MATHEMATICS

TEXTBOOK FOR CLASS X

Semester - 1

K9P4T5

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2023

New Impression - 2024, 2025, 2026

DISCLAIMER

Any form of copying of the content, information and illustrations from this textbook is a punishable offence.

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser. The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 GSM, SS Maplitho. Title Page 220 GSM and White Art Card.

Published by Samagra Shiksha & SCERT - Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

AP SCERT

Vande Mataram

Vande Mataram!

Sujalam, suphalam, malayaja shitalam,

Shasyashyamalam, Mataram!

Vande Mataram!

Shubhrajyotsna pulakitayaminim,

Phullakusumita drumadala shobhinim,

Suhasinim sumadhura bhashinim,

Sukhadam varadam, Mataram!

Vande Mataram, Vande Mataram!

- Bankimchandra Chatterji

వందే మాతరం

వందే మాతరం వందే మాతరం

సుజలాం సుఫలాం మలయజ శీతలాం

సస్యశ్యామలాం మాతరం వందే మాతరం

శుభ్రజ్యోత్స్నపులకిత యామినీం

పుల్లకుసుమిత ద్రుమదళ శోభినీం

సుహాసినీం సుమధుర భాషిణీం

సుఖదాం వరదాం మాతరం వందే మాతరం.

- బంకించంద్ర ఛటర్జీ

AP SCERT

Printed in India
at the A.P. Govt., Textbook Press,
Amaravati, Andhra Pradesh.

Our National Anthem | జాతీయ గీతం

Jana-gana-mana-adhinayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata
Panjaba-Sindhu-Gujarata-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
uchchala-jaladhi-taranga
Tava Subha name jage,
tava subha asisa mage,
gahe tava jaya-gatha.
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

- Rabindranath Tagore

AP SCERT

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

– రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

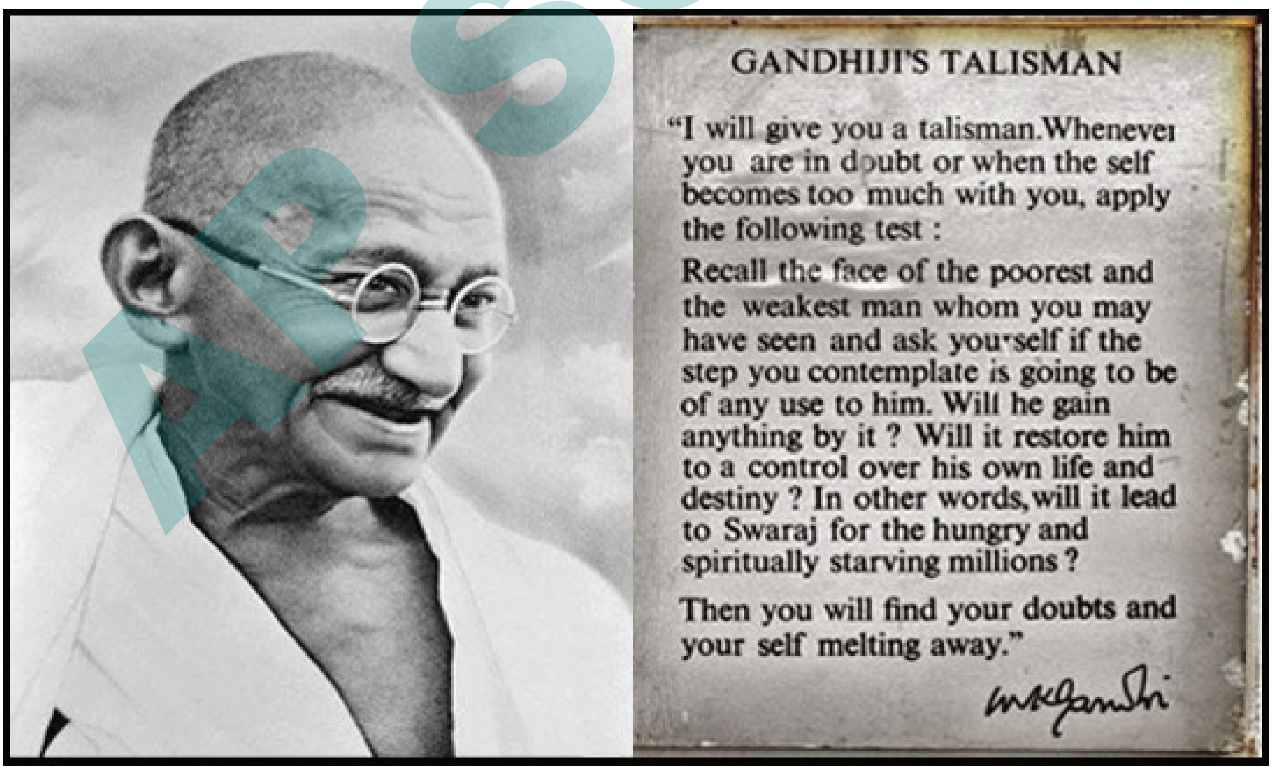
Pledge | ప్రతిజ్ఞ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం.
దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను.
జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

– పైడిమర్రి వెంకట సుబ్బారావు



AP SCERT

MATHEMATICS
గణితం
Class / తరగతి – X
Semester - 1

Contents
విషయసూచిక

Chapter	Content	Month	Pg.No.
	Learning Outcomes అభ్యసన ఫలితాలు		(i-iv)
Chapter 1 అధ్యాయం 1	Real Numbers వాస్తవ సంఖ్యలు	June	2
Chapter 2 అధ్యాయం 2	Polynomials బహుపదులు	June-July	20
Chapter 3 అధ్యాయం 3	Pair of Linear Equations in two variables రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత	July	48
Chapter 4 అధ్యాయం 4	Quadratic Equations వర్గ సమీకరణాలు	July	76
Chapter 5 అధ్యాయం 5	Arithmetic Progressions అంకశ్రేఢులు	July-August	98
Chapter 6 అధ్యాయం 6	Triangles త్రిభుజాలు	August	146
Chapter 7 అధ్యాయం 7	Coordinate Geometry నిరూపక జ్యామితి	August-September	198
Appendix.1 అనుబంధం-1	Proofs in Mathematics గణితంలో నిరూపణలు		226
	Answers జవాబులు		268

AP SCERT

N7A1P8

Teacher corner

H9R9H8

Student corner

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
1	Real Numbers	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Acquire knowledge on rational and irrational numbers, their usage and operations on those numbers • Can express any composite number as a product of unique set of prime factors using fundamental theorem of arithmetic • Can prove an irrational number as irrational with the help of "Proof by contradiction". • Utilize fundamental theorem of arithmetic in real life situations effectively.
2	Polynomials	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Find zeroes of linear and quadratic polynomials and some cases of cubic polynomials. • Represent polynomials geometrically using graphs. • Establish relationship between zeroes and coefficients of a polynomial • Utilize the knowledge of polynomials in real life situations effectively.
3	Pair of Linear equations in two variables	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Find a solution for pair of intersecting lines graphically. • Identify the pairs of linear equations which are parallel and coincident through the ratios of co-efficients. • Find solutions for pairs of consistent lines, dependent lines and confirms pair of parallel lines are inconsistent or consistent through algebraic methods • Utilize the knowledge of solving pair of linear equations in real life situations effectively.
4	Quadratic equations	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Identify what type of equations are quadratic equations. • Distinguish between quadratic polynomial and quadratic equation • Frame a quadratic equation for any given situation involving quadratic equation. • Factorise any given quadratic equation • Comment on the nature of the roots of given quadratic equation. • Utilize the knowledge of quadratic equations in real life situations effectively.

AP SCERT

అభ్యసన ఫలితాలు

అ. నెం.	అధ్యాయం పేరు	నిర్దిష్ట అభ్యసన ఫలితాలు
1	వాస్తవ సంఖ్యలు	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్య ల గూర్చి వాటి ఉపయోగాలు మరియు ప్రక్రియలకు సంబందించిన జ్ఞానం పొందుతారు • అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి ఏదైనా సంయుక్త సంఖ్యను విభిన్న ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయగలరు. • విరుద్ధత పద్ధతి ద్వారా ఒక అకరణీయ సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించవచ్చు. • నిజ జీవితంలో అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ను సమర్థవంతంగా ఉపయోగించుకుంటారు
2	బహుపదులు	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • రేఖీయబహుపది, వర్గ బహుపది మరియు కొన్ని సందర్భాలలో ఘన బహుపది యొక్క శున్యాలను కనుగొనడం తెలుసుకుంటారు • గ్రాఫ్‌లను ఉపయోగించి బహుపదులను జ్యామితీయంగా ప్రాతినిధ్య పరుస్తారు • బహుపది యొక్క గుణకాలకు మరియు శూన్యాలకు మధ్య సంబంధాన్ని నిర్ధారిస్తారు • నిజ జీవిత పరిస్థితులలో బహుపదుల జ్ఞానాన్ని సమర్థవంతంగా ఉపయోగించుకుంటారు
3	రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా ఖండించుకునే రేఖల యొక్క సాధనను తెలుసుకుంటారు • రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత లో గుణకాల నిష్పత్తిని బట్టి ఖండించు కొని రేఖలు మరియు ఏకీభవించు రేఖలను గుర్తిస్తాడు • బీజగణిత పద్ధతుల ద్వారా ఖండించుకునే రేఖలు, ఖండించుకోని రేఖలు మరియు ఏకీభవించు రేఖల సాధనను కనుగొనును • నిజ జీవిత పరిస్థితులలో సరళ సమీకరణాల జతను పరిష్కరించే పరిజ్ఞానాన్ని సమర్థవంతంగా ఉపయోగించుకొనును.
4	వర్గ సమీకరణాలు	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • ఎటువంటి సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అగునో గుర్తించును . • వర్గ బహుపదికి మరియు వర్గ సమీకరణానికి మధ్య గల బేధమును గుర్తించును • వర్గ సమీకరణం కలిగిన ఏ ఒక్క సందర్భాన్ని అయిన వర్గ సమీకరణం లోనికి మార్చును • యిచ్చిన వర్గ బహుపదిని కారణాంకంగా విభజించును • వర్గ బహుపది యొక్క మూలాల స్వభావంను వ్యాఖ్యానించును • వర్గ సమీకరణాలకు సంబంధించిన జ్ఞానమును నిజ జీవితం లో ఎదురగు వివిధ సమస్యలను సాధించు సందర్భంలో సమర్థవంతంగా ఉపయోగించును.

AP SCERT

LEARNING OUTCOMES

Chp. No.	CHAPTER NAME	Specific LOs mapped
5	Arithmatic Progressions	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Explain what a progression is • Write an arithmetic progression with the given parameters • Find the common difference,nth term of any given arithmetic progression. • Extend any given arithmetic progression if the common difference and first term are given. • Find the problem of n terms in an arithmetic progression. • Utilize the knowledge of Arithmetic Progressions in real life situations effectively.
6	Triangles	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Define basic proportionality theorem. • Utilize basic proportionality theorem and it's converse in daily life situations • Find or assess whether two triangles are similar or not, using different similarity rules like AAA/AA, SSS, SAS. • Apply the rules under basic proportionality and similarity of triangles by correlating both in given problems. • Utilize the knowledge of Triangles in real life situations effectively.
7	Co-ordinate Geometry	*After Completion of this lesson every student will be able to* • Find distance between any two given points in a cartesian plane using formula • Find co-ordinates of any point which divides any line segment in a particular ratio. • Find the ratio in which a given point divides a line segment joining any two points • Find points of trisection of any given line segment. • Utilize the knowledge of Co-ordinate geometry in real life situations effectively.

