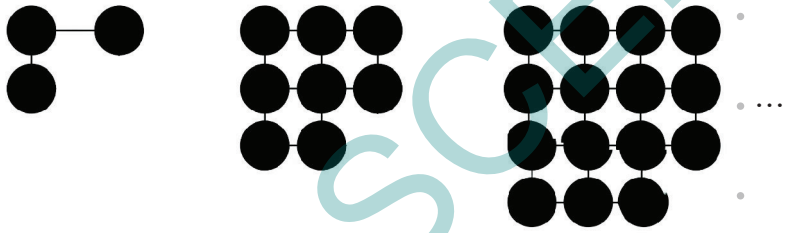
(12) $ah^2 + a^2b + a^2b^2$
$= ab\,(a + b + ab)$

6.4 ఈ దారిలో వెళ్ళినా, ఆ దారిలో వెళ్ళినా – అన్ని దారులు అఖాతానికే దారితీస్తాయి.



క్రింద ఉన్న చిత్రంలోని నమూనాను గమనించండి. ఈ క్రమంలో వచ్చే తర్వాతి చిత్రాన్ని గీయండి. అందులో ఎన్ని వృత్తాలు ఉన్నాయి? 10వ దశలో మొత్తం ఎన్ని వృత్తాలు ఉంటాయి? kవ దశలోని వృత్తాల సంఖ్యను సూచించే ఒక సమాసాన్ని రాయండి.

1 2 3

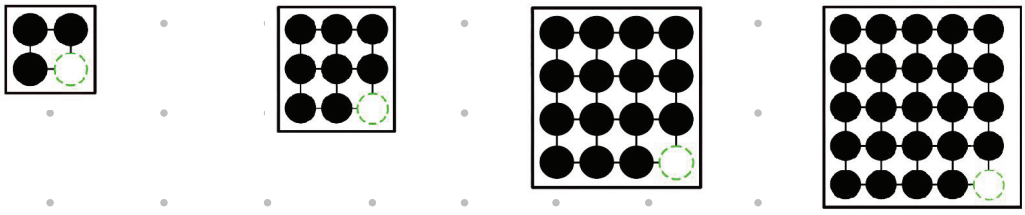


...

ఈ నమూనాను వ్యాఖ్యానించడానికి అనేక మార్గాలు ఉన్నాయి. ఇక్కడ కొన్ని అవకాశాలు ఉన్నాయి.

పద్ధతి 1

దశ 1 దశ 2 దశ 3 దశ 4 ...దశ k



...

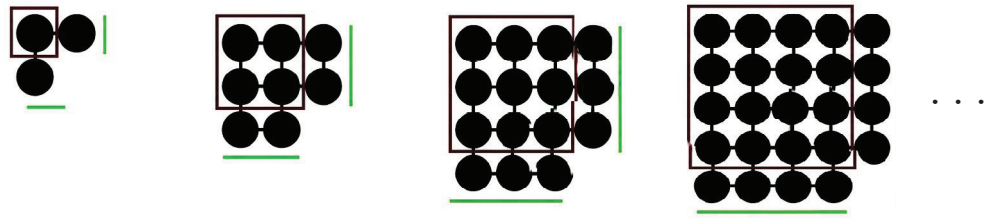
$2^2 - 1$ $3^2 - 1$ $4^2 - 1$ $5^2 - 1$

$= (1 + 1)^2 - 1$ $= (2 + 1)^2 - 1$ $= (3 + 1)^2 - 1$ $= (4 + 1)^2 - 1$ $...(k + 1)^2 - 1$

AP SCERT

Method 2

Step 1 Step 2 Step 3 Step 4 . . . Step k

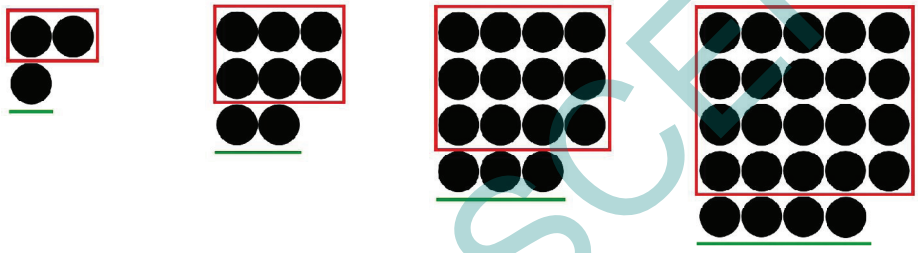


$1 + 2 \times 1$ $2^2 + 2 \times 2$ $3^2 + 2 \times 3$ $4^2 + 2 \times 4$

$= 1^2 + 2 \times 1$ $= 2^2 + 2 \times 2$ $= 3^2 + 2 \times 3$ $= 4^2 + 2 \times 4$ . . . $k^2 + 2 \times k$

Method 3

Step 1 Step 2 Step 3 Step 4 . . . Step k



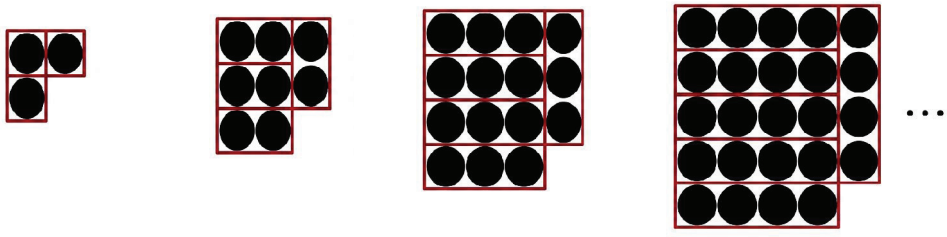
$1 \times 2 + 1$ $2 \times 3 + 2$ $3 \times 4 + 3$ $4 \times 5 + 4$

$= 1 \times (1 + 1) + 1$ $= 2 \times (2 + 1) + 2$ $= 3 \times (3 + 1) + 3$ $= 4 \times (4 + 1) + 4$

. . . $k \times (k + 1) + k$

Method 4

Step 1 Step 2 Step 3 Step 4 . . . Step k



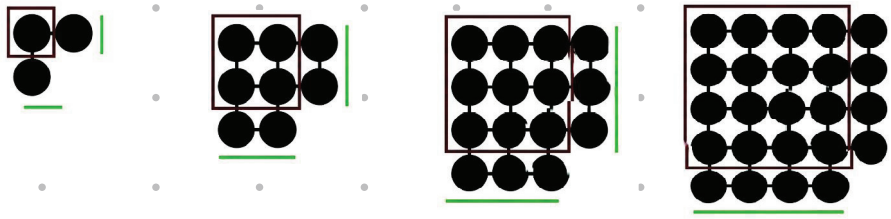
1×3 2×4 3×5 4×6

$= 1 \times (1 + 2)$ $= 2 \times (2 + 2)$ $= 3 \times (3 + 2)$ $= 4 \times (4 + 2)$ . . . $k \times (k+2)$

AP SCERT

పద్ధతి 2

దశ 1 దశ 2 దశ 3 దశ 4 ...దశ k

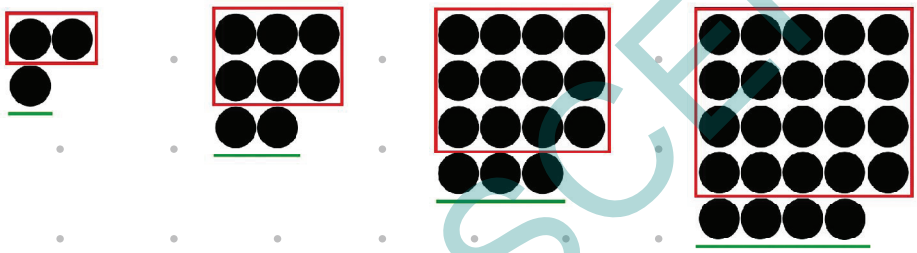


$1 + 2 \times 1$ $2^2 + 2 \times 2$ $3^2 + 2 \times 3$ $4^2 + 2 \times 4$

$= 1^2 + 2 \times 1$ $= 2^2 + 2 \times 2$ $= 3^2 + 2 \times 3$ $= 4^2 + 2 \times 4$ $\ldots k^2 + 2 \times k$

పద్ధతి 3

దశ 1 దశ 2 దశ 3 దశ 4 ...దశ k



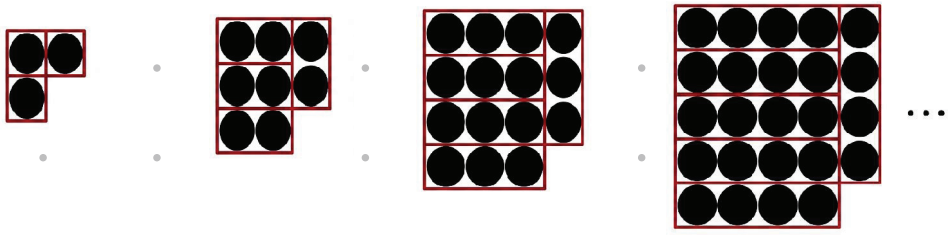
$1 \times 2 + 1$ $2 \times 3 + 2$ $3 \times 4 + 3$ $4 \times 5 + 4$

$= 1 \times (1 + 1) + 1$ $= 2 \times (2 + 1) + 2$ $= 3 \times (3 + 1) + 3$ $= 4 \times (4 + 1) + 4$

... $k \times (k + 1) + k$

పద్ధతి 4

దశ 1 దశ 2 దశ 3 దశ 4 . . . దశ k



1×3 2×4 3×5 4×6

$= 1 \times (1 + 2)$ $= 2 \times (2 + 2)$ $= 3 \times (3 + 2)$ $= 4 \times (4 + 2)$ $\ldots k \times (k+2)$

AP SCERT

Does your method match any of these, or is it different? Each expression that we have identified appears different, but are they really different? Since they describe the same pattern, they should all be the same. Let us simplify each expression and find out.

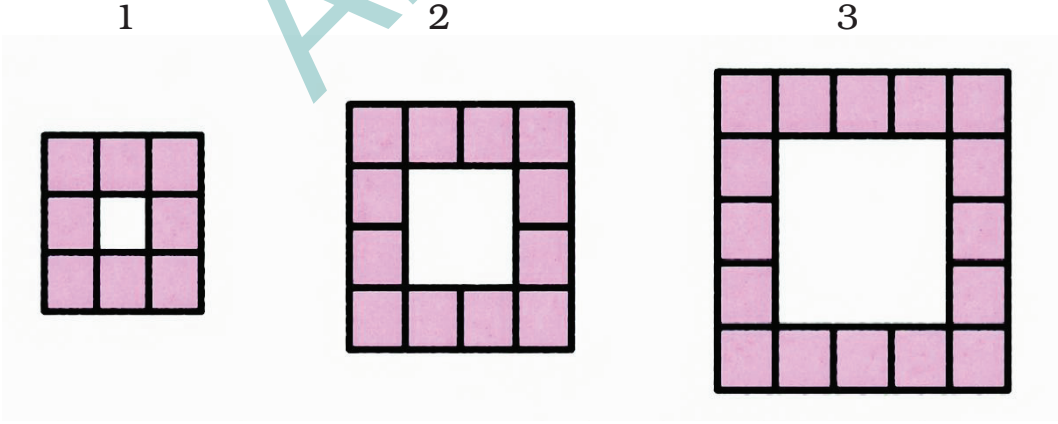
$(k + 1)^2 - 1$	$k^2 + 2 \times k$	$k \times (k + 1) + k$	$k \times (k + 2)$
$= k^2 + 1 + 2k - 1$	$= k^2 + 2k$	$= k^2 + k + k$	$= k^2 + 2k$
$= k^2 + 2k$		$= k^2 + 2k$	

When carried out correctly, all methods lead to the same answer; $k^2 + 2k$. The expression $k^2 + 2k$ gives the number of circles at Step k of this pattern.

In Mathematics, there are often multiple ways of looking at a pattern, and different ways of approaching and solving the same problem. Finding such ways often requires a great deal of creativity and imagination! While one or two of the ways might be your favourite(s), it can be amusing and enriching to explore other ways as well

? Use this formula to find the number of circles in Step 15.

? Consider the pattern made of square tiles in the picture below.



? How many square tiles are there in each figure?

? How many are there in Step 4 of the sequence? What about Step 10?

AP SCERT

మీ పద్ధతి వీటిలో దేనితోనైనా సరిపోలుతుందా, లేదా భిన్నంగా ఉందా? మనం గుర్తించిన ప్రతి సమాసం భిన్నంగా కనిపిస్తుంది, కానీ అవి నిజంగా భిన్నమైనవేనా? అవి ఒకే నమూనాను వివరిస్తున్నందున, అవన్నీ ఒకేలా ఉండాలి. ప్రతి సమాసం సరళీకరించి తెలుసుకుందాం.

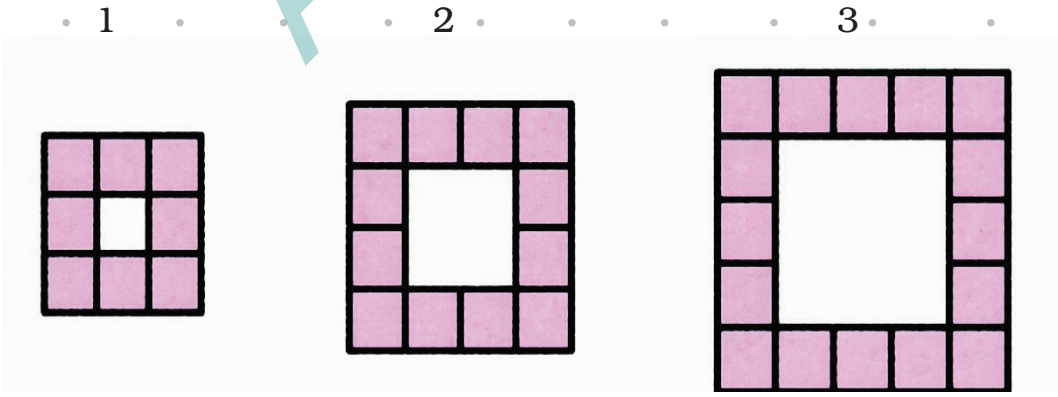
$(k + 1)^2 - 1$	$k^2 + 2 \times k$	$k \times (k + 1) + k$	$k \times (k + 2)$
$= k^2 + 1 + 2k - 1$	$= k^2 + 2k$	$= k^2 + k + k$	$= k^2 + 2k$
$= k^2 + 2k$		$= k^2 + 2k$	

సరిగ్గా అమలు చేసినప్పుడు, అన్ని పద్ధతులు ఒకే సమాధానానికి దారితీస్తాయి: $k^2 + 2k$. ఈ నమూనాలోని k వ దశ వద్ద ఉండే వృత్తాల సంఖ్యను $k^2 + 2k$ అనే సమాసం సూచిస్తుంది.

గణితంలో, ఒక నమూనాను పరిశీలించడానికి తరచుగా అనేక మార్గాలు ఉంటాయి; అలాగే, ఒకే సమస్యను పరిష్కరించడానికి వివిధ పద్ధతులు అందుబాటులో ఉంటాయి. ఇటువంటి మార్గాలను కనుగొనడానికి తరచుగా ఎంతో సృజనాత్మకత మరియు ఊహాశక్తి అవసరమవుతాయి! ఈ మార్గాలలో ఒకటి లేదా రెండు మీకు అత్యంత ఇష్టమైనవి కావచ్చు, అయినప్పటికీ ఇతర మార్గాలను కూడా అన్వేషించడం ఎంతో ఆసక్తికరంగానూ, విజ్ఞానదాయకంగానూ ఉంటుంది.

? 15వ దశలోని వృత్తాల సంఖ్యను కనుగొనడానికి ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి..

? క్రింద ఉన్న చిత్రంలో చతురస్రాకార పలకలతో ఏర్పడిన నమూనాను పరిశీలించండి.



? ప్రతి చిత్రంలో ఎన్ని చతురస్రాకార పలకలు ఉన్నాయి?

? ఈ క్రమంలో 4వ దశలో ఎన్ని ఉన్నాయి? మరి 10వ దశలో ఎన్ని?

AP SCERT

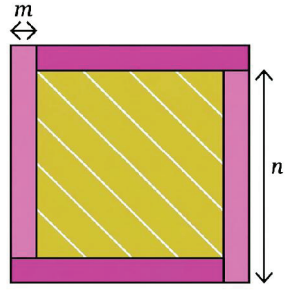
Write an algebraic expression for the number of tiles in Step n. Share your methods with the class. Can you find more than one method to arrive at the answer?

Find the area of the (interior) shaded region in the figure below. All four rectangles have the same dimensions.

Tadang's method:

The total region is a square of side (m + n) with an area $(m + n)^2$.

Subtracting the area of four rectangles from the total area will give the area of the interior shaded region. That is, $(m + n)^2 - 4mn$.



Yusuf's method:

The shaded region is a square with sidelength (n - m). So, its area is $(n - m)^2$.

By expanding both expressions, check that $(m + n)^2 - 4mn = (n - m)^2$.

Find out the area of the region with slanting lines in the figure. All three rectangles have the same dimensions (Fig. 1).

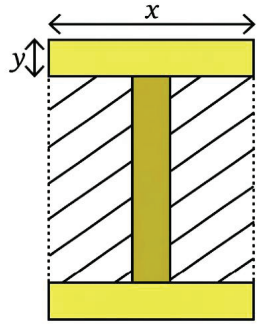


Fig. 1

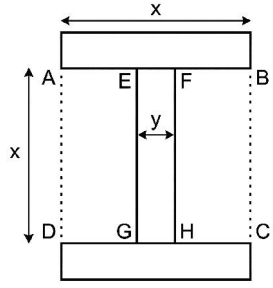
Anusha's method:

Required area = Area (ABCD) - Area (EFGH)

Area of ABCD = x^2.

Area of EFGH = xy.

Required area = $x^2 - xy$.



AP SCERT

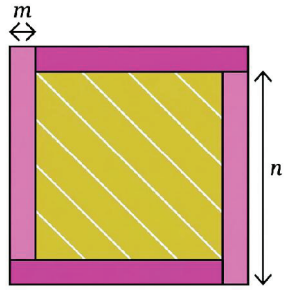
? 'n'వ దశలోని టైల్స్ సంఖ్యను సూచించే ఒక బీజీయ సమాసాన్ని రాయండి. మీ పద్ధతులను తరగతితో పంచుకోండి. ఈ సమాధానాన్ని రాబట్టడానికి మీరు ఒకటి కంటే ఎక్కువ పద్ధతులను కనుగొనగలరా?

? కింది చిత్రంలో (లోపలి) షేడ్ చేసిన ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. ఆ నాలుగు దీర్ఘచతురస్రాల కొలతలు ఒకే విధంగా ఉన్నాయి.

తడాంగ్ యొక్క పద్ధతి :

మొత్తం ప్రాంతం $(m + n)$ భుజం కలిగిన ఒక చతురస్రం, దీని వైశాల్యం $(m + n)^2$. మొత్తం వైశాల్యం నుండి నాలుగు దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాన్ని తీసివేస్తే, లోపలి షేడ్ చేసిన ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యం వస్తుంది. అనగా,

$(m + n)^2 - 4mn.$



యూసఫ్ పద్ధతి :

షేడ్ చేసిన ప్రాంతం $(n - m)$ భుజం పొడవు కలిగిన ఒక చతురస్రం. కాబట్టి, దాని వైశాల్యం $(n - m)^2$.

? రెండు సమాసాలను విస్తరించడం ద్వారా, $(m + n)^2 - 4mn = (n - m)^2$ ను సరిచూడండి.

? పటంలో ఏటవాలు గీతలు కలిగిన ప్రాంత వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. ఆ మూడు దీర్ఘచతురస్రాలు ఒకే కొలతలను కలిగి ఉన్నాయి (పటం 1).

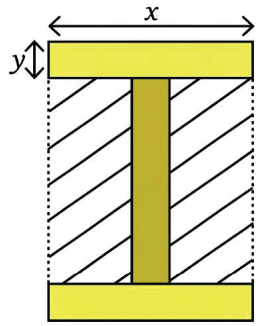


Fig. 1

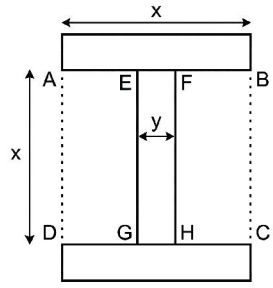
అనూష పద్ధతి :

కావలసిన వైశాల్యం = వైశాల్యం (ABCD) – వైశాల్యం (EFGH).

ABCD వైశాల్యం = x^2.

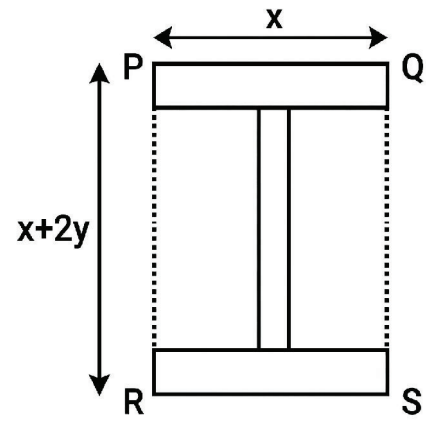
EFGH వైశాల్యం = xy.

కావలసిన వైశాల్యం = $x^2 - xy$.



AP SCERT

Vaishnavi's method:



QS = y + x + y

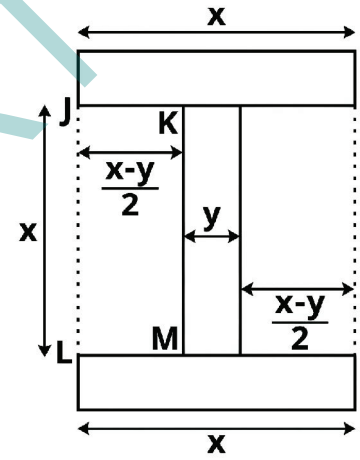
= x + 2y.

Area of PQSR = x (x + 2y)

Required area = Area of PQSR – (area of the three rectangles

= x (x + 2y) - 3xy.

Aditya's method:



The required area is 2 times the area of JKML.

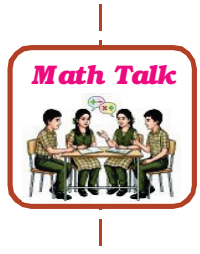
$$JK = \frac{x-y}{2}, KM = x$$

Area (JKML) = $x\frac{(x-y)}{2}$

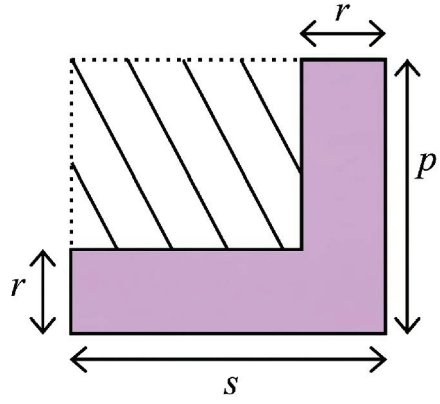
Required area = 2 × Area of JKML

$$= 2x\frac{(x-y)}{2} = x(x-y)$$

By expanding the expressions, verify that all three expressions are equivalent. If x = 8 and y = 3, find the area of the shaded region.

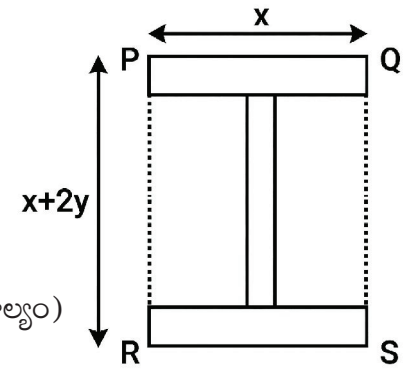


Write an expression for the area of the dashed region in the figure below. Use more than one method to arrive at the answer. Substitute p = 6, r = 3.5, and s = 9, and calculate the area.



APSCERT

వైష్ణవి పద్ధతి :



$QS = y + x + y$

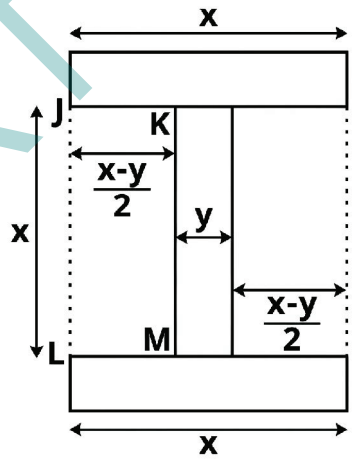
$= x + 2y.$

PQSR యొక్క వైశాల్యం $= x(x + 2y)$

కావలసిన వైశాల్యం = PQSR యొక్క వైశాల్యం – (మూడు దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యం)

$= x(x + 2y) - 3xy.$

ఆదిత్య పద్ధతి :



కావలసిన వైశాల్యం JKML వైశాల్యానికి 2 రెట్లు.

$$JK = \frac{x-y}{2}, KM = x$$

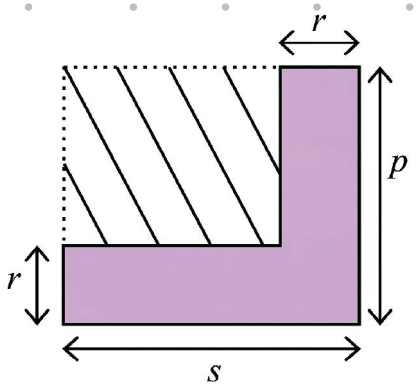
వైశాల్యం (JKML) $= x\dfrac{(x-y)}{2}$

కావలసిన వైశాల్యం = 2 × JKML వైశాల్యం

$$= 2x\frac{(x-y)}{2} = x(x-y)$$

? సమాసాలను విస్తరించడం ద్వారా, ఆ మూడు సమాసాలు తుల్య సమాసాల సరిచూడండి. ఒకవేళ $x = 8$ మరియు $y = 3$ అయితే, షేడ్ చేసిన ప్రాంత వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

? క్రింది చిత్రంలో గీతల (dashed) తో సూచించిన ప్రాంత వైశాల్యాన్ని తెలిపే ఒక సమాసాన్ని రాయండి. ఈ సమాధానాన్ని రాబట్టడానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ పద్ధతులను ఉపయోగించండి. $p = 6$, $r = 3.5$ మరియు $s = 9$ విలువలను ప్రతిక్షేపించి, వైశాల్యాన్ని లెక్కించండి.



AP SCERT

Figure it Out - 6.3

1. Compute these products using the suggested identity.

   (i) 46^2 using Identity 1A for $(a + b)^2$

   (ii) 397×403 using Identity 1C for $(a + b)(a - b)$

   (iii) 91^2 using Identity 1B for $(a - b)^2$

   (iv) 43×45 using Identity 1C for $(a + b)(a - b)$

2. Use either a suitable identity or the distributive property to find each of the following products.

   (i) $(p - 1)(p + 11)$ (ii) $(3a - 9b)(3a + 9b)$

   (iii) $-(2y + 5)(3y + 4)$ (iv) $(6x + 5y)^2$

   (v) $(2x - \frac{1}{2})^2$ (vi) $(7p) \times (3r) \times (p + 2)$

3. For each statement identify the appropriate algebraic expression(s).

   (i) Two more than a square number.

   $2 + s$ $(s + 2)^2$ $s^2 + 2$ $s^2 + 4$ $2s^2$ 2^2s

   (ii) The sum of the squares of two consecutive numbers

   $m^2 + n^2$ $(m + n)^2$ $m^2 + 1$ $m^2 + (m + 1)^2$

   $m^2 + (m - 1)^2$ $(m + (m + 1))^2$ $(2m)^2 + (2m + 1)^2$

4. Consider any 2 by 2 square of numbers in a calendar, as shown in the figure.

February						
Su	**M**	**Tu**	**W**	**Th**	**F**	**Sa**
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 6.3

1. సూచించిన సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి ఈ లబ్దాలను గణించండి..

   (i) $(a + b)^2$ కు సంబంధించిన సర్వసమీకరణం 1A ను ఉపయోగించి 46^2 ను

   (ii) $(a + b)(a - b)$ కు సంబంధించిన సర్వసమీకరణం 1C ను ఉపయోగించి 397×403 ను

   (iii) $(a - b)^2$ కు సంబంధించిన సర్వసమీకరణం 1B ను ఉపయోగించి 91^2 ను

   (iv) $(a + b)(a - b)$ కు సంబంధించిన సర్వసమీకరణం 1C ను ఉపయోగించి 43×45 ను

2. కింది లబ్దాలలో ప్రతిదానిని కనుగొనడానికి, తగిన సర్వసమీకరణాన్ని గానీ లేదా విభాగన్యాయాన్ని గానీ ఉపయోగించండి.

   (i) $(p - 1)(p + 11)$ (ii) $(3a - 9b)(3a + 9b)$

   (iii) $-(2y + 5)(3y + 4)$ (iv) $(6x + 5y)^2$

   (v) $(2x - \frac{1}{2})^2$ (vi) $(7p) \times (3r) \times (p + 2)$

3. ప్రతి వాక్యానికి తగిన బీజీయ సమాసాన్ని (లేదా సమాసాలను) గుర్తించండి.

   (i) ఒక వర్గ సంఖ్య కంటే రెండు ఎక్కువ.

   $2 + s$ $(s + 2)^2$ $s^2 + 2$ $s^2 + 4$ $2s^2$ 2^2s

   (ii) రెండు వరుస సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

   $m^2 + n^2$ $(m + n)^2$ $m^2 + 1$ $m^2 + (m + 1)^2$

   $m^2 + (m - 1)^2$ $(m + (m + 1))^2$ $(2m)^2 + (2m + 1)^2$

4. చిత్రంలో చూపినట్లుగా, ఒక క్యాలెండర్లోని సంఖ్యలతో ఏర్పడే ఏదైన 2×2 చతురస్రాన్ని పరిగణించండి.

February

Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

AP SCERT

Find products of numbers lying along each diagonal - $4 \times 12 = 48$, $5 \times 11 = 55$. Do this for the other 2 by 2 squares. What do you observe about the diagonal products? Explain why this happens.

Hint: Label the numbers in each 2 by 2 square as

a	(a + 1)
a + 7	(a + 8)

5. Verify which of the following statements are true.

   (i) $(k + 1)(k + 2) - (k + 3)$ is always 2.

   (ii) $(2q + 1)(2q - 3)$ is a multiple of 4.

   (iii) Squares of even numbers are multiples of 4, and squares of odd numbers are 1 more than multiples of 8.

   (iv) $(6n + 2)^2 - (4n + 3)^2$ is 5 less than a square number.

6. A number leaves a remainder of 3 when divided by 7, and another number leaves a remainder of 5 when divided by 7. What is the remainder when their sum, difference, and product are divided by 7?

7. Choose three consecutive numbers, square the middle one, and subtract the product of the other two. Repeat the same with other sets of numbers. What pattern do you notice? How do we write this as an algebraic equation? Expand both sides of the equation to check that it is a true identity.

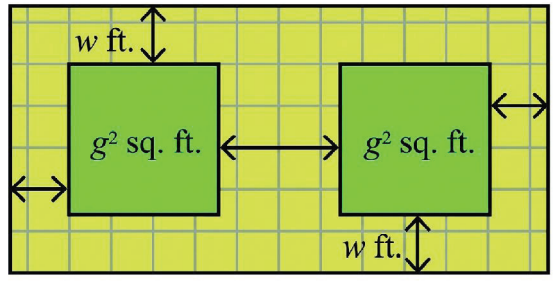
8. What is the algebraic expression describing the following steps - add any two numbers. Multiply this by half of the sum of the two numbers? Prove that this result will be half of the square of the sum of the two numbers.

9. Which is larger? Find out without fully computing the product.

   (i) 14×26 or 16×24

   (ii) 25×75 or 26×74

10. A tiny park is coming up in Dhauli. The plan is shown in the figure. The two square plots, each of area g^2 sq. ft., will have a green cover. All the remaining area is a walking path w ft. wide that needs to be tiled. Write an expression for the area that needs to be tiled.



AP SCERT

ప్రతి కర్ణం వెంబడి ఉన్న సంఖ్యల లబ్ధాలను కనుగొనండి - $4 \times 12 = 48$, $5 \times 11 = 55$. మిగిలిన 2×2 చతురస్రాలకు కూడా ఇదే విధంగా చేయండి. ఈ కర్ణాల లబ్ధాల గురించి మీరు ఏమి గమనించారు? ఇలా ఎందుకు జరుగుతుందో వివరించండి.

సూచన : ప్రతి 2×2 చదరంలోని సంఖ్యలను ఈ విధంగా గుర్తించండి.

a	(a + 1)
a + 7	(a + 8)

5. కింది వాక్యాలలో ఏవి సత్యమో సరిచూడండి..

(i) $(k + 1)(k + 2) - (k + 3)$ ఎల్లప్పుడూ 2 అవుతుంది.

(ii) $(2q + 1)(2q - 3)$ అనేది 4 యొక్క గుణజం.

(iii) సరి సంఖ్యల వర్గాలు 4 యొక్క గుణిజాలు, మరియు బేసి సంఖ్యల వర్గాలు 8 యొక్క గుణిజాల కంటే 1 ఎక్కువ.

(iv) $(6n + 2)^2 - (4n + 3)^2$ అనేది ఒక వర్గ సంఖ్య కంటే 5 తక్కువ.

6. ఒక సంఖ్యను 7తో భాగించినప్పుడు 3 శేషం వస్తుంది, మరొక సంఖ్యను 7తో భాగించినప్పుడు 5 శేషం వస్తుంది. ఆ సంఖ్యల మొత్తం, భేదం మరియు లబ్ధాలను 7తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషం ఎంత?

7. మూడు వరుస సంఖ్యలలో మధ్య సంఖ్యను వర్గం చేసి, మిగిలిన రెండింటి లబ్ధాన్ని తీసే విధంగా వాటిని ఎన్నుకొండి. ఇదే విధంగా ఇతర సంఖ్యా సమితులతో కూడా చేయండి. మీరు ఏ నమూనాను గమనించారు? దీనిని బీజగణిత సమీకరణంగా ఎలా రాస్తాము? ఇది ఒక నిజమైన సర్వసమీకరణం అని సరిచూసుకోవడానికి, సమీకరణం యొక్క రెండు వైపులా విస్తరించండి.

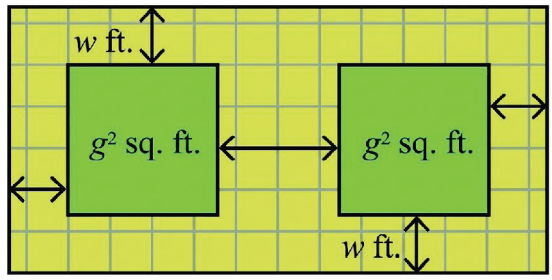
8. కింది దశలను వివరించే బీజీయ సమాసం ఏమిటి – ఏవైనా రెండు సంఖ్యలను కలపండి. ఆ రెండు సంఖ్యల మొత్తంలో సగంతో ఈ ఫలితాన్ని గుణించండి? ఈ ఫలితం, ఆ రెండు సంఖ్యల మొత్తం యొక్క వర్గంలో సగం ఉంటుందని నిరూపించండి.

9. వీటిలో ఏది పెద్దది? గుణకారాన్ని పూర్తిగా లెక్కించకుండానే దీనిని కనుగొనండి.

(i) 14×26 or 16×24

(ii) 25×75 or 26×74

10. ధౌలిలో ఒక చిన్న ఉద్యానవనం రూపుదిద్దుకుంటోంది. దీని ప్రణాళిక పటంలో చూపబడింది. ఒక్కొక్కటి g^2 చదరపు అడుగుల వైశాల్యం కలిగిన రెండు చతురస్రాకార స్థలాల్లో పచ్చదనం (green cover) ఉంటుంది. మిగిలిన ప్రాంతమంతా w అడుగుల వెడల్పు గల నడక దారి; దీనికి టైల్స్ పరచాల్సి ఉంది. టైల్స్ పరచాల్సిన ప్రాంత వైశాల్యాన్ని సూచించే ఒక సమాసాన్ని రాయండి.



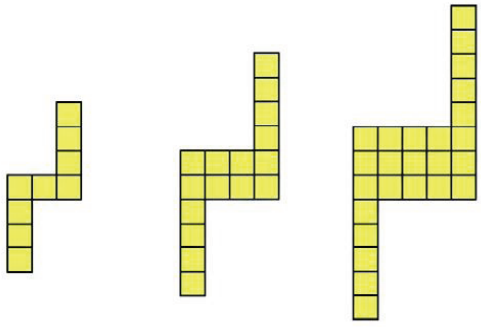
AP SCERT

11. For each pattern shown below,

(i) Draw the next figure in the sequence.

(ii) How many basic units are there in Step 10?

(iii) Write an expression to describe the number of basic units in Step y.



Step 1 Step 2 Step 3

Step 1 Step 2 Step 3

AP SCERT

SUMMARY

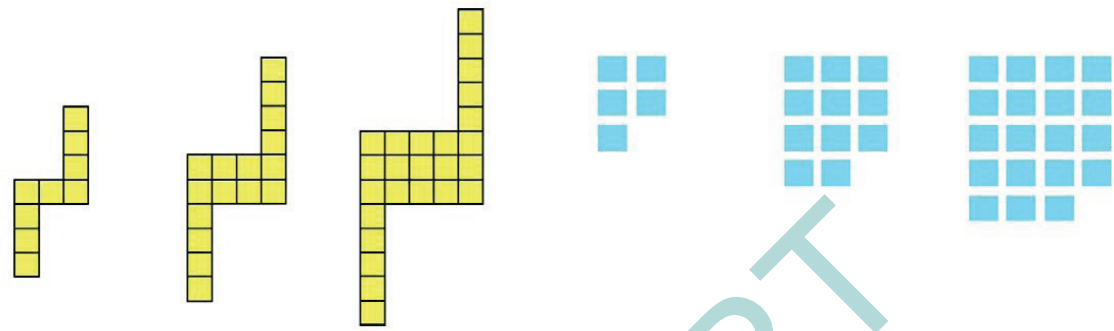
- We extended the distributive property to find the product of two expressions each of which has two terms. The general form for the same is $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$.
- We saw some special cases of this identity.
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- We considered different patterns, and explored how to understand them using algebra. We saw that, often, there are multiple ways to solve a problem and arrive at the same correct answer. Finding different methods to approach and solve the same problem is a creative process.

11. క్రింద చూపిన ప్రతి నమూనాకు సంబంధించి:

(i) ఆ క్రమంలో తర్వాతి చిత్రాన్ని గీయండి.

(ii) 10వ దశలో ఎన్ని ప్రాథమిక ప్రమాణాలు ఉన్నాయి?

(iii) yవ దశలోని ప్రాథమిక ప్రమాణాల సంఖ్యను వివరించే ఒక సమాసాన్ని రాయండి.



దశ 1 దశ 2 దశ 3 దశ 1 దశ 2 దశ 3

సారాంశం

- రెండు పదాలను కలిగిన రెండు బీజీయ సమాసాల లబ్ధాన్ని కనుగొనడానికి, మనం విభాగ న్యాయాన్ని (distributive property) విస్తరించాము. దీని సాధారణ రూపం:

  $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$..

- ఈ సర్వసమీకరణానికి సంబంధించిన కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలను మనం పరిశీలించాము.
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- మనం వివిధ నమూనాలను పరిగణించి, బీజీయ గణితాన్ని ఉపయోగించి వాటిని ఎలా అర్థం చేసుకోవాలో అన్వేషించాము. ఒక సమస్యను పరిష్కరించి, అదే సరైన సమాధానాన్ని పొందడానికి తరచుగా అనేక మార్గాలు ఉంటాయని మనం గమనించాము. ఒకే సమస్యను పరిష్కరించడానికి వివిధ పద్ధతులను కనుగొనడం అనేది ఒక సృజనాత్మక ప్రక్రియ..

AP SCERT

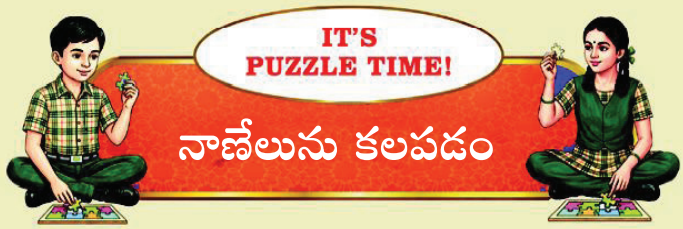
Arrange 10 coins in a triangle as shown in the figure below on the left. The task is to turn the triangle upside down by moving one coin at a time. How many moves are needed? What is the minimum number of moves?

A triangle of 3 coins can be inverted (turned upside down) with a single move, and a triangle of 6 coins can be inverted by moving 2 coins.

The 10-coin triangle can be flipped with just 3 moves; did you figure out how? Find out the minimum possible moves needed to flip the next bigger triangle having 15 coins. Try the same for bigger triangular numbers.

Is there a simple way to calculate the minimum number of coin moves needed for any such triangular arrangement?

APSCERT



నాణేలును కలపడం

నాణేల సంయోగం దిగువ ఎడమవైపు చిత్రంలో చూపిన విధంగా 10 నాణేలను ఒక త్రిభుజాకారంలో అమర్చండి. ఒక్కోసారి ఒక నాణేన్ని కదుపుతూ, ఆ త్రిభుజాన్ని తలక్రిందులు చేయడం ఈ పనిలోని సవాలు. దీనికి ఎన్ని కదలికలు అవసరమవుతాయి? కనీసం ఎన్ని కదలికలతో దీనిని పూర్తి చేయవచ్చు? 3 నాణేల త్రిభుజాన్ని ఒకే కదలికతో తలక్రిందులు చేయవచ్చు, అలాగే 6 నాణేల త్రిభుజాన్ని 2 నాణేలను కదిలించడం ద్వారా తలక్రిందులు చేయవచ్చు.

10–నాణెం త్రిభుజాన్ని కేవలం 3 కదలికలతో తిప్పవచ్చు; ఎలాగో మీరు గుర్తించారా? 15 నాణేలు ఉన్న తరువాత పెద్ద త్రిభుజాన్ని తిప్పడానికి అవసరమైన కనీస కదలికలను కనుగొనండి. అంతకంటే పెద్ద త్రిభుజ సంఖ్యల కోసం కూడా ఇదే ప్రయత్నించండి.

అటువంటి త్రిభుజాకార అమరికకు అవసరమైన కనీస నాణేల కదలికలను లెక్కించడానికి ఏదైనా సరళమైన మార్గం ఉందా?

APSCERT

7 PROPORTIONAL REASONING-1

Learning outcomes : Learners will be able to

- Understand and explain ratio as a comparison of two quantities (CG-1)
- Recognise equivalent and proportional ratios (CG-1)
- Simplify ratios to lowest form using HCF (CG-8)
- Apply proportional reasoning in real-life contexts (recipes, scaling, speed, cost) (CG-10)
- Use Rule of Three (Trairasika) and cross multiplication to solve proportions (CG-9)
- Divide quantities in a given ratio and justify reasoning (CG-6)
- Convert between related units in proportion-based problems (CG-8)
- Communicate mathematical reasoning clearly through contextual analysis and discussion. (CG-6)

B7Z4D3

AP SCERT

7.0 Introduction

Proportional reasoning helps us understand how two quantities change in relation to each other. It is the foundation of comparing, scaling, and solving problems involving ratios and proportions in real life.

We often use proportional reasoning when resizing images, mixing ingredients, sharing profits, or converting units. When two quantities increase or decrease in the same ratio, we say they are proportional.

For example, if the width and height of a picture both double, the image looks the same but larger - showing similarity through proportion.

Using ratios, simplest forms, and cross multiplication, we can identify proportional relationships and solve real-life problems, such as recipes, distances, or sharing money fairly.

7.1 Observing Similarity in Change

We are all familiar with digital images. We often change the size and orientation of these images to suit our needs. Observe the set of images below

7 అనుపాత తార్కికత - 1

అభ్యసన ఫలితాలు : అభ్యాసకులు

- రెండు పరిమాణాల పోలికగా నిష్పత్తిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు వివరించగలుగుతారు. (CG-1)
- సమానమైన, అనుపాత నిష్పత్తులను గుర్తిస్తారు. (CG-1)
- గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకం (HCF) ఉపయోగించి నిష్పత్తులను కనిష్ఠ రూపంలోకి సూక్ష్మీకరించడం, చేయడం (CG-8)
- నిజ జీవిత పరిస్థితుల్లో (వంటకాలు, స్కేలింగ్, వేగం, ఖర్చు) అనులోమానుపాత తర్కాన్ని అన్వయిస్తారు. (CG-10)
- నిష్పత్తులను పరిష్కరించడానికి త్రైరాశిక నియమం (Trairasika), అడ్డగుణకారం ఉపయోగిస్తారు. (CG-9)
- ఒక నిర్దిష్ట నిష్పత్తిలో పరిమాణాలను విభజించడం మరియు తర్కాన్ని సమర్థించడం చేస్తారు. (CG-6)
- నిష్పత్తి ఆధారిత సమస్యలలో సంబంధిత యూనిట్ల మధ్య అనువాదం చేస్తారు. (CG-8)
- సందర్భోచిత విశ్లేషణ మరియు చర్చ ద్వారా గణిత తర్కాన్ని స్పష్టంగా వ్యక్తపరుస్తారు. (CG-6)

7.0 పరిచయం

రెండు రాశులు ఒకదానికొకటి ఎలా మారుతాయో అర్థం చేసుకోవడానికి అనుపాత ఆలోచనా విధానం మనకు సహాయపడుతుంది. నిజ జీవితంలో నిష్పత్తులు మరియు అనుపాతాలకు సంబంధించిన సమస్యలను పోల్చడానికి, స్కేలింగ్ చేయడానికి మరియు పరిష్కరించడానికి ఇది పునాది వంటిది.

మనం చిత్రాల పరిమాణాన్ని మార్చేటప్పుడు, వంట పదార్థాలను కలిపేటప్పుడు, లాభాలను పంచుకునేటప్పుడు లేదా ప్రమాణాలను మార్చేటప్పుడు తరచుగా అనుపాత ఆలోచనా విధానాన్ని ఉపయోగిస్తాము. రెండు రాశులు ఒకే నిష్పత్తిలో పెరిగినా లేదా తగ్గినా, అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయని అంటాము.

ఉదాహరణకు: ఒక చిత్రం యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తు రెండూ రెట్టింపు అయితే, ఆ చిత్రం పెద్దదిగా కనిపిస్తుంది కానీ దాని రూపం మారదు - ఇది అనుపాతం ద్వారా సారూప్యతను తెలియజేస్తుంది. నిష్పత్తులు, కనిష్ఠ రూపాలు మరియు అడ్డ గుణకారాన్ని ఉపయోగించి మనం అనుపాత సంబంధాలను గుర్తించవచ్చు. అలాగే వంటకాలు, దూరాలు లేదా డబ్బును న్యాయంగా పంచుకోవడం వంటి నిజ జీవిత సమస్యలను పరిష్కరించవచ్చు.

7.1 మార్పులో సరూపతను గమనించడం

మనందరికీ డిజిటల్ చిత్రాల పట్ల అవగాహన ఉంది. మన అవసరాలకు అనుగుణంగా మనం తరచుగా ఈ చిత్రాల పరిమాణం మరియు దిశను మారుస్తుంటాం. క్రింద ఉన్న చిత్రాల సముదాయాన్ని గమనించండి-

AP SCERT

Image A

Image B

Image C

Image D

Image E

We can see that all the images are of different sizes.

? Which images look similar and which ones look different?

Images (A, C, and D) look similar, eventhough they have different sizes.

? Do images B and E look like the other three images?

No, they are slightly distorted. The tiger appears elongated in B, and compressed and fatter in E!

? Why?

You may notice that images A, C, and D are rectangular, but E is square.May be that is why E looks different. But B is also a rectangle! Why does it look different from the other rectangular images?

Can we observe any pattern to answer this question?

Perhaps by measuring the rectangles?

AP SCERT

చిత్రం A

చిత్రం B

చిత్రం C

చిత్రం D

చిత్రం E

అన్ని చిత్రాలు వేర్వేరు పరిమాణాలలో ఉన్నాయని మనం చూడవచ్చు.

? ఏ చిత్రాలు ఒకేలా (సరూపంగా) కనిపిస్తున్నాయి మరియు ఏవి భిన్నంగా కనిపిస్తున్నాయి?

చిత్రాలు (A, C, మరియు D) వేర్వేరు పరిమాణాలలో ఉన్నప్పటికీ, అవి ఒకేలా (Similar) కనిపిస్తున్నాయి.

? చిత్రాలు B మరియు E మిగిలిన మూడు చిత్రాల లాగా కనిపిస్తున్నాయా?

లేదు, అవి కొద్దిగా వికృతంగా (distorted) ఉన్నాయి. పులి B లో సాగదీసినట్లుగా మరియు E లో కుదించబడినట్లుగా, లావుగా కనిపిస్తుంది!

? ఎందుకు?

చిత్రాలు A, C, మరియు D దీర్ఘచతురస్రాకారంలో ఉన్నాయని, కానీ E చతురస్రాకారంలో ఉందని మీరు గమనించవచ్చు. బహుశా అందుకే E భిన్నంగా కనిపిస్తుంది. కానీ B కూడా దీర్ఘచతురస్రమే! ఇతర దీర్ఘచతురస్రాకార చిత్రాల కంటే ఇది ఎందుకు భిన్నంగా కనిపిస్తుంది?

ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం ఇవ్వడానికి మనం ఏదైనా నమూనా (Pattern) ను గమనించగలమా? బహుశా దీర్ఘచతురస్రాలను కొలవడం ద్వారానా?

Image	Width (in mm)	Height (in mm)
Image A	60	40
Image B	40	20
Image C	30	20
Image D	90	60
Image E	60	60

? What makes images A, C, and D appear similar, and B and E different?

When we compare image A with C, we notice that the width of C is half that of A. The height is also half of A. Both the width and height have **changed by the same factor** (through multiplication), 1/2 in this case. Since the widths and heights have changed by the same factor, the **images look similar**.

When we compare image A with image B, we notice that the width of B is 20 millimetre (mm) less than that of A. The height too is 20 mm less than the height of A. Even though the difference (through subtraction) is the same, the images look different. Have the width and height changed by the same factor? The height of B is half the height of A. But the width of B is not half the width of A. Since the width and height have not changed by the same factor, the images look different.

? Can you check by what factors the width and height of image D change as compared to image A? Are the factors the same?

Images A, C, and D look similar because their widths and heights have changed by the same factor. We say that the changes to their widths and heights are **proportional**.

7.2 Ratios

We use the notion of a ratio to represent such proportional relationships in mathematics.

We can say that the ratio of width to height of image A is 60 : 40.

The numbers 60 and 40 are called the terms of the ratio.

The ratio of width to height of image C is 30 : 20, and that of image D is 90 : 60.

AP SCERT

చిత్రం	వెడల్పు (మి.మీ.లలో)	ఎత్తు (మి.మీ.లలో)
చిత్రం A	60	40
చిత్రం B	40	20
చిత్రం C	30	20
చిత్రం D	90	60
చిత్రం E	60	60

? చిత్రాలు A, C, మరియు D ఒకేలా కనిపించడానికి, మరియు B మరియు E భిన్నంగా కనిపించడానికి కారణం ఏమిటి?

మనం చిత్రం A ని C తో పోల్చినప్పుడు, C వెడల్పు A లో సగం ఉందని గమనిస్తాము. ఎత్తు కూడా A లో సగమే. వెడల్పు మరియు ఎత్తు రెండూ **ఒకే కారకం** (factor) **ద్వారా (గుణకారం ద్వారా) మారాయి,** ఈ సందర్భంలో అది 1/2 ను సూచిస్తుంది. వెడల్పులు మరియు ఎత్తులు ఒకే కారకం ద్వారా మారినందున, చిత్రాలు సరూపంగా కనిపిస్తున్నాయి.

మనం చిత్రం A ని చిత్రం B తో పోల్చినప్పుడు, B వెడల్పు A కంటే 20 మిల్లీమీటర్లు తక్కువగా ఉందని గమనిస్తాము. ఎత్తు కూడా A ఎత్తు కంటే 20 మి.మీ. తక్కువ. తేడా (వ్యవకలనం ద్వారా) సమానంగా ఉన్నప్పటికీ, చిత్రాలు భిన్నంగా కనిపిస్తాయి. వెడల్పు మరియు ఎత్తు ఒకే కారకం (factor) ద్వారా మారాయా? B యొక్క ఎత్తు A ఎత్తులో సగం ఉంది. కానీ B యొక్క వెడల్పు A వెడల్పులో సగం లేదు. వెడల్పు మరియు ఎత్తు ఒకే కారకం ద్వారా మారనందున, చిత్రాలు భిన్నంగా కనిపిస్తున్నాయి.

? చిత్రం A తో పోలిస్తే చిత్రం D యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తు ఏ కారకాల ద్వారా మారాయో మీరు తనిఖీ చేయగలరా? కారకాలు సమానంగా ఉన్నాయా?

చిత్రాలు A, C మరియు D ఒకేలా కనిపిస్తాయి ఎందుకంటే వాటి వెడల్పులు మరియు ఎత్తులు ఒకే కారకం ద్వారా మారాయి. వాటి వెడల్పులు మరియు ఎత్తులలోని మార్పులు **అనుపాతం** లో ఉన్నాయని మనం చెబుతాము.

7.2 నిష్పత్తులు

గణితంలో ఇటువంటి అనుపాత సంబంధాలను సూచించడానికి మనం 'నిష్పత్తి' అనే భావనను ఉపయోగిస్తాము. చిత్రం A యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి ఇలా ఉందని మనం చెప్పవచ్చు:

60 : 40

60 మరియు 40 సంఖ్యలను నిష్పత్తి యొక్క పదాలు అంటారు.

చిత్రం C యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 30 : 20, మరియు చిత్రం D ది 90 : 60.

AP SCERT

In a ratio of the form a : b, we can say that for every 'a' units of the first quantity, there are 'b' units of the second quantity.

So, in image A, we can say that for every 60 mm of width, there are 40 mm of height.

We can say that the ratios of width to height of images A, C, and D are proportional because the terms of these ratios change by the same factor. Let us see how.

Note : Ratio compares quantities of same kind or part to part but fraction compares part-to-whole.

Image A — 60 : 40

Multiplying both the terms by $\frac{1}{2}$, we get

$$60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$$

which is 30 : 20, the ratio of width to height in image C.

? By what factor should we multiply the ratio 60 : 40 (image A) to get 90 : 60 (image D)?

A more systematic way to compare whether the ratios are proportional is to reduce them to their simplest form and see if these simplest forms are the same.

7.3 Ratios in their Simplest Form

We can reduce ratios to their simplest form by dividing the terms by their HCF.

In image A, the terms are 60 and 40. What is the HCF of 60 and 40? It is 20. Dividing the terms by 20, we get the ratio of image A to be 3 : 2 in its simplest form.

The ratio of image D is 90 : 60. Dividing both terms by 30 (HCF of 90 and 60), we get the simplest form to be 3 : 2. So the ratios of images A and D are proportional as well.

What is the simplest form of the ratios of images B and E?

The ratio of image B is 40 : 20; in its simplest form, it is 2 : 1.

The ratio of image E is 60 : 60; in its simplest form, it is 1 : 1.

AP SCERT

a : b రూపంలో ఉన్న నిష్పత్తిలో, మొదటి రాశి యొక్క ప్రతి 'a' ప్రమాణాలకు (units), రెండవ రాశి యొక్క 'b' ప్రమాణాలు ఉన్నాయని మనం చెప్పవచ్చు.

కాబట్టి, చిత్రం A లో, ప్రతి 60 మి.మీ వెడల్పుకు, 40 మి.మీ ఎత్తు ఉందని మనం చెప్పవచ్చు.

చిత్రాలు A, C మరియు D యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయని మనం చెప్పవచ్చు ఎందుకంటే ఈ నిష్పత్తుల పదాలు ఒకే కారకం ద్వారా మారుతాయి.

అది ఎలాగో చూద్దాం.

చిత్రం A – రెండు పదాలను $\frac{1}{2}$ చే గుణించగా,

మనకు 60 : 40 వస్తుంది. $60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$

ఇది 30 : 20, ఇది చిత్రం C లోని వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి.

గమనిక: నిష్పత్తి అనేది ఒకే రకమైన రెండు రాశులను లేదా ఒక భాగంతో మరొక భాగాన్ని పోల్చుతుంది. కానీ, భిన్నం అనేది ఒక భాగంతో మొత్తాన్ని పోల్చుతుంది.

? 90 : 60 (చిత్రం D) ని పొందేందుకు 60 : 40 (చిత్రం A) నిష్పత్తిని ఏ కారకంతో గుణించాలి?

నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయో లేదో పోల్చడానికి మరింత క్రమబద్ధమైన మార్గం ఏమిటంటే, వాటిని వాటి కనిష్ట రూపానికి (Simplest form) తగ్గించడం మరియు ఈ కనిష్ట రూపాలు సమానంగా ఉన్నాయో లేదో చూడటం.

7.3 కనిష్ట రూపంలో నిష్పత్తులు

నిష్పత్తుల పదాలను వాటి గ.సా.భా (HCF) చే భాగించడం ద్వారా మనం వాటిని కనిష్ట రూపానికి తగ్గించవచ్చు.

చిత్రం A లో, పదాలు 60 మరియు 40. 60 మరియు 40 ల గ.సా.భా ఎంత? అది 20. పదాలను 20 చే భాగించగా, చిత్రం A యొక్క నిష్పత్తి దాని కనిష్ట రూపంలో 3 : 2 గా వస్తుంది.

చిత్రం D యొక్క నిష్పత్తి 90 : 60. రెండు పదాలను 30 (90 మరియు 60 ల గ.సా.భా) చే భాగించగా, మనకు కనిష్ట రూపం 3 : 2 వస్తుంది. కాబట్టి చిత్రాలు A మరియు D యొక్క నిష్పత్తులు కూడా అనుపాతంలో ఉన్నాయి.

చిత్రాలు B మరియు E యొక్క నిష్పత్తుల కనిష్ట రూపం ఏమిటి?

చిత్రం B నిష్పత్తి 40 : 20; దాని కనిష్ట రూపంలో, అది 2 : 1.

చిత్రం E నిష్పత్తి 60 : 60; దాని కనిష్ట రూపంలో, అది 1 : 1

AP SCERT

These ratios are not the same as 3 : 2. So, we can say that the ratios of width to height of images B and E are not proportional to the ratios of images A, C, and D.

When two ratios are the same in their simplest forms, we say that the ratios are in **proportion**, or that the ratios are **proportional**. We use the '::' symbol to indicate that they are proportional.

So a : b :: c : d indicates that the ratios a : b and c : d are proportional.

Thus,

60 : 40 :: 30 : 20 and 60 : 40 :: 90 : 60.

7.4 Problem Solving with Proportional Reasoning

Example 1: Are the ratios 3:4 and 72:96 proportional?

3: 4 is already in its simplest form.

To find the simplest form of 72 : 96, we need to divide both terms by their HCF.

What is the HCF of 72 and 96?

The HCF of 72 and 96 is 24. Dividing both terms by 24, we get 3:4. Since both ratios in their simplest form are the same, they are proportional.

Example 2 : Thanwika wanted to make lemonade for a celebration. She made 6 glasses of lemonade in a vessel and added 10 spoons of sugar to the drink. Her father expected more people to join the celebration. So he asked her to make 18 more glasses of lemonade.

To make the lemonade with the same sweetness, how many spoons of sugar should she add?

To maintain the same sweetness, the ratio of the number of glasses of lemonade to the number of spoons of sugar should be proportional. For 6 glasses of lemonade, she added 10 spoons of sugar. The ratio of glasses of lemonade to spoons of sugar is 6:10. If she needs to make 18 more glasses of lemonade, how many spoons of sugar should she use? We can model this problem as 6:10::18:?

AP SCERT

ఈ నిష్పత్తులు 3 : 2 కి సమానం కాదు. కాబట్టి, చిత్రాలు B మరియు E యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తులు, చిత్రాలు A, C మరియు D నిష్పత్తులకు అనుపాతంలో లేవని మనం చెప్పవచ్చు.

> రెండు నిష్పత్తులు వాటి కనిష్ట రూపాల్లో సమానంగా ఉన్నప్పుడు, ఆ నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయని లేదా ఆ నిష్పత్తులు **అనుపాతమని** మనం చెబుతాము. అవి **అనుపాతంలో** ఉన్నాయని సూచించడానికి మనం '::' గుర్తును ఉపయోగిస్తాము.
>
> a : b మరియు c : d లు అనుపాతంలో వుంటే a : b :: c : d అవుతుంది.

అందువల్ల,

60 : 40 :: 30 : 20 మరియు 60 : 40 :: 90 : 60.

7.4 అనుపాత తార్కికత సమస్యల సాధన

ఉదాహరణ 1: నిష్పత్తులు 3 : 4 మరియు 72 : 96 అనుపాతంలో ఉన్నాయా?

3 : 4 ఇప్పటికే దాని కనిష్ట రూపంలో ఉంది.

72 : 96 యొక్క కనిష్ట రూపాన్ని కనుగొనడానికి, మనం రెండు పదాలను వాటి గ.సా.భా (HCF) చే భాగించాలి.

72 మరియు 96 ల గ.సా.భా ఎంత?

72 మరియు 96 ల గ.సా.భా 24. రెండు పదాలను 24 చే భాగించగా, మనకు 3 : 4 వస్తుంది. రెండు నిష్పత్తుల కనిష్ట రూపం ఒకేలా ఉన్నందున, అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయి.

ఉదాహరణ 2: తన్విక ఒక వేడుక కోసం నిమ్మరసం తయారు చేయాలనుకుంది. ఆమె ఒక పాత్రలో 6 గ్లాసుల నిమ్మరసం తయారు చేసి, ఆ పానీయానికి 10 చెంచాల చక్కెరను కలిపింది. ఆమె తండ్రి వేడుకకు ఇంకా ఎక్కువ మంది వస్తారని ఆశించారు. కాబట్టి అతను ఆమెను మరో 18 గ్లాసుల నిమ్మరసం తయారు చేయమని అడిగాడు.

అదే తీపిదనంతో నిమ్మరసం చేయడానికి, ఆమె ఎన్ని చెంచాల చక్కెరను కలపాలి?

అదే తీపిదనాన్ని కొనసాగించడానికి, నిమ్మరసం గ్లాసుల సంఖ్య మరియు చక్కెర చెంచాల సంఖ్యల నిష్పత్తి అనుపాతంలో ఉండాలి. 6 గ్లాసుల నిమ్మరసం కోసం, ఆమె 10 చెంచాల చక్కెరను కలిపింది. నిమ్మరసం గ్లాసులు మరియు చక్కెర చెంచాల నిష్పత్తి 6 : 10. ఆమె మరో 18 గ్లాసుల నిమ్మరసం చేయాల్సి ఉంటే, ఆమె ఎన్ని చెంచాల చక్కెరను ఉపయోగించాలి? మనం ఈ సమస్యను ఇలా రూపొందించవచ్చు:

6 : 10 :: 18 : ?

AP SCERT

We know that each term in the ratio must change by the same factor, for the ratios to be proportional.

? How can we find the factor of change in the ratio?

The first term has increased from 6 to 18. To find the factor of change, we can divide 18 by 6 to get 3.

These condterm should also change by the same factor. When 10 increases by a factor of 3, it becomes 30. Thus,

6:10::18:30.

So, she should use 30 spoons of sugar to make 18 glasses of lemonade with the same sweetness as earlier.

? **Example 3 :** Nitin and Hari were constructing a compound wall around their house. Nitin was building the longer side, 60 ft in length, and Hari was building the shorter side, 40 ft in length. Nitin used 3 bags of cement but Hari used only 2 bags of cement. Nitin was worried that the wall Hari built would not be as strong as the wall he built because she used less cement.

? Is Nitin correct in his thinking?

In Nitin and Hari's case, we should compare the ratio of the length of the wall to the bags of cement used by each of them and see whether they are proportional.

The ratio in Nitin'scaseis60:3,i.e.,20:1(in its simplest form). The ratio in Hari's case is 40 : 2, i.e., 20 : 1 (in its simplest form).

Since both ratios are proportional, the walls are equally strong. Nitin should not worry!

? **Example 4 :** In my school, there are 5 teachers and 170 students. The ratio of teachers to students in my school is 5 : 170. Count the numberof teachers and students in your school. What is the ratio of teachers to students in your school? Write it below.

? Is the teacher-to-student ratio in your school proportional to the one in my school?

? **Example 5 :** Measure the width and height (to the nearest cm) of the blackboard in your classroom. What is the ratio of width to height of the blackboard?_____ : _____

AP SCERT

నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉండాలంటే, నిష్పత్తిలోని ప్రతి పదం ఒకే కారకం (factor) ద్వారా మారాలని మనకు తెలుసు.

? నిష్పత్తిలో మార్పు కారకాన్ని మనం ఎలా కనుగొనగలము?

మొదటి పదం 6 నుండి 18 కి పెరిగింది. మార్పు కారకాన్ని కనుగొనడానికి, మనం 18 ని 6 తో భాగించి 3 పొందవచ్చు.

రెండవ పదం కూడా అదే కారకం ద్వారా మారాలి. 10 ని 3 కారకం చే పెంచినప్పుడు, అది 30 అవుతుంది. అందువల్ల,

$$6 : 10 :: 18 : 30$$

కాబట్టి, మునుపటిలాగే అదే తీపిదనంతో 18 గ్లాసుల నిమ్మరసం చేయడానికి ఆమె 30 చెంచాల చక్కెరను ఉపయోగించాలి.

? **ఉదాహరణ 3:** నితిన్ మరియు హరి తమ ఇంటి చుట్టూ ప్రహరీ గోడను నిర్మిస్తున్నారు. నితిన్ 60 అడుగుల పొడవున్న పొడవైన వైపును నిర్మిస్తున్నాడు, మరియు హరి 40 అడుగుల పొడవున్న చిన్న వైపును నిర్మిస్తున్నాడు. నితిన్ 3 బస్తాల సిమెంట్ ఉపయోగించాడు కానీ హరి కేవలం 2 బస్తాల సిమెంట్ మాత్రమే ఉపయోగించాడు. హరి తక్కువ సిమెంట్ ఉపయోగించినందున, అతను కట్టిన గోడ తాను కట్టిన గోడ అంత బలంగా ఉండదని నితిన్ ఆందోళన చెందాడు.

? నితిన్ ఆలోచన సరైనదేనా?

నితిన్ మరియు హరి విషయంలో, మనం గోడ పొడవు మరియు వారు ఉపయోగించిన సిమెంట్ బస్తాల నిష్పత్తిని పోల్చి, అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయో లేదో చూడాలి.

నితిన్ విషయంలో నిష్పత్తి 60 : 3, అంటే, 20 : 1 (దాని కనిష్ట రూపంలో).

హరి విషయంలో నిష్పత్తి 40 : 2, అంటే, 20 : 1 (దాని కనిష్ట రూపంలో).

రెండు నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నందున, గోడలు సమాన బలం కల్గి ఉంటాయి. నితిన్ ఆందోళన చెందాల్సిన అవసరం లేదు!

? **ఉదాహరణ 4:** మా పాఠశాలలో, 5 ఉపాధ్యాయులు మరియు 170 విద్యార్థులు ఉన్నారు. మా పాఠశాలలో ఉపాధ్యాయులు మరియు విద్యార్థుల నిష్పత్తి 5 : 170. మీ పాఠశాలలోని ఉపాధ్యాయులు మరియు విద్యార్థుల సంఖ్యను లెక్కించండి. మీ పాఠశాలలో ఉపాధ్యాయులు మరియు విద్యార్థుల నిష్పత్తి ఎంత? దానిని క్రింద రాయండి.

? మీ పాఠశాలలోని ఉపాధ్యాయ-విద్యార్థి నిష్పత్తి, మా పాఠశాలలోని నిష్పత్తికి అనుపాతంలో ఉందా?

? **ఉదాహరణ 5:** మీ తరగతి గదిలోని నల్లబల్ల (black board) వెడల్పు మరియు ఎత్తును (దగ్గరి సెం.మీ.కు) కొలవండి. నల్లబల్ల వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి ఎంత? _____ : _____

AP SCERT

- Can you draw a rectangle in your notebook whose width and height are proportional to the ratio of the blackboard?
- Compare the rectangle you have drawn to those drawn by your classmates. Do they all look the same?

Note to the Teacher: Give more such examples that students can relate to and ask them to give reasons why they think they are correct. Engaging with these problems and finding solutions through a process of proportional reasoning should go along with learning procedures and methods to solve the problems.

Example 6 : When Neelima was 3 years old, her mother's age was 10 times her age. What is the ratio of Neelima's age to her mother's age? What would be the ratio of their ages when Neelima is 12 years old? Would it remain the same?

The ratio of Neelima's age to her mother's age when Neelima is3 years old is 3 :30 (her mother's age is 10 times Neelima's age). In the simplest form, it is 1 : 10.

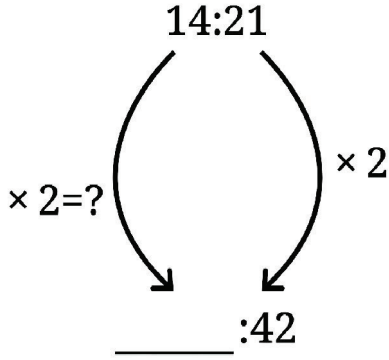
WhenNeelimais12yearsold(i.e.,9yearslater),theratiooftheirages will be 12 : 39 (9 years later, her mother would be 39 years old). In the simplest form, it is 4 : 13.

When we add (or subtract)the same number from the terms of a ratio, the ratio changes and is not necessarily proportional to the original ratio.

Example 7: Fill in the missing numbers for the following ratios that are proportional to 14 : 21.

_____: 42 6 : _____ 2 : _____

In the first ratio, we don't know the first term. But the second term is 42. It is 2 times the second term of the ratio 14:21. So, the first term should also be 2 times 14 (the first term). Hence the proportional ratio is 28:42.



AP SCERT

? నల్లబల్ల నిష్పత్తికి అనుపాతంలో వెడల్పు మరియు ఎత్తు ఉండేలా మీరు మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయగలరా?

? మీరు గీసిన దీర్ఘచతురస్రాన్ని మీ సహవిద్యార్థులు గీసిన వాటితో పోల్చండి.

అవన్నీ ఒకేలా కనిపిస్తున్నాయా?

ఉపాధ్యాయులకు గమనిక: విద్యార్థులు అన్వయించుకోగలిగే మరిన్ని ఉదాహరణలను ఇవ్వండి మరియు వారు సరైనవని ఎందుకు అనుకుంటున్నారో కారణాలు చెప్పమని అడగండి. సమస్యలను పరిష్కరించే పద్ధతులు మరియు విధానాలను నేర్చుకోవడంతో పాటు, ఈ సమస్యలతో నిమగ్నమవ్వడం మరియు అనుపాత వివేచన ప్రక్రియ ద్వారా పరిష్కారాలను కనుగొనడం జరగాలి.

? **ఉదాహరణ 6:** నీలిమ వయస్సు 3 సంవత్సరాలు ఉన్నప్పుడు, ఆమె తల్లి వయస్సు ఆమె వయస్సుకి 10 రెట్లు. నీలిమ వయస్సుకి మరియు ఆమె తల్లి వయస్సుకి గల నిష్పత్తి ఎంత? నీలిమకు 12 ఏళ్లు వచ్చినప్పుడు వారి వయస్సుల నిష్పత్తి ఎంత ఉంటుంది? అది అలాగే ఉంటుందా?

నీలిమ వయస్సు 3 సంవత్సరాలు ఉన్నప్పుడు ఆమె వయస్సుకి మరియు ఆమె తల్లి వయస్సుకి గల నిష్పత్తి 3 : 30 (ఆమె తల్లి వయస్సు నీలిమ వయస్సుకి 10 రెట్లు). కనిష్ట రూపంలో, అది 1 : 10.

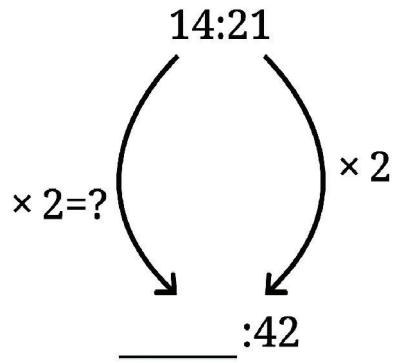
నీలిమకు 12 ఏళ్లు వచ్చినప్పుడు (అంటే, 9 సంవత్సరాల తర్వాత), వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 12 : 39 అవుతుంది (9 సంవత్సరాల తర్వాత, ఆమె తల్లి వయస్సు 39 సంవత్సరాలు ఉంటుంది). కనిష్ట రూపంలో, అది 4 : 13.

మనం నిష్పత్తిలోని పదాలకు ఒకే సంఖ్యను కలిపినప్పుడు (లేదా తీసివేసినప్పుడు), నిష్పత్తి మారుతుంది మరియు అసలు నిష్పత్తికి తప్పనిసరిగా అనుపాతంలో ఉండదు.

? **ఉదాహరణ 7:** 14 : 21 కి అనుపాతంలో ఉండే క్రింది నిష్పత్తులలో తప్పిపోయిన సంఖ్యలను పూరించండి.

_____ : 42 6 : _____ 2 : _____

మొదటి నిష్పత్తిలో, మనకు మొదటి పదం తెలియదు. కానీ రెండవ పదం 42. ఇది 14 : 21 నిష్పత్తిలోని రెండవ పదానికి 2 రెట్లు. కాబట్టి, మొదటి పదం కూడా 14 (మొదటి పదం) కి 2 రెట్లు ఉండాలి. అందువల్ల అనుపాత నిష్పత్తి 28 : 42.



AP SCERT

For the second ratio, the first term is 6.

? What factor should we multiply 14 by to get 6? Can it be an integer? Or should it be a fraction?

We can model this as 14y = 6. So, $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

So, we need to multiply 21 (the second term of 14 : 21) also by the same factor $\frac{3}{7}$

$21 \times \frac{3}{7}$ is 9. So, the ratio is 6 : 9.

In the third ratio, the first term is 2.

We can see that when we divide 14 (the first term of 14 : 21) by 7 (HCF of 14 and 21) we get 2.

If we divide 21 also by 7, we get 3. So, the ratio is 2 : 3.

Filter Coffee!

Filter coffee is a beverage made by mixing coffee decoction with milk. Manjunath usually mixes 15 mL of coffee decoction with 35 mL of milk to make one cup of filter coffee in his coffee shop.

In this case, we can say that the ratio of coffee decoction to milk is 15 : 35.

If customers want 'stronger' filter coffee, Manjunath mixes 20 mL of decoction with 30 mL of milk. The ratio here is 20 : 30.

? Why is this coffee stronger?

And when they want 'lighter' filter coffee, he mixes 10 mL of coffee and 40 mL of milk, making the ratio 10 : 40.

? Why is this coffee lighter?

Math Talk

AP SCERT

రెండవ నిష్పత్తికి, మొదటి పదం 6.

? 6 ను పొందడానికి మనం 14 ను ఏ కారకంతో గుణించాలి? అది పూర్ణాంకం కాగలదా? లేదా అది భిన్నం అయి ఉండాలా?

మనం దీనిని $14y = 6$ గా రూపొందించవచ్చు. కాబట్టి, $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

కాబట్టి, మనం 21 (14 : 21 లోని రెండవ పదం) ని కూడా అదే కారకం $\frac{3}{7}$ తో గుణించాలి.

$21 \times \frac{3}{7} = 9.$

కాబట్టి, నిష్పత్తి 6 : 9.

మూడవ నిష్పత్తిలో, మొదటి పదం 2.

మనం 14 (14 : 21 లోని మొదటి పదం) ను 7 (14 మరియు 21 ల గ.సా.భా) చే భాగించినప్పుడు మనకు 2 వస్తుందని చూడవచ్చు.

మనం 21 ని కూడా 7 చే భాగిస్తే, మనకు 3 వస్తుంది. కాబట్టి, నిష్పత్తి 2 : 3.