AP SCERT

అభ్యసన ఫలితాలు

అ. నెం.	అధ్యాయం పేరు	నిర్దిష్ట అభ్యసన ఫలితాలు
5	అంక శ్రేఢులు	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • శ్రేఢి అనగా ఏమిటో వివరించును • యిచ్చిన పరిస్థితులకు లోబడి ఒక శ్రేఢిని వ్రాయును • యిచ్చిన అంక శ్రేఢి యొక్క సామాన్య భేదము మరియు nవ పదమును కనుగొనగలరు. • సామాన్య భేదము మరియు మొదటి పదము యిచ్చిన ఆ శ్రేఢి యొక్క మిగిలిన పదములను కనుగొనును • అంకశ్రేఢిలో 'n' పదముల మొత్తం ను కనుగొనును • అంక శ్రేఢుల యొక్క జ్ఞానమును నిజజీవితంలో ఎదురగు వివిధ సమస్యలను సాదించు సందర్భం లో సమర్థవంతంగా ఉపయోగించును.
6	త్రిభుజాలు	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించును • నిజ జీవితంలో ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము మరియు దాని విపర్యయమును వివిధ సందర్భాలలో ఉపయోగించుకొనును • వివిధ సరూప నియమాలకు కో.కో.కో./కో.కో. భు.భు.భు, భు.కో.భు. అనుగుణంగా యిచ్చిన రెండు త్రిభుజాలు సరుపాలు అవునో కాదో కనుగొనును • ఇచ్చిన సమస్యలను సాధించుటకు ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతను మరియు సరూపత్రిభుజాల నియమాలను అన్వయిస్తూ సాధించును. • త్రిభుజం యొక్క జ్ఞానమును నిజ జీవితం లో ఎదురగు వివిధ సమస్యలను సాదించు సందర్భంలో సమర్థవంతంగా ఉపయోగించును.
7	నిరూపక జ్యామితి	**ఈ పాఠం పూర్తయిన తర్వాత ప్రతి విద్యార్థి అవగాహన చేసుకునే అంశాలు** • కార్టీజియన్ తలములో ఏవైనా రెండు బిందువులు గల మధ్య దూరమును సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనును • ఒక రేఖాఖండాన్ని ఒక నిర్దిష్ట నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు యొక్క నిరూపకాలు కనుగొనును • యిచ్చిన రెండు బిందువులను కలుపు రేఖను ఒక బిందువు ఏ నిష్పత్తిలో విభజించునో కనుగొనును • యిచ్చిన ఏ వైన రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని త్రిధాకరించే బిందువుల నిష్పత్తిని కనుగొనును • నిరూపక జ్యామితికి సంబందించిన జ్ఞానమును నిజజీవితములో ఎదురగు వివిధ సమస్యలను సాదించు సందర్భంలలో సమర్థవంతంగా ఉపయోగించుకొంటారు.

AP SCERT

R6F8V7

1 REAL NUMBERS

1.1 Introduction

In Class IX, you began your exploration of the world of real numbers and encountered irrational numbers. We continue our discussion on real numbers in this chapter. We begin with two very important properties of positive integers in Sections 1.2 and 1.3, namely the Euclid's division algorithm and the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Euclid's division algorithm, as the name suggests, has to do with divisibility of integers. Stated simply, it says any positive integer a can be divided by another positive integer b in such a way that it leaves a remainder r that is smaller than b. Many of you probably recognise this as the usual long division process. Although this result is quite easy to state and understand, it has many applications related to the divisibility properties of integers. We touch upon a few of them, and use it mainly to compute the HCF of two positive integers.

The Fundamental Theorem of Arithmetic, on the other hand, has to do something with multiplication of positive integers. You already know that every composite number can be expressed as a product of primes in a unique way—this important fact is the Fundamental Theorem of Arithmetic. Again, while it is a result that is easy to state and understand, it has some very deep and significant applications in the field of mathematics. We use the Fundamental Theorem of Arithmetic for two main applications. First, we use it to prove the irrationality of many of the numbers you studied in Class IX, such as $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $\sqrt{5}$. Second, we apply this theorem to explore when exactly the decimal expansion of a rational number, say $\frac{p}{q}(q \neq 0)$, is terminating and when it is non-terminating repeating. We do so by looking at the prime factorisation of the denominator q of $\frac{p}{q}$. You will see that the prime factorisation of q will completely reveal the nature of the decimal expansion of $\frac{p}{q}$.

So let us begin our exploration.

AP SCERT

K7I1F9

వాస్తవ సంఖ్యలు 1

1.1 పరిచయం

9వ తరగతిలో, మీరు వాస్తవసంఖ్యల ప్రపంచం గురించి తెలుసుకోవడం మొదలుపెట్టి కరణీయ సంఖ్యలను గూర్చి పరిచయం చేసుకున్నారు. మనం ఈ అధ్యాయంలో వాస్తవసంఖ్యల పై మరింత చర్చను కొనసాగిస్తాం. దీనిని మనం విభాగం 1.2, 1.3లలో ధన పూర్ణ సంఖ్యలకు వర్తించే అతి ముఖ్యమైన ధర్మాలైన యూక్లిడ్ భాగాహార విధి మరియు అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతములతో ప్రారంభిస్తాం.

పేరులో ఉన్నవిధంగా, యూక్లిడ్ భాగాహార విధి పూర్ణసంఖ్యల భాగాహారానికి సంబంధించినది. సరళంగా చెప్పాలంటే, ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య a ని మరొక ధనపూర్ణ సంఖ్య b కంటే చిన్నదైన శేషం r వచ్చేలా b తో భాగించవచ్చని చెబుతుంది. బహుశా మీలో చాలామంది దీనిని సాధారణ భాగహార ప్రక్రియగా గుర్తించే ఉంటారు. ఈ ఫలితం ప్రకటించటం మరియు అర్థంచేసుకోవడం చాలా సులభమైనప్పటికీ, ఇది పూర్ణసంఖ్యల భాజనీయతా ధర్మాలకు సంబంధించి అనేక అనువర్తనాలను కలిగి ఉంది. వాటిలో కొన్నిటిని మాత్రమే స్పృశిస్తూ, రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యల గసాభా కనుగొనుటలో దీనిని ముఖ్యంగా ఉపయోగిస్తాము.

మరోవైపు అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంతో ధన పూర్ణసంఖ్యల గుణకారములను చేయాల్సిఉంటుంది. ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా ఏకైక విధంగా రాయవచ్చని మీకు ఇంతకుముందే తెలుసు. ఈ ముఖ్యమైన సత్యమే అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం. మరలా, ఈ ఫలితం ప్రకటించడం మరియు అర్థంచేసుకోవడం సులభమైనప్పటికీ, ఇది గణితంలో చాలా లోతైన, ముఖ్యమైన అనువర్తనాలను కలిగి ఉంది. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను మనం రెండు ముఖ్యమైన అనువర్తనాలకు ఉపయోగిస్తాము. ఒకటవది, దీనిని మీరు 9వ తరగతిలో చదువుకున్న, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ వంటి కరణీయ సంఖ్యా ధర్మాలను నిరూపించడానికి ఉపయోగిస్తాం.

రెండవది, దీనిని ఒక అకరణీయసంఖ్య $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ అనుకుంటే, దాని దశాంశ రూపం ఎప్పుడు అంతమవుతుందో లేదా ఎప్పుడు అంతంకాని ఆవర్తనమవుతుందో తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగిస్తాం. దీనికోసం $\frac{p}{q}$ లో హారం q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దమును పరిశీలిస్తాం. q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దము $\frac{p}{q}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ స్వభావాన్ని పూర్తిగా వెల్లడించడాన్ని మీరు గమనిస్తారు.

కావున, మన అన్వేషణను ప్రారంభిద్దాం.

AP SCERT

1.2 The Fundamental Theorem of Arithmetic

In your earlier classes, you have seen that any natural number can be written as a product of its prime factors. For instance, 2 = 2, 4 = 2 × 2, 253 = 11 × 23, and so on. Now, let us try and look at natural numbers from the other direction. That is, can any natural number be obtained by multiplying prime numbers? Let us see.

Take any collection of prime numbers, say 2, 3, 7, 11 and 23. If we multiply some or all of these numbers, allowing them to repeat as many times as we wish, we can produce a large collection of positive integers (In fact, infinitely many). Let us list a few :

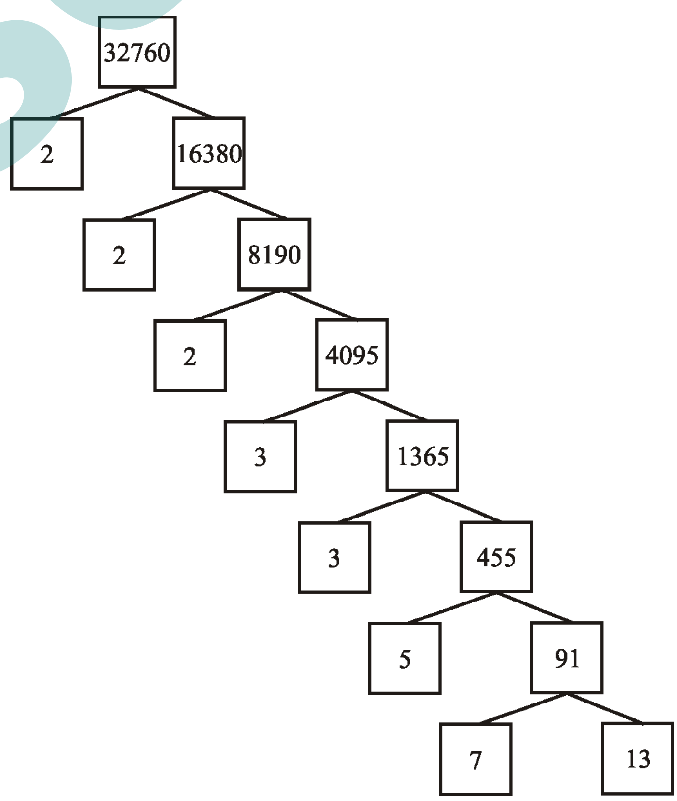
$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\quad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\quad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

and so on.

Now, let us suppose your collection of primes includes all the possible primes. What is your guess about the size of this collection? Does it contain only a finite number of integers, or infinitely many? Infact, there are infinitely many primes. So, if we combine all these primes in all possible ways, we will get an infinite collection of numbers, all the primes and all possible products of primes. The question is – can we produce all the composite numbers this way? What do you think? Do you think that there may be a composite number which is not the product of powers of primes? Before we answer this, let us factorise positive integers, that is, do the opposite of what we have done so far.



We are going to use the factor tree with which you are all familiar. Let us take some large number, say, 32760, and factorise it as shown.

AP SCERT

1.2 అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం

మీ ముందు తరగతులలో, ఏదైనా సహజసంఖ్యను దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చని మీరు తెలుసుకున్నారు. ఉదాహరణకు, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ మొదలైనవి. ఇప్పుడు మనం సహజసంఖ్యలను మరోవైపు నుండి పరిశీలించడానికి ప్రయత్నిద్దాం. అనగా ప్రధానాంకాలను గుణించడం ద్వారా సహజ సంఖ్యలను పొందవచ్చా? పరిశీలిద్దాం.

కొన్ని ప్రధానసంఖ్యలు 2, 3, 7, 11 మరియు 23లను తీసుకుందాం. వీటిలో కొన్నింటిని లేదా అన్నింటిని తీసుకుని ఏ సంఖ్య ఎన్నిసార్లు అయిననూ గుణించడం ద్వారా మనం అతిపెద్ద ధన పూర్ణసంఖ్యల సమూహాన్ని తయారుచేయవచ్చు. వాటిలో కొన్నింటి జాబితా:.