ఫిల్టర్ కాఫీ!

ఫిల్టర్ కాఫీ అనేది కాఫీ డికాక్షన్ ను పాలతో కలపడం ద్వారా తయారుచేసే పానీయం. మంజునాథ్ తన కాఫీ షాప్‌లో ఒక కప్పు ఫిల్టర్ కాఫీ చేయడానికి సాధారణంగా 15 mL కాఫీ డికాక్షన్‌ను 35 mL పాలతో కలుపుతాడు.

ఈ సందర్భంలో, కాఫీ డికాక్షన్ మరియు పాల నిష్పత్తి 15 : 35 అని మనం చెప్పవచ్చు.

కస్టమర్లు 'స్ట్రాంగ్' ఫిల్టర్ కాఫీ కావాలనుకుంటే, మంజునాథ్ 20 mL డికాక్షన్‌ను 30 mL పాలతో కలుపుతాడు.

ఇక్కడ నిష్పత్తి 20 : 30.

? ఈ కాఫీ ఎందుకు స్ట్రాంగ్ గా ఉంది?

మరియు వారు 'లైట్' (తక్కువ గాఢత గల) ఫిల్టర్ కాఫీ కావాలనుకున్నప్పుడు, అతను 10 mL కాఫీ మరియు 40 mL పాలను కలుపుతాడు, నిష్పత్తిని 10 : 40 గా చేస్తాడు.

? ఈ కాఫీ ఎందుకు లైట్ గా ఉంది?

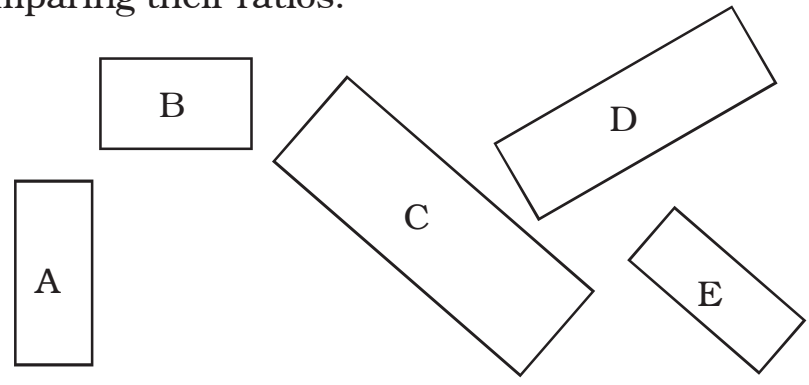
AP SCERT

The following table shows the different ratios in which Manjunath mixes coffee decoction with milk. Write in the last column if the coffee is stronger or lighter than the regular coffee.

Coffee Decoction (in mL)	Milk (in mL)	Regular/ Strong/ Light
300	600	
150	500	
200	400	
24	56	
100	300	

Figure it Out - 7.1

1. Circle the following statements of proportion that are true.
   (i) 4 : 7 :: 12 : 21 (ii) 8 : 3 :: 24 : 6
   (iii) 7 : 12 :: 12 : 7 (iv) 21 : 6 :: 35 : 10
   (v) 12 : 18 :: 28 : 12 (vi) 24 : 8 :: 9 : 3
2. Give 3 ratios that are proportional to 4 : 9.
   _____ : _____ _____ : _____ _____ : _____
3. Fill in the missing numbers for these ratios that are proportional to 18 : 24.
   3 : _____ 12 : _____ 20 : _____ 27 : _____
4. Look at the following rectangles. Which rectangles are similar to each other? You can verify this by measuring the width and height using a scale and comparing their ratios.



AP SCERT

క్రింది పట్టిక మంజునాథ్ కాఫీ డికాక్షన్‌ను పాలతో కలిపే వివిధ నిష్పత్తులను చూపుతుంది. కాఫీ సాధారణ కాఫీ కంటే స్ట్రాంగ్‌గా ఉందా లేదా లైట్‌గా ఉందా అని చివరి నిలువు వరుసలో రాయండి.

కాఫీ డికాక్షన్ (mL లలో)	పాలు (mL లలో)	రెగ్యులర్/స్ట్రాంగ్/లైట్
300	600	
150	500	
200	400	
24	56	
100	300	

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.1

1. సత్యమైన అనుపాత వాక్యాల చుట్టూ ఒక వృత్తం గీయండి.

   (i) 4 : 7 :: 12 : 21 (ii) 8 : 3 :: 24 : 6

   (iii) 7 : 12 :: 12 : 7 (iv) 21 : 6 :: 35 : 10

   (v) 12 : 18 :: 28 : 12 (vi) 24 : 8 :: 9 : 3

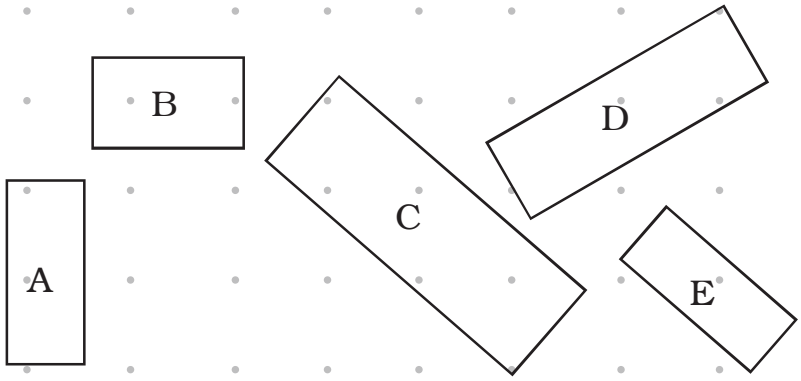
2. 4 : 9 కి అనుపాతంలో ఉండే 3 నిష్పత్తులను ఇవ్వండి.

   _____ : _____ _____ : _____ _____ : _____

3. 18 : 24 కి అనుపాతంలో ఉండే ఈ నిష్పత్తులకు లోపించిన సంఖ్యలను పూరించండి.

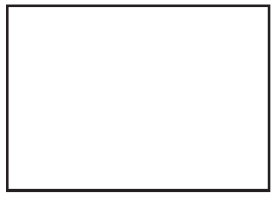
   3 : _____ 12 : _____బి 20 : _____ 27 : _____

4. క్రింది దీర్ఘచతురస్రాలను చూడండి. ఏ దీర్ఘచతురస్రాలు ఒకదానికొకటి సరూపంగా (similar) ఉన్నాయి? స్కేల్ ఉపయోగించి వెడల్పు మరియు ఎత్తును కొలవడం మరియు వాటి నిష్పత్తులను పోల్చడం ద్వారా మీరు దీనిని ధృవీకరించవచ్చు.



APSCERT

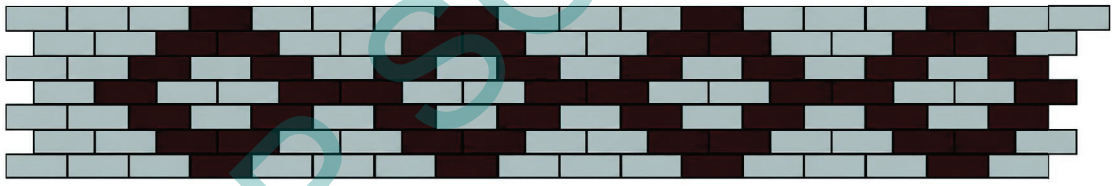
5. Look at the following rectangle. Can you draw a smaller rectangle and a bigger rectangle with the same width to height ratio in your notebooks? Compare your rectangles with your classmates' drawings. Are all of them the same? If they are different from yours, can you think why? Are they wrong?



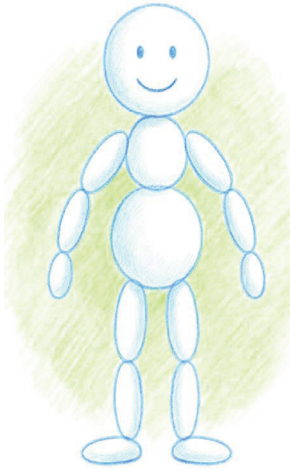
6. The following figure shows a small portion of a long brick wall with patterns made using coloured bricks. Each wall continues this pattern throughout the wall. What is the ratio of grey bricks to coloured bricks? Try to give the ratios in their simplest form.

(a)

(b)



7. Let us draw some human figures. Measure your friend's body — the lengths of their head, torso, arms, and legs. Write the ratios as mentioned below—



head : torso

_____ : _____

torso : arms

_____ : _____

torso : legs

_____ : _____

AP SCERT

5. క్రింది దీర్ఘచతురస్రాన్ని చూడండి. మీ నోట్‌బుక్‌లలో అదే వెడల్పు మరియు ఎత్తు నిష్పత్తితో చిన్న దీర్ఘచతురస్రాన్ని మరియు పెద్ద దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయగలరా?

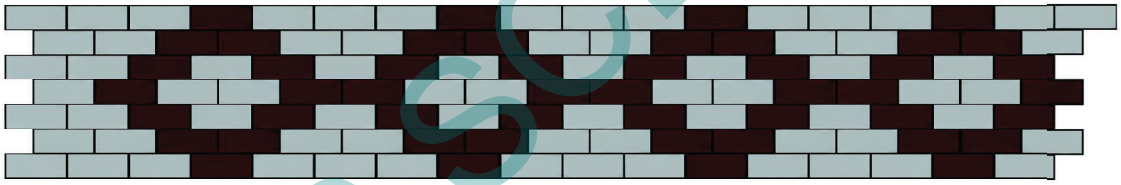
మీ దీర్ఘచతురస్రాలను మీ సహవిద్యార్థుల డ్రాయింగ్‌లతో పోల్చండి. అవన్నీ ఒకేలా ఉన్నాయా? అవి మీ వాటికి భిన్నంగా ఉంటే, ఎందుకో మీరు ఆలోచించగలరా? అవి తప్పుగా ఉన్నాయా?

గణిత చర్చ

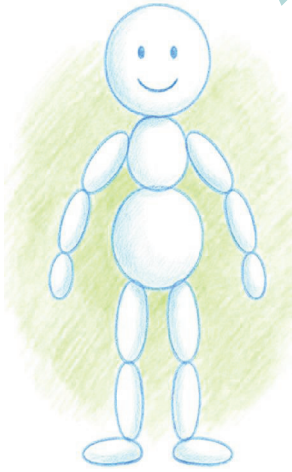
6. క్రింది చిత్రం రంగుల ఇటుకలను ఉపయోగించి చేసిన నమూనాలతో పొడవైన ఇటుక గోడలోని చిన్న భాగాన్ని చూపుతుంది. ప్రతి గోడ ఈ నమూనాను గోడ అంతటా కొనసాగిస్తుంది. బూడిద రంగు ఇటుకలకు మరియు రంగుల ఇటుకలకు గల నిష్పత్తి ఎంత? నిష్పత్తులను వాటి కనిష్ట రూపంలో ఇవ్వడానికి ప్రయత్నించండి.

(a)

(b)



7. మనం కొన్ని మానవ ఆకారాలను గీద్దాం. మీ స్నేహితుడి శరీరాన్ని – వారి తల, మొండెం, చేతులు మరియు కాళ్ళ పొడవులను కొలవండి. క్రింద పేర్కొన్న విధంగా నిష్పత్తులను రాయండి.



తల : మొండెం

_____ : _____

మొండెం : చేతులు

_____ : _____

మొండెం : కాళ్ళు

_____ : _____

AP SCERT

Now, draw a figure with head, torso, arms, and legs with equivalent ratios as above.

Does the drawing look more realistic if the ratios are proportional? Why? Why not?

Note to the Teacher: In all these activities, encourage students to reason why their drawings are proportional.

Trairasika — The Rule of Three

Example 8: For the mid-day meal in a school with 120 students, the cook usually makes 15 kg of rice. On a rainy day, only 80 students came to school. How many kilograms of rice should the cook make so that the food is not wasted?

The ratio of the number of students to the amount of rice needs to be proportional.

So, 120 : 15 :: 80 : ?

What is the factor of change in the first term?

We can find that by dividing the terms $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$

The number of students is reduced by a factor of $\frac{2}{3}$

On multiplying the weight of rice by the same factor, we get, $15 \times \frac{2}{3} = 10$.

So, the cook should make 10 kg of rice on that day.

The situation above is a typical example of a problem where we need to use proportional reasoning to find a solution. Four quantities are linked proportionally, out of which three are known and we must find the fourth, unknown, quantity.

To solve such problems, we can model two proportional ratios using algebraic notation as —

$$a : b :: c : d.$$

For these two ratios to be proportional, we know that term c should be a multiple of term a by a factor, say f, and term d should be a multiple of term b by the same factor f. So,

$$c = f\,a \quad ...(1)$$

$$d = f\,b \quad ...(2)$$

AP SCERT

ఇప్పుడు, పైన ఉన్న సమానమైన నిష్పత్తులతో తల, మొండెం, చేతులు మరియు కాళ్ళతో ఒక బొమ్మను గీయండి.

? నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉంటే డ్రాయింగ్ మరింత వాస్తవికంగా కనిపిస్తుందా? ఎందుకు? ఎందుకు కాదు?

ఉపాధ్యాయులకు గమనిక: ఈ కార్యకలాపాలన్నింటిలో, విద్యార్థులు తమ డ్రాయింగ్‌లు ఎందుకు అనుపాతంలో ఉన్నాయో కారణం చెప్పమని ప్రోత్సహించండి.

త్రైరాశికం – మూడు రాశుల నియమం

? ఉదాహరణ 8: 120 మంది విద్యార్థులు ఉన్న పాఠశాలలో మధ్యాహ్న భోజనం కోసం, వంటమనిషి సాధారణంగా 15 కిలోల బియ్యం వండుతారు. వర్షం రోజున, కేవలం 80 మంది విద్యార్థులు మాత్రమే పాఠశాలకు వచ్చారు. ఆహారం వృథా కాకుండా ఉండాలంటే వంటమనిషి ఎన్ని కిలోగ్రాముల బియ్యం వండాలి?

విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు కావలిసిన బియ్యం పరిమాణం యొక్క నిష్పత్తి అనుపాతంలో ఉండాలి.

కాబట్టి, 120 : 15 :: 80 : ?

? మొదటి పదంలో మార్పు కారకం (factor of change) ఏమిటి?

పదాలను భాగించడం ద్వారా మనం దానిని కనుగొనవచ్చు $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$

విద్యార్థుల సంఖ్య $\frac{2}{3}$ కారకం ద్వారా తగ్గించబడింది.

బియ్యం బరువును అదే కారకంతో గుణించగా, మనకు $15 \times \frac{2}{3} = 10.$

కాబట్టి, ఆ రోజు వంటమనిషి 10 కిలోల బియ్యం వండాలి.

పైన ఉన్న పరిస్థితి పరిష్కారాన్ని కనుగొనడానికి మనం అనుపాత వివేచనను ఉపయోగించాల్సిన సమస్యకు ఒక సాధారణ ఉదాహరణ. నాలుగు రాశులు అనుపాతంగా అనుసంధానించబడి ఉంటాయి, వాటిలో మూడు మనకు తెలుసు మరియు మనం నాల్గవ, తెలియని రాశిని కనుగొనాలి.

ఇటువంటి సమస్యలను పరిష్కరించడానికి, మనం బీజీయ సంజ్ఞామానాన్ని ఉపయోగించి రెండు అనుపాత నిష్పత్తులను ఇలా రూపొందించవచ్చు:

$$a : b :: c : d.$$

ఈ రెండు నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉండాలంటే, పదం c అనేది పదం a కు f అనే ఒక కారణాంకం యొక్క గుణిజంగా ఉండాలని మరియు పదం d అనేది పదం b కు అదే కారణాంకం f యొక్క గుణిజంగా ఉండాలని మనకు తెలుసు,

కాబట్టి,

$$c = f\,a \quad ...(1)$$

$$d = f\,b \quad ...(2)$$

AP SCERT

From (1) and (2), we can say that,

$$f = \frac{c}{a} \text{ and } f = \frac{d}{b}.$$

$$\text{Therefore, } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

Multiplying both sides by ab, we get,

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$bc = ad \text{ or } ad = bc$$

Thus, when a : b :: c : d, then ad = bc. This is known as cross multiplication of terms.

Since ad = bc, we can show that $d = \frac{bc}{a}$.

Two ratios are proportional if their terms are equal when cross multiplied. The fourth unknown quantity can be found through such cross multiplication.

In ancient India, Aryabha.a (199 CE) and others called such problems of proportionality Rule of Three problems. There were 3 numbers given — the prama.a (measure — 'a' in our case), the phala (fruit — 'b' in our case), and the ichchha (requisition — 'c' in our case). To find the ichchhaphala (yield — 'd' in our case), Aryabhata says,

"Multiply the phala by the ichchha and divide the resulting product by the pramana."

In other words, Aryabhata says,

"pramana : phala :: ichchha : ichchhaphala," therefore,

pramana × ichchhaphala = phala × ichchha.

Thus,

$$\text{ichchhaphala} = \frac{\text{phala} \times \text{ichchha}}{\text{pramana}}$$

Using the cross multiplication method proposed by Aryabha.a, ancient Indians solved complex problems that involved proportionality.

Example 9: A car travels 90 km in 150 minutes. If it continues at the same speed, what distance will it cover in 4 hours?

AP SCERT

(1) మరియు (2) నుండి, మనం ఇలా చెప్పవచ్చు,

$$f = \frac{c}{a} \text{ మరియు } f = \frac{d}{b}.$$

$$\text{అందువల్ల, } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

రెండు వైపులా ab తో గుణించగా, మనకు,

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$bc = ad \text{ or } ad = bc$$

అందువల్ల, $a : b :: c : d$ అయినప్పుడు, $ad = bc$ అవుతుంది. దీనిని పదాల అడ్డ గుణకారం (Cross multiplication) అంటారు.

$ad = b$ కాబట్టి, మనం ఇలా చూపించవచ్చు: $d = \frac{bc}{a}$.

> రెండు నిష్పత్తులను అడ్డ గుణకారం చేసినప్పుడు వాటి పదాల లబ్ధాలు సమానమైతే అవి అనుపాతంలో ఉంటాయి. అటువంటి అడ్డ గుణకారం ద్వారా నాల్గవ తెలియని రాశిని కనుగొనవచ్చు.

ప్రాచీన భారతదేశంలో, ఆర్యభట్ట (199 CE) మరియు ఇతరులు ఇటువంటి అనుపాత సమస్యలను త్రైరాశికం (Rule of Three problems) అని పిలిచారు. ఇందులో 3 సంఖ్యలు ఇవ్వబడతాయి – ప్రమాణం (Pramana – మన సందర్భంలో 'a' కొలత), ఫలం (Phala – మన సందర్భంలో 'b' ఫలితం), మరియు ఇచ్ఛ (ichachaphala – మన సందర్భంలో 'c' ఆవశ్యకత). ఇచ్ఛాఫలం (ichacha – మన సందర్భంలో 'd' రాబడి) కనుగొనడానికి, ఆర్యభట్ట ఇలా అంటారు.

"ఫలాన్ని ఇచ్ఛ చే గుణించి, వచ్చిన లబ్ధాన్ని ప్రమాణంతో భాగించండి."

మరో మాటలో చెప్పాలంటే, ఆర్యభట్ట ఇలా అంటారు,

"ప్రమాణం : ఫలం :: ఇచ్ఛ : ఇచ్ఛాఫలం,"

కాబట్టి, ప్రమాణం × ఇచ్ఛాఫలం = ఫలం × ఇచ్ఛ.

అందువల్ల,

$$\text{ఇచ్ఛాఫలం} = \frac{(\text{ఫలం} \times \text{ఇచ్ఛ})}{\text{ప్రమాణం}}$$

ఆర్యభట్ట ప్రతిపాదించిన అడ్డ గుణకార పద్ధతిని ఉపయోగించి, ప్రాచీన భారతీయులు అనుపాతంతో కూడిన క్లిష్టమైన సమస్యలను పరిష్కరించారు.

? **ఉదాహరణ 9:** ఒక కారు 150 నిమిషాల్లో 90 కి.మీ ప్రయాణిస్తుంది. అది అదే వేగంతో కొనసాగితే, 4 గంటల్లో ఎంత దూరం ప్రయాణిస్తుంది?

AP SCERT

If it continues at the same speed, the ratio of the time taken should be proportional to the ratio of the distance covered.

$$150 : 90 :: 4 : ?$$

? Is this the right way to formulate the question?

No, because 150 is in minutes, but 4 is in hours. The second ratio should use the same units for time as the first ratio. Since 4 hours is 240 minutes, the right form is

$$150 : 90 :: 240 : ?$$

? How can you find the distance covered in 240 minutes?

Discuss with your classmates and find the answer using different strategies.

Note to the Teacher: Instead of giving one 'method' to solve the problem of the distance, encourage students to reason out the answer through different strategies. They can use their understanding of equivalent fractions and equivalent ratios to find the answer.

We can model this proportion as

$$150 : 90 :: 240 : x.$$

By cross multiplication, we get

$$150 \times x = 240 \times 90$$

Therefore,

$$x = \frac{240 \times 90}{150}$$

$$= \frac{\overset{48}{\cancel{240}} \times \overset{3}{\cancel{90}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{150}}} = 144$$

The distance covered by the car in 4 hours is 144 km.

? **Example 10:** A small farmer in Himachal Pradesh sells each 200 g packet of tea for ₹200. A large estate in Meghalaya sells each 1 kg packet of tea for ₹800. Are the weight-to-price ratios in both places proportional?

The ratio of weight to price of the Himachal tea is 200 : 200.

What is the weight to price ratio of the Meghalaya tea? Is it 1 : 800?

This would not be appropriate, because we considered the weight in

AP SCERT

అది అదే వేగంతో కొనసాగితే, తీసుకున్న సమయం యొక్క నిష్పత్తి ప్రయాణించిన దూరం యొక్క నిష్పత్తికి అనుపాతంలో ఉండాలి.

$$150 : 90 :: 4 : ?$$

? ప్రశ్నను రూపొందించడానికి ఇది సరైన విధానమా?

కాదు, ఎందుకంటే 150, నిమిషాల్లో ఉంది, కానీ 4, గంటలలో ఉంది. రెండవ నిష్పత్తి మొదటి నిష్పత్తి లాగే సమయం కోసం అదే ప్రమాణాలను (units) ఉపయోగించాలి. 4 గంటలు అంటే 240 నిమిషాలు కాబట్టి, సరైన రూపం

$$150 : 90 :: 240 : ?$$

? 240 నిమిషాల్లో ప్రయాణించిన దూరాన్ని మీరు ఎలా కనుగొనగలరు?

మీ సహవిద్యార్థులతో చర్చించండి మరియు విభిన్న వ్యూహాలను ఉపయోగించి సమాధానాన్ని కనుగొనండి.

ఉపాధ్యాయులకు గమనిక: దూరం సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఒకే 'పద్ధతి'ని ఇవ్వడానికి బదులుగా, విభిన్న వ్యూహాల ద్వారా సమాధానాన్ని కనుగొనేలా విద్యార్థులను ప్రోత్సహించండి. సమాధానాన్ని కనుగొనడానికి వారు సమాన భిన్నాలు మరియు సమాన నిష్పత్తుల పై వారి అవగాహనను ఉపయోగించవచ్చు.

మనం ఈ అనుపాతాన్ని ఇలా రూపొందించవచ్చు

$$150 : 90 :: 240 : x.$$

అడ్డ గుణకారం ద్వారా, మనకు

$$150 \times x = 240 \times 90$$

అందువల్ల,

$$x = \frac{240 \times 90}{150}$$

$$= \frac{\overset{48}{\cancel{240}} \times \overset{3}{\cancel{90}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{150}}} = 144$$

4 గంటల్లో కారు ప్రయాణించిన దూరం 144 కి.మీ.

ఉదాహరణ 10: హిమాచల్ ప్రదేశ్‌లోని ఒక చిన్న రైతు ప్రతి 200 గ్రాముల టీ ప్యాకెట్‌ను ₹200 కి విక్రయిస్తాడు. మేఘాలయలోని ఒక పెద్ద ఎస్టేట్ ప్రతి 1 కిలోగ్రాము టీ ప్యాకెట్‌ను ₹800 కి విక్రయిస్తుంది. రెండు ప్రదేశాలలో బరువు-ధర నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయా? ఏ టీ ఎక్కువ ఖరీదైనది?

హిమాచల్ టీ యొక్క బరువు మరియు ధరల నిష్పత్తి 200 : 200.

మేఘాలయ టీ యొక్క బరువు మరియు ధరల నిష్పత్తి ఎంత? ఇది 1 : 800 అవుతుందా? ఇది సరైనది కాదు, ఎందుకంటే హిమాచల్ విషయంలో మనం బరువును గ్రాములలో పరిగణించాము. కాబట్టి, మేఘాలయలో

AP SCERT

grams in the case of Himachal. So, the weight to price ratio is 1000 : 800 in Meghalaya after we convert the weight to grams.

To check if the ratios are proportional, we need to see if both ratios are the same in their simplest forms.

The Himachal tea ratio in its simplest form is 1 : 1.

The Meghalaya tea ratio in its simplest form is 5 : 4.

So, the ratios are not proportional.

? Which tea is more expensive? Why?

Note to the Teacher: Encourage a discussion on the more expensive tea, how they came to their conclusions and what the reasons for that tea being more expensive could be.

To answer the question as to which tea is more expensive, we should compare the price of tea for the same weight in both places. What is the price of 1 kg of tea from Meghalaya? It is ₹800.

In Himachal, if 200 g of tea costs rupees 200, what is the cost of 1 kg of tea?

Let us say that the price of 1 kg of tea is x rupees. 200 g is $\frac{1}{5}$ of 1 kg.

So, $\frac{1}{5} \times x = 200$.

Multiplying both sides by 5, we get

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000.$$

So, the cost of 1 kg of tea is 800 in Meghalaya and 1,000 in Himachal Pradesh.

Therefore, the tea from Himachal Pradesh is more expensive.

Activity 1: Take your favourite dish. Find out all the ingredients and their respective quantities needed to make the dish for your family. Suppose you are celebrating a festival and you want to invite 15 guests. Find out the quantities of the ingredients required to cook the same dish for them.

AP SCERT

బరువును గ్రాములలోకి మార్చిన తర్వాత బరువు మరియు ధరల నిష్పత్తి 1000 : 800 అవుతుంది.

నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయో లేదో తనిఖీ చేయడానికి, రెండు నిష్పత్తులు వాటి కనిష్ట రూపాల్లో ఒకేలా ఉన్నాయో లేదో చూడాలి.

హిమాచల్ టీ నిష్పత్తి దాని కనిష్ట రూపంలో 1 : 1.

మేఘాలయ టీ నిష్పత్తి దాని కనిష్ట రూపంలో 5 : 4.

కాబట్టి, నిష్పత్తులు అనుపాతంలో లేవు.

? ఏ టీ ఎక్కువ ఖరీదైనది? ఎందుకు?

ఉపాధ్యాయులకు గమనిక: ఏ టీ ఎక్కువ ఖరీదైనదో, వారు తమ నిర్ణయాలకు ఎలా వచ్చారో మరియు ఆ టీ ఖరీదైనదిగా ఉండటానికి కారణాలు ఏమిటనే దానిపై

ఏ టీ ఎక్కువ ఖరీదైనది అనే ప్రశ్నకు సమాధానం ఇవ్వడానికి, మనం రెండు ప్రదేశాలలో ఒకే బరువుకు టీ ధరను పోల్చాలి. మేఘాలయ నుండి 1 కిలోగ్రాము టీ ధర ఎంత? అది ₹800.

హిమాచల్‌లో, 200 గ్రాముల టీ ధర ₹200 అయితే, 1 కిలోగ్రాము టీ ధర ఎంత?

1 కిలో టీ ధర x రూపాయలు అనుకుందాం.

200 గ్రాములు 1 కిలోగ్రాములో $\frac{1}{5}$ వ వంతు. కాబట్టి,

$\frac{1}{5} \times x = 200.$

రెండు వైపులా 5 తో గుణించగా, మనకు

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000.$$

కాబట్టి, 1 కిలో టీ ధర మేఘాలయలో ₹ 800 మరియు హిమాచల్ ప్రదేశ్‌లో ₹ 1,000.

అందువల్ల, హిమాచల్ ప్రదేశ్ నుండి వచ్చిన టీ ఎక్కువ ఖరీదైనది.

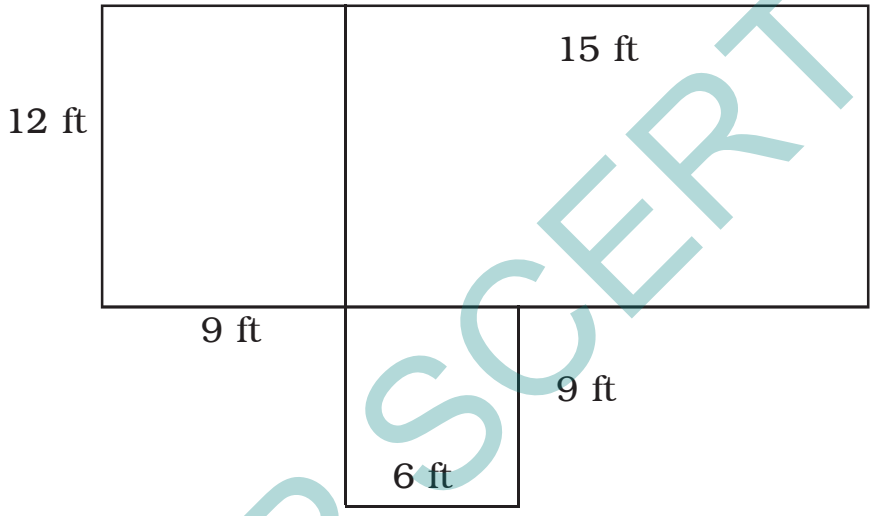
కృత్యం 1: మీకు ఇష్టమైన వంటకం తీసుకోండి. మీ కుటుంబం కోసం ఆ వంటకం చేయడానికి అవసరమైన అన్ని పదార్థాలు మరియు వాటి పరిమాణాలను కనుగొనండి. మీరు ఒక పండుగను జరుపుకుంటున్నారని మరియు మీరు 15 మంది అతిథులను ఆహ్వానించాలనుకుంటున్నారని అనుకోండి. వారి కోసం అదే వంటకాన్ని వండడానికి అవసరమైన పదార్థాల పరిమాణాలను కనుగొనండి.

AP SCERT

Figure it Out - 7.2

1. The Earth travels approximately 940 million kilometres around the Sun in a year. How many kilometres will it travel in a week?

2. A mason is building a house in the shape shown in the diagram. He separates two rooms. To build a wall of 10-feet, he requires approximately 1450 bricks. How many bricks would he need to build the house? Assume all walls are of the same height and thickness.



APSCERT

? Puneeth's father went from Lucknow to Kanpur in 2 hours by riding his motorcycle at a speed of 50 km/h. If he drives at 75 km/h, how long will it take him to reach Kanpur? Can we form this problem as a proportion —

50 : 2 :: 75 : ——.

Would it take Puneeth's father more time or less time to reach Kanpur? Think about it.

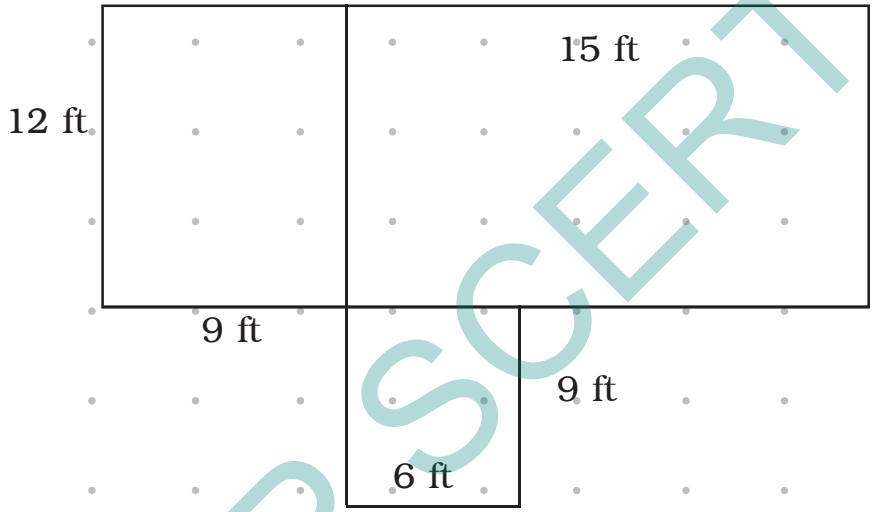
Even though this problem looks similar to the previous problems, it cannot be solved using the Rule of Three!

The time of travel would actually decrease when the speed increases. So this problem cannot be modelled as 50 : 2 :: 75 : ——

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.2

1. భూమి సూర్యుని చుట్టూ ఒక సంవత్సరంలో సుమారు 940 మిలియన్ కిలోమీటర్లు ప్రయాణిస్తుంది. ఒక వారంలో అది ఎన్ని కిలోమీటర్లు ప్రయాణిస్తుంది?

2. ఒక తాపీమేస్త్రీ రేఖాచిత్రంలో చూపిన ఆకారంలో ఒక ఇంటిని నిర్మిస్తున్నాడు. అతను బయటి గోడలు మరియు లోపలి గోడ రెండింటినీ నిర్మించాలి. ఇది రెండు గదులను వేరు చేస్తుంది. 10 అడుగుల గోడను నిర్మించడానికి, అతనికి సుమారు 1450 ఇటుకలు అవసరం.ఇంటిని నిర్మించడానికి అతనికి ఎన్ని ఇటుకలు అవసరం? అన్ని గోడలు ఒకే ఎత్తు మరియు మందంతో ఉన్నాయని అనుకోండి.?



AP SCERT

? పునీత్ తండ్రి తన మోటార్‌సైకిల్‌పై గంటకు 50 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణించి లక్నో నుండి కాన్పూర్‌కు 2 గంటల్లో వెళ్ళాడు.అతను గంటకు 75 కి.మీ వేగంతో నడిపితే, కాన్పూర్ చేరుకోవడానికి అతనికి ఎంత సమయం పడుతుంది? మనం ఈ సమస్యను అనుపాతంగా రూపొందించవచ్చా-

$$50 : 2 :: 75 : \text{——}.$$

పునీత్ తండ్రి కాన్పూర్ చేరుకోవడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుందా లేదా తక్కువ సమయం పడుతుందా? దాని గురించి ఆలోచించండి.

ఈ సమస్య మునుపటి సమస్యల మాదిరిగానే కనిపించినప్పటికీ, దీనిని త్రైరాశికం ఉపయోగించి పరిష్కరించలేము! వేగం పెరిగినప్పుడు ప్రయాణ సమయం వాస్తవానికి తగ్గుతుంది. కాబట్టి ఈ సమస్యను $50 : 2 :: 75 : \text{——}$గా రూపొందించలేము.

Activity 2: Go to the market and collect the prices of different sizes of shampoo containers of the same shampoo and create a table like the one given below. See if the volume of shampoo is proportional to the price.

Container	Volume	Price
Sachet	6 mL	₹2
Small bottle	180 mL	₹154
Medium bottle	340 mL	₹276
Large bottle	1000 mL	₹540

Let us compare the ratios for the sample table above.

The ratio of the volume of a sachet to a small bottle is 6 : 180. The ratio of their prices is 2 : 154. Are these ratios proportional?

Why do you think that the ratio of the prices is not proportional to the ratio of the volumes?

Discuss the pros and cons of different size bottles for the company and for customers. For reducing ecological footprint, what would you recommend to the company and to the customer?

Does the same occur for other products? Make similar tables for other products in the market, capturing different prices for different measures of the same product, e.g., rice or atta (flour).

Observe the products for which the prices are proportional to the different measures.

Discuss in class the proportionality of prices to measures of the same product.

Note to the Teacher: Give a project to students. Start by dividing the class into groups. Each group should go to one shop and collect prices for different measures of the same product. For example, they should note down the prices of 500 g of rice, 1 kg of rice, and 10 kg of rice. They should make tables with measure sizes and prices, and present them to the rest of the class. They should discuss if the prices are proportional or not, and why.

AP SCERT

కృత్యం 2: మార్కెట్‌కి వెళ్లి, ఒకే షాంపూ యొక్క వివిధ పరిమాణాల కంటైనర్ల (డబ్బాల) ధరలను సేకరించి, క్రింద ఇవ్వబడిన విధంగా ఒక పట్టికను రూపొందించండి. షాంపూ పరిమాణం, ధరకు అనుపాతంలో ఉందో లేదో

కంటైనర్	పరిమాణం	ధర
సాచెట్	6 మిల్లీలీటర్లు	₹2
చిన్న సీసా	180 మిల్లీలీటర్లు	₹154
మధ్యస్థ సీసా	340 మిల్లీలీటర్లు	₹276
పెద్ద సీసా	1000 మిల్లీలీటర్లు	₹540

పై ఇవ్వబడిన నమూనా పట్టిక లోని నిష్పత్తులను పోల్చి చూద్దాం. సాచెట్ మరియు చిన్న సీసా యొక్క పరిమాణాల నిష్పత్తి 6 : 180. వాటి ధరల నిష్పత్తి 2 : 154. ఈ నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉన్నాయా?

ధరల నిష్పత్తి పరిమాణాల నిష్పత్తికి అనుపాతంలో లేదని మీరు ఎందుకు అనుకుంటున్నారు?

కంపెనీకి మరియు కస్టమర్లకు వేర్వేరు పరిమాణాల సీసాల వల్ల కలిగే లాభాలు మరియు నష్టాలను చర్చించండి.

పర్యావరణ పాదముద్రను తగ్గించడానికి, మీరు కంపెనీకి మరియు కస్టమర్‌కు ఏమి సిఫార్సు చేస్తారు?

ఇతర ఉత్పత్తులకు కూడా ఇలాగే జరుగుతుందా?

బియ్యం లేదా పిండి వంటి ఒకే ఉత్పత్తి యొక్క వివిధ కొలతలకు వేర్వేరు ధరలను సేకరించి, మార్కెట్‌లోని ఇతర ఉత్పత్తుల కోసం ఇలాంటి పట్టికలను తయారు చేయండి.

ఏ ఉత్పత్తులకు ధరలు వేర్వేరు కొలతలకు అనుపాతంలో ఉంటాయో గమనించండి.

ఒకే ఉత్పత్తి యొక్క కొలతలకు ధరల ఎంత అనుపాతంలో ఉన్నాయన్న విషయం తరగతిలో చర్చించండి. గణిత చర్చ

ఉపాధ్యాయులకు గమనిక: విద్యార్థులకు ఒక ప్రాజెక్ట్ ఇవ్వండి. తరగతిని సమూహాలుగా విభజించడం ద్వారా ప్రారంభించండి. ప్రతి సమూహం ఒక దుకాణానికి వెళ్లి ఒకే ఉత్పత్తి యొక్క వివిధ కొలతలకు ధరలను సేకరించాలి. ఉదాహరణకు, వారు 500 గ్రాముల బియ్యం, 1 కిలో బియ్యం మరియు 10 కిలోల బియ్యం ధరలను గమనించాలి. వారు కొలత పరిమాణాలు మరియు ధరలతో పట్టికలను తయారు చేయాలి మరియు వాటిని మిగిలిన తరగతికి ప్రదర్శించాలి.

AP SCERT

7.5 Sharing, but Not Equally!

Activity 3: Form a pair. Collect 12 countable objects or counters (it can be coins, seeds, or pebbles). Now, shxare them between the two of you in different ways.

If you divide them equally, what is the ratio of the number of counters with each of you?

Each of you will get 6 counters. So, the ratio is 6 : 6, or 1 : 1 in its simplest form.

Now let us not share equally.

If your partner gets 5 counters, how many objects will you get? What is the ratio of the counters?

The ratio of the counters of your partner to yours is 5 : 7.

Now, if you want to share the counters between the two of you in the ratio of 3 : 1, how many counters would each of you get?

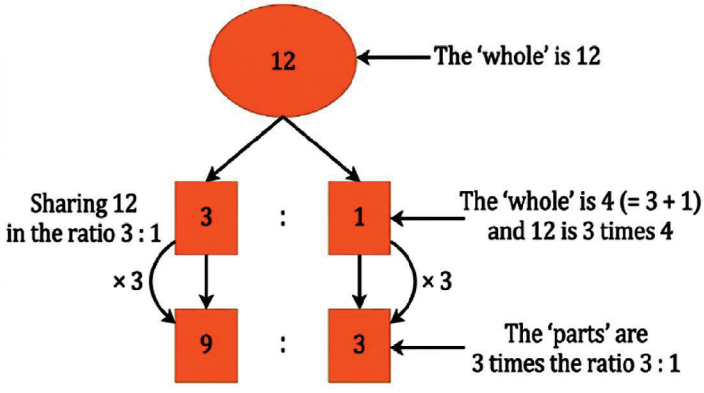
Share the counters in different ways and see which combination is in the ratio 3 : 1.

One way to share the counters in the ratio of 3 : 1 is as follows —

1. Your partner takes 3 counters and you take 1 counter.
   There are now 8 counters left.
2. Your partner takes 3 more counters and you take 1 more counter.
   There are now 4 counters left.
3. Your partner takes 3 more counters and you take 1 more counter.
   There are no more counters left.

So, your partner gets 9 counters in total and you get 3 counters.

When we divide 12 counters in the ratio of 3 : 1 between two people, one gets 9 counters and the other gets 3 counters.



AP SCERT

7.5 పంచుకోవడం, కానీ సమానంగా కాదు!

కృత్యం 3: ఒక జతగా ఏర్పడండి. లెక్కించదగిన 12 వస్తువులు లేదా కౌంటర్లను (ఇవి నాణేలు, విత్తనాలు లేదా గులకరాళ్లు కావచ్చు) సేకరించండి. ఇప్పుడు, వాటిని మీ ఇద్దరి మధ్య వేర్వేరు మార్గాల్లో పంచుకోండి.

మీరు వాటిని సమానంగా విభజిస్తే, మీలో ప్రతి ఒక్కరి వద్ద ఉన్న కౌంటర్ల సంఖ్య నిష్పత్తి ఎంత? మీలో ప్రతి ఒక్కరూ 6 కౌంటర్లను పొందుతారు. కాబట్టి, నిష్పత్తి 6 : 6, లేదా దాని కనిష్ట రూపంలో 1 : 1.

ఇప్పుడు సమానంగా పంచుకోవద్దు.

మీ భాగస్వామి 5 కౌంటర్లను పొందితే, మీరు ఎన్ని వస్తువులను పొందుతారు? కౌంటర్ల నిష్పత్తి ఎంత?

మీ భాగస్వామికి మరియు మీకు ఉన్న కౌంటర్ల నిష్పత్తి 5 : 7.

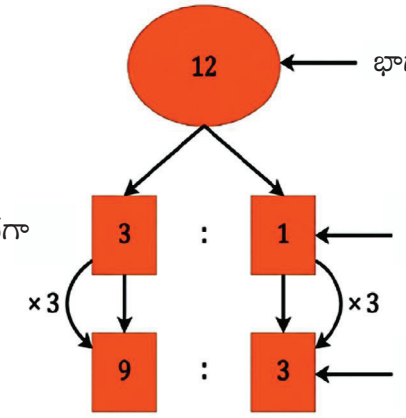
ఇప్పుడు, మీరు మీ ఇద్దరి మధ్య కౌంటర్లను 3 : 1 నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలనుకుంటే, మీలో ప్రతి ఒక్కరూ ఎన్ని కౌంటర్లను పొందుతారు? కౌంటర్లను వేర్వేరు మార్గాల్లో పంచుకోండి మరియు ఏ కలయిక 3 : 1 నిష్పత్తిలో ఉందో చూడండి.

కౌంటర్లను 3 : 1 నిష్పత్తిలో పంచుకోవడానికి ఒక మార్గం క్రింది విధంగా ఉంది:

1. మీ భాగస్వామి 3 కౌంటర్లను తీసుకుంటారు మరియు మీరు 1 కౌంటర్ తీసుకుంటారు. ఇప్పుడు 8 కౌంటర్లు మిగిలి ఉన్నాయి.
2. మీ భాగస్వామి మరో 3 కౌంటర్లను తీసుకుంటారు మరియు మీరు మరో 1 కౌంటర్ తీసుకుంటారు. ఇప్పుడు 4 కౌంటర్లు మిగిలి ఉన్నాయి.
3. మీ భాగస్వామి మరో 3 కౌంటర్లను తీసుకుంటారు మరియు మీరు మరో 1 కౌంటర్ తీసుకుంటారు. ఇప్పుడు కౌంటర్లు ఏమీ మిగిలి లేవు.

కాబట్టి, మీ భాగస్వామి మొత్తంగా 9 కౌంటర్లను పొందుతారు మరియు మీరు 3 కౌంటర్లను పొందుతారు. మనం 12 కౌంటర్లను ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య 3 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించినప్పుడు, ఒకరు 9 కౌంటర్లను మరియు మరొకరు 3 కౌంటర్లను పొందుతారు.

12ను 3:1 నిష్పత్తిలో విభజించగా



భాగాల మొత్తం = 12

నిష్పత్తిలోని భాగాల మొత్తం 4 (= 3+1) మరియు 12 అనేది 4కు 3 రెట్లు

భాగాలు విలువలు 3:1 నిష్పత్తికి 3 రెట్లు

AP SCERT

- Now, if you want to share 42 counters between the two of you in the ratio of 4 : 3, how will you do it?

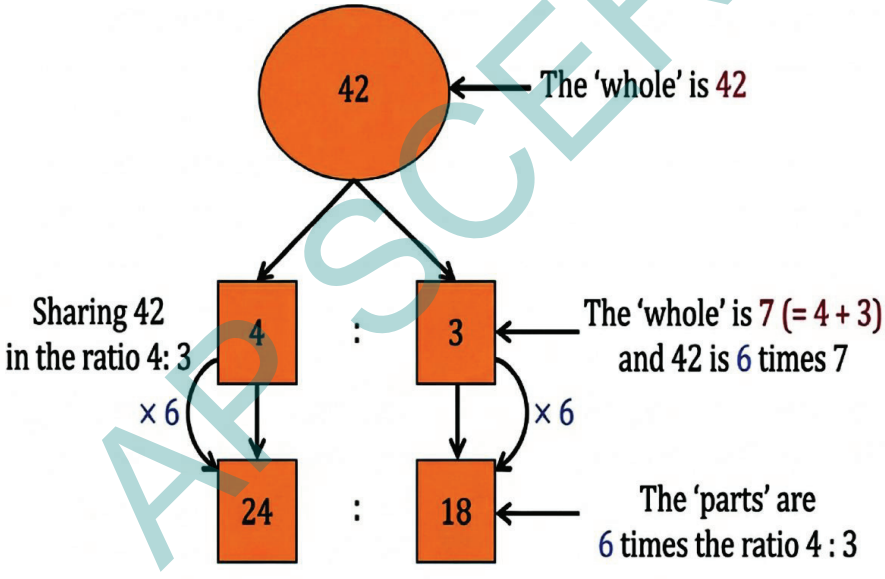
  Using the same procedure would take a long time! There is a simpler way to share the whole with parts in a specified ratio.

  You need to divide 42 into groups such that your partner gets 4 groups and you get 3 groups.

- What is the size of each group?

  If your partner gets 4 groups and you get 3 groups, the total number of groups is 7. So, the size of each group is 42 ÷ 7 = 6.

  Multiplying the number of groups by the size of each group, your partner gets 24 counters and you get 18 counters, when you share 42 counters in the ratio of 4 : 3.



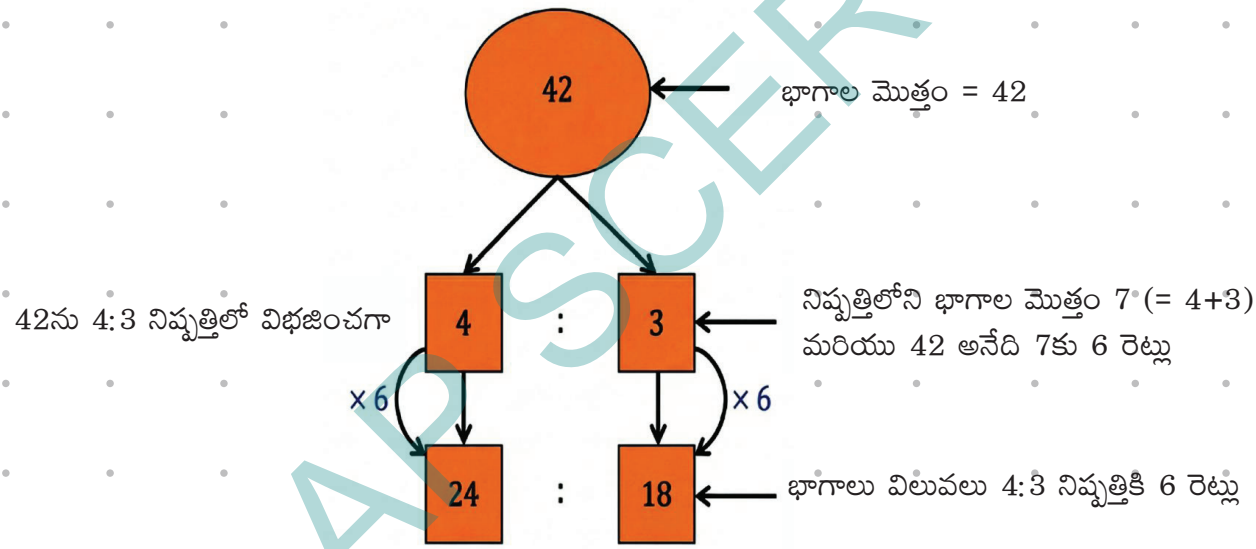
In general, when we want to divide a quantity, say x, in the ratio m: n, we do the following:

1. We need to split x into groups such that it can be divided into two parts where the first part has m groups and the second part has n groups.
2. But what is the size of each group? This can be found out by dividing x by the number of groups. The number of groups are m + n. So, the size of each group is $\frac{x}{m + n}$

- ఇప్పుడు, మీరు మీ ఇద్దరి మధ్య 42 కౌంటర్లను 4 : 3 నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలనుకుంటే, మీరు దానిని ఎలా చేస్తారు?

  అదే విధానాన్ని ఉపయోగించడం చాలా సమయం తీసుకుంటుంది! నిర్దిష్ట నిష్పత్తిలో మొత్తంను భాగాలతో పంచుకోవడానికి సులభమైన మార్గం ఉంది.
- మీరు 42 ని సమూహాలుగా విభజించాలి, తద్వారా మీ భాగస్వామి 4 సమూహాలను పొందుతారు మరియు మీరు 3 సమూహాలను పొందుతారు.
- ఒక్కో సమూహం పరిమాణం ఎంత?

  మీ భాగస్వామి 4 సమూహాలను మరియు మీరు 3 సమూహాలను పొందితే, మొత్తం సమూహాల సంఖ్య 7. కాబట్టి, ప్రతి సమూహం యొక్క పరిమాణం . సమూహాల సంఖ్యను ప్రతి సమూహం పరిమాణంతో గుణించగా, మీరు 42 కౌంటర్లను 4 : 3 నిష్పత్తిలో పంచుకున్నప్పుడు మీ భాగస్వామి 24 కౌంటర్లను మరియు మీరు 18 కౌంటర్లను పొందుతారు.



సాధారణంగా, మనం ఒక రాశిని, ఉదాహరణకు x ని, m : n నిష్పత్తిలో విభజించాలనుకున్నప్పుడు, మనం ఈ క్రింది విధంగా చేస్తాము:

1. మనం x ని సమూహాలుగా విభజించాలి, తద్వారా దానిని రెండు భాగాలుగా విభజించవచ్చు, ఇక్కడ మొదటి భాగం ఎ సమూహాలను మరియు రెండవ భాగం అ సమూహాలను కలిగి ఉంటుంది.
2. కానీ ప్రతి సమూహం పరిమాణం ఎంత? సమూహాల సంఖ్యతో x ని భాగించడం ద్వారా దీనిని కనుగొనవచ్చు. సమూహాల సంఖ్య $m + n$. కాబట్టి, ప్రతి సమూహం యొక్క పరిమాణం $\frac{x}{m + n}$.

APSCERT

3. So, the first part has $m \times \frac{x}{m+n}$ objects and the second part has $n \times \frac{x}{m+n}$ objects.

Thus, if we want to divide a quantity x in the ratio of m: n, then the parts will be $m \times \frac{x}{m+n}$ and $n \times \frac{x}{m+n}$. We see that

$$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n.$$

Example 11: Prashanti and Bhuvan started a food cart business near their school. Prashanti invested ₹75,000 and Bhuvan invested ₹25,000. At the end of the first month, they gained a profit of ₹4,000. They decided that they would share the profit in the same ratio as that of their investment. What is each person's share of the profit?

The ratio of their investment is 75000 : 25000.

Reducing this ratio to its simplest form, we get 3 : 1.

3 + 1 is 4 and dividing the profit of 4000 by 4, we get 1000.

So, Prashanti's share is 3 × 1000 and Bhuvan's share is 1 × 1000.

So, Prashanti would get ₹3,000 and Bhuvan would get ₹1,000 of the profit.

Example 12: Amixture of 40kg contains sand and cement inthe ratio of 3 : 1. How much cement should be added to the mixture to make the ratio of sand to cement 5 : 2?

Let us find the quantity of sand and cement in the original mixture.

The ratio is 3 : 1 and the total weight is 40 kg.

So, the weight of sand is $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ kg.

The weight of cement is $\frac{1}{(3+1)} \times 40 = 10$ kg.

The weight of sand is the same in the new mixture. It remains 30. But the new ratio of sand to cement is 5 : 2. So the question is,

$$5 : 2 :: 30 : ?$$

If the ratio is 5 : 2, then the second term is $\frac{2}{5}$ times the first term. Since the new ratio is equivalent to 5 : 2, the second term in the new ratio should also be $\frac{2}{5}$ times of 30.

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12.$$

AP SCERT

3. కాబట్టి, మొదటి భాగం $m \times \frac{x}{m+n}$ వస్తువులను కలిగి ఉంటుంది మరియు రెండవ భాగం $n \times \frac{x}{m+n}$ వస్తువులను కలిగి ఉంటుంది.

అందువల్ల, మనం ఒక రాశి x, $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజించాలనుకుంటే, అప్పుడు భాగాలు $m \times \frac{x}{m+n}$ మరియు $n \times \frac{x}{m+n}$ అవుతాయి.

$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n.$ అని మనం చూస్తాము.

ఉదాహరణ 11: ప్రశాంతి మరియు భువన్ తమ పాఠశాల దగ్గర ఫుడ్ కార్ట్ (food cart) వ్యాపారాన్ని ప్రారంభించారు. ప్రశాంతి ₹ 75,000 మరియు భువన్ ₹ 25,000 పెట్టుబడి పెట్టారు. మొదటి నెల చివరలో, వారు ? 4,000 లాభం పొందారు. వారు తమ పెట్టుబడి నిష్పత్తిలోనే లాభాన్ని పంచుకోవాలని నిర్ణయించుకున్నారు. లాభంలో ప్రతి వ్యక్తి వాటా ఎంత?

వారి పెట్టుబడి నిష్పత్తి 75000 : 25000.

ఈ నిష్పత్తిని దాని కనిష్ట రూపానికి తగ్గిస్తే, మనకు 3 : 1 వస్తుంది.

3 + 1 = 4 మరియు 4000 లాభాన్ని 4 చే భాగించగా, మనకు 1000 వస్తుంది.

కాబట్టి, ప్రశాంతి వాటా 3 × 1000 మరియు భువన్ వాటా 1 × 1000.

కాబట్టి, లాభంలో ప్రశాంతికి ₹ 3,000 మరియు భువన్‌కి ₹ 1,000 వస్తాయి.

ఉదాహరణ 12: 40 కిలోల మిశ్రమంలో ఇసుక మరియు సిమెంట్ 3 : 1 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. ఇసుక మరియు సిమెంట్ నిష్పత్తిని 5 : 2 చేయడానికి మిశ్రమానికి ఎంత సిమెంట్ కలపాలి?

అసలు మిశ్రమంలో ఇసుక మరియు సిమెంట్ పరిమాణాన్ని కనుగొందాం. నిష్పత్తి 3 : 1 మరియు మొత్తం బరువు 40 కిలోలు. కాబట్టి, ఇసుక బరువు $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ కి.గ్రా.

సిమెంట్ బరువు $\frac{1}{(3+1)} \times 40 = 10$ కి.గ్రా.

కొత్త మిశ్రమంలో ఇసుక బరువు అంతే ఉంటుంది. అది 30 గానే ఉంటుంది. కానీ ఇసుక మరియు సిమెంట్ యొక్క కొత్త నిష్పత్తి 5 : 2. కాబట్టి ప్రశ్న ఏమిటంటే,

$$5 : 2 :: 30 : ?$$

నిష్పత్తి 5 : 2 అయితే, రెండవ పదం మొదటి పదానికి $\frac{2}{5}$ రెట్లు ఉంటుంది. కొత్త నిష్పత్తి 5 : 2 కు సమానం కాబట్టి, కొత్త నిష్పత్తిలోని రెండవ పదం కూడా 30 లో $\frac{2}{5}$ వంతు ఉండాలి.

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12.$$

APSCERT

The new mixture should have 12 kg of cement if the ratio of sand to cement is to be 5 : 2.

There is 10 kg of cement already. So, we need to add 2 kg of cement to the original mixture.

Figure it Out - 7.3

1. Divide .4,500 into two parts in the ratio 2 : 3.
2. In a science lab, acid and water are mixed in the ratio of 1 : 5 to make a solution. In a bottle that has 240 mL of the solution, how much acid and water does the solution contain?
3. Blue and yellow paints are mixed in the ratio of 3 : 5 to produce green paint. To produce 40 mL of green paint, how much of these two colours are needed? To make the paint a lighter shade of green, I added 20 mL of yellow to the mixture. What is the new ratio of blue and yellow in the paint?
4. To make soft idlis, you need to mix rice and urad dal in the ratio of 2 : 1. If you need 6 cups of this mixture to make idlis tomorrow morning, how many cups of rice and urad dal will you need?
5. I have one bucket of orange paint that I made by mixing red and yellow paints in the ratio of 3 : 5. I added another bucket of yellow paint to this mixture. What is the ratio of red paint to yellow paint in the new mixture?

7.6 Unit Conversions

We have noticed earlier that solving problems with proportionality often requires us to convert units from one system to another. Here are a few important unit conversions for your reference.

Length

1 metre = 3.281 feet

Area

1 square metre = 10.764 square feet

1 acre = 43,560 square feet

1 hectare = 10,000 square metres

1 hectare = 2.471 acres

AP SCERT

ఇసుక మరియు సిమెంట్ నిష్పత్తి 5 : 2 కావాలంటే కొత్త మిశ్రమంలో 12 కిలోల సిమెంట్ ఉండాలి. అప్పటికే 10 కిలోల సిమెంట్ ఉంది. కాబట్టి, మనం అసలు మిశ్రమానికి 2 కిలోల సిమెంట్ కలపాలి.

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.3

1. 4,500 ను 2 : 3 నిష్పత్తిలో రెండు భాగాలుగా విభజించండి.
2. సైన్స్ ల్యాబ్‌లో, ఒక ద్రావణాన్ని తయారు చేయడానికి యాసిడ్ మరియు నీటిని 1 : 5 నిష్పత్తిలో కలుపుతారు. 240 మిల్లీ లీటర్ల ద్రావణం ఉన్న సీసాలో, ద్రావణం ఎంత యాసిడ్ మరియు నీటిని కలిగి ఉంటుంది?
3. ఆకుపచ్చ పెయింట్‌ను ఉత్పత్తి చేయడానికి నీలం మరియు పసుపు పెయింట్‌లను 3 : 5 నిష్పత్తిలో కలుపుతారు. 40 మిల్లీ లీటర్ల ఆకుపచ్చ పెయింట్‌ను ఉత్పత్తి చేయడానికి, ఈ రెండు రంగులు ఎంతెంత అవసరం? పెయింట్‌ను లేత ఆకుపచ్చ రంగులో చేయడానికి, నేను మిశ్రమానికి 20 మిల్లీ లీటర్ల పసుపు రంగును జోడించాను. పెయింట్‌లో నీలం మరియు పసుపు రంగుల కొత్త నిష్పత్తి ఎంత?
4. మృదువైన ఇడ్లీలను తయారు చేయడానికి, మీరు బియ్యం మరియు మినపప్పును 2 : 1 నిష్పత్తిలో కలపాలి. రేపు ఉదయం ఇడ్లీలు చేయడానికి మీకు ఈ మిశ్రమం 6 కప్పులు అవసరమైతే, మీకు ఎన్ని కప్పుల బియ్యం మరియు మినపప్పు అవసరం?
5. ఎరుపు మరియు పసుపు పెయింట్‌లను 3 : 5 నిష్పత్తిలో కలపడం ద్వారా తయారు చేసిన ఒక బకెట్ నారింజ రంగు పెయింట్ నా దగ్గర ఉంది. నేను ఈ మిశ్రమానికి మరో బకెట్ పసుపు పెయింట్‌ను జోడించాను. కొత్త మిశ్రమంలో ఎరుపు పెయింట్ మరియు పసుపు పెయింట్ నిష్పత్తి ఎంత?

7.6 ప్రమాణాల మార్పిడి

అనుపాతంతో కూడిన సమస్యలను పరిష్కరించడానికి తరచుగా మనం ప్రమాణాలను (units) ఒక పద్ధతి నుండి మరొక దానికి మార్చవలసి ఉంటుందని మనం ముందే గమనించాము. ఇక్కడ

ఇక్కడ మీ సూచన కోసం కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రమాణాల మార్పిడిలు ఉన్నాయి.

పొడవు

1 మీటరు = 3.281 అడుగులు

వైశాల్యం

1 చదరపు మీటరు = 10.764 చదరపు అడుగులు

1 ఎకరం = 43,560 చదరపు అడుగులు

1 హెక్టారు = 10,000 చదరపు మీటర్లు

1 హెక్టారు = 2.471 ఎకరాలు

AP SCERT

Volume 1 millilitre (mL) = 1 cubic centimetre (cc)

1 litre = 1,000 mL or 1,000 cc

Temperature

Temperature conversion between Fahrenheit and Celsius is a bit more complicated. 0^0C = 32°F, and

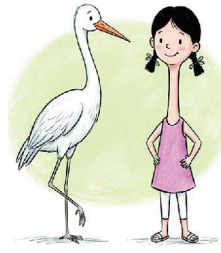
$$\text{Fahrenheit} = \frac{9}{5} \times \text{Celsius} + 32 \text{ and}$$

$$\text{Celsius} = \frac{5}{9} \times (\text{Fahrenheit} - 32)$$

For example, 25°C is 77°F.

Figure it Out - 7.4

1. Anagh mixes 600 mL of orange juice with 900 mL of apple juice to make a fruit drink. Write the ratio of orange juice to apple juice in its simplest form.
2. Last year, we hired 3 buses for the school trip. We had a total of 162 students and teachers who went on that trip and all the buses were full. This year we have 204 students. How many buses will we need? Will all the buses be full?
3. The area of Delhi is 1,484 sq. km and the area of Mumbai is 550 sq. km. The population of Delhi is approximately 30 million and that of Mumbai is 20 million people. Which city is more crowded? Why do you say so?
4. A crane of height 155 cm has its neck and the rest of its body in the ratio 4 : 6. For your height, if your neck and the rest of the body also had this ratio, how tall would your neck be?



5. Let us try an ancient problem from Lilavati. At that time weights were measured in a unit named palas and niskas was a unit of money. "If $2\frac{1}{2}$ palas of saffron costs $\frac{3}{7}$ niskas, O expert businessman! tell me quickly what quantity of saffron can be bought for 9 niskas?"

AP SCERT

ఘనపరిమాణం 1 మిల్లీలీటర్ (mL) = 1 ఘనపు సెంటీమీటర్ (cc)

1 లీటర్ = 1,000 mL లేదా 1,000 cc

ఉష్ణోగ్రత

ఫారెన్‌హీట్ మరియు సెల్సియస్ మధ్య ఉష్ణోగ్రత మార్పిడి కొంచెం క్లిష్టంగా ఉంటుంది. $0^0C = 32^oF$, మరియు

$$\text{ఫారెన్‌హీట్} = \frac{9}{5} \times \text{సెల్సియస్} + 32 \quad \text{మరియు}$$

$$\text{సెల్సియస్} = \frac{5}{9} \times (\text{ఫారెన్‌హీట్} - 32)$$

ఉదాహరణకు, 25^oC అనేది 77^oF.

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.4

1. అనఘ్ ఫ్రూట్ డ్రింక్ చేయడానికి 600 mL నారింజ రసాన్ని 900 mL ఆపిల్ రసంతో కలుపుతాడు. నారింజ రసం మరియు ఆపిల్ రసం యొక్క నిష్పత్తిని దాని కనిష్ట రూపంలో రాయండి.
2. గత సంవత్సరం, మేము పాఠశాల విహారయాత్ర కోసం 3 బస్సులను అద్దెకు తీసుకున్నాము. ఆ యాత్రకు మొత్తం 162 మంది విద్యార్థులు మరియు ఉపాధ్యాయులు వెళ్ళారు మరియు బస్సులన్నీ నిండిపోయాయి. ఈ సంవత్సరం మాకు 204 మంది విద్యార్థులు ఉన్నారు. మాకు ఎన్ని బస్సులు అవసరం? అన్ని బస్సులు నిండి ఉంటాయా?
3. ఢిల్లీ వైశాల్యం 1,484 చ.కి.మీ మరియు ముంబై వైశాల్యం 550 చ.కి.మీ. ఢిల్లీ జనాభా సుమారు 30 మిలియన్లు మరియు ముంబై జనాభా 20 మిలియన్లు. ఏ నగరం ఎక్కువ రద్దీగా ఉంది? మీరెందుకు అలా చెబుతున్నారు?
4. 155 సెం.మీ ఎత్తు ఉన్న కొంగ మెడ మరియు దాని శరీరంలోని మిగిలిన భాగం 4 : 6 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. మీ ఎత్తుకు, మీ మెడ మరియు శరీరంలోని మిగిలిన భాగం కూడా ఇదే నిష్పత్తిని కలిగి ఉంటే, మీ మెడ ఎంత పొడవు ఉంటుంది?

5. లీలావతి గణితం నుండి ఒక పురాతన సమస్యను ప్రయత్నిద్దాం. ఆ సమయంలో బరువులను 'పలాలు' అనే ప్రమాణంలో మరియు డబ్బును 'నిష్కాలు' అనే ప్రమాణంలో కొలిచేవారు." $2\frac{1}{2}$ పలాల కుంకుమపువ్వు ధర $\frac{3}{7}$ నిష్కాలు అయితే, ఓ నిపుణుడైన వ్యాపారీ! 9 నిష్కాలకు ఎంత కుంకుమపువ్వు కొనవచ్చో త్వరగా చెప్పు?"

AP SCERT

6. Taswika is a 1-year-old girl. Her elder brother is 5 years old. What will be Taswika's age when the ratio of her age to her brother's age is 1 : 2?
7. The mass of equal volumes of gold and water are in the ratio 37 : 2. If 1 litre of water is 1 kg in mass, what is the mass of 1 litre of gold?
8. It is good farming practice to apply 10 tonnes of cow manure for 1 acre of land. A farmer is planning to grow tomatoes in a plot of size 200 ft by 500 ft. How much manure should he buy? (Please refer to the section on Unit Conversions earlier in this chapter).
9. A tap takes 15 seconds to fill a mug of water. The volume of the mug is 500 mL. How much time does the same tap take to fill a bucket of water if the bucket has a 10-litre capacity?
10. One acre of land costs ₹15,00,000. What is the cost of 2,400 square feet of the same land?
11. A tractor can plough the same area of a field 4 times faster than a pair of oxen. A farmer wants to plough his 20-acre field. A pair of oxen takes 6 hours to plough an acre of land. How much time would it take if the farmer used a pair of oxen to plough the field? How much time would it take him if he decides to use a tractor instead?
12. The ₹10 coin is an alloy of copper and nickel called 'cupro-nickel'. Copper and nickel are mixed in a 3 : 1 ratio to get this alloy. The mass of the coin is 7.74 grams. If the cost of copper is ₹906 per kg and the cost of nickel is ₹1,341 per kg, what is the cost of these metals in a ₹10 coin?

AP SCERT

SUMMARY

- Ratios in the form of a : b indicate that for every 'a' unit of the first quantity, there are 'b' units of the second quantity. 'a' and 'b' are the terms in the ratio.
- Two ratios — a : b and c : d — are proportional (written a : b :: c : d) if their terms change by the same factor, i.e., if ad = bc.
- If x is divided into two parts in the ratio m : n, then the quantity of the first part is $m \times \frac{x}{m+n}$ and the quantity of the second part is $n \times \frac{x}{m+n}$.

6. తస్విక 1 సంవత్సరం వయస్సు గల బాలిక. ఆమె అన్నయ్య వయస్సు 5 సంవత్సరాలు. ఆమె వయస్సు మరియు ఆమె అన్నయ్య వయస్సు నిష్పత్తి 1 : 2 అయినప్పుడు తస్విక వయస్సు ఎంత ఉంటుంది?

7. సమాన ఘనపరిమాణం గల బంగారం మరియు నీటి ద్రవ్యరాశులు 37 : 2 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. 1 లీటర్ నీటి ద్రవ్యరాశి 1 కిలో అయితే, 1 లీటర్ బంగారం ద్రవ్యరాశి ఎంత?

8. 1 ఎకరం భూమికి 10 టన్నుల ఆవు ఎరువును వేయడం మంచి వ్యవసాయ పద్ధతి. ఒక రైతు 200 అడుగులు 500 అడుగుల పరిమాణంలో ఉన్న ప్లాట్‌లో టమోటాలు పండించాలని యోచిస్తున్నాడు. అతను ఎంత ఎరువు కొనాలి? (దయచేసి ఈ అధ్యాయంలో ఇంతకు ముందు ఉన్న ప్రమాణాల మార్పిడి విభాగాన్ని చూడండి).

9. ఒక కుళాయి ఒక మగ్ నీటని నింపడానికి 15 సెకన్ల సమయం తీసుకుంటుంది. మగ్ ఘనపరిమాణం 500 mL. బకెట్ 10-లీటర్ల సామర్థ్యాన్ని కలిగి ఉంటే అదే కుళాయి ఒక బకెట్‌ని నింపడానికి ఎంత సమయం తీసుకుంటుంది?

10. ఒక ఎకరం భూమి ధర ₹15,00,000. అదే భూమిలో 2,400 చదరపు అడుగుల విస్తీర్ణానికి ధర ఎంత?

11. ఒక ట్రాక్టర్ ఒక జత ఎద్దుల కంటే 4 రెట్లు వేగంగా పొలాన్ని దున్నగలదు. ఒక రైతు తన 20 ఎకరాల పొలాన్ని దున్నాలనుకుంటున్నాడు. ఒక ఎకరం భూమిని దున్నడానికి ఒక జత ఎద్దులకు 6 గంటల సమయం పడుతుంది. రైతు పొలాన్ని దున్నడానికి ఒక జత ఎద్దులను ఉపయోగిస్తే ఎంత సమయం పడుతుంది? అతను ట్రాక్టర్ ఉపయోగించాలని నిర్ణయించుకుంటే అతనికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

12. ₹10 నాణెం రాగి మరియు నికెల్ ల మిశ్రమం, దీనిని 'కుప్రో-నికెల్' అంటారు. ఈ మిశ్రమాన్ని పొందడానికి రాగి మరియు నికెల్ 3 : 1 నిష్పత్తిలో కలుపుతారు. నాణెం ద్రవ్యరాశి 7.74 గ్రాములు. రాగి ధర కిలోకి ₹ 906 మరియు నికెల్ ధర కిలోకి ₹1,341 అయితే, ₹10 నాణెంలోని ఈ లోహాల ధర ఎంత?

AP SCERT

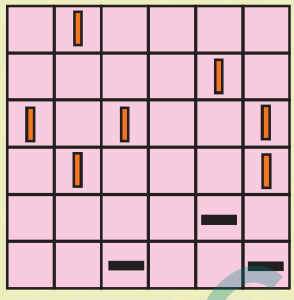
సారాంశం

- a : b రూపంలో ఉన్న నిష్పత్తులు, మొదటి రాశి యొక్క ప్రతి 'a' ప్రమాణానికి, రెండవ రాశి యొక్క 'b' ప్రమాణాలు ఉన్నాయని సూచిస్తాయి. 'a' మరియు 'b' నిష్పత్తిలోని పదాలు.
- రెండు నిష్పత్తులు a : b మరియు c : d వాటి పదాలు ఒకే కారకం ద్వారా మారినట్లయితే, అంటే ad = bc అయితే, అవి అనుపాతంలో ఉంటాయి (దీనిని a : b :: c : d గా రాస్తారు).
- x అనే రాశిని m : n నిష్పత్తిలో రెండు భాగాలుగా విభజించినట్లయితే, మొదటి భాగం యొక్క పరిమాణం $m \times \frac{x}{m+n}$ మరియు రెండవ భాగం యొక్క పరిమాణం $n \times \frac{x}{m+n}$.

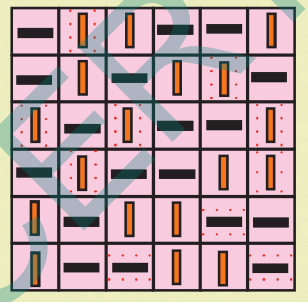
Binairo

Binairo, also known as Takuzu, is a logic puzzle with simple rules. Binairo is generally played on a square grid with no particular size. Some cells start out filled with two symbols: here horizontal and vertical lines. The rest of the cells are empty. The task is to fill cells in such a way that:

1. Each row and each column must contain an equal number of horizontal and vertical lines.
2. More than two horizontal or vertical lines can't be adjacent.
3. Each row is unique. Each column is unique.

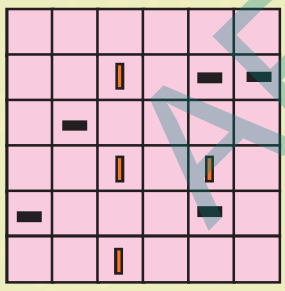


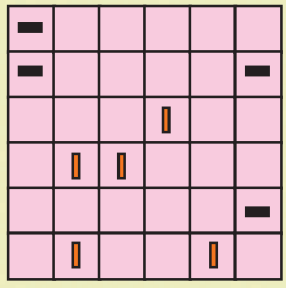
Puzzles

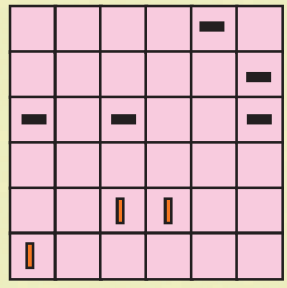


Solution

Solve the following Binairo puzzles:







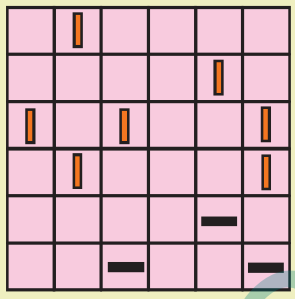
AP SCERT

బినైరో

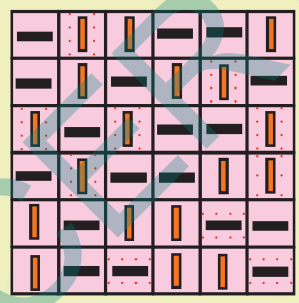
బినైరో, దీనిని టకుజు (Takuzu) అని కూడా పిలుస్తారు, ఇది సాధారణ నియమాలతో కూడిన లాజిక్ పజిల్. బినైరో సాధారణంగా నిర్దిష్ట పరిమాణం లేని చదరపు గ్రిడ్‌పై ఆడబడుతుంది. కొన్ని గడులు రెండు చిహ్నాలు అడ్డగీతలు మరియు నిలువు గీతలతో నింపబడి ప్రారంభమవుతాయి: ఇక్కడ ఉన్నాయి. మిగిలిన గడులు ఖాళీగా ఉంటాయి.