$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\quad\quad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

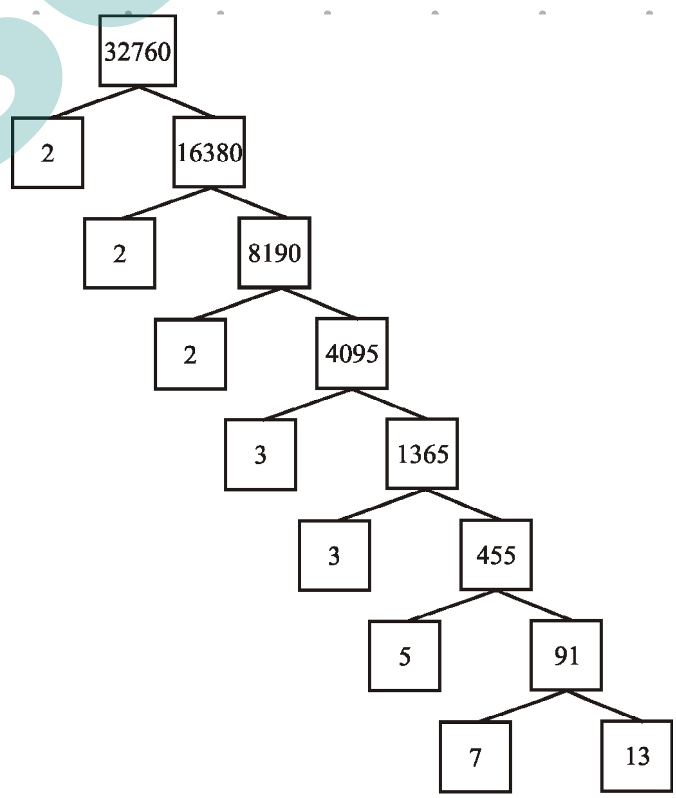
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\quad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ మొదలైనవి.

ఇప్పుడు, మనం తీసుకున్న ప్రధానాంకాలలో సాధ్యమయ్యే అన్ని ప్రధానాంకాలు ఉన్నాయని అనుకుందాం. అటువంటి సమూహ పరిమాణాన్ని మీరు ఊహించగలరా? ఈ సమూహంలో గల పూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య పరిమితమా? లేదా అపరిమితమా? నిజానికి, అనంతమైన ప్రధానాంకాలు ఉంటాయి. కావున, ఈ ప్రధానాంకాలన్నింటినీ సాధ్యమైనన్ని అన్ని విధాలుగా గుణిస్తూ పోతే అన్ని ప్రధానసంఖ్యలు మరియు వాటి లబ్ధాలతో కూడిన అనంత సంఖ్యా సమూహాన్ని పొందుతాము.

ఈవిధంగా అన్ని సంయుక్త సంఖ్యలను తయారు చేయగలమా? అనే ప్రశ్న ఉత్పన్నం అవుతుంది. మీరు ఏమనుకుంటున్నారు? ప్రధానసంఖ్యల ఘాతాల లబ్ధంగా రాయలేని సంయుక్త సంఖ్య ఏదైనా ఒకటి ఉంటుందని మీరు భావిస్తున్నారా? దీనికి సమాధానం కనుగొనే ముందు ధనపూర్ణ సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాద్దాం. అనగా ఇంతవరకు మనం చేసిన దానికి వ్యతిరేక ప్రక్రియను చేద్దాం.

మనకు బాగా పరిచయం ఉన్న కారణాంకాల వృక్ష పద్ధతిని ఉపయోగించబోతున్నాం. ఒక పెద్ద సంఖ్య, ఉదాహరణకు 32760ని తీసుకొని ప్రక్కన చూపిన విధంగా ప్రధాన కారణంగా లబ్ధంగా రాద్దాం.



AP SCERT

So we have factorised 32760 as $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ as a product of primes, i.e., $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ as a product of powers of primes. Let us try another number, say, 123456789. This can be written as $3^2 \times 3803 \times 3607$. Of course, you have to check that 3803 and 3607 are primes! (Try it out for several other natural numbers yourself.) This leads us to a conjecture that every composite number can be written as the product of powers of primes. In fact, this statement is true, and is called the **Fundamental Theorem of Arithmetic** because of its basic crucial importance to the study of integers. Let us now formally state this theorem.

Theorem 1.1 (Fundamental Theorem of Arithmetic) : *Every composite number can be expressed (factorised) as a product of primes, and this factorisation is unique, apart from the order in which the prime factors occur.*

An equivalent version of Theorem 1.2 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in Euclid's Elements, before it came to be known as the Fundamental Theorem of Arithmetic. However, the first correct proof was given by Carl Friedrich Gauss in his *Disquisitiones Arithmeticae*.

Carl Friedrich Gauss is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with Archimedes and Newton. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

AP SCERT

The Fundamental Theorem of Arithmetic says that every composite number can be factorised as a product of primes. Actually it says more. It says that given any composite number it can be factorised as a product of prime numbers in a **'unique'** way, except for the order in which the primes occur. That is, given any composite number there is one and only one way to write it as a product of primes, as long as we are not particular about the order in which the primes occur. So, for example, we regard $2 \times 3 \times 5 \times 7$ as the same as $3 \times 5 \times 7 \times 2$, or any other possible order in which these primes are written. This fact is also stated in the following form:

కావున మనం 32760ని $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ గా ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా, అనగా, 32760 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ వలే ప్రధాన కారణాంకాల ఘాతాల లబ్ధంగా రాసాం. మనం మరొక సంఖ్య, 123456789ను ప్రయత్నిద్దాం. దీనిని $3^2 \times 3803 \times 3607$ గా రాయవచ్చు. అయితే, మీరు 3803 మరియు 3607లు ప్రధాన సంఖ్యలు అని పరిశీలించవలసి ఉంటుంది! (ఇంకా అనేక ఇతర సహజ సంఖ్యలను తీసుకొని మీరు ప్రయత్నించండి. ఇది ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల ఘాతాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు అనే పరికల్పనకు దారి తీస్తుంది. నిజానికి, ఈ ప్రవచనం సత్యం మరియు పూర్ణ సంఖ్యల అధ్యయనానికి ప్రాథమికంగా దానికున్న అతి ప్రాముఖ్యత కారణంగా **దీనిని అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం** అని అంటారు. ఇప్పుడు మనం ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధికారికంగా నిర్వచిద్దాం,

సిద్ధాంతం 1.1 (అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం): ఇది ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల ఘాతాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. దీనిలో ప్రధాన సంఖ్యల క్రమం ఏదైనప్పటికీ, ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యకు ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకముగా ఉంటుంది. దీనికున్న ప్రాముఖ్యత కారణంగా దీనిని అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం అని అంటారు.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంగా ఇది మనకు పరిచయం అవడానికి ముందే సిద్ధాంతం 1.2 యొక్క సమానమైన ప్రవచనం యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్ గ్రంథం యొక్క పుస్తకంలో ప్రతిపాదన 14గా నమోదు చేయబడిండవచ్చు అయినప్పటికీ మొట్టమొదటిసారిగా సరైన నిరూపణను కార్ల్ ఫ్రెడ్‌రిచ్ గాస్ తన *డిస్క్విసిషన్స్ అరిథ్మెటికేతో* ఇవ్వడం జరిగింది.
కార్ల్ ఫ్రెడ్‌రిచ్ గాస్ ప్రిన్స్ ఆఫ్ మేథ్ మెటీషియన్స్, అని పిలుస్తారు. ఆర్కిమెడిస్ మరియు న్యూటన్‌లతో పాటు ప్రపంచంలో అత్యంత ముగ్గురు ప్రముఖ గణితశాస్త్రజ్ఞులలో ఒకరిగా పరిగణించబడ్డారు. ఇతను గణితం మరియు విజ్ఞానశాస్త్రం రెండింటికి వారి ప్రాథమిక సేవలను అందించారు.

కార్ల్ ఫ్రెడ్‌రిచ్ గాస్
(1777 – 1855)

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం, ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చని చెబుతుంది. నిజానికి ఇది ఇంకా ఎక్కువే తెలియజేస్తుంది. ఇది ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చని వాటి క్రమం ఏదైనాప్పటికీ ఈ ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధము **"ఏకైకమని"** తెలుపుతుంది. అనగా ప్రధాన కారణాంకాల క్రమానికి ప్రాధాన్యత ఇవ్వనంత వరకు ఏదైనా సంయుక్తసంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా ఒకే ఒకవిధంగా రాయగలం. ఉదాహరణకు, $2 \times 3 \times 5 \times 7$ లేదా $3 \times 5 \times 7 \times 2$ లేదా ఈ ప్రధానాంకాలను అవకాశం ఉన్న వేరే క్రమంలో ఎలా రాసిన అది సమానమే. ఈ సత్యాన్ని ఈ క్రింది విధంగా కూడా చెప్పవచ్చు:

AP SCERT

The prime factorisation of a natural number is unique, except for the order of its factors.

In general, given a composite number x, we factorise it as $x = p_1 p_2 \ldots p_n$, where $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are primes and written in ascending order, i.e., $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$. If we combine the same primes, we will get powers of primes. For example,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

Once we have decided that the order will be ascending, then the way the number is factorised, is unique.

The Fundamental Theorem of Arithmetic has many applications, both within mathematics and in other fields. Let us look at some examples.

Example 1 : Consider the numbers 4^n, where n is a natural number. Check whether there is any value of n for which 4^n ends with the digit zero.

Solution : If the number 4^n, for any n, were to end with the digit zero, then it would be divisible by 5. That is, the prime factorisation of 4^n would contain the prime 5. This is not possible because $4^n = (2)^{2n}$; so the only prime in the factorisation of 4^n is 2. So, the uniqueness of the Fundamental Theorem of Arithmetic guarantees that there are no other primes in the factorisation of 4^n. So, there is no natural number n for which 4^n ends with the digit zero.

You have already learnt how to find the HCF and LCM of two positive integers using the Fundamental Theorem of Arithmetic in earlier classes, without realising it! This method is also called the *prime factorisation method*. Let us recall this method through an example.

Example 2 : Find the LCM and HCF of 6 and 20 by the prime factorisation method.

Solution : We have : $6 = 2^1 \times 3^1$ and $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$.

You can find HCF(6, 20) = 2 and LCM(6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, as done in your earlier classes.

Note that HCF(6, 20) = 2^1 = **Product of the smallest power of each common prime factor in the numbers.**

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **Product of the greatest power of each prime factor, involved in the numbers.**

From the example above, you might have noticed that HCF(6, 20) × LCM(6, 20) = 6 × 20. In fact, we can verify that **for any two positive integers *a* and *b*, HCF (*a*, *b*) × LCM (*a*, *b*) = *a* × *b*.** We can use this result to find the LCM of two positive integers, if we have already found the HCF of the two positive integers.

ప్రధాన కారణాంకాల క్రమానికి ప్రాధాన్యత లేకుండా ఉంటే ఒక సహజసంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకం.

సాధారణంగా, x ఒక సంయుక్త సంఖ్య x, ఇచ్చినట్లయితే, దానిని $x = p_1 p_2 \ldots p_n$, where $p_1, p_2, \ldots, p_n$ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$.లు ఆరోహణ క్రమంలో రాయబడిన ప్రధాన సంఖ్యలు. ఉదాహరణకు,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13.$$

ఈ సందర్భంలో ఒకేరకమైన ప్రధానాంకములు వాడినచో వాటిని ప్రధానాంకాల ఘాతాలుగా రాస్తాం.

ఒకసారి మనం అవి ఆరోహణక్రమం అని నిర్ణయించుకుంటే అప్పుడు ఆ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకం.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం గణితంలోనూ మరియు ఇతర రంగాలలోనూ కూడా అనేక అనువర్తనాలను కలిగి ఉంది. కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : సహజసంఖ్యగా గల n తీసుకోండి. అ యొక్క ఏవిలువైన 4^n సున్నాతో అంతమగునో, లేదో సరిచూడండి.

సాధన: ఇవ్వబడిన సంఖ్య 4^n, n యొక్క ఏ విలువకైన సున్నాతో అంతమవ్వాలి అంటే, అది 5తో భాగించబడాలి. అనగా 4^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 ఒక ప్రధానసంఖ్యగా ఉండాలి. $4^n = (2)^{2n}$; అగుట వలన ఇది సాధ్యంకాదు. 4^n యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో గల ఏకైక ప్రధాన సంఖ్య 2. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకం. కావున, 4^n ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో ఇతర ప్రధాన సంఖ్యలు కచ్చితంగా ఉండవు. కావున, 4^n అనే సంఖ్య అ యొక్క ఏ విలువకు సున్నతో అంతమవదు.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం మీకు తెలియకపోయినప్పటికీ దాన్ని ఇదివరకే ఉపయోగించి రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల గ.సా.భా. మరియు క.సా.గు.ని ఎలా కనుగొనవచ్చో ముందు తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్నారు! ఈ పద్ధతినే ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధపద్ధతి అని కూడా అంటారు. ఒక ఉదాహరణ ద్వారా దీనిని మనం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

ఉదాహరణ 2: ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతి ద్వారా 6 మరియు 20 యొక్క కసాగు మరియు గసాభాని కనుగొనండి.