గడులను ఈ విధంగా నింపడమే పని:

1. ప్రతి అడ్డు వరుస మరియు ప్రతి నిలువు వరుస సమాన సంఖ్యలో అడ్డ మరియు నిలువు గీతలను కలిగి ఉండాలి.
2. రెండు కంటే ఎక్కువ అడ్డ లేదా నిలువు గీతలు పక్కపక్కనే ఉండకూడదు.
3. ప్రతి అడ్డు వరుస ప్రత్యేకంగా (unique) ఉండాలి. ప్రతి నిలువు వరుస ప్రత్యేకంగా ఉండాలి.

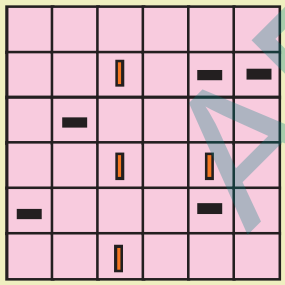


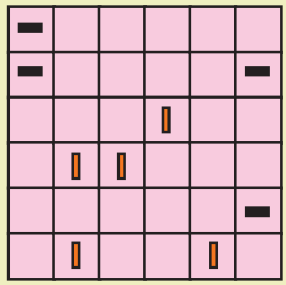
పజిల్

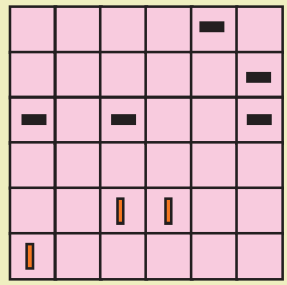


సమాధానం

క్రింది బినైరో పజిల్‌లను పరిష్కరించండి:







AP SCERT

ANSWERS

Figure it out - 1.1

1. 2032, 2048, and 1027 are not perfect squares.
2. 108^2, 292^2 3. 15625 + 251 4. 21m 5. 900
6. The smallest number to multiply by is 3.
   The square root of the product is 168.
7. There are exactly '2n' numbers between n^2 and $(n+1)^2$
   (i) 32 (ii) 198
8. $4^2 + 5^2 + 20^2 = (21)^2$
   $9^2 + 10^2 + (90)^2 = (91)^2$
9. Total Tiny Squares = 81 × 25 = 2025
   $3^4 \times 5^2$ prime factorisation

Figure it out - 1.2

1. 30 and 22 2. 7
3. (i) False. Because, the cube of any odd number is odd
   (ii) False. The cube of 2 ends with 8
   (iii) False. For example, 10^3 = 1000 is a 4 - digit number
   (iv) False. The cube of largest two digit number $(99)^3$ = 970299 has only 6 digits
   (v) False. The factors of 8, which is cube of 2 = 1, 2 ,4, 8 (even number)
4. (i) yes, the cube root of 1331 can be guessed without factorization. $10 < \sqrt[3]{1331} < 20$, as 1331 ends with 1, its cube root also ends with 1
   So, the cube root of 1331 is 11
   (ii) 4,913: $10 < \sqrt[3]{4913} < 20$, as 4913 ends with 3, its cube root ends with 7 So, the cube root of 4913 = 17
   (iii) 12,167: $20 < \sqrt[3]{12167} < 30$, as 12,617 ends with 7, its cube root ends with 3
   So, the cube root of 12, 617 is 23.
   (iv) 32
5. $67^3 - 66^3$. Because it involves the highest base numbers raised to the highest power.

AP SCERT

జవాబులు

ఆలోచించండి-చేయండి - 1.1

1. 2032, 2048, మరియు 1027 2. 108^2, 292^2

3. 15625 + 251 4. 21మీ 5. 900

6. గుణించవలసిన కనిష్ట సంఖ్య 3. ఈ లబ్ధం యొక్క వర్గమూలం 168.

7. n^2 మరియు $(n+1)^2$ మధ్య సరిగ్గా '2n' సంఖ్యలు ఉంటాయి.

   (i) 32 (ii) 198

8. $4^2 + 5^2 + 20^2 = (21)^2$

   $9^2 + 10^2 + (90)^2 = (91)^2$

9. మొత్తం చిన్న చతురస్రాల సంఖ్య = 81 × 25 = 2025

   $3^4 \times 5^2$ ప్రధాన కారణాకాల లబ్ధం

ఆలోచించండి-చేయండి - 1.2

1. 30 మరియు 22. 2. 7

3. (i) తప్పు. ఎందుకంటే, ఏ బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనమైనా బేసి సంఖ్యే.

   (ii) తప్పు. 2 యొక్క ఘనం 8 తో ముగుస్తుంది

   (iii) తప్పు ఉదాహరణకు, 10^3 = 1000 అనేది ఒక 4-అంకెల సంఖ్య.

   (iv) తప్పు అతిపెద్ద రెండంకెల సంఖ్య (99) యొక్క ఘనం $(99)^3$ = (970299) కేవలం 6 అంకెలను మాత్రమే కలిగి ఉంది.

   (v) తప్పు. 2 యొక్క ఘనమైన 8 యొక్క కారణాంకాలు = 1, 2, 4, 8 (సరి సంఖ్య)

4. అవును, కారణాంకాలు కనుగొనకుండానే 1331 యొక్క ఘనమూలాన్ని ఊహించవచ్చు.

   (i) $10 < \sqrt[3]{1331} < 20$; 1331 సంఖ్య 1తో అంతమవుతుంది కాబట్టి, దాని ఘనమూలం కూడా 1తోనే అంతమవుతుంది. కాబట్టి, 1331 యొక్క ఘనమూలం 11.

   (ii) 4,913: $10 < \sqrt[3]{4913} < 20$; 4913 సంఖ్య 3తో అంతమవుతుంది కాబట్టి, దాని ఘనమూలం 7తో అంతమవుతుంది. కాబట్టి, 4913 యొక్క ఘనమూలం = 17.

   (iii) 112,167: $20 < \sqrt[3]{12167} < 30$; 12,167 సంఖ్య 7తో అంతమవుతుంది కాబట్టి, దాని ఘనమూలం 3తో అంతమవుతుంది. కాబట్టి, 12,167 యొక్క ఘనమూలం 23.

   (iv) 32

5. $67^3 - 66^3$. ఎందుకంటే, ఇందులో పెద్ద సంఖ్యలు మరియు గరిష్ఠ ఘాతాంకం ఉన్నాయి.

AP SCERT

Reason :

(i) Cubes vs. Squares: The difference between consecutive cubes ($a^3 - b^3$) grows much faster than the difference between consecutive squares ($a^2 - b^2$). Therefore, (i) and (ii) will be significantly larger than (iii) and (iv).

(ii) Magnitude of Bases: Between the two cube expressions, uses much larger base numbers (67 vs 66). Since the difference is ($a^2 + ab + b^2$), larger values of a and b will result in a much larger sum.

Conclusion : The greatest value is **(i) $67^3 - 66^3$**.

Figure it out - 2.1

1. (i) 6^4 (ii) y^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$
   (iv) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d^1$
2. (i) $648 = 2^3 \times 3^4$ (ii) $405 = 3^4 \times 5$
   (iii) $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$
3. (i) 2000 (ii) 392 (iii) 768 (iv) 225
   (v) 90000 (vi) –32000000

Figure it out - 2.2

1. 6 2. 200 bottles
3. (i) 64^3: $(2^6)^3$, $(4^3)^3$, $(8^2)^3$ (ii) 192^8: $(2^6 \times 3)^8$, $192^4 \times 192^4$, $(192^2)^4$
   (iii) 32^{-5}: $(2^5)^{-5}$, $32^{-2} \times 32^{-3}$, $(32^{-1})^5$
4. (i) Sometimes True (e.g., 1 and 64 are both; 8 is only a cube).
   (ii) Always True (Any x^4 is $(x^2)^2$).
   (iii) Always True (For integers; $x^5 \div x^3 = x^2$).
   (iv) Always True ($a^3 \times b^3 = (ab)^3$).
   (v) Never True (46 is not divisible by 4).
5. (i) 10^{-7} (ii) 5^3 (iii) 9^{-11} (iv) 13^6 (v) $m^{14}n^{21}$
6. (i) 1.44 (ii) 0.0144 (iii) 0.000144 (iv) 14400
7. $2^4 \times 3^6$, $6^4 \times 3^2$, and $18^2 \times 6^2$. (All these are equal to 11,664)
8. (i) 3^4 (ii) 2^8 (iii) 2^{100}
9. 10 digits (10^{10} = 10 billion)
10. Numbers that are both Squares and Cubes
    Examples: 1, 64, 729, 4096
    General Description: Any number that is a 6th power (n^6).

AP SCERT

కారణం:

(i) **ఘనాలు vs వర్గాలు:** వరుస సంఖ్యల ఘనాల మధ్య వ్యత్యాసం $(a^3 - b^3)$,వరుస సంఖ్యల వర్గాల మధ్య వ్యత్యాసం $(a^2 - b^2)$. కంటే చాలా వేగంగా పెరుగుతుంది. కాబట్టి, (i) మరియు (ii) ఫలితాలు (iii) మరియు (iv) కంటే చాలా ఎక్కువగా ఉంటాయి.

(ii) సంఖ్యల పరిమాణం: రెండు ఘనరాశులలో, (i) లో పెద్ద సంఖ్యలు (67 మరియు 66) ఉన్నాయి. సూత్రం $(a^2 + ab + b^2)$, ప్రకారం, సంఖ్యల విలువలు పెరిగే కొద్దీ వాటి మొత్తం కూడా పెరుగుతుంది.

ముగింపు: పెద్ద విలువ (i) $67^3 - 66^3$.

ఆలోచించండి-చేయండి - 2.1

1. (i) 6^4 (ii) y^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$
   (iv) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d^1$
2. (i) $648 = 2^3 \times 3^4$ (ii) $405 = 3^4 \times 5$
   (iii) $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$
3. (i) 2000 (ii) 392 (iii) 768 (iv) 225
   (v) 90000 (vi) –32000000

ఆలోచించండి-చేయండి - 2.2

1. 6 2. 200 సీసాలు
3. (i) 64^3: $(2^6)^3$, $(4^3)^3$, $(8^2)^3$ (ii) 192^8: $(2^6 \times 3)^8$, $192^4 \times 192^4$, $(192^2)^4$
   (iii) 32^{-5}: $(2^5)^{-5}$, $32^{-2} \times 32^{-3}$, $(32^{-1})^5$
4. (i) కొన్నిసార్లు సత్యం(1 మరియు 64 అనేవి వర్గం మరియు ఘనం రెండూ అవుతాయి; కానీ 8 అనేది కేవలం ఘనం మాత్రమే).
   (ii) ఎల్లప్పుడూ సత్యం (ఏదైనా x^4 సంఖ్యను $(x^2)^2$ గా రాయవచ్చు)
   (iii) ఎల్లప్పుడూ సత్యం(పూర్ణసంఖ్యలకు; $x^5 \div x^3 = x^2$).
   (iv) ఎల్లప్పుడూ సత్యం $(a^3 \times b^3 = (ab)^3)$.
   (v) ఎప్పుడూ సత్యం కాదు
5. (i) 10^{-7} (ii) 5^3 (iii) 9^{-11} (iv) 13^6 (v) $m^{14}n^{21}$
6. (i) 1.44 (ii) 0.0144 (iii) 0.000144 (iv) 14400
7. $2^4 \times 3^6$, $6^4 \times 3^2$ మరియు $18^2 \times 6^2$ ఇవన్నీ 11,664 కి సమానం.
8. (i) 3^4 (ii) 2^8 (iii) 2^{100}
9. 10 అంకెలు (10^{10} = 10 బిలియన్లు)
10. వర్గాలు మరియు ఘనాలు రెండూ అయ్యే సంఖ్యలు:
    ఉదాహరణలు: 1, 64, 729, 4096.
    సాధారణ వివరణ:ఏదైనా సంఖ్య యొక్క 6వ ఘాతం (n^6) వర్గం మరియు ఘనం రెండూ అవుతుంది.

AP SCERT

11. Characters available: 62 (10 digits + 26 lowercase + 26 uppercase)
62^5 (or 916,132,832 codes)

12. (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. i) 2.43×10^{11} pieces (world population = 8.1×10^9 approximately)
ii) 5×10^{12} honeybees
iii) 3.078×10^{23} bacterial cells (world population = 8.1×10^9 approximately)

14. Approximately 31.7 years ago (roughly August 1994).

Figure it out - 3.1

1. Stick Method - Mathematical Operations
If we use a number system consisting of sticks (tally marks) without using Hindu-Arabic numerals or names, we can perform operations through physical grouping:
Addition : Simply combine two separate collections of sticks into one large pile.
Example: (| | |) + (| |) = (| | | | |)
Subtraction: From the first collection, remove as many sticks as there are in the second collection. The remaining sticks represent the result.
Multiplication: Lay out the first collection of sticks as many times as there are sticks in the second collection. For example, to multiply 3 by 2, you place a group of 3 sticks down twice.
Division: Determine how many times you can "take away" the divisor group from the dividend group. The number of times you successfully remove it is the **quotient**, and any sticks left over are the **remainder**.

2. Extending the Letter System (Method 2)
In a system where 'a' through 'z' represent 1 to 26, we can extend it to represent infinite numbers using a Positional (Base- 26) System:
Place Value : Just as we move from 9 to 10, we can move from 'z' (26) to **'aa'** (27). In this system, the first 'a' represents the "26s" place, and the second 'a' represents the "1s" place.
Column Logic : This is identical to how Microsoft Excel names its columns (A, B... Z, AA, AB...). To represent very large numbers, you simply add more letters (e.g., 'aaa' for numbers beyond $26 \ times 26$).
Additive Extension : Another way is to use specific letter combinations to represent milestones (like 'aa' = 50, 'aaa' = 100), similar to the Roman numeral logic.

AP SCERT

11. అందుబాటులో ఉన్న అక్షరాలు/అంకెలు: 62 (10 అంకెలు + 26 చిన్న అక్షరాలు + 26 పెద్ద అక్షరాలు) 62^5 (లేదా 916,132,832 కోడ్‌లు)

12. (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. i) 2.43×10^{11} ముక్కలు (ప్రపంచ జనాభా దాదాపుగా = 8.1×10^9)

ii) 5×10^{12} తేనెటీగలు

iii) 3.078×10^{23} bacterial cells (ప్రపంచ జనాభా దాదాపుగా = 8.1×10^9)

14. సుమారు 31.7 సంవత్సరాల క్రితం (దాదాపు ఆగస్టు 1994 ప్రాంతంలో).

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.1

1. కర్రల పద్ధతి (Stick Method) - గణిత పరిక్రియలు

మనం హిందూ-అరబిక్ అంకెలు లేదా పేర్లను ఉపయోగించకుండా, కేవలం కర్రల (tally marks) ద్వారా లెక్కలు చేయాలనుకుంటే, వాటిని భౌతికంగా సమూహాలుగా చేయడం ద్వారా ఈ క్రింది పరిక్రియలను నిర్వహించవచ్చు:

సంకలనం : రెండు వేర్వేరు కర్రల సమూహాలను కలిపి ఒకే పెద్ద కుప్పగా చేయడం.

ఉదాహరణ: (| | |) + (| |) = (| | | | |)

వ్యవకలనం : మొదటి సమూహం నుండి, రెండవ సమూహంలో ఎన్ని కర్రలు ఉన్నాయో అన్నింటిని తీసివేయడం. మిగిలిన కర్రలే ఫలితాన్ని సూచిస్తాయి.

గుణకారం: రెండవ సమూహంలో ఎన్ని కర్రలు ఉన్నాయో, అన్ని సార్లు మొదటి సమూహంలోని కర్రలను పేర్చడం. ఉదాహరణకు, 3 ని 2 తో గుణించాలంటే, 3 కర్రల సమూహాన్ని రెండుసార్లు పక్క పక్కన పెట్టాలి.

భాగహారం : విభాజకం సమూహాన్ని విభాజ్యం సమూహం నుండి ఎన్నిసార్లు "తీసివేయగలమో" చూడటం. ఎన్నిసార్లు విజయవంతంగా తీసివేయగలమో అది భాగఫలం అవుతుంది, చివరగా మిగిలి పోయిన కర్రలు శేషం అవుతాయి.

2. అక్షరాల పద్ధతిని విస్తరించడం

'a' నుండి 'z' వరకు అక్షరాలు 1 నుండి 26 సంఖ్యలను సూచించే వ్యవస్థలో, స్థాన విలువ పద్ధతిని ఉపయోగించి అనంతమైన సంఖ్యలను ఇలా సూచించవచ్చు:

స్థాన విలువ : మనం 9 తర్వాత 10 కి వెళ్ళినట్లే, ఇక్కడ 'z' (26) తర్వాత 'aa' (27) కి వెళ్తాము. ఈ పద్ధతిలో, మొదటి 'a' అనేది "26ల" స్థానాన్ని, రెండవ 'a' అనేది "1ల" స్థానాన్ని సూచిస్తుంది.

కాలమ్ లాజిక్ : ఇది మైక్రోసాఫ్ట్ ఎక్సెల్ (Excel) కాలమ్స్ పేర్ల మాదిరిగానే ఉంటుంది (A, B... Z, AA, AB...). చాలా పెద్ద సంఖ్యలను సూచించడానికి మరిన్ని అక్షరాలను చేర్చవచ్చు (ఉదాహరణకు: 26 / times 26 దాటిన సంఖ్యల కోసం 'aaa').

సంకలన విస్తరణ (Additive Extension): రోమన్ సంఖ్యల లాజిక్ లాగే, కొన్ని ప్రత్యేక అక్షరాల కలయికలను మైలురాళ్లుగా ఉపయోగించవచ్చు (ఉదాహరణకు: 'aa' = 50, 'aaa' = 100).

AP SCERT

3. Here is a sample "Shape-Based System" designed for clarity:

Symbol	Value
Dot (.)	1
Vertical Line (|)	5
Triangle (△)	10
Square (□)	50

Rules for Writing :

Symbols are written from largest value to smallest value.

Example 13: △... (One Triangle + 3 Dots)

Example 67: □△ |.. (One Square + One Triangle + One Line + 2 Dots)

Figure it out - 3.2

1. (i) MCCXXII

   (ii) MMCMXCIX

   (iii) CCCII

   (iv) DCCXV

Figure it out - 3.3

1. The Hindu-Arabic numeral system is considered one of the greatest inventions in mathematics because of its logical efficiency.

1. Place Value System: Value of a digit depends on its position

   Example: 345 = 3 hundreds + 4 tens + 5 ones

   Roman system has no place value

2. Use of Zero (0): Zero is a powerful placeholder

   Distinguishes 5, 50, 500

   Roman numerals do not have zero

AP SCERT

3. ఆకారాల ఆధారిత సంఖ్యా వ్యవస్థ స్పష్టత కోసం రూపొందించిన ఒక నమూనా సంఖ్యా వ్యవస్థ ఇక్కడ ఉంది:

గుర్తు	విలువ
బిందువు (.)	1
నిలువు గీత (|)	5
త్రిభుజం (Δ)	10
చతురస్రం ($\square$)	50

రాయడానికి నియమాలు :

గుర్తులను పెద్ద విలువ నుండి చిన్న విలువ క్రమంలో రాయాలి.

ఉదాహరణ 13: Δ ... (ఒక త్రిభుజం + 3 బిందువులు)

ఉదాహరణ 67: $\square\Delta$ |.. (ఒక చతురస్రం + ఒక త్రిభుజం + ఒక గీత + 2 బిందువులు)

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.2

1. (i) MCCXXII

   (ii) MMCMXCIX

   (iii) CCCII

   (iv) DCCXV

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.3

1. హిందూ-అరబిక్ సంఖ్యా వ్యవస్థ ఎందుకు శక్తివంతమైనది?

తార్కిక సామర్థ్యం కారణంగా హిందూ-అరబిక్ సంఖ్యా వ్యవస్థ గణితంలో గొప్ప ఆవిష్కరణగా పరిగణించబడుతుంది.

1. **స్థాన విలువ పద్ధతి :** అంకె యొక్క విలువ అది ఉన్న స్థానంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. (ఉదా: 345 అంటే 3 వందలు + 4 పదులు + 5 ఒకట్లు). రోమన్ వ్యవస్థలో స్థాన విలువ ఉండదు.
2. **సున్నా (0) వినియోగం :** సున్నా ఒక శక్తివంతమైన ప్లేస్‌హోల్డర్. ఇది 5, 50, 500 ల మధ్య తేడాను చూపుతుంది. రోమన్ సంఖ్యలలో సున్నా లేదు.

AP SCERT

3. Compact Representation: Large numbers written easily

   1000 vs M

   10,000 vs MMMMMMMMMM

4. Easy Calculations: Addition, subtraction, multiplication, division are simple and systematic Roman system is very difficult for calculations

5. Only 10 Symbols Needed: Digits: 0-9

   Roman system uses many symbols and rules (I, V, X, L, C, D, M)

6. Universal Usage: Used worldwide in science, commerce, technology

   Roman system is mostly used for labels (clocks, chapters, etc.)

2. To refine the Shape-Based System (Dot, Line, Triangle, Square),

1. Introduce a Zero Symbol (The Placeholder)

   In the old system, to write "one hundred," you might have to draw two squares (50+50). By adding a Zero (◯), we can reuse the "1" symbol (Dot) in a different position to mean ten, a hundred, or more.

2. Define a Base (Base-10)

   Instead of having a new symbol for every major number (10, 50, 100), we only need symbols for 0 through 9. Once we reach ten, we move to the next "place."

   Refined Symbols (0-9):

   0: ◯ (Circle)

1: . (Dot)	2: ..	3: ...	4:	5: | (Line)
6: |.	7: |..	8: |...	9: |....	

3. Applying Place Value

   Now, the position of the symbol determines its value. Each position to the left is 10 times greater than the one to its right.

   Example: Representing 1222

   Old Additive System: □□ ... (too many symbols!)

AP SCERT

3. **సంక్షిప్త రూపం :** పెద్ద సంఖ్యలను సులభంగా రాయవచ్చు. (ఉదా: 1000 కి బదులుగా రోమన్ లో 'M' రాస్తాం, కానీ 10,000 రాయాలంటే రోమన్ లో చాలా కష్టం).

1000 vs M

10,000 vs MMMMMMMMMM

4. **సులభమైన లెక్కలు:** కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగహారం ఈ వ్యవస్థలో చాలా క్రమబద్ధంగా మరియు సులభంగా ఉంటాయి.

5. **కేవలం 10 గుర్తులు:** 0 నుండి 9 వరకు కేవలం పది అంకెలు మాత్రమే సరిపోతాయి. రోమన్ లో చాలా గుర్తులు (I, V, X, L, C, D, M) మరియు క్లిష్టమైన నియమాలు ఉంటాయి.

6. **ప్రపంచవ్యాప్త వినియోగం :** సైన్స్, వాణిజ్యం మరియు సాంకేతికతలో ప్రపంచమంతా దీనినే ఉపయోగిస్తారు.

2. ఆకారాల ఆధారిత వ్యవస్థను మెరుగుపరచడం పాత వ్యవస్థను మరింత సమర్థవంతంగా మార్చడానికి:

1. సున్నా గుర్తును పరిచయం చేయడం : పాత పద్ధతిలో 'వంద' రాయడానికి రెండు చతురస్రాలు (50+50) గీయాల్సి వచ్చేది. కానీ సున్నా (◯) చేర్చడం ద్వారా, ఒకే గుర్తును (బిందువు) వేర్వేరు స్థానాల్లో పెట్టి పది, వంద లేదా వెయ్యి అని సూచించవచ్చు.

2. ఆధారాన్ని నిర్ణయించడం (బేస్ -10): ప్రతి పెద్ద సంఖ్యకు (10, 50, 100) ఒక కొత్త గుర్తు అవసరం లేకుండా, కేవలం 0 నుండి 9 వరకు గుర్తులు ఉంటే సరిపోతుంది. పదికి చేరుకోగానే మనం తర్వాతి "స్థానానికి" మారుతాము.

   మెరుగుపరచబడిన చిహ్నాలు 0-9 వరకు

   0: ◯ (సున్నా)

   1: . (Dot) 2: .. 3: ... 4: .... 5: | (Line)

   6: |. 7: |.. 8: |... 9: |....

3. స్థాన విలువను అన్వయించడం

   ఇప్పుడు, ఒక చిహ్నం ఉండే స్థానం దాని విలువను నిర్ణయిస్తుంది. ప్రతి స్థానం దాని కుడి వైపున ఉన్న స్థానం కంటే 10 రెట్లు పెద్దదిగా ఉంటుంది.

   ఉదాహరణ: 1222 సంఖ్యను సూచించడం

   పాత సంకలన పద్ధతి : □□... (చాలా ఎక్కువ చిహ్నాలు అవసరమవుతాయి!)

AP SCERT

Refined Place Value System: * 1 (Thousands) | 2 (Hundreds) | 2 (Tens) | 2 (Ones)

- . | .. | .. | ..
- Written as: . .. .

Example: Representing 50

Old Additive System: ?

Refined Place Value System:

5 (Tens) | 0 (Ones)

| | ◯ Written as: | ◯

Figure it out - 3.4

1. 10458= 10000 + 400 + 50 + 8

Representation :

1 finger (10000) 4 coils (400) 5 heel bones (50) 8 strokes (8)

1023 = 1000 + 20 + 3

Representation:

1 lotus 2 heel bones 3 strokes 2660 = 2000 + 600 + 60

Representation :

2 lotus 6 coils 6 heel bones 784= 700 + 80 + 4

Representation :

7 coils 8 heel bones 4 strokes 1111= 1000 + 100 + 10 + 1

Representation :

1 lotus 1 coil 1 heel bone 1 stroke

70707 = 70000 + 700 + 7

Representation :

7 fingers 7 coils 7 strokes

2. (i) 276 (ii) 4322

Figure it out - 3.5

1. 15 = □□□

50 = ⬡ ⬡

137 = □□□ Δ Δ

293 = □□⬡□□□ Δ Δ Δ

651 = ~ ⬡ Δ

AP SCERT

మెరుగుపరచబడిన స్థాన విలువ పద్ధతి:

1 (వేలు) | 2 (వందలు) | 2 (పదులు) | 2 (ఒకట్లు)

. | .. | .. | ..

రాసే విధానం: . .. .

ఉదాహరణ: 50 సంఖ్యను సూచించడం

పాత సంకలన పద్ధతి : □

మెరుగుపరచబడిన స్థాన విలువ పద్ధతి:

5 (పదులు) | 0 (ఒకట్లు)

| | ◯ రాసే విధానం: | ◯

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.4

ఈజిప్షియన్ సంఖ్యా వ్యవస్థ సంకలన పద్ధతిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అంటే, కావలసిన విలువ వచ్చే వరకు ఆయా గుర్తులను పునరావృతం చేయాలి.

1. 10,458: 10,000 + 400 + 50 + 8

వివరణ :

1 వేలు (10000), 4 సుట్టల (400), 5 మడమ ఎముకలు (50), 8 గీతలు (8).

1,023: 1,000 + 20 + 3

వివరణ:

1 తామర పువ్వు 2 మడమ ఎముకలు 3 గీతలు. 2,660: 2,000 + 600 + 60

వివరణ:

2 తామర పువ్వులు 6 సుట్టలు 6 మడమ ఎముకలు. 784: 700 + 80 + 4

వివరణ:

7 సుట్టలు 8 మడమ ఎముకలు 4 గీతలు. 1,111: 1,000 + 100 + 10 + 1

వివరణ :

1 తామర పువ్వు 1 సుట్ట 1 మడమ ఎముక 1 గీత. 70,707: 70,000 + 700 + 7

వివరణ:

7 వేళ్లు 7 సుట్టలు 7 గీతలు.

2. (i) 276 (ii) 4322

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.5

1. సమాధానం:

15 = □□□

50 = ⬡ ⬡

137 = □□□ Δ Δ

293 = □□ ⬡ □□□ Δ Δ Δ

651 = ~ ⬡ Δ

AP SCERT

2. No, every number can be represented.

   Reason: Base-5 is a positional number system. It uses powers of 5 : 5^0, 5^1, 5^2, 5^3,...

3. Landmark Numbers (Base-7): 1, 7, 49, 343, 2401, 16807, ...

Figure it out - 3.6

1. **Technically, yes, but conventionally, no.**

   Why it could happen: The Egyptian system is purely **additive**. Unlike our positional system, there is no mathematical "error" in writing ten to represent the number 10.

   Why it was avoided: The Egyptians created higher-value symbols specifically to make writing and reading efficient. Since 10 strokes equal 1 heel bone , repeating a symbol 10 times defeats the purpose of the higher-value sign. It's like trying to pay for a 100-rupee item using 100 one-rupee coins; it's valid, but highly impractical. In formal inscriptions, symbols were almost always "rolled over" to the next higher power of ten once they reached a count of 10.

2. To create a Positional Base-4 System, we only need 4 symbols. Let's use: ○ = (Circle), 1 = (Triangle), 2 = (Square), 3 = (Hexagon).

   The "Landmark Numbers" (place values) are $4^0 = 1$, $4^1 = 4$, and $4^2 = 16$

3. In the Positional Base-5 System we discussed (using symbols for 0, 1, 2, 3, 4), multiplying by 5 is incredibly simple-it follows the same logic as multiplying by 10 in our decimal system.

   The Rule:

   To multiply any number by 5, simply shift all symbols one position to the left and add a Zero symbol (□) at the end (the units place).

   Example: If the number is 3 (⬡), multiplying by 5 makes it 15.

AP SCERT

2. ప్రశ్న: పైన పేర్కొన్న బేస్-5 సంఖ్యా వ్యవస్థలో సూచించలేని సంఖ్య ఏదైనా ఉందా? ఎందుకు?
సమాధానం: లేదు, ప్రతి సంఖ్యను సూచించవచ్చు.
కారణం: బేస్-5 అనేది ఒక స్థాన విలువ సంఖ్యా వ్యవస్థ .ఇది 5 యొక్క ఘాతాలను 5^0, 5^1, 5^2, 5^3,... ఉపయోగిస్తుంది: ఏదైనా సంఖ్యను ఈ 5 యొక్క ఘాతాల మొత్తంగా విభజించవచ్చు, కాబట్టి ఏ సంఖ్యనైనా ఈ వ్యవస్థలో రాయడం సాధ్యమవుతుంది.

3. 1, 7, 49, 343, 2401, 16807, ...

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.6

1. ఈజిప్షియన్ సంఖ్యలలో ఒకే గుర్తు 10 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సార్లు వచ్చే అవకాశం ఉందా?
సమాధానం: సాంకేతికంగా సాధ్యమే, కానీ ఆచారంలో అలా చేయరు.
ఎందుకు జరగవచ్చు: ఈజిప్షియన్ వ్యవస్థ పూర్తిగా **సంకలన** పద్ధతిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. మన స్థాన విలువ పద్ధతిలా కాకుండా, ఇందులో 10 సంఖ్యను సూచించడానికి పది గీతలు గీసినా అది గణితపరంగా తప్పేమీ కాదు.
ఎందుకు నివారించేవారు: రాయడం మరియు చదవడం సులభతరం చేయడం కోసమే ఈజిప్షియన్లు పెద్ద విలువల కోసం ప్రత్యేక గుర్తులను సృష్టించారు. 10 గీతలు ఒక మడమ ఎముక గుర్తుతో సమానమైనప్పుడు, మళ్ళీ 10 సార్లు గీతలు గీయడం వల్ల సమయం వృథా అవుతుంది. ఇది 100 రూపాయల వస్తువు కొన్నప్పుడు 100 ఒక రూపాయి నాణేలు ఇచ్చినట్లు ఉంటుంది; ఇది చెల్లుతుంది కానీ పద్ధతిగా ఉండదు.

2. ఒక బేస్-4 వ్యవస్థను రూపొందించడానికి మనకు కేవలం 4 చిహ్నాలు సరిపోతాయి.
ఉదాహరణకు: 0 = ○ (వృత్తం), 1 = త్రిభుజం 2 = చతురస్రం, 3 = షడ్భుజి.
ఇక్కడ మైలురాయి సంఖ్యలు (స్థాన విలువలు) $4^0 = 1$, $4^1 = 4$ మరియు $4^2 = 16$

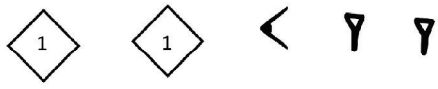
3. బేస్-5 వ్యవస్థలో 5 తో గుణించే సులభమైన సూత్రం
మనం చర్చించుకున్న బేస్-5 స్థాన విలువ పద్ధతిలో (0, 1, 2, 3, 4 చిహ్నాలను ఉపయోగించి), 5 తో గుణించడం చాలా సులభం-ఇది మన దశాంశ పద్ధతిలో (బేస్ -10) 10 తో గుణించినట్లే ఉంటుంది.
నియమం :
ఏ సంఖ్యనైనా 5 తో గుణించాలంటే, కేవలం చిహ్నాలన్నింటినీ ఒక స్థానం ఎడమ వైపుకు జరిపి, చివరన (ఒకట్ల స్థానంలో) సున్నా గుర్తును (□) చేర్చాలి.
ఉదాహరణ: ఒకవేళ సంఖ్య 3 (⬡) అనుకుందాం. దీనిని 5 తో గుణిస్తే 15 అవుతుంది.
బేస్-5 లో 3 ని ⬡ గా రాస్తాం.
పైన చెప్పిన సూత్రం ప్రకారం: చిహ్నాన్ని ఒక స్థానం ఎడమ వైపుకు జరిపి చివరన □ చేర్చాలి.
ఫలితం: ⬡ □ (ఇది 15 కి సమానం).

AP SCERT

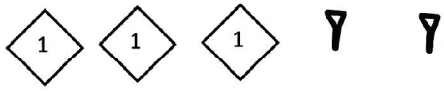
Figure it out - 3.7

1. (i) 63

(ii) 132



(iii) 200



(iv) 60

(v) 3605

Figure it out - 3.8

1. **The Chinese Rod Numeral System (Zong and Heng)**

   The Chinese used **Zong** (vertical) and **Heng** (horizontal) symbols to prevent confusion in their place-value system.

- **Why alternate?** They alternated to clearly distinguish between adjacent place values (Units, Tens, Hundreds, etc.). If you have two digits side-by-side, alternating the orientation acts as a "visual border."
- **Representing 41 using only Zong:**
  - 4 would be four vertical lines: | | | |
  - 1 would be one vertical line: |
  - **Representation:** | | | | |
- **Misinterpretation:** Without a significant space or alternating symbols, | | | | | could easily be read as 5 (five vertical lines) instead of **41**. Alternating (Heng for Tens, Zong for Units) makes it ≡ |, which is unmistakably **41**.

2. **The Role of Hindu Numerals and Zero (0)**

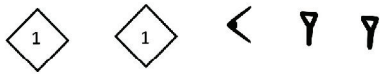
   Daily Life & Professions:

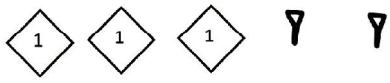
- **Banking/ Finance :** Interest rates, balances, and stock markets are impossible without 0 and place value.
- **Engineering/ Construction :** Precise measurements (0.001mm) require decimal place values.
- **Computers/ IT :** Everything digital is built on Binary (0 and 1).
- **Daily :** Setting alarms, checking prices at the market, or measuring medicine doses.

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.7

1. (i) 63

   (ii) 132 

   (iii) 200 

   (iv) 60

   (v) 3605

ఆలోచించండి-చేయండి - 3.8

1. **చైనీస్ రాడ్ సంఖ్యా వ్యవస్థ (Zong మరియు Heng)**

   చైనీయులు తమ స్థాన విలువ పద్ధతిలో గందరగోళం కలగకుండా ఉండటానికి Zong (నిలువు) మరియు Heng (అడ్డ) చిహ్నాలను ఉపయోగించేవారు.

- **ఎందుకు మార్చాలి?:** పక్కపక్కన ఉన్న స్థాన విలువల (ఒకట్లు, పదులు, వందలు మొదలైనవి) మధ్య తేడాను స్పష్టంగా చూపడానికి వారు వీటిని మార్చి మార్చి ఉపయోగించేవారు. రెండు అంకెలు పక్కపక్కన ఉన్నప్పుడు, వాటి దిశను మార్చడం ఒక "దృశ్య సరిహద్దు" లాగా పనిచేస్తుంది.
- కేవలం Zong చిహ్నాలను ఉపయోగించి 41ని సూచిస్తే:
  - 4 అంటే నాలుగు నిలువు గీతలు: | | | |
  - 1 అంటే ఒక నిలువు గీత: |
  - **సూచన:** | | | | |
- తప్పుడు అర్థం వచ్చే అవకాశం: చిహ్నాల దిశను మార్చకుండా లేదా తగినంత ఖాళీ లేకుండా |||| | అని రాస్తే, అది 41 కి బదులుగా 5 (ఐదు నిలువు గీతలు) గా చదివే అవకాశం ఉంది. అదే చిహ్నాలను మార్చి (పదుల స్థానంలో Heng, ఒకట్ల స్థానంలో Zong) ఉపయోగిస్తే అది ≡ | అవుతుంది, ఇది ఖచ్చితంగా 41 అని అర్థమవుతుంది.

2. **హిందూ సంఖ్యలు మరియు సున్నా (0) పాత్ర**

   రోజువారీ జీవితం మరియు వృత్తులు :

- **బ్యాంకింగ్ / ఫైనాన్స్ :** సున్నా మరియు స్థాన విలువ లేకుండా వడ్డీ రేట్లు, బ్యాలెన్స్ మరియు స్టాక్ మార్కెట్లు అసాధ్యం.
- **ఇంజనీరింగ్/నిర్మాణం:** ఖచ్చితమైన కొలతలకు (0.001mm) దశాంశ స్థాన విలువలు అవసరం.
- **కంప్యూటర్లు/ IT:** డిజిటల్ రంగమంతా బైనరీ (0 మరియు 1) పైనే ఆధారపడి ఉంటుంది.
- **రోజువారీ:** అలారాలు సెట్ చేయడం, మార్కెట్‌లో ధరలు చూడటం లేదా మందుల మోతాదును కొలవడం.

AP SCERT

Life without 0 :

Our lives would be mathematically "heavy." Without 0 and place value, we would likely still be using systems like Roman Numerals. Simple multiplication like 25×12 would take a long time to solve on paper, and advanced physics, space travel, or modern internet technology would likely not exist.

4. Counting with 8 Fingers (Base-8 and Base-5)

   If humans had only 8 fingers, we would likely have used Base-8 (Octal).

- Base-8 Numerals: We would only have symbols 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. The number "8" would be written as 10.
- Base-5 Numerals: We would only use 0, 1, 2, 3, 4. The number "5" would be written as 10.

Converting the Decimal Number 25 :

Base System	Calculation	Representation
Base-10	2(10) + 5(1)	**25**
Base-8	3(8) + 1(1)	**31**
Base-5	1(25) + 0(5) + 0(1)	**100**
Base-2	1(16)+1(8)+0(4)+0(2)+1(1)	**11001**

APSCERT

Figure it out - 4.1

1. **Rectangle (i) :**

   $\angle OAB = 30^o$ $\angle OBA = 30^o$ $\angle AOB = 120^o$

   $\angle OAD = 60^o$ $\angle ODA = 60^o$ $\angle AOD = 60^o$

   $\angle ODC = 30^o$ $\angle OCD = 30^o$ $\angle DOC = 120^o$

   $\angle OCB = 60^o$ $\angle OBC = 60^o$ $\angle BOC = 60^o$

   Rectangle (ii) :

   Center angles : 110° and 70°

   Base angles (Wide triangles): 35°, 35°

   Base angles (Narrow triangles): 55°, 55°

2. **Quadrilateral Types**

   (i) Rectangle (ii) Rectangle (iii) Square (iv) Rectangle

సున్నా లేని జీవితం :

సున్నా మరియు స్థాన విలువ లేకపోతే మన జీవితం గణితపరంగా చాలా భారంగా ఉండేది. మనం ఇప్పటికీ రోమన్ సంఖ్యల వంటి పద్ధతులనే ఉపయోగించాల్సి వచ్చేది. వి25 ల్ఱఎవం 12వి వంటి సాధారణ గుణకారం కూడా పేపర్ మీద చేయడానికి చాలా సమయం పట్టేది. ఆధునిక భౌతిక శాస్త్రం, అంతరిక్ష యానం లేదా నేటి ఇంటర్నెట్ సాంకేతికత అసలు ఉద్భవించేవే కావు.

4. 8 వేళ్లతో లెక్కించడం (బేస్-8 మరియు బేస్-5)

మనుషులకు కేవలం 8 వేళ్లే ఉంటే, మనం బహుశా బేస్-8 (Octal) పద్ధతిని ఉపయోగించేవాళ్లం.

- బేస్-8 సంఖ్యలు: మనకు 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 చిహ్నాలు మాత్రమే ఉంటాయి. అప్పుడు "8" అనే సంఖ్యను 10 అని రాస్తాము.
- బేస్-5 సంఖ్యలు: మనం 0, 1, 2, 3, 4 మాత్రమే ఉపయోగిస్తాము. అప్పుడు "5" అనే సంఖ్యను 10 అని రాస్తాము.

దశాంశ సంఖ్య 25 ని వివిధ పద్ధతుల్లో మార్చడం:

సంఖ్యా వ్యవస్థ	గణన	సూచించే విధానం
బేస్-10	2(10) + 5(1)	**25**
బేస్-8	3(8) + 1(1)	**31**
బేస్-5	1(25) + 0(5) + 0(1)	**100**
బేస్-2	1(16)+1(8)+0(4)+0(2)+1(1)	**11001**

ఆలోచించండి-చేయండి - 4.1

1. **దీర్ఘచతురస్రం (i) :**

$\angle OAB = 30^o$ $\angle OBA = 30^o$ $\angle AOB = 120^o$

$\angle OAD = 60^o$ $\angle ODA = 60^o$ $\angle AOD = 60^o$

$\angle ODC = 30^o$ $\angle OCD = 30^o$ $\angle DOC = 120^o$

$\angle OCB = 60^o$ $\angle OBC = 60^o$ $\angle BOC = 60^o$

దీర్ఘచతురస్రం (ii) :

కేంద్ర కోణాలు : 110° మరియు 70°

భూ కోణాలు (వెడల్పు త్రిభుజాలు) : 35°, 35°

భూ కోణాలు (ఇరుకైన త్రిభుజాలు) : 55°, 55°

2. (i) దీర్ఘచతురస్రం (ii) దీర్ఘచతురస్రం (iii) చతురస్రం (iv) దీర్ఘచతురస్రం

AP SCERT

3. Figure APML
   Figure: Square.
   Reason: Diagonals are equal, bisect each other, and are perpendicular.
4. Exact 90° with Sticks
   Method: Cross two equal sticks at their exact midpoints. Adjust them until the four distances between the stick ends (measured with the thread) are all equal.
5. No.
   Reason: A quadrilateral with opposite sides parallel and equal is a parallelogram.

Figure it out - 4.2

1. (i) Parallelogram: $\angle E = 140^o$, $\angle A = 40^o$, $\angle R = 140^o$
   (ii) Parallelogram: $\angle Q = 70^o$, $\angle R = 110^o$, $\angle S = 70^o$
   (iii) Rhombus:
   $\angle XVU = 30^o$ (Total $\angle UVW = 60^o$)
   $\angle UXW = 60^o$ (Split into 30°, 30° by diagonal)
   $\angle U = 120^o$ (Split into 60°, 60° by diagonal)
   $\angle W = 120^o$ (Split into 60°, 60° by diagonal)
   (iv) Rhombus:
   $\angle OEI = 20^o$ ($\angle AEI = 40^o$)
   $\angle IOA = 40^o$ (Split into 20°, 20° by diagonal)
   $\angle A = 140^o$ (Split into 70°, 70° by diagonal)
   $\angle I = 140^o$ (Split into 70°, 70° by diagonal)

Figure it out - 4.3

1. Sides: All four sides are 4 cm.
   - Angles: 60°, 120°, 60°, 120° (Rhombus).
2. Kite Construction
   - Draw diagonal AC = 8 cm.
   - Draw a perpendicular line through AC at any point (not necessarily the midpoint).
   - Measure 3 cm on both sides of AC along this line to mark points B and D.
   - Join A, B, C, D.
3. Remaining Angles in Trapeziums
   - Left Trapezium: Top-left angle = 45°,Top-right angle = 75°

AP SCERT

3. పటం APML

ఆకారం : చతురస్రం (Square).

కారణం : కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి, పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి మరియు లంబంగా ఉంటాయి.

4. సమాన పొడవు గల రెండు కర్రలను వాటి మధ్య బిందువుల వద్ద కలిపి ఉంచండి. దారం సాయంతో ఆ కర్రల నాలుగు చివరల మధ్య దూరం సమానంగా ఉండేలా సర్దుబాటు చేస్తే, అది ఖచ్చితమైన 90° కోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది.

5. సమాధానం : కాదు.

కారణం : ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా మరియు సమానంగా ఉండే చతుర్భుజాన్ని సమాంతర చతుర్భుజం అంటారు.

ఆలోచించండి-చేయండి - 4.2

1. (i) సమాంతర చతుర్భుజం

$\angle E = 140^{\circ}$, $\angle A = 40^{\circ}$, $\angle R = 140^{\circ}$

(ii) సమాంతర చతుర్భుజం

$\angle Q = 70^{\circ}$, $\angle R = 110^{\circ}$, $\angle S = 70^{\circ}$

(iii) రాంబస్

$\angle XVU = 30^{\circ}$ (మొత్తం $\angle UVW = 60^{\circ}$)

$\angle UXW = 60^{\circ}$ (కర్ణం ద్వారా 30°, 30° గా విభజించబడింది)

$\angle U = 120^{\circ}$ (కర్ణం ద్వారా 60°, 60° గా విభజించబడింది)

$\angle W = 120^{\circ}$ (కర్ణం ద్వారా 60°, 60° గా విభజించబడింది)

(iv) రాంబస్

$\angle OEI = 20^{\circ}$ ($\angle AEI = 40^{\circ}$)

$\angle IOA = 40^{\circ}$ (కర్ణం ద్వారా 20°, 20° గా విభజించబడింది)

$\angle A = 140^{\circ}$ (కర్ణం ద్వారా 70°, 70° గా విభజించబడింది)

$\angle I = 140^{\circ}$ (కర్ణం ద్వారా 70°, 70° గా విభజించబడింది)

ఆలోచించండి-చేయండి - 4.3

1. భుజాలు:నాలుగు భుజాలు ఒక్కొక్కటి 4 సెం.మీ. ఉంటాయి.

కోణాలు: 60°, 120°, 60°, 120° (ఇది ఒక రాంబస్ అవుతుంది).

2. గాలిపటం నిర్మాణం

కర్ణం AC = 8 సెం.మీ. గీయండి.

AC కి లంబంగా ఒక రేఖను గీయండి.

ఈ లంబ రేఖపై AC కి ఇరువైపులా 3 సెం.మీ. గుర్తించి B, D బిందువులను ఏర్పరచండి.

A, B, C, D బిందువులను కలపండి.

3. ఎడమవైపు ట్రెపీజియం:పైన ఎడమ కోణం = 45°, పైన కుడి కోణం = 75°.

AP SCERT

- Right (Isosceles) Trapezium: Top-right angle = 100°, Bottom-left angle = 80°, Bottom-right angle = 80°.

4. Venn Diagram Questions
   (i) Rhombus and Square.
   (ii) Yes (a Square is both).
   (iii) No. Every rhombus is a kite, but not every kite is a rhombus. A rhombus is a kite with all sides equal.
5. $\angle IOD = 30^o$
7. Square.
   Other ways: By choosing points on each side that are an equal distance from each vertex (e.g., let CU = AX = SW = EV).
8. Yes.
9. Parallelogram.
10. Yes, the sum is 360° (By joining B and D you have two triangles)
11. (i) False (It could be a rectangle). (ii) True.
    (iii) True. (iv) False (It could be a kite).
    (v) True. (vi) True. (vii) False.

Figure it out - 5.1

1. 7, 8, 9, 10
2. p - 1, p - 2, p - 3, p - 4
3. (i) Sometimes true (e.g., 2 + 4 = 6 is true; 2 + 2 = 4 is false).
   (ii) Never true (Every number divisible by 18 is divisible by 9, but the reverse is not true; e.g., 9 is not divisible by 18, yet it is divisible by 9).
   (iii) Sometimes true (e.g., 1 + 1= 2 is true; 3 + 3 = 6 is false).
   (iv) Always true (Multiples of 6 and 9 are both divisible by 3, so their sum must be).
   (v) Sometimes true (e.g., 6+3=9 is true; 12+3=15 is false).
4. Numbers: 14, 26, 38
   Expression: 12n + 2(where n is a non-negative integer).
5. 91 6. True
7. (i) 4779 + 661: 1 (Sum of remainders is 5 + 3 = 8; 8 ÷ 7 leaves remainder 1)
   (ii) 4779 - 661: 2 (Difference of remainders is 5 - 3 = 2)
8. 59
   Each remainder is exactly 1 less than the divisor. Thus, the number is LCM (3, 4, 5) - 1, which is 60 - 1 = 59.

AP SCERT

కుడివైపు (సమద్విబాహు) ట్రెపీజియం:పైన కుడి కోణం = 100°, క్రింద ఎడమ కోణం = 80°, క్రింద కుడి కోణం = 80°

4. (i) రాంబస్ మరియు చతురస్రం.
   (ii) అవును (చతురస్రం రెండూ అవుతుంది).
   (iii) కాదు. ప్రతి రాంబస్ గాలిపటం అవుతుంది కానీ, ప్రతి గాలిపటం రాంబస్ కాదు.
5. $\angle IOD = 30^o$
7. చతురస్రం.
   ఇతర మార్గాలు:ప్రతి శీర్షం నుండి సమాన దూరంలో ఉండేలా భుజాలపై బిందువులను గుర్తించడం ద్వారా (ఉదాహరణకు: CU = AX = SW = EV అయ్యేలా).
8. అవును.
9. సమాంతర చతుర్భుజం
10. అవును, మొత్తం 360° అవుతుంది. (B మరియు D బిందువులను కలపటం ద్వారా రెండు త్రిభుజాలను పొందవచ్చు.)
11. సత్యమా? అసత్యమా?
    (i) అసత్యం (అది దీర్ఘచతురస్రం కూడా కావచ్చు). (ii) సత్యం.
    (iii) సత్యం. (iv) అసత్యం (అది గాలిపటం/Kite కావచ్చు).
    (v) సత్యం. (vi) సత్యం. (vii) అసత్యం

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.1

1. 7, 8, 9, 10
2. p - 1, p - 2, p - 3, p - 4
3. (i) కొన్నిసార్లు నిజం: (ఉదాహరణకు, 2 + 4 = 6 సత్యము; కానీ 2 + 2 = 4 అసత్యము).
   (ii) ఎప్పటికీ నిజం కాదు: (18తో భాగించబడే ప్రతి సంఖ్య 9తో భాగించబడుతుంది, కానీ దానికి విలోమం సత్యము కాదు; ఉదాహరణకు, 9 అనేది 18తో భాగించబడదు, కానీ అది 9తో భాగించబడుతుంది).
   (iii) కొన్నిసార్లు నిజం: (ఉదాహరణకు, 1 + 1 = 2 సత్యము; కానీ 3 + 3 = 6 అసత్యము).
   (iv) ఎల్లప్పుడూ నిజం: (6 మరియు 9 యొక్క గుణిజాలు రెండూ 3తో భాగించబడతాయి, కాబట్టి వాటి మొత్తం కూడా ఖచ్చితంగా 3తో భాగించబడుతుంది).
   (v) కొన్నిసార్లు నిజం: (ఉదాహరణకు, 6 + 3 = 9 సత్యము; కానీ 12 + 3 = 15 అసత్యము).
4. సంఖ్యలు: 14, 26, 38
   సమాసము 12n + 2 (అ అనేది ఋణేతర పూర్ణసంఖ్య).
5. 91 6. సత్యము
7. (i) 4779 + 661: 1 (శేషాల మొత్తం 5 + 3 = 8; ఈ 8ని 7తో భాగిస్తే శేషం 1 వస్తుంది)
   (ii) 4779 – 661: 2 (శేషాల మధ్య వ్యత్యాసం 5 – 3 = 2)
8. 59
   ప్రతి సందర్భంలోనూ శేషం అనేది భాజకం కంటే సరిగ్గా 1 తక్కువగా ఉంది. కాబట్టి, ఆ సంఖ్య: LCM (3, 4, 5) – 1, అంటే 60 – 1 = 59.

AP SCERT

Figure it out - 5.2

1. (i) 123 (Sum 6) - No (ii) 405 (Sum 9) - Yes
   (iii) 8888 (Sum 32) - No (iv) 93547 (Sum 28) - No
   (v) 358095 (Sum 30) - No
2. 288 3. 6003 4. 11

Figure it out - 5.3

1. 6 (5 + 1 = 6)
2. Digital roots will increase by 2 in a cycle (e.g., 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4...) because 1+1=2.
3. 4 (9a and 36b have digital root 9; 13 has digital root 4)
4. Conjectures
   (i) No direct relation between parity and digital root.
   (ii) The digital root is the remainder when divided by 9 (if digital root is 9, remainder is 0).

Figure it out - 5.4

1. z = 0 or z = 9
   Sum of digits 3+1+z+5 = 9+z. Both 0 and 9 make the sum a multiple of 9.
2. True
3. Multiple of 6 if: Both are odd multiples (e.g., 3+9=12) or both are even multiples (e.g., 6+12=18).
   Not if: One is odd and one is even (e.g., 3+6=9).
4. (i) True. Changing digit order doesn't change the sum of digits.
   (ii) Yes. All shuffles are still multiples of 9.
5. Conditions: b must be even (0, 2, 4, 6, 8) and sum of digits (17 + a + b) must be a multiple of 9.
   - Pairs (a, b): (1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)
6. Conditions: Last two digits (q8) must be divisible by 4; alternating sum (3-p+7-q+8) must be a multiple of 11.
   Pairs (p, q): (7, 0), (3, 4), (8, 8)
7. Consecutive Numbers (Multiple of 2, 3, 4)
   Numbers: 2, 3, 4 or 14, 15, 16 or 26, 27, 28
   Occurrence: Every 12 numbers.

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.2

1. (i) 123 (మొత్తం 6) – భాగించబడదు (ii) 405 (మొత్తం9) – భాగించబడుతుంది
   (iii) 8888 (మొత్తం 32) – భాగించబడదు (iv) 93547 (మొత్తం28) – భాగించబడదు
   (v) 358095 (మొత్తం30) – భాగించబడదు
2. 288 3. 6003 4. 11

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.3

1. 6 (5 + 1 = 6)
2. అంక మూలం 2 చొప్పున ఒక చక్రంలా పెరుగుతాయి: (ఉదాహరణకు: 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4...) ఎందుకంటే 1+1 = 2.
3. 4 (9a మరియు 36b ల యొక్క అంక మూలం 9 అవుతుంది; 13 యొక్క అంక మూలం 4 అవుతుంది).
4. పరిశీలనలు:
   (i) సరి లేదా బేసి సంఖ్యలకు మరియు అంక మూలం కు మధ్య ఎటువంటి నేరుగా సంబంధం లేదు.
   (ii) ఒక సంఖ్యను 9 తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషమే ఆ సంఖ్య యొక్క అంక మూలం అవుతుంది. (ఒకవేళ అంక మూలం 9 అయితే, శేషం 0 అని అర్థం).

ఆలోచించండి-చేయండి - 5.4

1. z = 0 లేదా z = 9
   అంకెల మొత్తం 3 + 1 + z + 5 = 9 + z అవుతుంది. ఓ స్థానంలో 0 లేదా 9 ఉంచినప్పుడు మాత్రమే ఆ మొత్తం 9 యొక్క గుణిజం అవుతుంది.
2. సత్యము
3. 6 యొక్క గుణిజం?
   అవుతుంది: రెండు సంఖ్యలు బేసి గుణిజాలైనప్పుడు (ఉదా: 3 + 9 = 12) లేదా రెండు సరి గుణిజాలైనప్పుడు (ఉదా: 6 + 12 = 18).
   కాదు:ఒకటి బేసి మరియు మరొకటి సరి గుణిజం అయినప్పుడు (ఉదా: 3 + 6 = 9).
4. (i) సత్యము: అంకెల క్రమాన్ని మార్చినప్పటికీ, వాటి మొత్తం మారదు.
   (ii) అవును: అంకెలను ఎలా మార్చి రాసినా , అవి 9 యొక్క గుణిజాలుగానే ఉంటాయి.
5. నిబంధనలు: b తప్పనిసరిగా సరి సంఖ్య అయి ఉండాలి (0, 2, 4, 6, 8) మరియు అంకెల మొత్తం (17 + a + b) 9 యొక్క గుణిజం కావాలి.
   జతలు (a, b): (1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)
6. నిబంధనలు: చివరి రెండు అంకెలు (q8) 4 చేత భాగించబడాలి; మరియు ఏకాంతర అంకెల మొత్తం (3-p+7-q+8) 11 యొక్క గుణిజం కావాలి.
   జతలు (p, q): (7, 0), (3, 4), (8, 8)
7. వరుస సంఖ్యలు (2, 3, 4 ల గుణిజాలు):
   సంఖ్యలు: 2, 3, 4 లేదా 14, 15, 16 లేదా 26, 27, 28.
   ఎప్పుడు వస్తాయి:ప్రతి 12 సంఖ్యలకు ఒకసారి ఇవి వస్తాయి.

AP SCERT

8. 45,000, 45,036, 45,072, 45,108, 45,144

9. 5p-4, 5p-2, 5p, 5p+2, 5p+4

10. Example: 100005 (Reversed is500001 - fails even check).
    - Correct Example: 111120 (Div by 15; reversed is 021111 - fails).
    - Valid Answer: 122220 (Div by 15; reversed is 022221 - fails).
    - Valid Answer: 444420 (Div by 15; reversed is 024444 - Divisible by 6).

11. False.

12. (i) Always True (Result is 18n, which is a multiple of 9).
    (ii) Always True (Sum is 6n+6).
    (iii) Always True (Parity and sum of digits remain the same).
    (iv) Never True (Simplifies to 12b - 28, 12b is a multiple of 12, but 28 is not.)

13. Every integer, when divided by 3, leaves a remainder of 0, 1, or 2. Let's look at the different combinations of three numbers based on these remainders:

Case	Remainder Types	Example Numbers	Sum of Remainders	Divisible by 3?
All Same	(0, 0, 0)	3, 6, 9	0	Yes
All Same	(1, 1, 1)	1, 4, 7	3	Yes
All Same	(2, 2, 2)	2, 5, 8	6	Yes
All Different	(0, 1, 2)	3, 4, 5	3	Yes
Two Same	(1, 1, 0)	1, 4, 3	2	No
Two Same	(2, 2, 1)	2, 5, 4	5	No

Generalization: The sum of any three integers is divisible by 3 if and only if the numbers either all leave the same remainder when divided by 3, or they each leave a different remainder (one 0, one 1, and one 2)

14. Two consecutive integers: always a multiple of 2.
    Three consecutive integers: always a multiple of $2 \times 3 = 6$.
    Four consecutive integers: always a multiple of 24
    Five consecutive integers: always a multiple of 120
    General Rule: The product of n consecutive integers is always divisible by n!

AP SCERT

8. సంఖ్యలు: 45,000, 45,036, 45,072, 45,108, 45,144.

9. 5p-4, 5p-2, 5p, 5p+2, 5p+4

10. ఉదాహరణలు:

100005: (దీనిని తిరగేసి రాస్తే 500001 అవుతుంది. ఇది సరి సంఖ్య కానందున 6 తో భాగించబడదు).

- సరైన ఉదాహరణ 111120: (ఇది 15 తో భాగించబడుతుంది; తిరగేస్తే 021111 వస్తుంది. ఇది భాగించబడదు).
- సరైన ఉదాహరణ 122220: (ఇది 15 తో భాగించబడుతుంది; తిరగేస్తే 022221 వస్తుంది. ఇది భాగించబడదు).
- సరైన ఉదాహరణ 444420: (ఇది 15 తో భాగించబడుతుంది; తిరగేస్తే 024444 వస్తుంది ఇది 6 తో భాగించబడుతుంది).

11. అసత్యము

12. (i) ఎల్లప్పుడూ సత్యము:ఫలితం 18n వస్తుంది, ఇది 9 యొక్క గుణిజం.

(ii) ఎల్లప్పుడూ సత్యము:మొత్తం 6n+6 అవుతుంది.

(iii) ఎల్లప్పుడూ సత్యము:సంఖ్యల స్థితి మరియు అంకెల మొత్తం మారవు.

(iv) ఎన్నటికీ సత్యము కాదు:దీనిని సూక్ష్మీకరిస్తే 12b - 28 వస్తుంది. ఇక్కడ 12b అనేది 12 యొక్క గుణిజం, కానీ 28 కాదు.

13. ప్రతి పూర్ణసంఖ్యను 3 చేత భాగించినప్పుడు, శేషం 0, 1, లేదా 2 వస్తుంది. ఈ శేషాల ఆధారంగా మూడు సంఖ్యల యొక్క వివిధ కలయికలను పరిశీలిద్దాం:

సందర్భం	శేషాల రకాలు	ఉదాహరణ సంఖ్యలు	శేషాల మొత్తం	3 చేత నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుందా?
అన్నీ సమానం	(0, 0, 0)	3, 6, 9	0	భాగించబడుతుంది
అన్నీ సమానం	(1, 1, 1)	1, 4, 7	3	భాగించబడుతుంది
అన్నీ సమానం	(2, 2, 2)	2, 5, 8	6	భాగించబడుతుంది
అన్నీ వేర్వేరు	(0, 1, 2)	3, 4, 5	3	భాగించబడుతుంది
రెండూ సమానం	(1, 1, 0)	1, 4, 3	2	భాగించబడదు
రెండూ సమానం	(2, 2, 1)	2, 5, 4	5	భాగించబడదు

సాధారణీకరణ:

ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం 3 చేత నిశ్శేషంగా భాగించబడాలంటే, ఆ సంఖ్యలను 3 తో భాగించినప్పుడు వచ్చే శేషాలు అన్నీ ఒకేలా ఉండాలి లేదా అన్నీ వేర్వేరుగా (ఒకటి 0, ఒకటి 1, మరియు ఒకటి 2) ఉండాలి.

14. వరుస పూర్ణసంఖ్యలు:

రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యలు: ఎల్లప్పుడూ 2 యొక్క గుణిజం అవుతాయి.

మూడు వరుస పూర్ణసంఖ్యలు: ఎల్లప్పుడూ 2 × 3 = 6 యొక్క గుణిజం అవుతాయి.

నాలుగు వరుస పూర్ణసంఖ్యలు: ఎల్లప్పుడూ 24 యొక్క గుణిజం అవుతాయి.

ఐదు వరుస పూర్ణసంఖ్యలు: ఎల్లప్పుడూ 120 యొక్క గుణిజం అవుతాయి.

సాధారణ సూత్రం: n వరుస పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ n! (n-ఫ్యాక్టోరియల్) చేత భాగించబడుతుంది.

AP SCERT

15. Cryptarithms

(i) EF × E = GGG

E = 3, F = 7, G = 1.

(ii) WOW ×5 = MEOW

M = 2, E = 6, O = 2, W = 5. (Note: In some cryptarithms, letters must be distinct. Since M and O are both 2 here, we check other O values. If O=7, 575 × 5 = 2875. Here M=2, E=8, O=7, W=5. All distinct!)

16. Venn Diagram: Multiples of 4, 8, and 32 the set of multiples of 32 is a subset of multiples of 8, which is a subset of multiples of 4.

The correct diagram is three concentric circles:

Innermost circle: Multiples of 32

Middle circle: Multiples of 8

Outermost circle: Multiples of 4

AP SCERT

Figure it out - 6.1

1. The expressions for the 3 × 3 grid are:

(p-1)(q-1)	(p-1)q	(p-1)(q+1)
p(q-1)	pq	p(q+1)
(p+1)(q-1)	(p+1)q	(p+1)(q+1)

2. (i) 3v - 9 + uv - 3u

(ii) 10 + 4a

(iii) 100ac + 10ad + 10bc + bd

(iv) $3x - 18 - x^2 + 6x = -x^2 + 9x - 18$

(v) -5ac - 5ad + bc + bd

(vi) 5y + 45 + zy + 9z

15. క్రిప్టారిథమ్స్ :

(i) $EF \times E = GGG$

$E = 3, F = 7, G = 1.$

(ii) $WOW \times 5 = MEOW$

$M = 2, E = 6, O = 2, W = 5$ (గమనిక: కొన్ని క్రిప్టారిథమ్స్‌లో అక్షరాలు విభిన్నంగా ఉండాలి. ఒకవేళ $O = 7$ తీసుకుంటే, $575 \times 5 = 2875$ అవుతుంది. అప్పుడు $M = 2, E = 8, O = 7, W = 5$. అన్నీ విభిన్నంగా ఉన్నాయి!)

16. వెన్ చిత్రం: 4, 8, మరియు 32 యొక్క గుణిజాలు

32 యొక్క గుణిజాల సమితి, 8 యొక్క గుణిజాలకు ఉపసమితి. అలాగే 8 యొక్క గుణిజాల సమితి, 4 యొక్క గుణిజాలకు ఉపసమితి.

సరైన వెన్ చిత్రం మూడు ఏకకేంద్ర వృత్తాలు :

అన్నింటికంటే లోపలి వృత్తం: 32 యొక్క గుణిజాలు.

మధ్య వృత్తం: 8 యొక్క గుణిజాలు.

అన్నింటికంటే వెలుపలి వృత్తం: 4 యొక్క గుణిజాలు.

ఆలోచించండి-చేయండి - 6.1

1. 3×3 కు గ్రిడ్ యొక్క సమాసాలు:

(p-1)(q-1)	(p-1)q	(p-1)(q+1)
p(q-1)	pq	p(q+1)
(p+1)(q-1)	(p+1)q	(p+1)(q+1)

2. (i) $3v - 9 + uv - 3u$

(ii) $10 + 4a$

(iii) $100ac + 10ad + 10bc + bd$

(iv) $3x - 18 - x^2 + 6x = -x^2 + 9x - 18$

(v) $-5ac - 5ad + bc + bd$

(vi) $5y + 45 + zy + 9z$

AP SCERT

3. $xy = (x + 2)(y - 4)$.

$xy = xy - 4x + 2y - 8$.

$y = 2x + 4$.

Examples:

If $x = 1$, then $y = 6$. Check: $1 \times 6 = 6$; $(1+2)(6-4) = 3 \times 2 = 6$.

If $x = 2$, then $y = 8$. Check: $2 \times 8 = 16$; $(2+2)(8-4) = 4 \times 4 = 16$.

If $x = 5$, then $y = 14$. Check: $5 \times 14 = 70$; $(5+2)(14-4) = 7 \times 10 = 70$.

4. (i) $4a + 5ab + ab^2 - 12b^2 - 3b^3$

(ii) $4y^2 + 44yz - 5y + 77z - 21$

5. (i) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$

The Pattern:

The product of (a-b) and a sum of terms where the powers of a decrease while b increase results in the difference of the two variables raised to the n-th power.

Next Identity:

$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

Check by expanding:

$a(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) - b(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$= (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4) - (a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

$= a^5 - b^5$

AP SCERT

Figure it out - 6.2

1. They are equal.

Justification:

When you square a number, the result is always non-negative, regardless of whether the base is positive or negative. Note that (b - a) is simply the negative of (a - b), which can be written as -(a - b)

$(b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (-1)^2 . (a - b)^2 = 1 . (a - b)^2 = (a - b)^2$

2. $26^2 - 24^2$

$(14.5)^2 - (10.5)^2$

3. $xy = (x + 2)(y - 4)$.

$xy = xy - 4x + 2y - 8$.

$y = 2x + 4$.

ఉదాహరణ:

$x = 1$, అయిన $y = 6$. సరిచూచుట: $1 \times 6 = 6$; $(1+2)(6-4) = 3 \times 2 = 6$.

$x = 2$, అయిన $y = 8$. సరిచూచుట: $2 \times 8 = 16$; $(2+2)(8-4) = 4 \times 4 = 16$.

$x = 5$, అయిన $y = 14$. సరిచూచుట: $5 \times 14 = 70$; $(5+2)(14-4) = 7 \times 10 = 70$.

4. (i) $4a + 5ab + ab^2 - 12b^2 - 3b^3$

(ii) $4y^2 + 44yz - 5y + 77z - 21$

5. (i) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$

నమూనా:

$(a - b)$ మరియు a యొక్క ఘాతాలు తగ్గుతూ, b యొక్క ఘాతాలు పెరుగుతూ ఉండే పదాల మొత్తం యొక్క లబ్ధం, ఆ రెండు చరరాశుల n-వ ఘాతాల వ్యత్యాసానికి సమానం అవుతుంది.

సర్వసమీకరణం:

$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

విస్తరించడం ద్వారా సరిచూచుట:

$a(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) - b(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$= (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4) - (a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

$= a^5 - b^5$

ఆలోచించండి-చేయండి - 6.2

1. అవి రెండూ సమానం.

సమర్థన: ఒక సంఖ్యను వర్గం చేసినప్పుడు, ఆ సంఖ్య ధనాత్మకమైనా లేదా రుణాత్మకమైనా వచ్చే ఫలితం ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకం గానే ఉంటుంది. $(b - a)$ అనేది $(a - b)$ యొక్క రుణ విలువ అని గమనించండి, దీనిని $-(a - b)$ అని కూడా రాయవచ్చు.

$(b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2$

2. $26^2 - 24^2$

$(14.5)^2 - (10.5)^2$

AP SCERT

3. $406^2 = 164,836$

$72^2 = 5,184$

$145^2 = 21,025$

$1097^2 = 1,203,409$

$124^2 = 15,376$

4. Yes, they hold for all real numbers.

Justification:

Algebraic identities are derived using the laws of arithmetic (distributive, commutative, and associative properties). These laws apply to all real numbers, including negative integers and fractions.

For negative integers: If a = -2 and b = 3, then $(a+b)^2 = (-2+3)^2 = 1^2 = 1$.

Using the identity: $(-2)^2 + 2(-2)(3) + 3^2 = 4 - 12 + 9 = 1$. It works.

For fractions: If $a = \frac{1}{2}$, then $a^2 = \frac{1}{4}$. The logic of "length times width" for an area model still applies mathematically even when the dimensions are not whole numbers.

Figure it out - 6.3

1. (i) $46^2 = 2116$ (ii) $397 \times 403 = 159,991$

   (iii) $91^2 = 8281$ (iv) $43 \times 45 = 1935$

2. (i) $p^2 + 10p - 11$ (ii) $9a^2 - 81b^2$

   (iii) $-6y^2 - 23y - 20$ (iv) $36x^2 + 60xy + 25y^2$

   (v) $4x^2 - 2x + 0.25$ (vi) $21p^2r+42pr$

3. Identify the Appropriate Algebraic Expression(s)

   (i) $s^2 + 2$ (ii) $m^2 + (m + 1)^2$ and $m^2 + (m - 1)^2$

4. Calendar Square Investigation

   In a calendar, numbers in a row increase by 1, and numbers in a column increase by 7 (representing one week).

   Observation for other 2 × 2 squares:

- Let's take the square starting at 6: 6, 7, 13, 14

  Diagonal 1: $6 \times 14 = 84$

  Diagonal 2: $7 \times 13 = 91$

  Difference: $91 - 84 = 7$

AP SCERT

3. $406^2 = 164,836$

$72^2 = 5,184$

$145^2 = 21,025$

$1097^2 = 1,203,409$

$124^2 = 15,376$

4. అవును, ఇవి అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు వర్తిస్తాయి.

సమర్థన : బీజగణిత సూత్రాలు అంకగణిత నియమాల (విభాగ, వినిమయ మరియు సహచర ధర్మాలు) నుండి తీసుకోబడ్డాయి. ఈ నియమాలు రుణ పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు భిన్నాలతో సహా అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు వర్తిస్తాయి. రుణ పూర్ణ సంఖ్యలకు: ఒకవేళ $a = -2$ మరియు $b = 3$ అనుకుంటే, అప్పుడు $(a+b)^2 = (-2+3)^2 = 1^2 = 1$. అవుతుంది. సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే

$(-2)^2 + 2(-2)(3) + 3^2 = 4 - 12 + 9 = 1$ ఇది ఖచ్చితంగా సరిపోతుంది.

భిన్నాలకు: ఒకవేళ $a = \frac{1}{2}$, అయితే, $a^2 = \frac{1}{4}$ అవుతుంది. వైశాల్య నమూనాలో ఉండే "పొడవు × వెడల్పు" అనే తర్కం, కొలతలు పూర్ణ సంఖ్యలు కాకపోయినా గణితపరంగా వర్తిస్తుంది.

ఆలోచించండి-చేయండి - 6.3

1. (i) $46^2 = 2116$ (ii) $397 \times 403 = 159,991$

   (iii) $91^2 = 8281$ (iv) $43 \times 45 = 1935$

2. (i) $p^2 + 10p - 11$ (ii) $9a^2 - 81b^2$

   (iii) $-6y^2 - 23y - 20$ (iv) $36x^2 + 60xy + 25y^2$

   (v) $4x^2 - 2x + 0.25$ (vi) $21p^2r+42pr$

3. (i) $s^2 + 2$ (ii) $m^2 + (m + 1)^2$ and $m^2 + (m - 1)^2$

4. ఒక క్యాలెండర్‌లో వరుసలో సంఖ్యలు 1 చొప్పున పెరుగుతాయి, కాలమ్‌లో సంఖ్యలు 7 చొప్పున పెరుగుతాయి (ఒక వారం సూచిస్తుంది).

   ఇతర 2 × 2 చతురస్రాల పరిశీలన:

   - 6 నుంచి ప్రారంభమయ్యే చతురస్రం తీసుకుందాం: సంఖ్యలు: 6, 7, 13, 14

     కర్ణం1 : $6 \times 14 = 84$

     కర్ణం2 : $7 \times 13 = 91$

     తేడా : $91 - 84 = 7$

AP SCERT

- Let's take the square starting at 18: 18, 19, 25, 26

  Diagonal 1: $18 \times 26 = 468$

  Diagonal 2: $19 \times 25 = 475$

  Difference: $475 - 468 = 7$

Conclusion: The product of the numbers on the "upward" diagonal is always 7 more than the product of the numbers on the "downward" diagonal.

5. (i) False. (ii) False. (iii) True (iv) False

6. Sum Remainder: 1

   Difference Remainder: 2

   Product Remainder: 1

7. Pattern: The square of the middle number is always 1 more than the product of the two neighbors.

   Algebraic Equation: $n^2 - (n-1)(n+1) = 1$

   Verification: Expanding the right side: $n^2 - (n^2 - 1) = n^2 - n^2 + 1 = 1$. The identity holds.

8. $(a+b) \times \frac{1}{2}(a+b)$

9. (i) 16×24 is larger. (ii) 26×74 is larger.

10. $8gw + 8w^2$.

11. Yellow L-shape Pattern:

    (i) Next Figure (Step 4): The horizontal middle grows by 1 unit, and the vertical "arms" grow by 1 unit each.

    (ii) Units in Step 10: $12^2 = 144$

    (iii) Expression for Step y: $(y + 2)^2$

    Blue Square Pattern:

    (i) Next Figure (Step 4): A 5×5 grid with the bottom-right corner 1×1 square missing.