సాధన : $6 = 2^1 \times 3^1$ మరియు $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$.

మునుపటి తరగతులలో చేసినట్లుగా మనం (6, 20) గసాభా = 2 మరియు (6, 20) కసాగు $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ అని కనుగొనవచ్చు.

(6, 20) గసాభా = 2^1 = **సంఖ్యల యొక్క ప్రతి ఉమ్మడి ప్రధాన కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.**

(6, 20) కసాగు = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$= **ఆ రెండు సంఖ్యలలో గల ప్రతి ప్రధాన కారణాంకం యొక్క మిక్కిలి పెద్ద ఘాతాల లబ్ధం అని గమనించండి.**

పై ఉదాహరణ నుండి, మీరు (6, 20) గసాభా × (6, 20) కసాగు = 6×20 అని గమనించే ఉంటారు. నిజానికి, గ.సా.బా (6, 20) × క.సా.గు (6, 20) = 6 × 20. ***a*, *b*** లు ఏవైనా రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు అయితే (a,b) ***గసాభా*** × (a,b) ***కసాగు*** = ***a* × *b*** అని పరిశీలించవచ్చు. ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగించి రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల గసాభాను ముందు మనం కనుగొన్నట్లయితే దానితో కసాగును కనుగొనవచ్చు.

AP SCERT

Example 3: Find the HCF of 96 and 404 by the prime factorisation method. Hence, find their LCM.

Solution : The prime factorisation of 96 and 404 gives :

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

Therefore, the HCF of these two integers is $2^2 = 4$.

Also, $\text{LCM}(96, 404) = \dfrac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

Example 4 : Find the HCF and LCM of 6, 72 and 120, using the prime factorisation method.

Solution : We have :

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Here, 2^1 and 3^1 are the smallest powers of the common factors 2 and 3, respectively.

So, $\text{HCF}(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 and 5^1 are the greatest powers of the prime factors 2, 3 and 5 respectively involved in the three numbers.

So, $\text{LCM}(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

Remark : Notice, $6 \times 72 \times 120 \neq \text{HCF}(6, 72, 120) \times \text{LCM}(6, 72, 120)$. So, the product of three numbers is not equal to the product of their HCF and LCM.

EXERCISE 1.1

1. Express each number as a product of its prime factors:
   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
2. Find the LCM and HCF of the following pairs of integers and verify that LCM × HCF = product of the two numbers.
   (i) 26 and 91 (ii) 510 and 92 (iii) 336 and 54
3. Find the LCM and HCF of the following integers by applying the prime factorisation method.
   (i) 12, 15 and 21 (ii) 17, 23 and 29 (iii) 8, 9 and 25
4. Given that HCF (306, 657) = 9, find LCM (306, 657).
5. Check whether 6^n can end with the digit 0 for any natural number n.
6. Explain why $7 \times 11 \times 13 + 13$ and $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ are composite numbers.

AP SCERT

ఉదాహరణ 3: కారణాంక విభజన ద్వారా 96 మరియు 404ల గ.సా.భా. ను కనుగొనండి. తద్వారా, వాటి క.సా.గు.ను కనుగొనండి.

సాధన: 96 మరియు 404 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దం

$$96 = 2^5 \times 3, \quad 404 = 2^2 \times 101$$

కాబట్టి, ఈ రెండు పూర్ణాంకాల గసాభా $2^2 = 4$.

ఇంకా, $\text{క.సా.గు } (96, 404) = \dfrac{96 \times 404}{\text{గసాభా}(96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

ఉదాహరణ 4: ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిని ఉపయోగించి 6, 72 మరియు 120 యొక్క గసాభా మరియు కసాగు లను కనుగొనండి.

సాధన: $6 = 2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ అని తెలుసు

ఇక్కడ, 2^1మరియు 3^1లు 2 మరియు 3 యొక్క కనిష్ట ఘాతాలు.

కావున, (6,72,120) గసాభా $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

మూడు సంఖ్యలలో గల ప్రధాన కారణాంకాలు 2,3,5 యొక్క గరిష్ట ఘాతాలు వరుసగా 2^3, 3^2 మరియు 5^1.

కావున, (6,72, 120) కసాగు $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

సూచన: $6 \times 72 \times 120 \neq$ (6, 72, 120) గసాభా $\times$ (6, 72, 120) క.సా.గు అని గమనించండి. కాబట్టి, మూడు సంఖ్యల లబ్దం వాటి గసాభా మరియు క.సా.గు ల లబ్దానికి సమానం కాదు.

అభ్యాసం 1.1

1. ప్రతి సంఖ్యను దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయండి.
   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
2. కింది పూర్ణసంఖ్యల జతల కసాగు, గసాభాలను కనుగొని, వాటి కసాగు × గసాభా = ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్దం పరిశీలించండి.
   (i) 26 మరియు 91 (ii) 510 మరియు 92 (iii) 336 మరియు 54
3. ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిని ఉపయోగించి కింది పూర్ణసంఖ్యల కసాగు, గసాభా కనుగొనండి.
   (i) 12, 15 మరియు 21 (ii) 17, 23 మరియు 29 (iii) 8, 9 మరియు 25
4. (306, 657) గసాభా =9 అయితే (306, 657) కసాగుని కనుగొనండి
5. n ఏదైనా సహజ సంఖ్య అయితే 6^n అనే సంఖ్య సున్నతో అంతమగునో ,లేదో సరిచూడండి.
6. $7 \times 11 \times 13 + 13$ మరియు $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ఏవిధంగా సంయుక్త సంఖ్యలు అగునో వివరించండి.

AP SCERT

7. There is a circular path around a sports field. Sonia takes 18 minutes to drive one round of the field, while Ravi takes 12 minutes for the same. Suppose they both start at the same point and at the same time, and go in the same direction. After how many minutes will they meet again at the starting point?

1.3 Revisiting Irrational Numbers

In Class IX, you were introduced to irrational numbers and many of their properties. You studied about their existence and how the rationals and the irrationals together made up the real numbers. You even studied how to locate irrationals on the number line. However, we did not prove that they were irrationals. In this section, we will prove that $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ and, in general, $\sqrt{p}$ is irrational, where p is a prime. One of the theorems, we use in our proof, is the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Recall, a number 's' is called *irrational* if it cannot be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. Some examples of irrational numbers, with which you are already familiar, are :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{etc.}$$

Before we prove that $\sqrt{2}$ is irrational, we need the following theorem, whose proof is based on the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Theorem 1.2 : *Let p be a prime number. If p divides a^2, then p divides a, where a is a positive integer.*

***Proof :** Let the prime factorisation of a be as follows :

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, where $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are primes, not necessarily distinct.

Therefore, $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p_1^2p_2^2 \ldots p_n^2$.

Now, we are given that p divides a^2. Therefore, from the Fundamental Theorem of Arithmetic, it follows that p is one of the prime factors of a^2. However, using the uniqueness part of the Fundamental Theorem of Arithmetic, we realise that the only prime factors of a^2 are $p_1, p_2, \ldots, p_n$. So p is one of $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Now, since $a = p_1 p_2 \ldots p_n$, p divides a.

We are now ready to give a proof that $\sqrt{2}$ is irrational.

The proof is based on a technique called 'proof by contradiction'. (This technique is discussed in some detail in Appendix 1).

* Not from the examination point of view.

AP SCERT

7. ఒక క్రీడామైదానం చుట్టూ వృత్తాకార మార్గం ఉంది. సోనియా దానిచుట్టూ ఒకసారి తిరగడానికి 18 నిమిషాలు పడుతుంది. కానీ అదేపనికి రవికి 12 నిమిషాల సమయం పడుతుంది. వారిద్దరూ ఒకే బిందువు నుండి, ఒకే సమయంలో మరియు ఒకే దిశలో ప్రారంభించారు అనుకుందాం. ఎన్ని నిమిషాల తరువాత వారు మళ్ళీ ప్రారంభ స్థానం వద్ద కలుస్తారు?

1.3 కరణీయ సంఖ్యల పున:పరిశీలన

9వ తరగతిలో మీకు కరణీయ సంఖ్యలు, వాటి ధర్మాలను కొన్ని పరిచయం చేయుట జరిగింది. మీరు వాటి ఉనికి గురించి మరియు అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలు కలిసి వాస్తవసంఖ్యలను ఏవిధంగా ఏర్పరుస్తాయో తెలుసుకున్నారు. మీరు సంఖ్యారేఖపై కరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించుట కూడా తెలుసుకున్నారు. కాని అవి కరణీయసంఖ్యలు ఏవిధంగా అవుతాయో నిరూపించలేదు. ఈ విభాగంలో మన $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ మరియు సాధారణంగా p ప్రధానసంఖ్య అయితే $\sqrt{p}$ కరణీయ సంఖ్య అగును నిరూపిస్తాము. ఈ నిరూపణలో మనం ఉపయోగించే సిద్ధాంతాలలో ఒకటి అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం.

ఒక సంఖ్య s ను $\frac{p}{q}$, రూపంలో రాయలేకపోతే దానిని కరణీయసంఖ్య అంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఇక్కడ p మరియు q పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$. మీకు పరిచయం ఉన్న కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots$ మొదలైనవి.

మనం $\sqrt{2}$ కరణీయసంఖ్య నిరూపించుటకు ముందు మనకు అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఆధారంగా నిరూపించబడిన ఈ క్రింది సిద్ధాంతం అవసరం.

సిద్ధాంతం 1.2: *p అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయితే a^2 ని 'p' నిశ్శేషంగా భాగిస్తే a ని 'p' నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.*

* **నిరూపణ:** a యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది అనుకుందాం.

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, ఇక్కడ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ అనేవి ప్రధాన సంఖ్యలు. అవి వేరువేరుగా ఉండవలసిన అవసరంలేదు.

అందుచే $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p_1^2p_2^2 \ldots p_n^2$ అగును.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును అనుసరించి a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగించునని ఇవ్వబడినందున a^2 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు $p_1, p_2, \ldots, p_n$ అగును.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం యొక్క ఏకత్వ భావనను అనుసరించి p అనేది $p_1, p_2, \ldots, p_n$.లలో ఒకటిగా ఉంటుంది

$a = p_1 p_2 \ldots p_n$, కావున a ని p భాగిస్తుంది.

ఇప్పుడు మనం $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుటకు సిద్ధంగా ఉన్నాము.

ఈ నిరూపణ పరోక్ష పద్ధతిలో విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ అనే పద్ధతి మీద ఆధారపడి ఉంటుంది (అనుబంధం1 లో దీని గురించి కొంత వివరించడం జరిగింది).

* పరీక్షలకు ఉద్దేశించబడినది కాదు.

AP SCERT

Theorem 1.3 : $\sqrt{2}$ *is irrational.*

Proof : Let us assume, to the contrary, that $\sqrt{2}$ is rational.

So, we can find integers r and s ($\neq 0$) such that $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.

Suppose r and s have a common factor other than 1. Then, we divide by the common factor to get $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, where a and b are coprime.

So, $b\sqrt{2} = a$.

Squaring on both sides and rearranging, we get $2b^2 = a^2$. Therefore, 2 divides a^2.

Now, by Theorem 1.3, it follows that 2 divides a.

So, we can write $a = 2c$ for some integer c.

Substituting for a, we get $2b^2 = 4c^2$, that is, $b^2 = 2c^2$.

This means that 2 divides b^2, and so 2 divides b (again using Theorem 1.3 with $p = 2$).

Therefore, a and b have at least 2 as a common factor.

But this contradicts the fact that a and b have no common factors other than 1.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $\sqrt{2}$ is rational.

So, we conclude that $\sqrt{2}$ is irrational.