    (ii) Units in Step 10:131

    (iii) Expression for Step y: $(y+1)^2 + y$ or $y^2 + 3y + 1$

AP SCERT

- 18 నుంచి ప్రారంభమయ్యే చతురస్రం తీసుకుందాం: సంఖ్యలు: 18, 19, 25, 26

  కర్ణం1: $18 \times 26 = 468$

  కర్ణం2: $19 \times 25 = 475$

  తేడా: $475 - 468 = 7$

ముగింపు : "పైకి" ఉండే కర్ణంలోని సంఖ్యల లబ్ధం, "క్రిందికి" ఉండే కర్ణంలోని సంఖ్యల లబ్ధం కంటే ఎప్పుడూ 7 ఎక్కువగానే ఉంటుంది."కిందికి వెళ్తున్న కర్ణం" గుణిత ఫలితంకంటే ఎల్లప్పుడూ 7 ఎక్కువగా ఉంటుంది

5. (i) అసత్యం. (ii) అసత్యం. (iii) సత్యం (iv) అసత్యం

6. మొత్తం యొక్క శేషం 1

   భేదం యొక్క శేషం 2

   లబ్ధ శేషం: 1

7. నమూనా :

   మధ్యలో ఉన్న సంఖ్య యొక్క వర్గం , దానికి ఇరుపక్కల ఉన్న రెండు సంఖ్యల లబ్ధం కంటే ఎల్లప్పుడూ 1 ఎక్కువగా ఉంటుంది.

   బీజగణిత సమీకరణం : $n^2 - (n-1)(n+1) = 1$

   నిరూపణ :

   కుడి వైపున ఉన్న పదాలను విస్తరించగా:

   $n^2 - (n^2 - 1) = n^2 - n^2 + 1 = 1$. కాబట్టి, ఈ సూత్రం నిరూపించబడింది.

8. $(a+b) \times \frac{1}{2}(a+b)$

9. (i) 16×24

   (ii) 26×74

10. $8gw + 8w^2$.

11. పసుపు రంగు L–ఆకారపు నమూనా

    (i) తదుపరి చిత్రం : మధ్యలో ఉండే క్షితిజ సమాంతర భాగం 1 యూనిట్ పెరుగుతుంది మరియు నిలువుగా ఉండే "భుజాలు" కూడా ఒక్కొక్కటి 1 యూనిట్ పెరుగుతాయి.

    (ii) 10వ సోపానంలో ఉండే యూనిట్లు: $12^2 = 144$

    (iii) 'y' సోపానానికి బీజగణిత సమాసం : $(y + 2)^2$

    నీలం రంగు చతురస్ర నమూనా :

    (i) తదుపరి చిత్రం (సోపానం 4) : ఇది 5×5 గ్రిడ్ వలె ఉంటుంది, అయితే కుడి వైపు దిగువ మూలలో ఒక 1×1 చతురస్రం తక్కువగా ఉంటుంది.

    (ii) 10వ సోపానంలో ఉండే యూనిట్లు: 131

    (iii) 'y' సోపానానికి బీజగణిత సమాసం : $(y+1)^2 + y$ లేదా $y^2 + 3y + 1$

AP SCERT

Figure it out - 7.1

1. (i), (iv) and (vi).
2. 8 : 18, 12 : 27, 40 : 90
3. 4, 16, $26\frac{2}{3}$, 36
5. Are all of them the same?
   No, your rectangles and your classmates' drawings will likely look different in size, but they should have the same shape.
   If they are different, are they wrong?
   Not necessarily! They are only "wrong" if their width-to-height ratio is different from the original.
6. (a) 11:6 (b) 3:2

Figure it out - 7.2

1. 18,076,923.08 km
2. 15,660

Figure it out - 7.3

1. ₹ 1,800 and ₹ 2,700.
2. The solution contains 40ml of acid and 200ml of water.
3. To produce 40ml of green paint:
   Blue : 15 ml
   Yellow : 25 ml
   New ratio 1 : 3
4. You need 4 cups of rice and 2 cups of urad dal.
5. 3 : 13.

Figure it out - 7.4

1. 2:3
2. You will need 4 buses. Since 3.77 is not a whole number
3. Mumbai
4. If you are 160 cm tall, your neck would be 64 cm
5. 52.5 palas of saffron.
6. Taswika will be 4 years old (and her brother will be 8).
7. 1 litre of gold has a mass of 18.5 kg
8. approximately 23 tonnes of manure.
9. 5 minutes (300 seconds).
10. ₹ 82,645 11. 30 hours 12. ₹ 7.86.

AP SCERT

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.1

1. (i), (iv) మరియు (vi).
2. 8 : 18, 12 : 27, 40 : 90
3. 4, 16, $26\frac{2}{3}$, 36
5. అన్నీ ఒకేలా ఉన్నాయా?
   లేదు, మీరు గీసిన దీర్ఘచతురస్రాలు మీ స్నేహితులు గీసినవి పరిమాణంలో వేరువేరుగా ఉండవచ్చు.
   కానీ, అవన్నీ ఒకే ఆకారంలో ఉండాలి.
   కాదు, తప్పని చెప్పలేం! అసలు బొమ్మ యొక్క వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి మారితేనే అవి "తప్పు" అవుతాయి.
6. (a) 11:6 (b) 3:2

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.2

1. 18,076,923.08 కి.మీ. 2. 15,660

ఆలోచించండి-చేయండి - 7.3

1. ₹ 1,800 మరియు ₹ 2,700.
2. ఈ ద్రావణంలో 40 మి.లీ. ఆమ్లం మరియు 200 మి.లీ. నీరు ఉన్నాయి.
3. 40 మి.లీ. గ్రీన్ పెయింట్ తయారు చేయడానికి:
   నీలం: 15 మి.లీ.,
   పసుపు: 25 మి.లీ.,
   కొత్త నిష్పత్తి 1 : 3.
4. 4 కప్పుల బియ్యం మరియు 2 కప్పుల మినపపప్పు అవసరం.
5. 3 : 13.

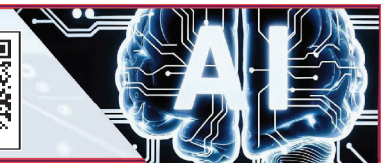
ఆలోచించండి-చేయండి - 7.4

1. 2:3
2. 4 బస్సులు అవసరం. (3.77 అనేది పూర్ణాంకం కాదు కాబట్టి).
3. ముంబై
4. ఒకవేళ మీ ఎత్తు 160 సెం.మీ అయితే, మీ మెడ పొడవు 64 సెం.మీ ఉంటుంది.
5. 52.5 పలాలు కుంకుమపువ్వు.
6. తస్విక వయస్సు 4 ఏళ్లు (అప్పుడు ఆమె అన్నయ్య వయస్సు 8 ఏళ్లు అవుతుంది).
7. 1 లీటరు బంగారం ద్రవ్యరాశి 18.5 కి.గ్రా.
8. సుమారు 23 టన్నుల ఎరువు అవసరం.
9. 5 నిమిషాలు (300 సెకన్లు).
10. ₹ 82,645. 11. 30 గంటలు. 12. ₹ 7.86.

AP SCERT

INTEGRATING ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI)

K6B4W8



Learning Outcomes : The student will be able to:

1. Understand and explain how mathematical concepts such as patterns, ratios, algebra, and classification are connected to the basic components of Artificial Intelligence.
2. Use basic AI terminology correctly, including dataset, algorithm, pattern recognition, bias, fairness, and prediction, in the context of Mathematics.
3. Apply and explore AI-supported thinking in Mathematics by framing clear prompts and analysing AI-generated responses step-by-step.
4. Demonstrate safe and responsible use of AI tools, including verifying answers, protecting personal information, and avoiding misuse during examinations.
5. Develop confidence and critical thinking, recognising that AI supports learning but does not replace mathematical reasoning or teacher guidance.

Jasvi was sitting under a neem tree after helping her father in the fields. Her father was checking the weather forecast on his mobile phone before deciding when to water the crops.

"How does the phone know it will rain tomorrow?" Jasvi asked.

"It studies old weather data and finds patterns," her father replied. "Artificial Intelligence, or AI, helps in predicting weather, crop prices, and even soil conditions."

That evening, Jasvi opened her Class 8 Mathematics textbook and read the chapter A Square and a Cube. She noticed the pattern in square numbers:1, 4, 9, 16, 25...

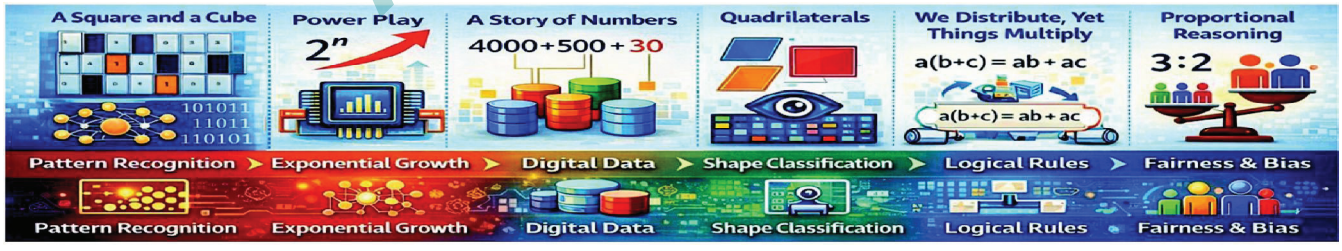
Each number was made by multiplying a number by itself.

She thought, "If I know the rule, I can predict the next square number."

Then she understood something important.

AI also studies data, finds patterns, and makes predictions — just like we find patterns in Mathematics.

Let us now see how our Mathematics chapters are connected to AI.



Foundations of AI in Mathematics Learning.

The mathematical ideas in these chapters help students understand how Artificial Intelligence (AI) works. Concepts like pattern recognition in A Square and a Cube and exponential growth in Power Play show how AI systems identify patterns and scale quickly. Just as square numbers follow clear structures, AI models depend on good data quality and proper sampling to recognise correct patterns. If the sample data is incomplete, the AI

Disclaimer : "The use of AI tools by students must be strictly under the direct guidance and supervision of teachers and parents / guardians".

AP SCERT

కృత్రిమ మేధతో అనుసంధానం

X7T1N4

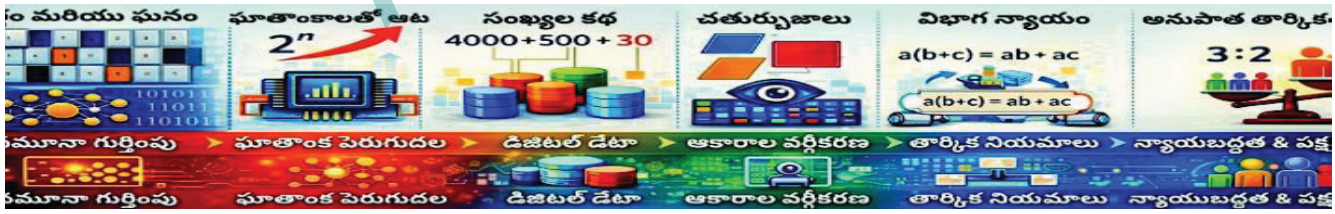
అభ్యసనా ఫలితాలు : విద్యార్థి ఈ క్రింది వాటిని చేయగలరు :

1. patterns, నిష్పత్తులు (ratios), బీజగణితం మరియు వర్గీకరణ వంటి గణిత భావనలు Artificial Intelligence యొక్క ప్రాథమిక భావనలకు ఎలా అనుసంధానించబడి ఉన్నాయో అర్థం చేసుకోవడం మరియు వివరించడం.
2. dataset, algorithm, pattern recognition, bias, fairness మరియు prediction తో సహా ప్రాథమిక AI పదజాలాన్ని గణిత పరంగా సరిగ్గా ఉపయోగించడం.
3. స్పష్టమైన promptsను రూపొందించడం మరియు AI-generated ప్రతిస్పందనలను దశలవారీగా విశ్లేషించడం ద్వారా గణితంలో AI–సహాయక ఆలోచనను అన్వయించడం మరియు అన్వేషించడం.
4. సమాధానాలను ధృవీకరించడం, వ్యక్తిగత సమాచారాన్ని రక్షించడం మరియు పరీక్షల సమయంలో దుర్వినియోగాన్ని నివారించడంతో సహా AI tools ను సురక్షితంగా మరియు బాధ్యతాయుతముగా వినియోగించడం.
5. AI నేర్చుకోవడానికి మద్దతు ఇస్తుందని, కానీ గణిత తార్కికఆలోచనను లేదా ఉపాధ్యాయుల మార్గదర్శకత్వాన్ని పూర్తిగా భర్తీ చేయదని గుర్తిస్తూ, ఆత్మవిశ్వాసం మరియు విమర్శనాత్మక ఆలోచనను అభివృద్ధి చేయడం.

పొలంలో తన తండ్రికి సహాయం చేసిన తర్వాత జశ్వి ఒక వేప చెట్టు కింద కూర్చుంది. పంటలకు ఎప్పుడు నీరు పెట్టాలో నిర్ణయించుకోవడానికి ముందు ఆమె తండ్రి తన మొబైల్ ఫోన్‌లో వాతావరణ సూచనలను చూస్తున్నాడు. "రేపు వర్షం పడుతుందని ఫోన్‌కి ఎలా తెలుస్తుంది?" అని జశ్వి అడిగింది. "ఇది పాత వాతావరణ డేటాను అధ్యయనం చేస్తుంది మరియు patternsను కనుగొంటుంది" అని ఆమె తండ్రి బదులిచ్చాడు. "వాతావరణం, పంటల ధరలు మరియు నేల పరిస్థితులను కూడా అంచనా వేయడంలో (predicting) Artificial Intelligence లేదా AI సహాయపడుతుంది."

ఆ సాయంత్రం, జశ్వి తన 8వ తరగతి గణితం పాఠ్యపుస్తకం తెరిచి 'వర్గం మరియు ఘనం' (A Square and a Cube) అనే అధ్యాయాన్ని చదివింది. ఆమె వర్గ సంఖ్యలలోని pattern ను గమనించింది: 1, 4, 9, 16, 25.... ప్రతి సంఖ్య ఒక సంఖ్యను దానితోనే గుణించడం ద్వారా తయారు చేయబడింది. "నాకు pattern తెలిస్తే, నేను తరువాత వర్గ సంఖ్యను చెప్ప గలను" అని ఆమె అనుకుంది. అప్పుడు ఆమెకు ఒక ముఖ్యమైన విషయం అర్థమైంది. మనం గణితంలో patternsను ఎలా కనుగొంటామో సరిగ్గా అలాగే AI కూడా డేటాను అధ్యయనం చేస్తుంది, patterns ను కనుగొంటుంది మరియు predictions చేస్తుంది.

ఇప్పుడు మన గణితంలోని అధ్యాయాలు AI కి ఎలా అనుసంధానించబడి ఉన్నాయో చూద్దాం.



గణిత అభ్యసనంలో AI యొక్క పునాదులు

మన అధ్యాయాలలోని గణిత ఆలోచనలు Artificial Intelligence ఎలా పనిచేస్తుందో అర్థం చేసుకోవడానికి విద్యార్థులకు సహాయపడతాయి. 'వర్గం మరియు ఘనం' లోని pattern recognition మరియు 'ఘాతాంకాలతో ఆట'లోని ఘాతాంక వృద్ధి వంటి భావనలు, AI systems ప్యాటర్న్‌లను ఎలా గుర్తిస్తాయి? మరియు వేగంగా ఎలా వృద్ధి చెందుతాయో? చూపుతాయి. వర్గ సంఖ్యలు స్పష్టమైన patternలను అనుసరించినట్లుగానే, సరైన patternలను గుర్తించడానికి AI models మంచి data quality మరియు సరైన sampling పై ఆధారపడతాయి. sample data అసంపూర్ణంగా ఉంటే, AI model

డిస్క్లెమర్ : "విద్యార్థులు AI సాధనాలను ఉపాధ్యాయుల, తల్లిదండ్రుల / సంరక్షకుల ప్రత్యక్ష మార్గదర్శకత్వం, పర్యవేక్షణలో మాత్రమే ఉపయోగించడం జరుగవలెను".

AP SCERT

model may give incorrect conclusions. In Proportional Reasoning, balanced ratios help students understand fair comparison, similar to how statistical surveys require representative data.

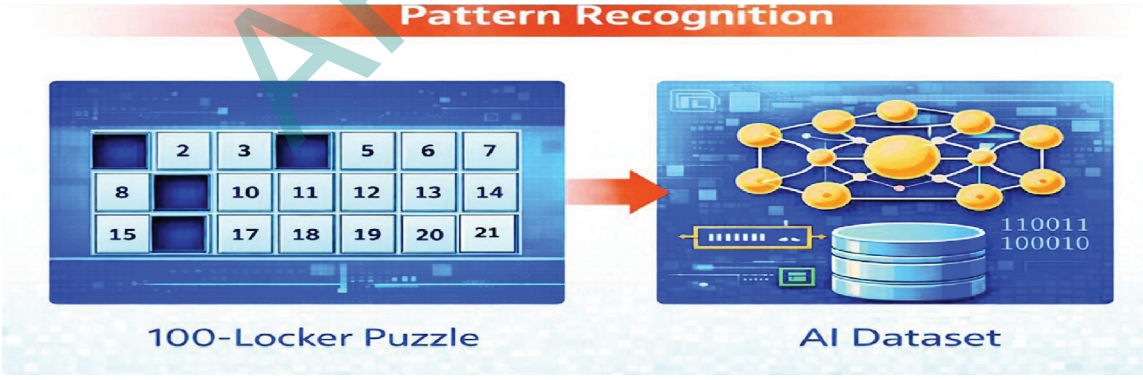
Chapters like Number Play and We Distribute, Yet Things Multiply develop logical reasoning and algebraic thinking, which are important for understanding probability, rule-based systems and AI decision-making. When AI predicts results, it calculates likelihoods based on patterns in a dataset. If the dataset is unbalanced, bias in datasets can affect predictions. In A Story of Numbers, correct number representation connects to data annotation and digital data encoding. In Quadrilaterals, classification of shapes relates to computer vision, where systems recognise shapes using labelled features.

Together, these mathematical foundations help students understand that AI depends on structured reasoning, fairness, and correct data. By learning about proportion, logical proof, and pattern analysis, students develop awareness of fairness in AI predictions, recognise sampling errors, and understand the importance of unbiased and well-annotated data. Mathematics builds the critical thinking needed to use AI systems responsibly and ethically.

Guidance: - Guidance to the Teacher

Teachers may help students connect the mathematical ideas in these chapters with how Artificial Intelligence (AI) works. Concepts such as patterns, proportions, and logical reasoning show how AI systems identify patterns and make predictions from data. Teachers can use simple classroom examples to explain that correct and balanced data is important for fair results. These discussions help students understand the role of mathematics in responsible and ethical use of AI.

Example 1: Pattern Recognition in Square Numbers



In the 100-locker puzzle, only lockers with square numbers remain open (1, 4, 9, 16...). This happens because square numbers have an odd number of factors. Careful observation of the pattern helps identify this rule.

In AI systems, machines also identify repeated structures in data. If the dataset is complete and properly sampled, the system recognises the pattern correctly.

AP SCERT

తప్పు నిర్ణయాలను ఇవ్వవచ్చు. statistical surveys కు representative data ఎలా అవసరమో, అలా 'అనుపాత తార్కికత'లో, balanced ratios విద్యార్థులకు సరైన పోలికను అర్థం చేసుకోవడానికి సహాయపడతాయి.

'సంఖ్యలతో ఆట' మరియు 'విభాగ న్యాయము' వంటి అధ్యాయాలు తార్కిక ఆలోచన మరియు బీజగణిత ఆలోచనను అభివృద్ధి చేస్తాయి. ఇవి probability, rule-based systems మరియు AI నిర్ణయం తీసుకోవడం, అర్థం చేసుకోవడానికి ముఖ్యమైనవి. AI ఫలితాలను అంచనా వేసినప్పుడు, అది datasetలోని ప్యాటర్న్‌ల ఆధారంగా likelihoods లెక్కిస్తుంది. dataset అసమతుల్యంగా ఉంటే, datasets లోని bias అంచనాలను ప్రభావితం చేస్తుంది. 'సంఖ్యల కథ' లో, సరైన సంఖ్యా ప్రాతినిధ్యం data annotation మరియు digital data encodingకు అనుసంధానించబడి ఉంటుంది. 'చతుర్భుజాలు' లో, classification of shapes అనేది computer visionకు సంబంధించినది, ఇక్కడ సిస్టమ్‌లు labelled features ఉపయోగించి ఆకృతులను గుర్తిస్తాయి.

ఈ గణిత పునాదులు AI అనేది structured reasoning, fairness మరియు సరైన డేటాపై ఆధారపడి ఉంటుందని అర్థం చేసుకోవడానికి విద్యార్థులకు సహాయపడతాయి. proportion, logical proof మరియు pattern analysis గురించి నేర్చుకోవడం ద్వారా, విద్యార్థులు AI predictionsలో fairness గురించి అవగాహన పెంచుకుంటారు, sampling లోపాలను గుర్తిస్తారు, మరియు unbiased మరియు well-annotated డేటా యొక్క ప్రాముఖ్యతను అర్థం చేసుకుంటారు. గణితం AI systemsను బాధ్యతాయుతంగా మరియు నైతికంగా ఉపయోగించడానికి అవసరమైన critical thinkingను అందిస్తుంది.

మార్గదర్శకత్వం:

ఈ అధ్యాయాలలోని గణిత ఆలోచనలను Artificial Intelligence ఎలా పనిచేస్తుందో అనే దానితో అనుసంధానించడానికి ఉపాధ్యాయులు విద్యార్థులకు సహాయపడవచ్చు. ప్యాట్రన్‌లు, అనుపాతాలు మరియు తార్కిక ఆలోచన వంటి భావనలు, AI systems డేటా నుండి patternలను ఎలా గుర్తిస్తాయో మరియు predictions ఎలా చేస్తాయో చూపుతాయి. సరైన మరియు సమతుల్య డేటా న్యాయమైన ఫలితాలకు ముఖ్యమని వివరించడానికి ఉపాధ్యాయులు సాధారణ తరగతి గది ఉదాహరణలను ఉపయోగించవచ్చు. AI ని బాధ్యతాయుతంగా మరియు నైతికంగా ఉపయోగించడంలో గణితం యొక్క పాత్రను అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ చర్చలు విద్యార్థులకు సహాయపడతాయి

ఉదాహరణ 1: పరిశీలన మరియు కొలత

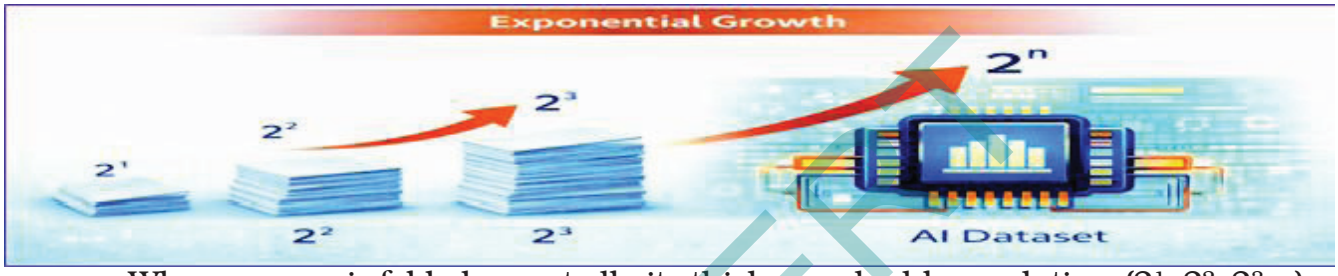
100–లాకర్ పజిల్‌లో, వర్గ సంఖ్యలు ఉన్న లాకర్లు మాత్రమే తెరిచి ఉంటాయి (1, 4, 9, 16...). వర్గ సంఖ్యలకు బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉన్నందున ఇలా జరుగుతుంది . ఈ నియమాన్ని గుర్తించడంలో 'patternను జాగ్రత్తగా పరిశీలించడం' సహాయపడుతుంది.

AI systems లో, యంత్రాలు కూడా డేటాలో పునరావృతమయ్యే నిర్మాణాలను గుర్తిస్తాయి. dataset పూర్తి మరియు సరిగ్గా sampling చేయబడితే, సిస్టమ్ patternను సరిగ్గా గుర్తిస్తుంది.

AP SCERT

Thinking with AI :	If an AI app is used to solve the 100-locker puzzle, what numbers must it check before deciding which lockers remain open? Explain how the system would look for factor patterns and identify square numbers before giving the final answer. Scan the QR code for more information.
Key Words:	**Pattern Recognition:** Identifying repeated or regular structures. **Dataset:** A collection of organised information. **Sampling:** Selecting a part of data to study. **Artificial Intelligence (AI):** Technology that enables machines to analyse and recognise patterns.

Example 2: Exponential Growth

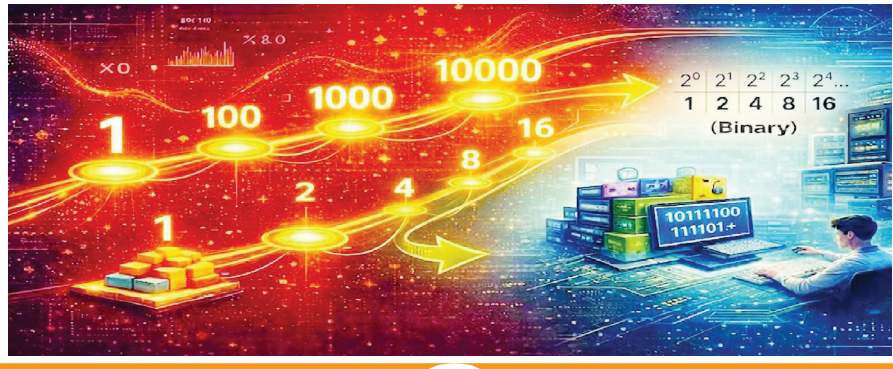


When a paper is folded repeatedly, its thickness doubles each time (2^1, 2^2, 2^3...). This is called exponential growth. The increase becomes very large after many folds.

In AI systems, computational processes and data size may grow rapidly in a similar way. Understanding exponents helps in understanding how fast systems can scale.

Thinking with AI :	If an AI system processes data that doubles every step (like 2^1, 2^2, 2^3...), what information must it analyse to predict how large the data will become after many steps? Explain how the system compares exponential growth with linear growth before deciding how much storage or processing power is needed. Scan the QR code for more information.
Key Words:	**Exponent:** A number showing repeated multiplication. **Base:** The number being multiplied repeatedly. **Exponential Growth:** Rapid increase by repeated multiplication. **Computation:** Processing of numerical data by a system.

Example 3: Landmark Numbers and Number Systems



AP SCERT

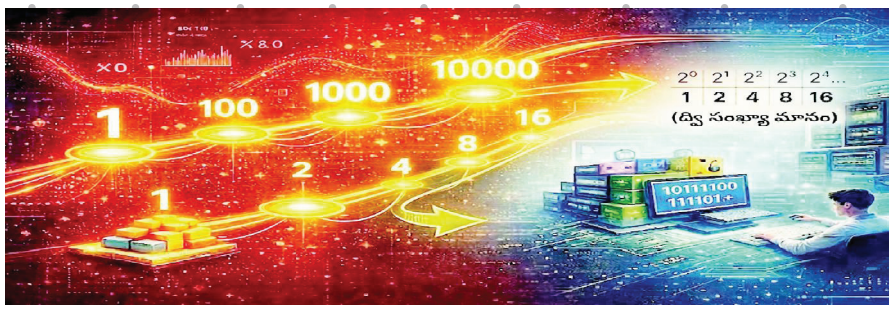
AIతో ఆలోచించడం :	100–లాకర్ పజిల్‌ను పరిష్కరించడానికి AI app ని ఉపయోగిస్తే, ఏ లాకర్లు తెరిచి ఉండాలో నిర్ణయించే ముందు అది ఏ సంఖ్యలను తనిఖీ చేయాలి? తుది సమాధానం ఇచ్చే ముందు సిస్టమ్ కారణాంకాల ప్యాట్రన్‌ల కోసం ఎలా వెతుకుతుందో మరియు వర్గ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తిస్తుందో వివరించండి. డిజిటల్ సిస్టమ్‌లు నంబర్ ప్యాట్రన్‌లను ఎలా గుర్తిస్తాయో చూడటానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**పునరావృత గుర్తింపు :** పునరావృతమయ్యే లేదా సాధారణ నిర్మాణాలను గుర్తించడం. **దత్తాంశ కూర్పు :** వ్యవస్థీకృత సమాచారం యొక్క సేకరణ. **నమూనా :** అధ్యయనం చేయడానికి డేటాలోని ఒక భాగాన్ని ఎంచుకోవడం. **కృత్రిమ మేధస్సు :** ప్యాట్రన్‌లను విశ్లేషించడానికి మరియు గుర్తించడానికి యంత్రాలను ప్రారంభించే సాంకేతికత.

ఉదాహరణ 2: వర్గీకరణ వ్యవస్థలు

ఒక కాగితాన్ని పదే పదే మడిచినప్పుడు, దాని మందం ప్రతిసారీ రెట్టింపు అవుతుంది (2^1, 2^2, 2^3.....). దీనిని exponential growth అంటారు. అనేక మడతల తర్వాత పెరుగుదల చాలా పెద్దదిగా మారుతుంది.
AI systemsలో, computational ప్రక్రియలు మరియు డేటా పరిమాణం ఇలాంటి పద్ధతిలో వేగంగా పెరగవచ్చు. Exponents ను అర్థం చేసుకోవడం, సిస్టమ్‌లు ఎంత వేగంగా స్కేల్ చేయగలవో అర్థం చేసుకోవడంలో సహాయపడుతుంది.

AIతో ఆలోచించడం :	AI సిస్టమ్ ప్రతి దశలో రెట్టింపు అయ్యే డేటాను ప్రాసెస్ చేస్తే (2^1, 2^2, 2^3... లాగా), అనేక దశల తర్వాత డేటా ఎంత పెద్దదిగా మారుతుందో అంచనా వేయడానికి అది ఏ సమాచారాన్ని విశ్లేషించాలి? ఎంత నిల్వ లేదా ప్రాసెసింగ్ పవర్ అవసరమో నిర్ణయించే ముందు సిస్టమ్ exponential growthను లీనియర్ వృద్ధితో ఎలా పోల్చుతుందో వివరించండి. పవర్స్ మరియు exponents ను ఉపయోగించి డిజిటల్ సిస్టమ్‌లు వేగవంతమైన వృద్ధిని ఎలా లెక్కిస్తాయో అన్వేషించడానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**ఘాతాంకం :** పునరావృత గుణకారాన్ని చూపే సంఖ్య. **ఆధారం / భూమి :** పదే పదే గుణించబడుతున్న సంఖ్య. **ఘాతాంక వృద్ధి :** పునరావృత గుణకారం ద్వారా వేగంగా పెరగడం. **గణన :** సిస్టమ్ ద్వారా సంఖ్యా డేటా ప్రాసెసింగ్.

ఉదాహరణ 3: మైలురాయి సంఖ్యలు మరియు సంఖ్యామానలు



APSCERT

Landmark numbers are easily recognisable reference numbers in a number system. They help us understand and work with large numbers. In the decimal (base-10) system, landmark numbers are:

1, 10, 100, 1000, ... (powers of 10)

For example: $7{,}482 = 7 \times 1000 + 4 \times 100 + 8 \times 10 + 2$

Here, 1000, 100, 10, and 1 are landmark numbers.

In any base-n system, landmark numbers are powers of n (n^0, n^1, n^2, ...). Landmark numbers act as anchors in mathematics. In AI, powers of a base act as anchors for storing and computing data efficiently.

Thinking with AI :	If an AI system processes very large numbers, how does using andmark numbers (like powers of 10 or powers of 2) help it organise data and perform calculations efficiently? Scan the QR code for more information
Key Words:	**Landmark Numbers:** Reference numbers used for grouping. **Base:** The number that determines the system (e.g., 10 in decimal). **Power:** Repeated multiplication (e.g., $10^2 = 100$). **Positional System:** Value depends on position.

Example 4: Classification of Quadrilaterals

Quadrilaterals are classified based on properties such as equal sides, right angles, or parallel sides. For example, a rectangle has equal opposite sides and right angles.

Similarly, AI systems classify images by studying features such as edges and shapes. If the features match stored patterns, the image is grouped accordingly.

Thinking with AI :	If an AI system is designed to identify different quadrilaterals from images, what properties must it check before classifying a shape? Explain how the system would examine features such as equal sides, right angles, and parallel sides before deciding whether the shape is a rectangle, square, or another quadrilateral. Scan the QR code to explore how digital systems classify shapes using features and pattern matching.
Key Words:	**Classification:** Grouping based on common features. **Property:** A defining characteristic. **Feature:** A measurable characteristic used for identification. **Pattern Matching:** Comparing data to known patterns.

APSCERT

Landmark numbers అనేవి నంబర్ సిస్టమ్‌లో సులభంగా గుర్తించదగిన రిఫరెన్స్ సంఖ్యలు. పెద్ద సంఖ్యలను అర్థం చేసుకోవడానికి మరియు వాటితో పనిచేయడానికి ఇవి మనకు సహాయపడతాయి. దశాంశ (base-10) విధానములో, landmark numbers: 1, 10, 100, 1000, ... (10 యొక్క పవర్స్).

ఉదాహరణకు: $7,482 = 7 \times 1000 + 4 \times 100 + 8 \times 10 + 2$

ఇక్కడ, 1000, 100, 10, మరియు 1 ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలు. ఏదైనా base-n సిస్టమ్‌లో, ల్యాండ్‌మార్క్ సంఖ్యలు అ యొక్క పవర్స్ n (n^0, n^1, n^2, ...).

Landmark numbers గణితంలో యాంకర్లుగా పనిచేస్తాయి. AI లో, ఒక బేస్ యొక్క పవర్స్ డేటాను సమర్థవంతంగా నిల్వ చేయడానికి మరియు లెక్కించడానికి యాంకర్లుగా పనిచేస్తాయి.

AIతో ఆలోచించడం :	AI సిస్టమ్ చాలా పెద్ద సంఖ్యలను ప్రాసెస్ చేస్తే, landmark numbers (10 యొక్క పవర్స్ లేదా 2 యొక్క పవర్స్ వంటివి) ఉపయోగించడం వల్ల డేటాను నిర్వహించడానికి మరియు లెక్కలను సమర్థవంతంగా నిర్వహించడానికి ఎలా సహాయపడుతుంది? అన్వేషించడానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**మైలురాయి సంఖ్యలు :** గ్రూపింగ్ కోసం ఉపయోగించే రిఫరెన్స్ సంఖ్యలు. **ఆధారం / భూమి :** సిస్టమ్‌ను నిర్ణయించే సంఖ్య (ఉదా., దశాంశంలో 10). **ఘాతము :** పునరావృత గుణకారం (ఉదా., $10^2 = 100$). **స్థాన విలువల పద్ధతి :** విలువ స్థానంపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 4: చతుర్భుజాల వర్గీకరణ

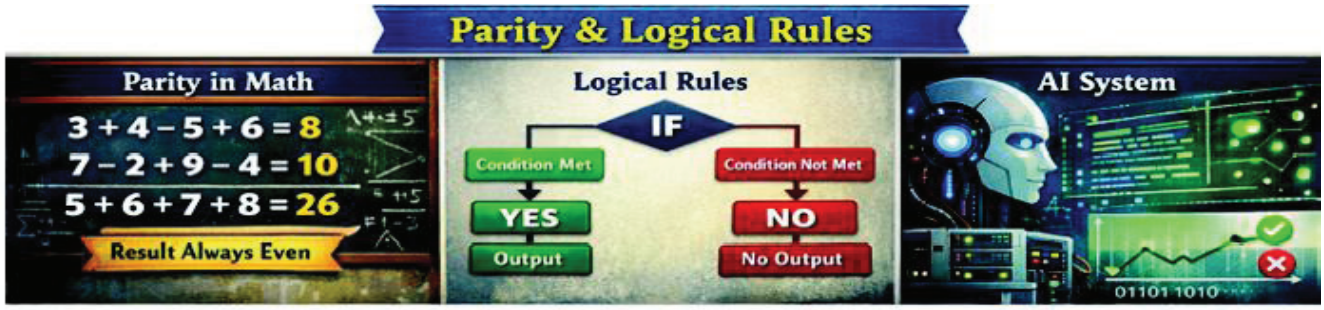
సమాన భుజాలు, లంబ కోణాలు లేదా సమాంతర భుజాలు వంటి లక్షణాల ఆధారంగా చతుర్భుజాలు వర్గీకరించబడతాయి. ఉదాహరణకు, దీర్ఘచతురస్రం సమానమైన ఎదురెదురు భుజాలు మరియు లంబ కోణాలను కలిగి ఉంటుంది.

అదేవిధంగా, AI systems అంచులు మరియు ఆకృతుల వంటి ఫీచర్లను అధ్యయనం చేయడం ద్వారా చిత్రాలను వర్గీకరిస్తాయి. ఫీచర్లు నిల్వ చేయబడిన ప్యాట్రన్‌లతో సరిపోలితే, దానికి అనుగుణంగా చిత్రం గ్రూప్ చేయబడును.