Example 5 : Prove that $\sqrt{3}$ is irrational.

Solution : Let us assume, to the contrary, that $\sqrt{3}$ is rational.

That is, we can find integers a and b ($\neq 0$) such that $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

Suppose a and b have a common factor other than 1, then we can divide by the common factor, and assume that a and b are coprime.

So, $b\sqrt{3} = a$.

Squaring on both sides, and rearranging, we get $3b^2 = a^2$.

Therefore, a^2 is divisible by 3, and by Theorem 1.3, it follows that a is also divisible by 3.

సిద్ధాంతం 1.3 : $\sqrt{2}$ కరణీయసంఖ్య

నిరూపణ: దీనికి విరుద్ధంగా $\sqrt{2}$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం. కనుక $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ అయ్యేవిధంగా మనం r మరియు $s \neq 0$ పూర్ణసంఖ్యలను కనుగొనవచ్చును. r మరియు s లకు ఏదైనా సామాన్య కారణాంకం ఉంటే ఆ సామాన్య కారణం చేత భాగిస్తే మనకు $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, గా వస్తుంది. ఇందులో a మరియు b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు.

దీనినుండి $b\sqrt{2} = a$

ఇరువైపులా వర్గం చేసి, క్రమంలో అమర్చగా మనకు $2b^2 = a^2$ వస్తుంది. అనగా a^2ను 2 భాగిస్తుంది.

ఇప్పుడు సిద్ధాంతం 1.3 నుండి a ను కూడా 2 భాగిస్తుంది.

అందుచే మనం $a = 2c$ అనేది ఒక పూర్ణ సంఖ్యగా రాయవచ్చు.

ఇందులో a విలువను తిరిగి ప్రతిక్షేపించగా, మనకు $2b^2 = 4c^2$, అంటే $b^2 = 2c^2$ వస్తుంది.

అనగా b^2 ను 2 భాగిస్తుంది మరియు b ని 2 భాగిస్తుంది ($p = 2$ తో సిద్ధాంతం 1.3ను తిరిగి ఉపయోగించాలి).

అందువలన a, b లకు 2 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది.

a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు 1 తప్ప వీటిలో ఎటువంటి ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేనందున మనం ప్రతిపాదించిన $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అనే భావన విరుద్ధతకు దారి తీస్తుంది.

అందుచే $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించవచ్చును.

ఉదాహరణ 5: $\sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి

సాధన : దీనికి విరుద్ధంగా, $\sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య అని అనుకుందాం

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. అగునట్లు a మరియు b $(\neq 0)$లు వ్యవస్థితమవుతాయి.

ఒకవేళ a మరియు bలకు 1 కాకుండా మరేదైనా సామాన్య కారణాంకం ఉంటే ఆ సామాన్య కారణాంకం చేత భాగిస్తాము.

కానీ ఇచ్చుట a మరియు b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అనుకుందాం.

దీనినుండి, $b\sqrt{3} = a$.

ఇరువైపులా వర్గం చేసి, క్రమంలో అమర్చగా మనకు $3b^2 = a^2$ వస్తుంది.

అనగా a^2ను 3 భాగిస్తుంది. ఇప్పుడు సిద్ధాంతం 1.3 నుండి a^2 ను 3 భాగించుట వలన a ను కూడా 3 భాగిస్తుంది.

$b\ (b \neq 0)$

AP SCERT

So, we can write $a = 3c$ for some integer c.

Substituting for a, we get $3b^2 = 9c^2$, that is, $b^2 = 3c^2$.

This means that b^2 is divisible by 3, and so b is also divisible by 3 (using Theorem 1.3 with $p = 3$).

Therefore, a and b have at least 3 as a common factor.

But this contradicts the fact that a and b are coprime.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $\sqrt{3}$ is rational. So, we conclude that $\sqrt{3}$ is irrational.

In Class IX, we mentioned that :

- the sum or difference of a rational and an irrational number is irrational and
- the product and quotient of a non-zero rational and irrational number is irrational.

We prove some particular cases here.

Example 6 : Show that $5 - \sqrt{3}$ is irrational.

Solution : Let us assume, to the contrary, that $5 - \sqrt{3}$ is rational.

That is, we can find coprime a and b ($b \neq 0$) such that $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

Therefore, $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

Rearranging this equation, we get $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$.

Since a and b are integers, we get $5 - \frac{a}{b}$ is rational, and so $\sqrt{3}$ is rational.

But this contradicts the fact that $\sqrt{3}$ is irrational.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $5 - \sqrt{3}$ is rational.

So, we conclude that $5 - \sqrt{3}$ is irrational.

Example 7 : Show that $3\sqrt{2}$ is irrational.

Solution : Let us assume, to the contrary, that $3\sqrt{2}$ is rational.

That is, we can find coprime a and b ($b \neq 0$) such that $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

AP SCERT

అందుచే c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్యకు మనం తిరిగి $a = 3c$ గా రాయవచ్చు.

ఇందులో a విలువను ప్రతిక్షేపించగా మనకు $3b^2 = 9c^2$, అంటే $b^2 = 3c^2$ వస్తుంది.

అనగా b^2ను 3 భాగిస్తుంది మరియు bను 3 భాగిస్తుంది (సిద్ధాంతం 1.3 లో $p = 3$) ఉపయోగించి

అందువలన, a మరియు b లకు కనీసం 3 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది.

ఇది a మరియు bలు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అనేదానికి విరుద్ధం $\sqrt{3}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అని మనం తీసుకున్న సరికాని విరుద్ధతకు ఇది వ్యతిరేకం అవుతుంది. అందుకే $\sqrt{3}$ అనేది కరణీయసంఖ్యగా నిరూపించవచ్చును.

9వ తరగతిలో ఈ క్రింది విషయాలను మనం తెలుసుకున్నాము:

- ఒక కరణీయ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం ఎల్లప్పుడూ ఒక కరణీయ సంఖ్య.
- ఒకశూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య, కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం మరియు భాగఫలం ఎల్లప్పుడూ ఒక కరణీయసంఖ్య.

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలను ఇప్పుడు నిరూపిస్తాము

ఉదాహరణ 6 : $5 - \sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చూపుము.

సాధన : దీనికి విరుద్ధంగా $5 - \sqrt{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం.

$5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$., అయ్యేటట్లు a మరియు b $(b \neq 0)$లు వ్యవస్థితమవుతాయి.

కావున, $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

క్రమంలో అమర్చగా ఈ సమీకరణం నుండి $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$. అని వస్తుంది.

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $5 - \frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కావును $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును.

కానీ ఇది $\sqrt{3}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధం.

ఈ భావన ఏర్పడడానికి మనం ఊహించిన ప్రతిపాదన $5 - \sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనేది తప్పు. ఇది ఒక విరుద్ధత.

కావున $5 - \sqrt{3}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ 7: $3\sqrt{2}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అని చూపుము.

సాధన : దీనికి విరుద్ధంగా, $3\sqrt{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం.

కావున, $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. అయ్యేటట్లు a మరియు b $(b \neq 0)$ లు వ్యవస్థితమవుతాయి.

AP SCERT

Rearranging, we get $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$.

Since 3, a and b are integers, $\frac{a}{3b}$ is rational, and so $\sqrt{2}$ is rational.

But this contradicts the fact that $\sqrt{2}$ is irrational.

So, we conclude that $3\sqrt{2}$ is irrational.

EXERCISE 1.2

1. Prove that $\sqrt{5}$ is irrational.
2. Prove that $3 + 2\sqrt{5}$ is irrational.
3. Prove that the following are irrationals :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. The Fundamental Theorem of Arithmetic :

   Every composite number can be expressed (factorised) as a product of primes, and this factorisation is unique, apart from the order in which the prime factors occur.

2. If p is a prime and p divides a^2, then p divides a, where a is a positive integer.

3. To prove that $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ are irrationals.

A NOTE TO THE READER

You have seen that :

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, where p, q, r are positive integers (see Example 8). However, the following results hold good for three numbers p, q and r :

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

AP SCERT

క్రమంలో అమర్చగా, ఈ సమీకరణం నుండి $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ అని వస్తుంది.

ఇందులో 3, a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a}{3b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కావున $\sqrt{2}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును.

కానీ ఇది $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధం.

కావున, $3\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

అభ్యాసం 1.2

1. $\sqrt{5}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుము.
2. $3 + 2\sqrt{5}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుము.
3. ఈ క్రింది వాటిని కరణీయ సంఖ్యలు అని చూపుము :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈక్రింది భావనలను నేర్చుకున్నారు.

1. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం:
   ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు వాటి క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఈ ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధము ఏకైకము.
2. p అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయితే a^2ను నిశ్శేషంగా 'p' భాగిస్తే a ను కూడా 'p' నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.
3. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ లు కరణీయ సంఖ్యలు అని నిరూపించుట.

పాఠకులకు ఒక గమనిక :

మీరు దీనిని చూసారు :

p, q, r లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే గ.సా.భా $(p, q, r) \times$ క.సా.గు. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$ అగుట మీరు గమనించారు. అయినప్పటికీ మూడు సంఖ్యలు p, q, r విషయంలో ఈ క్రింది ఫలితం ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

$$\text{క.సా.గు.}(p, q, r) = \frac{p\,q\,r \times \text{గ.సా.భా}\ (p, q, r)}{\text{గ.సా.భా}\ (p, q)\ \text{గ.సా.భా}\ (q, r)\ \text{గ.సా.భా}\ (p, r)}$$

$$\text{గ.సా.భా.}(p, q, r) = \frac{p\,q\,r \times \text{క.సా.గు}\ (p, q, r)}{\text{క.సా.గు}\ (p, q)\ \text{క.సా.గు}\ (q, r)\ \text{క.సా.గు}\ (p, r)}$$

AP SCERT

F6Y6M5

POLYNOMIALS 2

2.1 Introduction

In Class IX, you have studied polynomials in one variable and their degrees. Recall that if $p(x)$ is a polynomial in x, the highest power of x in $p(x)$ is called **the degree of the polynomial** $p(x)$. For example, $4x + 2$ is a polynomial in the variable x of degree 1, $2y^2 - 3y + 4$ is a polynomial in the variable y of degree 2, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ is a polynomial in the variable x of degree 3 and $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ is a polynomial in the variable u of degree 6. Expressions like $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ etc., are not polynomials.

A polynomial of degree 1 is called a **linear polynomial**. For example, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, etc., are all linear polynomials. Polynomials such as $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$, etc., are not linear polynomials.

A polynomial of degree 2 is called a **quadratic polynomial**. The name 'quadratic' has been derived from the word 'quadrate', which means 'square'. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ are some examples of quadratic polynomials (whose coefficients are real numbers). More generally, any quadratic polynomial in x is of the form $ax^2 + bx + c$, where a, b, c are real numbers and $a \neq 0$. A polynomial of degree 3 is called a **cubic polynomial**.

AP SCERT

N6N8L8

బహుపదులు 2

AP SCERT

2.1 పరిచయం

మీరు 9వ తరగతిలో ఏక చరరాశి కలిగిన బహుపదులు గూర్చి మరియు వాటి పరిమాణాలను గూర్చి నేర్చుకున్నారు. x చరరాశిగా గల బహుపది $p(x)$ లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాన్ని **ఆ బహుపది $p(x)$ యొక్క పరిమాణం** అంటారు అని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు x చరరాశిగా గల బహుపది $4x + 2$ యొక్క పరిమాణం 1, y చరరాశిగా గల బహుపది $2y^2 - 3y + 4$ యొక్క పరిమాణం 2, x చరరాశిగా గల బహుపది $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ యొక్క పరిమాణం 3, u చరరాశిగా గల బహుపది $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ యొక్క పరిమాణం 6. $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ మొదలైనవి సమాసాలు, బహుపదులు కావు.

పరిమాణం 1 గా గల బహుపదులను **రేఖీయ బహుపదులు** అంటారు. ఉదాహరణకు $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, మొదలైనవి రేఖీయ బహుపదులు. $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ మొదలైనవి రేఖీయ బహుపదులు కావు.

పరిమాణం 2 గా గల బహుపదులను **వర్గ బహుపదులు** అంటాము. వర్గము (క్వాడ్రా) అను పదము 'వర్గము' అనే అర్థాన్నిచ్చే క్వాడ్రేట్ అనే పదం నుండి ఉద్భవించినది . అనగా వర్గము అని అర్థము. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ అనునవి వర్గ బహుపదులకు కొన్ని ఉదాహరణలు. (చరరాశి గుణకాలు వాస్తవ సంఖ్యలు). సాధారణంగా, x చరరాశి గా కలిగి, $a \neq 0$ స్థిరరాసులయిన a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు అగుచూ, $ax^2 + bx + c$, గా గల రూపాన్ని వర్గ బహుపది సాధారణ రూపం అంటాము. పరిమాణం 3 గా గల బహుపదులను **ఘన బహుపదులు** అంటాము.

Some examples of a cubic polynomial are $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}\,x^3$, $3 - x^2 + x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$. In fact, the most general form of a cubic polynomial is

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

where, a, b, c, d are real numbers and $a \neq 0$.

Now consider the polynomial $p(x) = x^2 - 3x - 4$. Then, putting $x = 2$ in the polynomial, we get $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = - 6$. The value '– 6', obtained by replacing x by 2 in $x^2 - 3x - 4$, is the value of $x^2 - 3x - 4$ at $x = 2$. Similarly, $p(0)$ is the value of $p(x)$ at $x = 0$, which is – 4.

If $p(x)$ is a polynomial in x, and if k is any real number, then the value obtained by replacing x by k in $p(x)$, is called **the value of $p(x)$ at $x = k$**, and is denoted by $p(k)$.

What is the value of $p(x) = x^2 - 3x - 4$ at $x = -1$? We have :

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

Also, note that $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$.

As $p(-1) = 0$ and $p(4) = 0$, –1 and 4 are called the zeroes of the quadratic polynomial $x^2 - 3x - 4$. More generally, a real number k is said to be a **zero of a polynomial $p(x)$**, if $p(k) = 0$.

You have already studied in Class IX, how to find the zeroes of a linear polynomial. For example, if k is a zero of $p(x) = 2x + 3$, then $p(k) = 0$ gives us $2k + 3 = 0$, i.e., $k = -\frac{3}{2}\cdot$

In general, if k is a zero of $p(x) = ax + b$, then $p(k) = ak + b = 0$, i.e., $k = \frac{-b}{a}\cdot$ So, the zero of the linear polynomial $ax + b$ is $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{(Constant term)}}{\text{Coefficient of } x}$.

Thus, the zero of a linear polynomial is related to its coefficients. Does this happen in the case of other polynomials too? For example, are the zeroes of a quadratic polynomial also related to its coefficients?

In this chapter, we will try to answer these questions. We will also study the division algorithm for polynomials.

2.2 Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial

You know that a real number k is a zero of the polynomial $p(x)$ if $p(k) = 0$. But why are the zeroes of a polynomial so important? To answer this, first we will see the **geometrical** representations of linear and quadratic polynomials and the geometrical meaning of their zeroes.

$2-x^3, x^3, \sqrt{2}x^3, 3-x^2+x^3, 3x^3-2x^2+x-1$ అనునవి కొన్ని ఘన బహుపదులకు ఉదాహరణలు. సాధారణంగా x చరరాశిగా కలిగి, స్థిరరాసులయిన a, b, c, d లు వాస్తవ సంఖ్యలు అగుచూ, $(a \neq 0)$ గా గల

$ax^3 + bx^2 + cx + d$, రూపాన్ని ఘన బహుపది సాధారణ రూపం అంటాము.

ఇప్పుడు $p(x) = x^2 - 3x - 4$ బహుపదిని తీసుకుందాం. దీనిలో $x = 2$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే $p(2) = 2^2 - 3\times2 - 4 = -6$. అనగా $x = 2$ వద్ద $x^2 - 3x - 4$ విలువ -6 అవుతుంది. అదేవిధంగా $x = 0$ను $p(x)$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే $p(o)$ విలువ -4 అవుతుంది.

x చరరాశిగా గల బహుపది $p(x)$ లో, k అను ఒక వాస్తవ సంఖ్యను 'x' కు బదులుగా ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే విలువను ***x* = *k* వద్ద వచ్చు** $p(x)$ **విలువ** అంటాము. దీనిని p (k) అని సూచిస్తాము.

$x = -1$ వద్ద బహుపది $p(x) = x^2 - 3x - 4$ అయిన $x = -1$ విలువ ఏమి అగును?

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

అలాగే $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$ అని గమనించండి.

$p(-1) = 0$ మరియు $p(4) = 0$, అయినందున -1 మరియు 4 లను $x^2 - 3x - 4$ అను వర్గ బహుపది శూన్య విలువలు అని అంటాము. సాధారణంగా, k అను ఒక వాస్తవ విలువకు $p(k) = 0$ అయిన k ను బహుపది $p(x)$ **కు శూన్య విలువ** అని అంటాము.

ఇచ్చిన రేఖీయ బహుపదికి 'శూన్యములు' ఎలా కనుగొనాలో మీరు ఇంతకు ముందే 9వ తరగతిలో నేర్చుకుని ఉన్నారు. ఉదాహరణకు k అనునది $p(x) = 2x + 3$ అను బహుపది శూన్య విలువ అయిన $p(k) = 0$ అని మనకు తెలుసు. కాబట్టి $2k + 3 = 0$ అనగా $k = -\frac{3}{2}$.

సాధారణంగా, k అనునది $p(x) = ax + b$ అను బహుపది శూన్య విలువ అయిన $p(k) = ak + b = 0$ అంటే $k = \frac{-b}{a}$. అగును. కాబట్టి రేఖీయ బహుపది $ax + b$ శూన్య విలువ $\frac{-b}{a} = \frac{-(\text{స్థిరపదము})}{x \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఈ విధంగా రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్య విలువ అనేది ఆ బహుపదిలోని చరరాశి గుణకాలతో, సంబంధం కలిగి ఉంటుంది. ఇతర బహుపదులలో కూడా ఇటువంటి సంబంధం కలిగి వుంటుందా? ఉదాహరణకు వర్గ బహుపదిలో కూడా శూన్య విలువ అనేది ఆ బహుపది గుణకాలతో సంబంధం కలిగి ఉంటుందా?

ఈ అధ్యాయంలో, మనం ఈ ప్రశ్నలకు జవాబులు తెలుసుకుందాం. బహుపదుల భాగాహార నియమాన్ని గురించి కూడా మనం నేర్చుకుంటాము.

2.2 బహుపది శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావం

$p(x)$ ఒక బహుపది, k ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన $p(k) = 0$ అయితే k ను బహుపది $p(x)$కి శూన్య విలువ అని మీకు తెలుసు కానీ, బహుపదికి శూన్య విలువలు ఎందుకంత ముఖ్యము? దీనికి సమాధానం కనుగొనేందుకు మొదటగా రేఖీయ మరియు వర్గ బహుపదులను రేఖా చిత్రాలలో ప్రాతినిధ్యపరచుట ద్వారా, ఆయా బహుపదుల శూన్యాలకు **జ్యామితీయ** అర్థాలను తెలుసుకుందాము.

AP SCERT

Consider first a linear polynomial $ax + b$, $a \neq 0$. You have studied in Class IX that the graph of $y = ax + b$ is a straight line. For example, the graph of $y = 2x + 3$ is a straight line passing through the points $(-2, -1)$ and $(2, 7)$.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

From Fig. 2.1, you can see that the graph of $y = 2x + 3$ intersects the x-axis mid-way between $x = -1$ and $x = -2$, that is, at the point $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. You also know that the zero of $2x + 3$ is $-\frac{3}{2}$. Thus, the zero of the polynomial $2x + 3$ is the x-coordinate of the point where the graph of $y = 2x + 3$ intersects the x-axis.

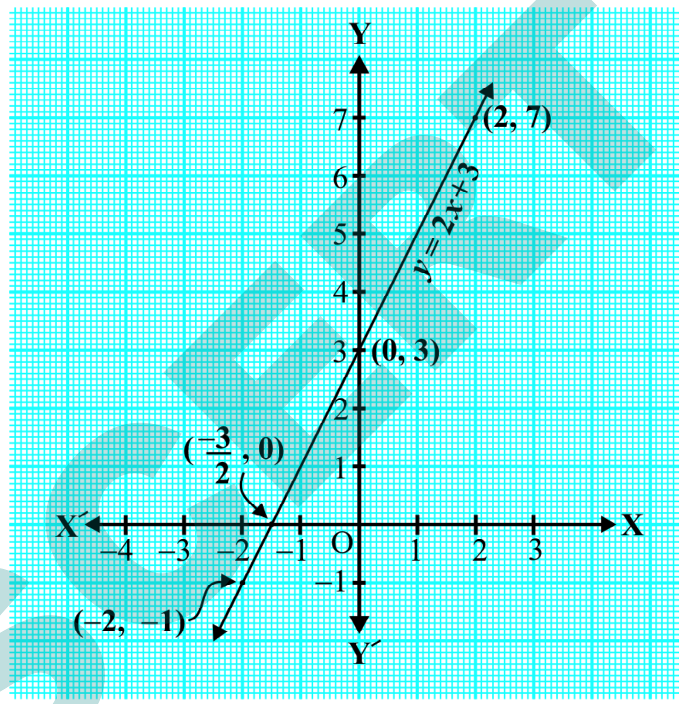


Fig. 2.1

In general, for a linear polynomial $ax + b$, $a \neq 0$, the graph of $y = ax + b$ is a straight line which intersects the x-axis at exactly one point, namely, $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. Therefore, the linear polynomial $ax + b$, $a \neq 0$, has exactly one zero, namely, the x-coordinate of the point where the graph of $y = ax + b$ intersects the x-axis.

Now, let us look for the geometrical meaning of a zero of a quadratic polynomial. Consider the quadratic polynomial $x^2 - 3x - 4$. Let us see what the graph* of $y = x^2 - 3x - 4$ looks like. Let us list a few values of $y = x^2 - 3x - 4$ corresponding to a few values for x as given in Table 2.1.

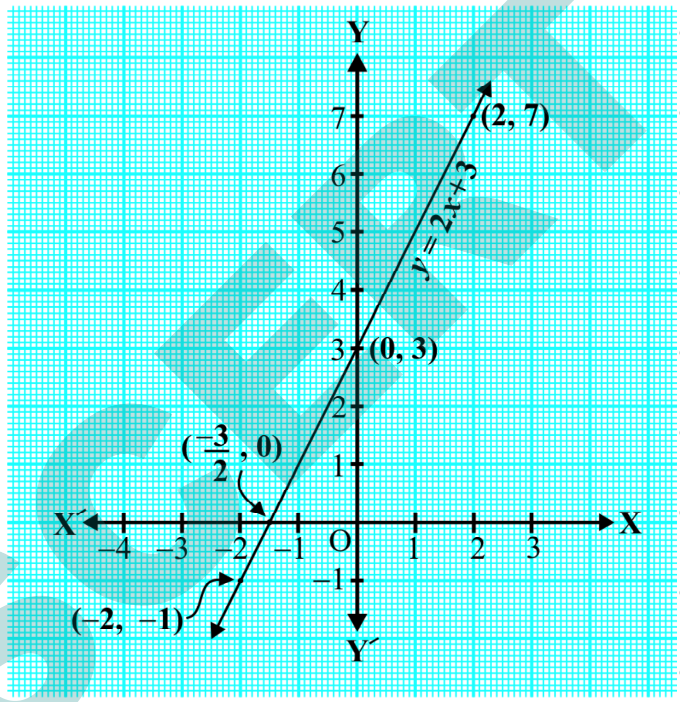
* Plotting of graphs of quadratic or cubic polynomials is not meant to be done by the students, nor is to be evaluated.