AIతో ఆలోచించడం :	చిత్రాల నుండి విభిన్న చతుర్భుజాలను గుర్తించడానికి AI సిస్టమ్ రూపొందించబడితే, ఆకారాన్ని వర్గీకరించే ముందు అది ఏ లక్షణాలను తనిఖీ చేయాలి? ఆకారం దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం లేదా మరొక చతుర్భుజం అని నిర్ణయించే ముందు సిస్టమ్ సమాన భుజాలు, లంబ కోణాలు మరియు సమాంతర భుజాల వంటి ఫీచర్లను ఎలా పరిశీలిస్తుందో వివరించండి. ఫీచర్లు మరియు pattern matching ఉపయోగించి డిజిటల్ సిస్టమ్‌లు ఆకృతులను ఎలా వర్గీకరిస్తాయో అన్వేషించడానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**వర్గీకరణ :** సాధారణ ఫీచర్ల ఆధారంగా సమూహం చేయడం. **ధర్మము :** ఒక నిర్వచించే లక్షణం. **సహజ లక్షణం :** గుర్తింపు కోసం ఉపయోగించే కొలవగల లక్షణం. **నమూనా సరిపోలిక :** తెలిసిన ప్యాట్రన్‌లతో డేటాను పోల్చడం

APSCERT

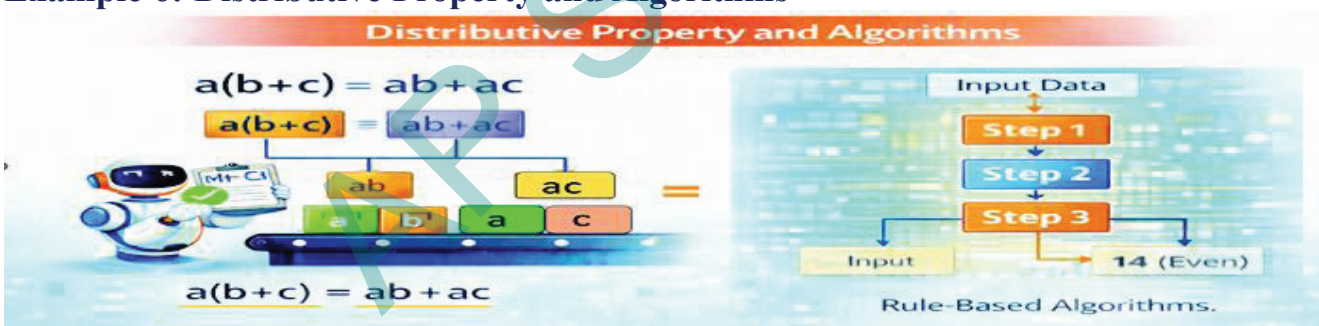
Example 5: Parity and Logical Rules



When four consecutive numbers are combined using + and – signs, the result is always even. This shows that mathematical expressions follow consistent logical rules. In AI, rule-based systems also follow defined conditions to produce output.

Thinking with AI :	If an AI system is programmed to check whether the result of four consecutive numbers (combined with + and – signs) is even or odd, what rules must it follow before giving the answer? Explain how the system would apply parity rules step-by-step to decide whether the final result is even. Scan the QR code for more information.
Key Words:	**Parity:** Whether a number is even or odd. **Logical Rule:** A condition that determines an outcome. **Algorithm:** A step-by-step procedure to solve a problem. **Prediction:** A result based on rules or probability.

Example 6: Distributive Property and Algorithms



The distributive property states that, a (b + c) = ab + ac.
This shows a clear step-by-step process.
Similarly, an algorithm in AI follows fixed steps to process input data and produce output.

Thinking with AI :	If an AI system is designed to expand algebraic expressions like a(b+c), what steps must it follow before giving the final answer? Explain how the system would apply the distributive rule step-by-step toproduce the correct output. Scan the QR code for more information
Key Words:	**Distributive Property:** Multiplying a number across terms inside brackets. **Input:** Data given to a system. **Processing:** Performing operations on input data.

AP SCERT

ఉదాహరణ 5: Parity(సమత్వం) మరియు తార్కిక నియమాలు

నాలుగు వరుస సంఖ్యలను + మరియు − గుర్తులను ఉపయోగించి కలిపినప్పుడు, ఫలితం ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్య అవుతుంది. గణిత వ్యక్తీకరణలు స్థిరమైన తార్కిక నియమాలను అనుసరిస్తాయని ఇది చూపుతుంది. AI లో, rule-based systems కూడా అవుట్‌పుట్‌ను ఉత్పత్తి చేయడానికి నిర్వచించబడిన షరతులను అనుసరిస్తాయి.

AIతో ఆలోచించడం :	నాలుగు వరుస సంఖ్యల + మరియు − గుర్తులతో కలిపి వచ్చే ఫలితం సరి లేదా బేసి అని తనిఖీ చేయడానికి AI సిస్టమ్ ప్రోగ్రామ్ చేయబడితే, సమాధానం ఇచ్చే ముందు అది ఏ నియమాలను అనుసరించాలి? తుది ఫలితం సరి సంఖ్య అని నిర్ణయించడానికి సిస్టమ్ దశలవారీగా parity నియమాలను ఎలా వర్తింపజేస్తుందో వివరించండి. అవుట్‌పుట్‌ను ఉత్పత్తి చేయడానికి rule-based systems తార్కిక పరిస్థితులను ఎలా వర్తింపజేస్తాయో అన్వేషించడానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**సమత్వం :** ఒక సంఖ్య సరి లేదా బేసి సంఖ్య కాదా అనేది. **తార్కిక నియమం :** ఫలితాన్ని నిర్ణయించే షరతు. **కలన గణితం :** సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఒక దశల వారీ విధానం. **ఊహ :** నియమాలు లేదా సంభావ్యతపై ఆధారపడిన ఫలితం.

ఉదాహరణ 6: విభాగ న్యాయం మరియు అల్గారథమ్

విభాగ న్యాయం ప్రకారం, a (b + c) = ab + ac.

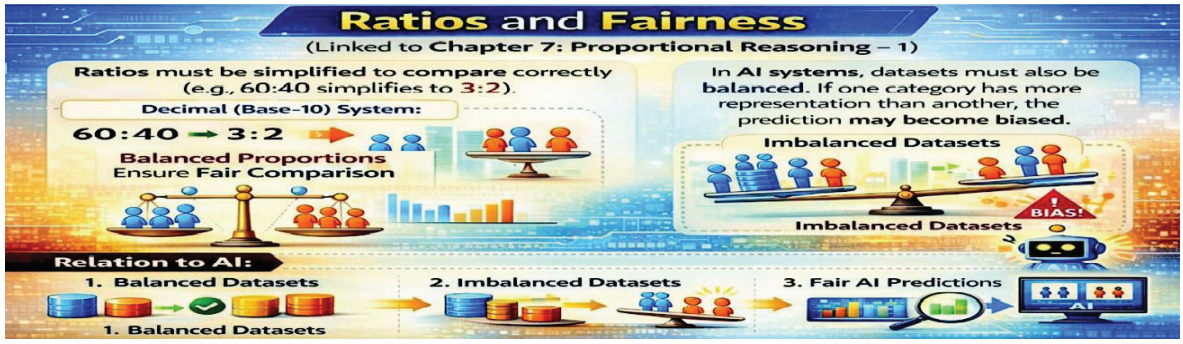
ఇది స్పష్టమైన దశల వారీ ప్రక్రియను చూపుతుంది.

అదేవిధంగా, AIలోని ఒక algorithm ఇన్‌పుట్ డేటాను ప్రాసెస్ చేయడానికి మరియు అవుట్‌పుట్‌ను ఉత్పత్తి చేయడానికి స్థిరమైన దశలను అనుసరిస్తుంది.

AIతో ఆలోచించడం :	a(b+c) వంటి బీజగణిత వ్యక్తీకరణలను విస్తరించడానికి AI సిస్టమ్ రూపొందించబడితే, తుది సమాధానం ఇచ్చే ముందు అది ఏ దశలను అనుసరించాలి? సరైన అవుట్‌పుట్‌ను ఉత్పత్తి చేయడానికి సిస్టమ్ దశలవారీగా పంపిణీ నియమాన్ని ఎలా వర్తింపజేస్తుందో వివరించండి. ఇన్‌పుట్‌ను ప్రాసెస్ చేయడానికి మరియు ఫలితాలను రూపొందించడానికి algorithms స్థిరమైన గణిత నియమాలను ఎలా అనుసరిస్తాయో అన్వేషించడానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**విభాగ న్యాయం / ధర్మం :** బ్రాకెట్ల లోపల ఉన్న పదాలతో ఒక సంఖ్యను గుణించడం. **ప్రవేశము :** సిస్టమ్‌కు ఇవ్వబడిన డేటా. **విశ్లేషణ :** ఇన్‌పుట్ డేటాపై కార్యకలాపాలను నిర్వహించడం.

AP SCERT

Example 7: Ratios and Fairness



Ratios must be simplified to compare correctly (e.g., 60:40 simplifies to 3:2). Balanced proportions ensure correct comparison.

In AI systems, datasets must also be balanced. If one category has more representation than another, the prediction may become biased.

Thinking with AI :	If an AI system compares two groups of data, what must it check to ensure the comparison is fair and balanced? Explain how simplifying ratios (like 60:40 to 3:2) helps in making correct comparisons. What might happen if the data is not balanced? Scan the QR code to explore how digital systems use proportional reasoning to avoid biased predictions.
Key Words:	**Ratio:** Comparison of two quantities. **Proportion:** Equality of two ratios. **Bias:** Unfair preference due to uneven data. **Fairness:** Equal and balanced representation.

Guidance: - Before introducing **Artificial Intelligence (AI)**, first teach the textbook concept clearly through examples and practice. Ensure students understand the mathematics before connecting it to **AI applications**. Introduce **AI terminology** only after students see the link between mathematical reasoning and **intelligent systems**. Keep the explanation simple and syllabus-based.

Before any **AI-based activity**, ask students to revise textbook methods. Teach them to write clear prompts and verify **AI-generated responses** with the textbook. Emphasise responsible use of **AI tools**. **AI** should support learning, not replace practice or logical reasoning.

Exploring with AI

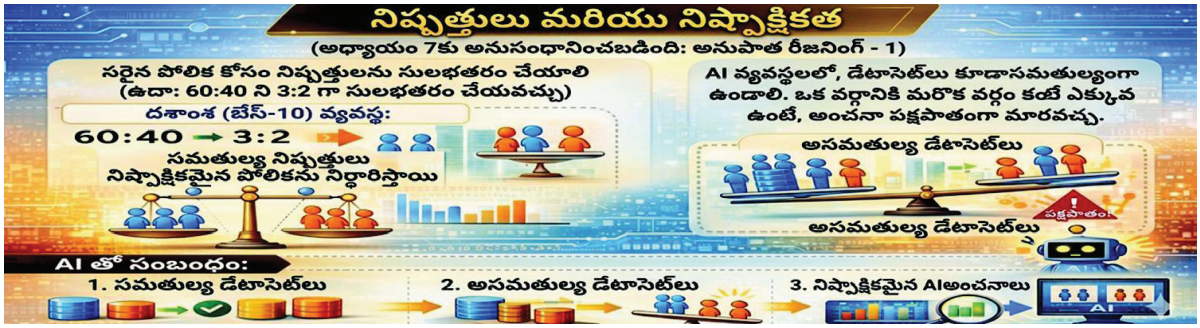
Understanding AI in Mathematics Learning

Artificial Intelligence (AI) helps computers analyse data, recognise patterns, and make predictions based on rules and probability. In Mathematics learning, AI can help explain concepts such as square numbers, exponents, ratios, algebraic expansion, and geometric reasoning in simple steps. However, AI does not replace textbook learning, teacher guidance, or regular practice. The textbook remains the primary and reliable source of mathematical knowledge. AI is only a supportive learning tool.

Mathematics develops skills such as logical reasoning, pattern recognition, proportional thinking, classification, and proof. These same skills form the foundation of intelligent systems. Just as mathematical problems require correct steps and balanced reasoning, AI systems depend on accurate data, proper sampling, and fair representation.

AP SCERT

ఉదాహరణ 7: Ratios మరియు Fairness



నిష్పత్తులను సరిగ్గా పోల్చడానికి సూక్ష్మీకరించాలి, ఉదాహరణకు 60:40ని 3:2కి సూక్ష్మీకరించాలి. సమతుల్య నిష్పత్తులు సరైన పోలికను నిర్ధారిస్తాయి. AI systemsలో, datasets కూడా సమతుల్యంగా ఉండాలి. ఒక గ్రూప్ మరొక గ్రూప్ కంటే ఎక్కువ ప్రాతినిధ్యం కలిగి ఉంటే, అంచనా bias కి గురికావచ్చు.

కృత్రిమ మేధస్సుతో ఆలోచించడం :	AI సిస్టమ్ రెండు డేటా సమూహాలను పోల్చినట్లయితే, పోలిక న్యాయంగా మరియు సమతుల్యంగా ఉందని నిర్ధారించుకోవడానికి అది దేనిని తనిఖీ చేయాలి? 60:40 నుండి 3:2 వంటి నిష్పత్తులను సూక్ష్మీకరించడం సరైన పోలికలు చేయడంలో ఎలా సహాయపడుతుందో వివరించండి. డేటా సమతుల్యంగా లేకపోతే ఏమి జరుగుతుంది? bias తో కూడిన అంచనాలను నివారించడానికి డిజిటల్ సిస్టమ్‌లు అనుపాత తార్కికాన్ని ఎలా ఉపయోగిస్తాయో అన్వేషించడానికి QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.
కీలక పదాలు :	**నిష్పత్తి :** రెండు పరిమాణాల పోలిక. **అనుపాతము :** రెండు నిష్పత్తుల సమానత్వం. **అపోహ :** అసమాన డేటా కారణంగా అన్యాయమైన ప్రాధాన్యత. **న్యాయబద్ధత :** సమానమైన మరియు సమతుల్య ప్రాతినిధ్యం.

మార్గదర్శకత్వం : Artificial Intelligence పరిచయం చేయడానికి ముందు, మొదట ఉదాహరణలు మరియు అభ్యాసం ద్వారా పాఠ్యపుస్తక భావనను స్పష్టంగా బోధించండి. విద్యార్థులు AI applicationsకు కనెక్ట్ చేయడానికి ముందు గణితాన్ని అర్థం చేసుకున్నారని నిర్ధారించుకోండి. గణిత తార్కికం మరియు intelligent systems మధ్య సంబంధాన్ని విద్యార్థులు చూసిన తర్వాత మాత్రమే AI పదజాలాన్ని పరిచయం చేయండి. వివరణను సరళంగా మరియు సిలబస్ ఆధారంగా ఉంచండి.
ఏదైనా AI-based activityకి ముందు, పాఠ్యపుస్తక పద్ధతులను పునశ్చరణ చేయమని విద్యార్థులను అడగండి. స్పష్టమైన prompts రాయడం మరియు పాఠ్యపుస్తకంతో AI-generated ప్రతిస్పందనలను ధృవీకరించడం వారికి నేర్పండి. AI tools బాధ్యతాయుతమైన వినియోగాన్ని నొక్కి చెప్పండి. AI అభ్యసనానికి మద్దతు ఇవ్వాలి, ప్రాక్టీస్ లేదా తార్కిక ఆలోచనను భర్తీ చేయకూడదు.

కృత్రిమ మేధస్సుతో అన్వేషణ

గణిత అభ్యసనంలో AI ని అర్థం చేసుకోవడం:

Artificial Intelligence డేటాను విశ్లేషించడానికి, ప్యాట్రన్‌లను గుర్తించడానికి మరియు నియమాలు మరియు సంభావ్యత ఆధారంగా predictions చేయడానికి కంప్యూటర్లకు సహాయపడుతుంది. గణితం నేర్చుకోవడంలో, వర్గ సంఖ్యలు, ఘాతాంకాలు, నిష్పత్తులు, బీజగణిత విస్తరణ మరియు రేఖాగణిత తర్కం వంటి భావనలను సాధారణ దశల్లో వివరించడానికి AI సహాయపడుతుంది. అయినప్పటికీ, AI పాఠ్యపుస్తక అభ్యాసం, ఉపాధ్యాయుల మార్గదర్శకత్వం లేదా సాధారణ అభ్యాసాన్ని భర్తీ చేయదు. పాఠ్యపుస్తకం అనేది గణిత జ్ఞానానికి ప్రాథమిక మరియు నమ్మకమైన ఒక సాధనం. AI అనేది కేవలం సహాయక అభ్యాస సాధనం మాత్రమే.

గణితం తార్కిక ఆలోచన, pattern recognition, అనుపాత ఆలోచన, వర్గీకరణ మరియు రుజువు వంటి నైపుణ్యాలను అభివృద్ధి చేస్తుంది. ఇదే నైపుణ్యాలు intelligent systems కు పునాదిని ఏర్పరుస్తాయి. గణిత సమస్యలకు సరైన దశలు మరియు సమతుల్య తార్కికం ఎలా అవసరమో, AI systems ఖచ్చితమైన డేటా, సరైన sampling మరియు సరైన ప్రాతినిధ్యంపై ఆధారపడతాయి.

AP SCERT

Accessing AI for Mathematics Learning

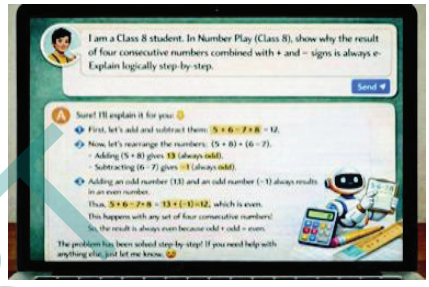
AI tools may be used in school computer laboratories under teacher supervision or at home with parental guidance. AI must be used strictly for educational purposes and only after completing textbook exercises.

Safe and Responsible Use of AI

- Do not share personal information (name, school details, passwords).
- Do not copy AI responses without understanding.
- Always verify AI-generated answers with textbook methods.
- Do not use AI during examinations.
- Use AI only to improve clarity and reasoning.

Responsible use of AI strengthens honesty, discipline, and critical thinking.

Writing Effective Prompts in Mathematics:



A prompt is the instruction given to an AI tool.
A good Mathematics prompt should include:

- Class level (Class 8)
- Chapter name
- Clear concept
- Request for step-by-step explanation (if needed)

Example Prompt:

"I am a Class 8 student. In Number Play (Class 8), show why the result of four consecutive numbers combined with + and – signs are always even. Explain logically step-by-step."

Types of Prompts in Mathematics Learning:

To obtain clear and meaningful responses from an AI tool, prompts should be written according to the purpose of learning.

In Mathematics, prompts may be framed in three main ways:

1. **Concept Understanding Prompt:** This type of prompt is used to understand a mathematical concept clearly in simple language. **Example:** "I am a Class 8 student. In the chapter A Square and a Cube, please explain why only square numbers remain open in the 100-locker puzzle in simple language with one clear example."
2. **Comparison or Analytical Prompt :** This type of prompt is used to compare two mathematical ideas or analyse differences and similarities. **Example:**"I am a Class 8 student. Please explain the difference between linear growth and exponential growth from the chapter Power Play with suitable examples." OR "I am studying Quadrilaterals in Class 8. Please compare a rectangle and a parallelogram by listing their similarities and differences."
3. **Application or Activity-Based Prompt:** This type of prompt is used to apply mathematical knowledge in real-life situations or activities. **Example:** "I am a Class 8 student. In Proportional Reasoning, help me design a simple real-life activity to show how ratios are used in cooking or map reading. Explain the steps clearly." OR "In the chapter We Distribute, Yet Things Multiply, create a real-life word problem where the distributive property is used and solve it step-by-step."

Do AI Make Mistakes?

Yes. AI systems depend completely on the data used to train them. If the dataset is incomplete or biased, AI may produce incorrect or unfair results. Sometimes AI may generate answers that look correct but contain mistakes. Therefore, all AI-generated solutions must be verified using textbook methods. AI supports learning but cannot replace mathematical reasoning or teacher guidance.

AP SCERT

గణిత అభ్యసనం కోసం AI ని యాక్సెస్ చేయడం:

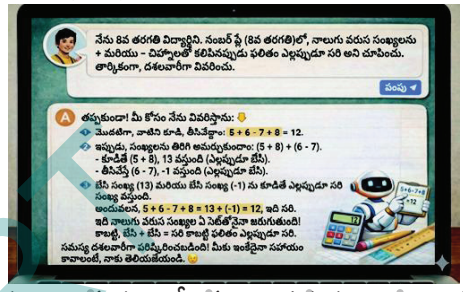
ఉపాధ్యాయుల పర్యవేక్షణలో పాఠశాల కంప్యూటర్ ప్రయోగశాలలలో లేదా తల్లిదండ్రుల మార్గదర్శకత్వంతో ఇంట్లో AI tools ఉపయోగించవచ్చు. AIని ఖచ్చితంగా విద్యా ప్రయోజనాల కోసం మరియు పాఠ్యపుస్తక వ్యాయామాలను పూర్తి చేసిన తర్వాత మాత్రమే ఉపయోగించాలి.

AI యొక్క సురక్షితమైన మరియు బాధ్యతాయుతమైన ఉపయోగం

- పేరు, పాఠశాల వివరాలు, పాస్‌వర్డ్‌లు వంటి వ్యక్తిగత సమాచారాన్ని పంచుకోవద్దు.
- అర్థం చేసుకోకుండా AI ప్రతిస్పందనలను కాపీ చేయవద్దు.
- AI-generated సమాధానాలను ఎల్లప్పుడూ పాఠ్యపుస్తక పద్ధతులతో సరిచూచుకోండి.
- పరీక్షల సమయంలో AIని ఉపయోగించవద్దు.
- స్పష్టత మరియు తార్కికతను మెరుగుపరచడానికి మాత్రమే AIని ఉపయోగించండి.

AI ని బాధ్యతాయుతంగా ఉపయోగించడం అనేది నిజాయితీ, క్రమశిక్షణ మరియు విమర్శనాత్మక ఆలోచనలను బలోపేతం చేస్తుంది.

గణితంలో సమర్థవంతమైన Prompts రాయడం:



Prompt అనేది AI tool కు ఇవ్వబడిన సూచన.

మంచి గణిత prompt కిందివాటిని కలిగి ఉండాలి:

- తరగతి స్థాయి: 8వ తరగతి
- అధ్యాయం పేరు
- స్పష్టమైన భావన
- దశల వారీ వివరణ కోసం అభ్యర్థన అవసరమైతే

ఉదాహరణ Prompt:

"నేను 8వ తరగతి విద్యార్థిని. నంబర్ ప్లే 8వ తరగతిలో, + మరియు − గుర్తులతో కలిపి వరుసగా నాలుగు సంఖ్యల ఫలితం ఎల్లప్పుడూ ఎందుకు సరి సంఖ్య అవుతుందో చూపించు. తార్కికంగా దశలవారీగా వివరించండి."

గణిత అభ్యసనంలో Prompts రకాలు:

AI tool నుండి స్పష్టమైన మరియు అర్థవంతమైన ప్రతిస్పందనలను పొందడానికి, అభ్యాస ప్రయోజనం ప్రకారం prompts రాయాలి.

గణితంలో, promptsను మూడు ప్రధాన విధాలుగా రూపొందించవచ్చు:

1. **నిర్దిష్ట సమాచారాన్ని పొందడానికి ఇచ్చే సూచన :** ఈ రకమైన prompt గణిత భావనను సరళమైన భాషలో స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఉపయోగించబడుతుంది. **ఉదాహరణ:** "నేను 8వ తరగతి విద్యార్థిని. ఒక వర్గం మరియు ఒక ఘనం అధ్యాయంలో, 100–లాకర్ పజిల్‌లో వర్గ సంఖ్యలు మాత్రమే ఎందుకు తెరిచి ఉంటాయో సరళమైన భాషలో ఒక స్పష్టమైన ఉదాహరణతో వివరించండి."
2. **ఖచ్చితమైన సమాచారాన్ని ఉపయోగించే ప్రత్యేకమైన సూచన :** రెండు గణిత ఆలోచనలను పోల్చడానికి లేదా వ్యత్యాసాలు మరియు సారూప్యతలను విశ్లేషించడానికి ఈ రకమైన prompt ఉపయోగించబడుతుంది. **ఉదాహరణ:** "నేను 8వ తరగతి విద్యార్థిని. తగిన ఉదాహరణలతో పవర్ ప్లే అధ్యాయం నుండి లీనియర్ వృద్ధి మరియు exponential growth మధ్య వ్యత్యాసాన్ని దయచేసి వివరించండి." లేదా "నేను 8వ తరగతిలో చతుర్భుజాలు చదువుతున్నాను. దయచేసి దీర్ఘచతురస్రం మరియు సమాంతర చతుర్భుజం వాటి సారూప్యతలు మరియు వ్యత్యాసాలను జాబితా చేయడం ద్వారా పోల్చండి." ఈ రకమైన prompt తార్కిక మరియు విశ్లేషణాత్మక ఆలోచనను అభివృద్ధి చేయడంలో సహాయపడుతుంది.
3. **అనువర్తనం లేదా కృత్య ఆధారిత సూచన :** ఈ రకమైన prompt గణిత పరిజ్ఞానాన్ని నిజ జీవిత పరిస్థితులు లేదా కార్యకలాపాలలో అన్వయించడానికి ఉపయోగించబడుతుంది. **ఉదాహరణ:** "నేను 8వ తరగతి విద్యార్థిని. వంట లేదా మ్యాప్ రీడింగ్‌లో నిష్పత్తులను ఎలా ఉపయోగిస్తారో చూపించడానికి ఒక సాధారణ నిజ జీవిత కార్యకలాపాన్ని రూపొందించడంలో Proportional Reasoning లో నాకు సహాయపడండి. దశలను స్పష్టంగా వివరించండి." లేదా "We distribute, yet the things multiply అనే అధ్యాయంలో, distributive property ఉపయోగించబడే నిజ జీవిత పద సమస్యను సృష్టించండి మరియు దానిని దశలవారీగా పరిష్కరించండి." ఈ రకమైన prompt ఆచరణాత్మక అనువర్తనం మరియు సృజనాత్మక ఆలోచనను ప్రోత్సహిస్తుంది.

AI తప్పులు చేస్తుందా?

అవును. AI systems వాటికి శిక్షణ ఇవ్వడానికి ఉపయోగించే డేటాపై పూర్తిగా ఆధారపడి ఉంటాయి. dataset అసంపూర్ణంగా ఉంటే లేదా biased గా ఉంటే, AI తప్పు లేదా అసంబద్ధమైన ఫలితాలను ఉత్పత్తి చేయవచ్చు. కొన్నిసార్లు AI ఇచ్చే సమాధానం సరైనదిగా కనిపించినా అందులో తప్పులు ఉండవచ్చు. కాబట్టి, అన్ని AI-generated పరిష్కారాలను పాఠ్యపుస్తక పద్ధతులను ఉపయోగించి ధృవీకరించాలి. AI అభ్యసనానికి మద్దతు ఇస్తుంది కానీ గణిత తార్కికం లేదా ఉపాధ్యాయుల మార్గదర్శకత్వాన్ని భర్తీ చేయదు.

APSCERT

Myth	Truth
AI is unsafe for students.	AI is safe when used responsibly and without sharing personal information.
AI understands problems like humans.	AI recognises patterns but does not truly understand like humans.
AI decisions are always unbiased.	If the dataset has bias, AI results can also be biased.

Chapter-wise AI-Supported Exploration

Tasks for Students to Explore with AI (Mathematics – Semester 1)

Chapter	Foundational Level	Analytical Level	Creative Level
Chapter 1: A Square and a Cube	• List first 10 square numbers. • Define perfect square.	• Explain why only square numbers remain open in the locker problem.	• Compare pattern recognition in number puzzles with AI pattern detection.
Chapter 2 : Power Play	• Define exponent and base. • Calculate simple powers.	• Compare linear and exponential growth.	• Explain how exponential growth relates to data processing in AI.
Chapter 3 : A Story of Numbers	• Write numbers in expanded form. • Explain place value.	• Compare ancient and modern number systems.	• Relate number representation to digital data storage in AI systems.
Chapter 4 : Quadrilaterals	• Define rectangle and square. • List properties of diagonals.	• Prove diagonals of rectangle are equal.	• Compare shape classification in geometry with image classification in AI.
Chapter 5 : Number Play	• Identify even and odd numbers.	• Analyse parity patterns in expressions	• Explain how rule-based systems in AI follow logical patterns.
Chapter 6 : We Distribute, Yet Things Multiply	• Expand a(b+c).	• Analyse changes in product when numbers increase.	• Compare distributive property with algorithmic steps in AI.
Chapter 7 : Proportional Reasoning – 1	• Define ratio and proportion.	• Simplify ratios using HCF.	• Explain how balanced ratios relate to fairness and unbiased datasets in AI.

AP SCERT

Guidance: Before introducing AI connections, complete the related mathematical concept through textbook examples and problem-solving activities. Ensure that students clearly understand the mathematical idea before linking it to AI applications. Encourage students to explain similarities between mathematical reasoning and AI systems in their own words. Demonstrate how to frame subject-specific prompts and verify AI-generated responses using textbook methods. Monitor student interaction with AI tools carefully. Reinforce that AI should deepen conceptual clarity and not replace regular practice or logical reasoning.

Conclusion: The first seven chapters of Semester 1 develop essential mathematical skills such as pattern recognition, logical proof, proportional reasoning, algebraic expansion, and classification. These same skills form the foundation of intelligent systems. By strengthening mathematical thinking and using technology responsibly, students develop critical, ethical, and disciplined understanding of both Mathematics and Artificial Intelligence.

అపోహ	వాస్తవం
విద్యార్థులకు AI సురక్షితం కాదు.	AI వ్యక్తిగత సమాచారాన్ని భాగస్వామ్యం చేయకుండా బాధ్యతాయుతంగా ఉపయోగించినప్పుడు AI సురక్షితం.
AI మనుషులలాగా సమస్యలను అర్థం చేసుకుంటుంది.	AI ప్యాట్రన్‌లను గుర్తిస్తుంది కానీ మనుషుల లాగా నిజంగా అర్థం చేసుకోదు.
AI నిర్ణయాలు ఎల్లప్పుడూ నిష్పాక్షికమైనవి.	datasetలో bias ఉంటే, AI ఫలితాలు కూడా bias తో ఉండవచ్చు.

అధ్యాయాల వారీగా AI ఆధారిత అన్వేషణ

విద్యార్థులు AI తో అన్వేషించవలసిన కృత్యాలు (గణితం - సెమిస్టర్ 1)

అధ్యాయం	పునాది స్థాయి (Foundational)	విశ్లేషణాత్మక స్థాయి (Analytical)	సృజనాత్మక స్థాయి (Creative)
అధ్యాయం 1: వర్గం మరియు ఘనం	• మొదటి 10 వర్గ సంఖ్యలను జాబితా చేయండి. • ఖచ్చితమైన వర్గాన్ని నిర్వచించండి.	• లాకర్ సమస్యలో వర్గ సంఖ్యలు మాత్రమే ఎందుకు తెరిచి	• నంబర్ పజిల్స్‌లో pattern recognition మరియు AI pattern గుర్తింపును పోల్చండి.
అధ్యాయం 2 : ఘాతాలతో ఆట	• exponent మరియు baseని నిర్వచించండి. • సాధారణ పవర్స్‌ను లెక్కించండి.	• లీనియర్ మరియు exponential growth ని పోల్చండి.	• AIలోని డేటా ప్రాసెసింగ్‌కి exponential growth ఎలా సంబంధం కలిగి ఉందో వివరించండి.
అధ్యాయం 3 : సంఖ్యల కథ	• సంఖ్యలను విస్తరించిన రూపంలో రాయండి. • స్థాన విలువను వివరించండి.	• పురాతన మరియు ఆధునిక సంఖ్యా వ్యవస్థలను పోల్చండి.	• AI సిస్టమ్స్‌లో digital data నిల్వతో సంఖ్యల ప్రాతినిధ్యాన్ని అనుసంధానించండి.
అధ్యాయం 4 : చతుర్భుజాలు	• దీర్ఘచతురస్రం మరియు చతురస్రాన్ని నిర్వచించండి. • కర్ణాల లక్షణాలను జాబితా చేయండి.	• దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమానమని నిరూపించండి.	• జ్యామితిలోని ఆకృతుల వర్గీకరణను AI లోని image classificationతో పోల్చండి.
అధ్యాయం 5 : సంఖ్యలతో ఆట	• సరి మరియు బేసి సంఖ్యలను గుర్తించండి.	• వ్యక్తీకరణలలో parity, patternలను విశ్లేషించండి.	• AIలోని rule-based systems తార్కిక నమూనాలను ఎలా అనుసరిస్తాయో వివరించండి.
అధ్యాయం 6 : విభాగ న్యాయము- రాశుల గుణకారం	• a(b+c) ని విస్తరించండి.	• సంఖ్యలు పెరిగినప్పుడు లబ్ధంలో మార్పులను విశ్లేషించండి.	• AIలోని అల్గారిథమిక్ దశలతో distributive propertyని పోల్చండి.
అధ్యాయం 7 : అనుపాత తార్కికత - 1	• నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం నిర్వచించండి.	• గ.సా.భా ఉపయోగించి నిష్పత్తులను సూక్ష్మీకరించండి.	• AI లో ఫెయిర్‌నెస్ మరియు unbiased datasetsతో సమతుల్య నిష్పత్తులు ఎలా సంబంధం కలిగి ఉంటాయో వివరించండి.

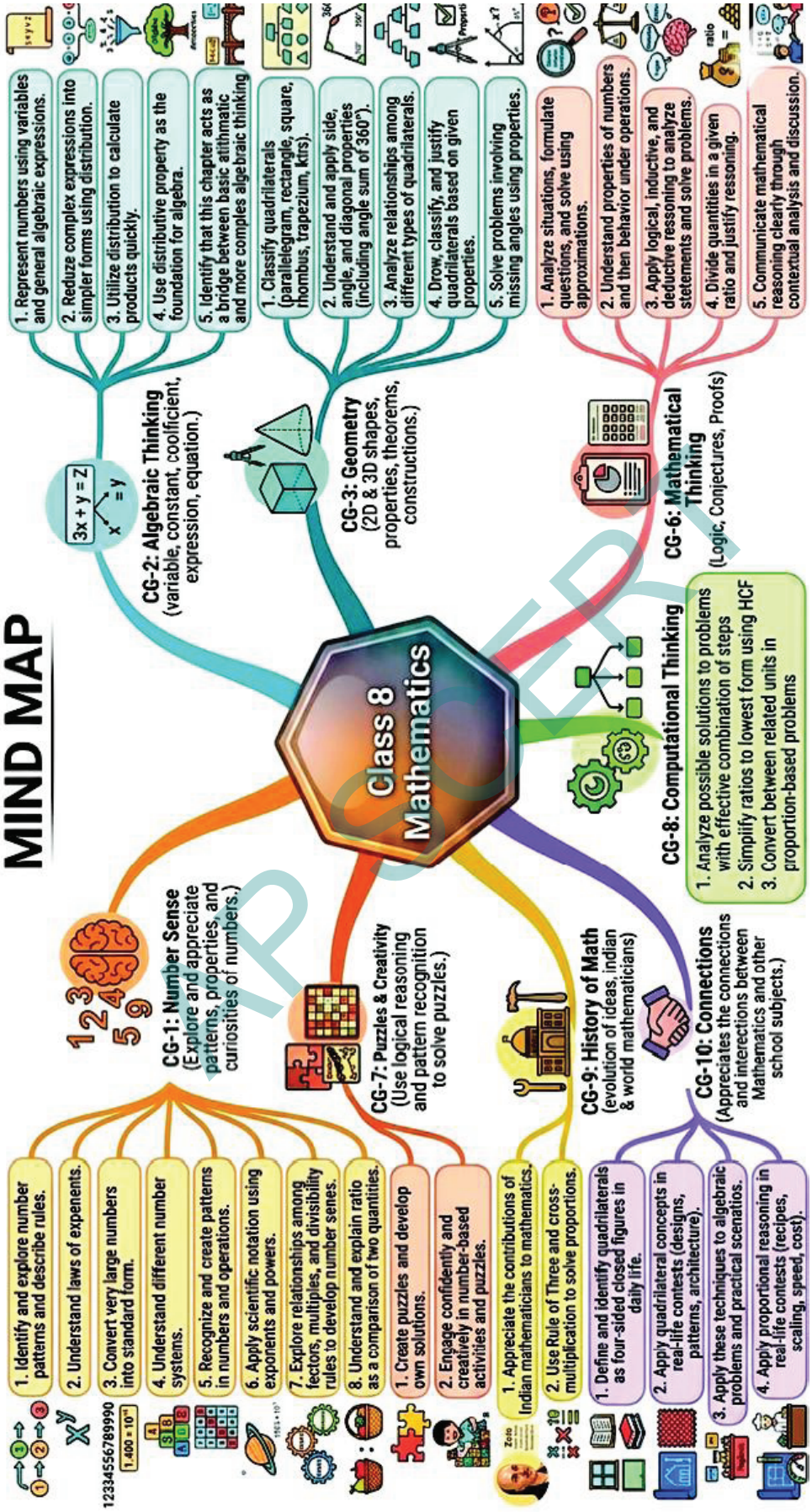
మార్గదర్శకత్వం: AI కనెక్షన్‌లను పరిచయం చేయడానికి ముందు, పాఠ్యపుస్తక ఉదాహరణలు మరియు సమస్య-పరిష్కార కార్యకలాపాల ద్వారా సంబంధిత గణిత భావనను పూర్తి చేయండి. AI applications కు లింక్ చేయడానికి ముందు విద్యార్థులు గణిత ఆలోచనను స్పష్టంగా అర్థం చేసుకున్నారని నిర్ధారించుకోండి. గణిత తార్కికత మరియు AI systems మధ్య ఉన్న సారూప్యతలను వారి స్వంత మాటలలో వివరించమని విద్యార్థులను ప్రోత్సహించండి. విషయ-నిర్దిష్ట prompts ను ఎలా రూపొందించాలో మరియు పాఠ్యపుస్తక పద్ధతులను ఉపయోగించి AI-generated ప్రతిస్పందనలను ఎలా ధృవీకరించాలో ప్రదర్శించండి. AI tools తో విద్యార్థుల పరస్పర చర్యను జాగ్రత్తగా పర్యవేక్షించండి. AI సంభావిత స్పష్టతను మరింత లోతుగా చేయాలని మరియు సాధారణ అభ్యాసం లేదా తార్కిక ఆలోచనను భర్తీ చేయకూడదని బలోపేతం చేయండి.

ముగింపు :

మొదటి సెమిస్టర్ యొక్క మొదటి ఏడు అధ్యాయాలు pattern recognition, తార్కిక రుజువు, అనుపాత తార్కికం, బీజగణిత విస్తరణ మరియు వర్గీకరణ వంటి అవసరమైన గణిత నైపుణ్యాలను అభివృద్ధి చేస్తాయి. ఇదే నైపుణ్యాలు intelligent systems కు పునాదిని ఏర్పరుస్తాయి. గణిత ఆలోచనను బలోపేతం చేయడం మరియు సాంకేతికతను బాధ్యతాయుతంగా ఉపయోగించడం ద్వారా, విద్యార్థులు గణితం మరియు Artificial Intelligence రెండింటిపై విమర్శనాత్మక, నైతిక మరియు క్రమశిక్షణతో కూడిన అవగాహనను అభివృద్ధి చేసుకుంటారు.

AP SCERT

MIND MAP



SCERT