AP SCERT

$ax + b, a \neq 0$ అను రేఖీయ బహుపదిని పరిశీలించండి. $y = ax + b$ అనే బహుపది రేఖా చిత్రము ఒక సరళరేఖ అని మీరు 9వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. ఉదాహరణకు $y = 2x + 3$ అనే బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రం $(-2, -1)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువుల గుండా పోవు ఒక సరళ రేఖ.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

పటం 2.1 రేఖాచిత్రాన్ని మనం పరిశీలిస్తే $y = 2x + 3$ అనే బహుపది యొక్క రేఖ x _ అక్షాన్ని $x = -1$ మరియు $x = -2$ ల మధ్య నుండి ఖండిస్తూ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ బిందువు గుండా పోతున్నది. $2x + 3$ బహుపది శూన్య విలువ $-\frac{3}{2}$ అని మీకు తెలుసు. అంటే బహుపది $2x + 3$ యొక్క శూన్య విలువ $y = 2x + 3$ రేఖాచిత్రంలో x _ అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులో x నిరూపకము అయినది .



పటం 2.1

సాధారణంగా, $ax + b, a \neq 0$, అనే రేఖీయ బహుపదిని తీసుకుంటే $y = ax + b$ అనే రేఖా చిత్రము x-అక్షమును ఖచ్చితంగా ఒకే ఒక బిందువు $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ వద్ద ఖండిస్తుంది. కావున $ax + b, a \neq 0$, అనే రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్య విలువ ఉంటుంది. ఆ విలువ రేఖాచిత్రము $y = ax + b$ అనునది x అక్షమును ఖండించే బిందువు యొక్క x నిరూపకము అవుతుంది.

ఇప్పుడు మనం వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలకు సంబంధించిన జ్యామితీయ అర్థాన్ని తెలుసుకుందాము ఒక వర్గ బహుపది $x^2 - 3x - 4$ తీసుకుందాం. రేఖాచిత్రం $y = x^2 - 3x - 4$ యొక్క రేఖాచిత్రం* ఏవిధంగా ఉంటుందో పరిశీలిద్దాం. దీనికొరకు $y = x^2 - 3x - 4$ నందు x యొక్క విలువకు తగిన y విలువను పట్టిక 2.1లో పొందుపరచబడిన విధంగా కనుగొందాం.

* విద్యార్థుల వర్గ, ఘన బహుపదుల రేఖా చిత్రాలను గీయనవసరం లేదు మరియు వీటిని మూల్యాంకనం చేయనవసరం లేదు.

Table 2.1

x	– 2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 – 3x – 4$	6	0	– 4	– 6	– 6	– 4	0	6

If we locate the points listed above on a graph paper and draw the graph, it will actually look like the one given in Fig. 2.2.

In fact, for any quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, the graph of the corresponding equation $y = ax^2 + bx + c$ has one of the two shapes either open upwards like $\bigcup$ or open downwards like $\bigcap$ depending on whether $a > 0$ or $a < 0$. (These curves are called **parabolas**.)

You can see from Table 2.1 that –1 and 4 are zeroes of the quadratic polynomial. Also note from Fig. 2.2 that –1 and 4 are the x-coordinates of the points where the graph of $y = x^2 – 3x – 4$ intersects the x-axis. Thus, the zeroes of the quadratic polynomial $x^2 – 3x – 4$ are x-coordinates of the points where the graph of $y = x^2 – 3x – 4$ intersects the x-axis.

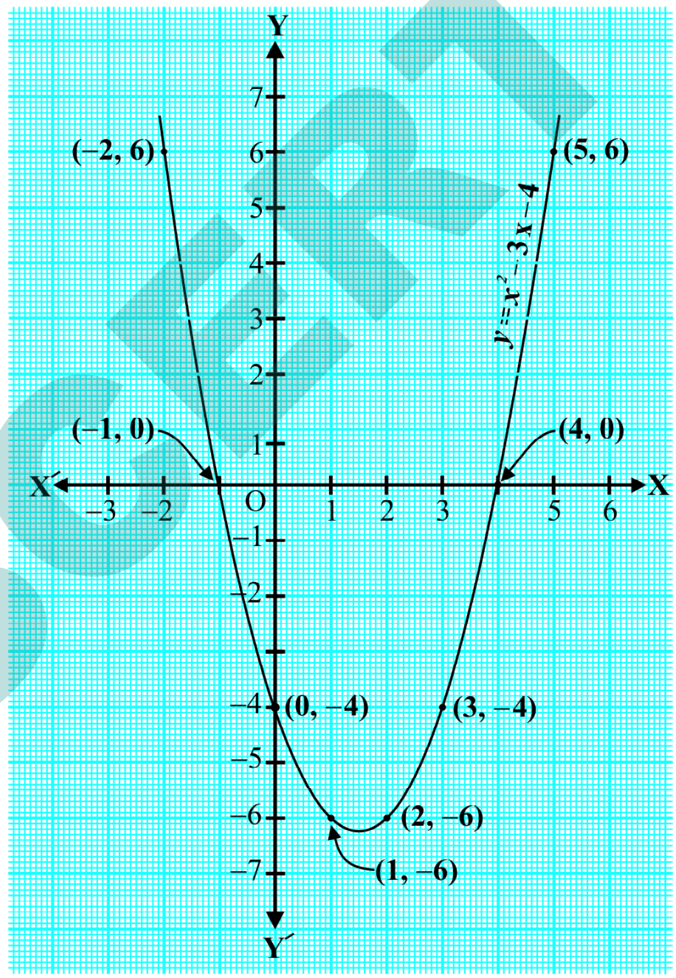


Fig. 2.2

This fact is true for any quadratic polynomial, i.e., the zeroes of a quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, are precisely the x-coordinates of the points where the parabola representing $y = ax^2 + bx + c$ intersects the x-axis.

From our observation earlier about the shape of the graph of $y = ax^2 + bx + c$, the following three cases can happen:

AP SCERT

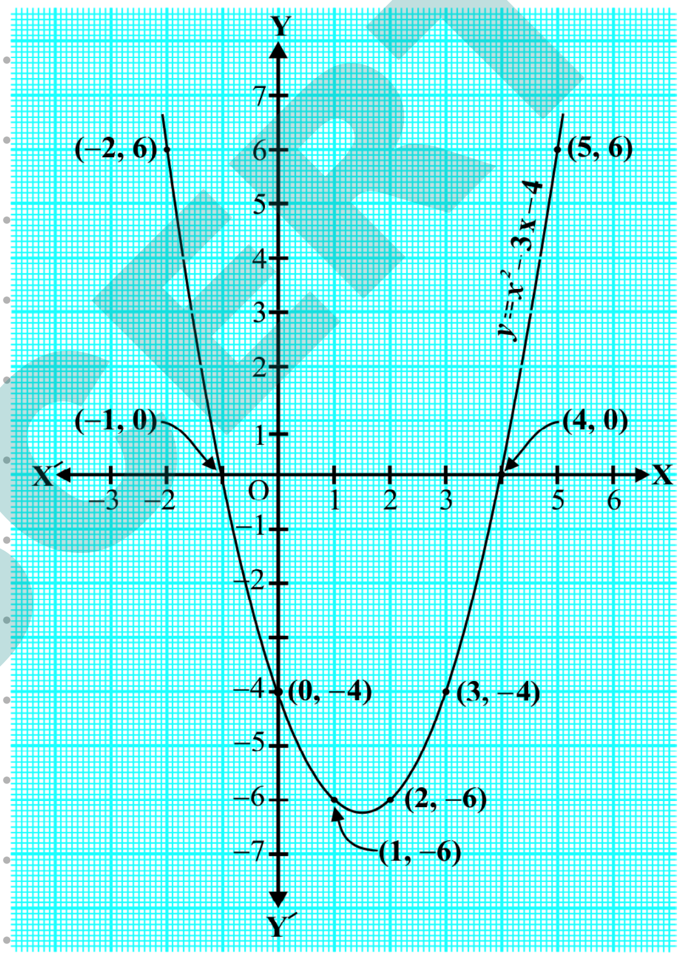
పట్టిక 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

గ్రాఫ్ కాగితము నందు పై పట్టికలో గల బిందువులను గుర్తించి, క్రమములో కలిపి చూస్తే అది సరిగ్గా పటము 2.2 వలే ఏర్పడుతుంది.

నిజానికి $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, రూపంలో గల ఏ వర్గ బహుపది యొక్క దాని సమీకరణ రూపం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖా చిత్రం. ∪ ఆకారంలో పై వైపుకుకానీ, ఆకారంలో క్రింది వైపుకు ∩ కాని వచ్చు వక్రములుగా ఉండును. ఈ ఆకారం $a > 0$ లేదా $a < 0$ విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. (ఈ వక్రాలను మనం **పరావలయాలు** అని పిలుస్తాము)

ఈ పట్టిక 2.1 నుండి మనం తీసుకున్న బహుపది శూన్యాలు -1 మరియు 4 గా మీరు గమనించవచ్చు. $y = x^2 - 3x - 4$ వక్రరేఖా చిత్రం x అక్షాన్ని ఎక్కడైతే ఖండించినదో, దాని x నిరూపకాలు -1 మరియు 4 గా గమనించవచ్చు. దీనినిబట్టి వర్గ బహుపది $x^2 - 3x - 4$ యొక్క శూన్యాలు, ఈ వర్గ బహుపది యొక్క రేఖా చిత్రము $y = x^2 - 3x - 4$, x _ అక్షమును ఖండించిన బిందువుల x _ నిరూపకాలు అయినవి.



పటం 2.2

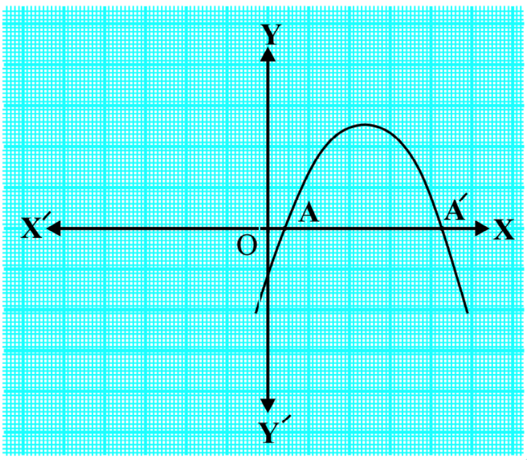
ఇది ఏ వర్గ బహుపదులకు అయినా సత్యమే. అందువల్ల , మనము సాధారణంగా $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ అనే వర్గ బహుపది శూన్యాలు, ఈ వర్గ బహుపది సమీకరణం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖా చిత్రము x_ అక్షాన్ని ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన బిందువుల x _ నిరూపకాలు అవుతాయి.

మనం పరిశీలించిన దానినిబట్టి $y = ax^2 + bx + c$, రేఖా చిత్ర ఆకారాలు ఈ క్రింది మూడు విధాలుగా ఉండవచ్చు. అవి :

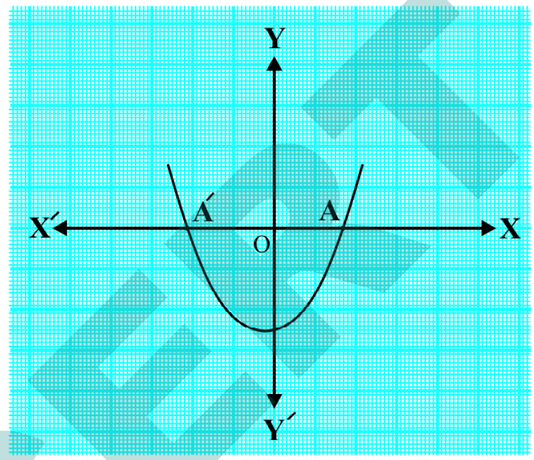
AP SCERT

Case (i) : Here, the graph cuts x-axis at two distinct points A and A′.

The x-coordinates of A and A′ are the **two zeroes** of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ in this case (see Fig. 2.3).



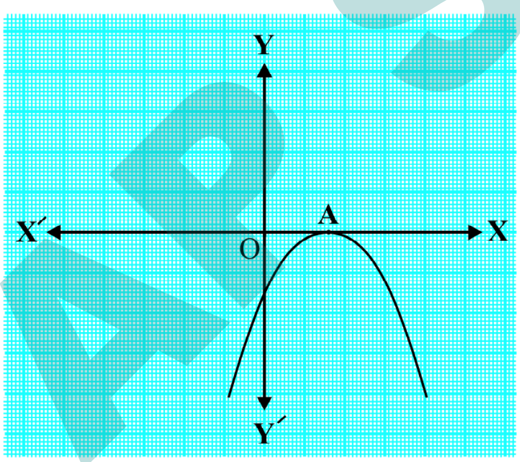
(i)



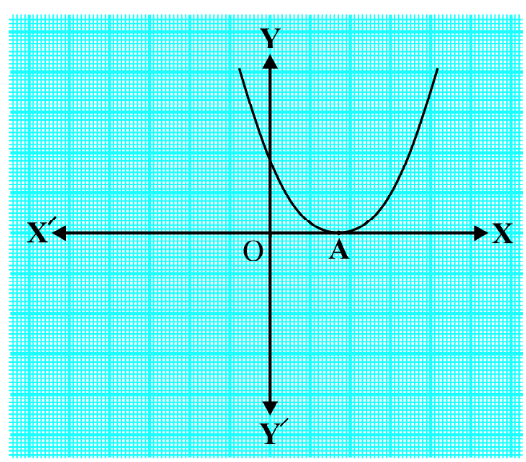
(ii)

Fig. 2.3

Case (ii) : Here, the graph cuts the x-axis at exactly one point, i.e., at two coincident points. So, the two points A and A′ of Case (i) coincide here to become one point A (see Fig. 2.4).



(i)

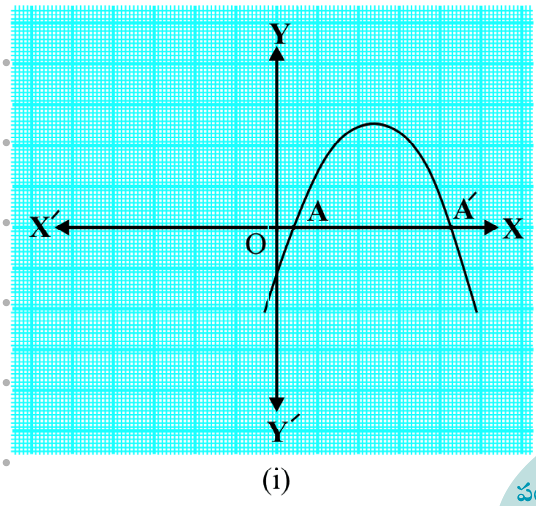


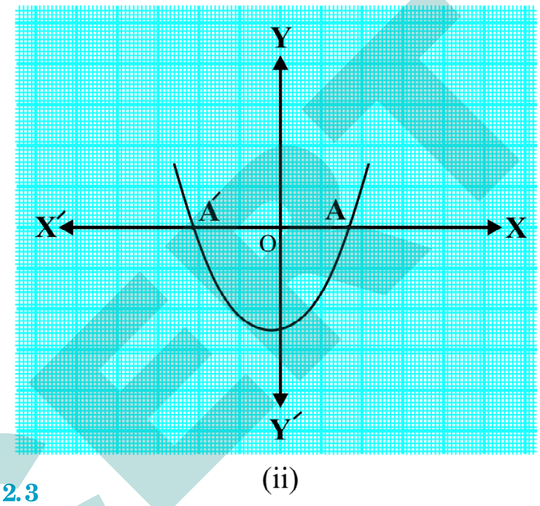
(ii)

Fig. 2.4

The x-coordinate of A is the **only zero** for the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ in this case.

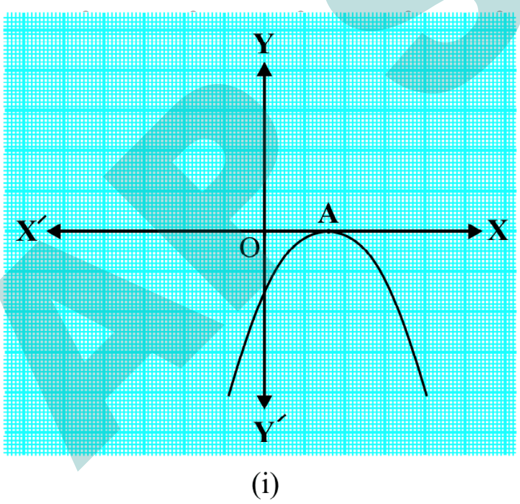
సందర్భం(i) : ఇక్కడ రేఖాచిత్రం x – అక్షమును A మరియు A^1 అను రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించినది. ఈ సందర్భములో A మరియు A^1 బిందువుల x – నిరూపకాలు $ax^2 + bx + c$ కు **రెండు శూన్యాలు** అగును. పటం 2.3ని చూడండి.

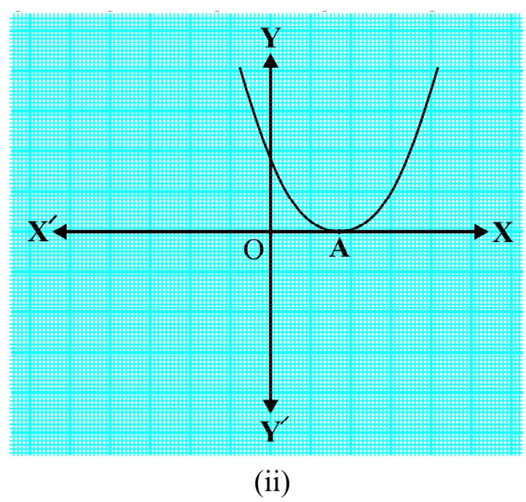




పటం. 2.3

సందర్భం (ii) : కింది రేఖాచిత్రాలలోని సందర్భములో రేఖాచిత్రము x – అక్షమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకుతోంది. అనగా రెండు బిందువులు (శూన్యాలు) ఏకీభవిస్తాయి. పై చిత్రాలలో చూపినట్లు A మరియు A^1 బిందువులు రెండూ ఏకీభవించి ఒకే బిందువు A గా మారతాయి. (పటం 2..4ని చూడండి)





పటం 2.4

ఈ సందర్భములో బిందువు 'A' యొక్క x-నిరూపకము వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ యొక్క **ఒకే ఒక శూన్యం** అగును.

Case (iii) : Here, the graph is either completely above the x-axis or completely below the x-axis. So, it does not cut the x-axis at any point (see Fig. 2.5).

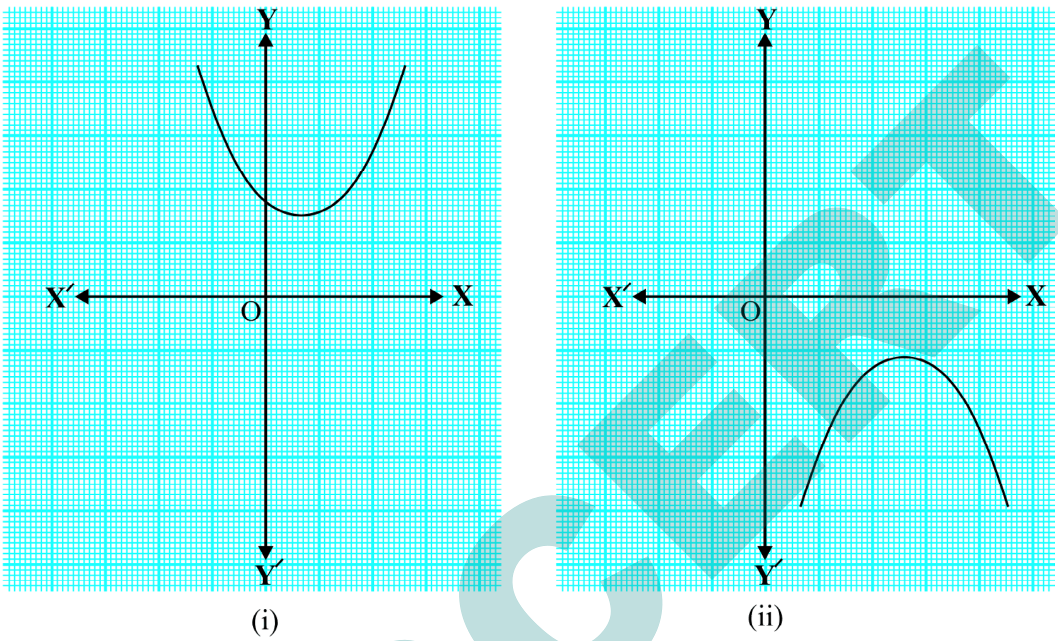


Fig. 2.5

So, the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ has **no zero** in this case.

So, you can see geometrically that a quadratic polynomial can have either two distinct zeroes or two equal zeroes (i.e., one zero), or no zero. This also means that a polynomial of degree 2 has atmost two zeroes.

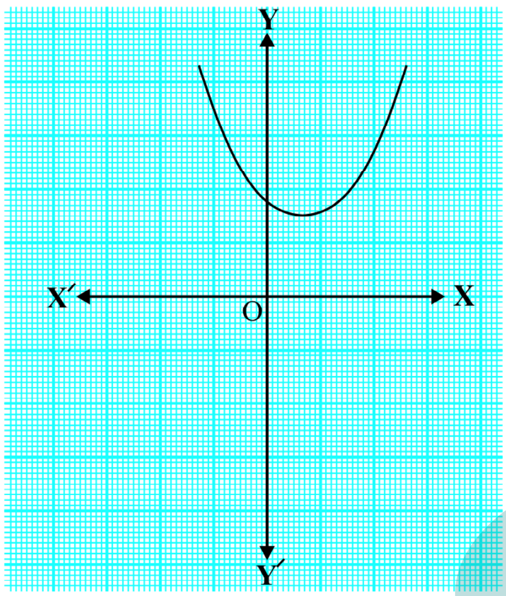
Now, what do you expect the geometrical meaning of the zeroes of a cubic polynomial to be? Let us find out. Consider the cubic polynomial $x^3 - 4x$. To see what the graph of $y = x^3 - 4x$ looks like, let us list a few values of y corresponding to a few values for x as shown in Table 2.2.

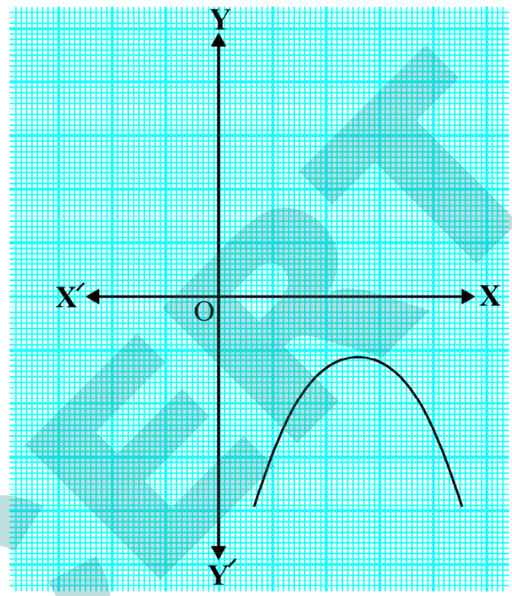
Table 2.2

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

Locating the points of the table on a graph paper and drawing the graph, we see that the graph of $y = x^3 - 4x$ actually looks like the one given in Fig. 2.6.

సందర్భం (iii) : ఈ సందర్భములో రేఖాచిత్రము x- అక్షానికి పూర్తిగా పైన కానీ లేదా క్రిందకు గాని ఉండి x-అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్దనూ ఖండించుట లేదు. (పటం 2.5ని చూడండి)





పటం 2.5

కావున, ఈ సందర్భములో వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ కు శూన్యం నిర్వచించబడదు. **(శూన్యం లేదు)**

రేఖా చిత్రాలలో ఈ మూడు సందర్భాలను పరిశీలించిన మీదట వర్గ బహుపదికి రెండు వేరు వేరు శూన్యాలు కానీ లేదా రెండు సమాన శూన్యాలు కానీ (ఒకే ఒక శూన్యం), లేదా శూన్యాలు లేకపోవచ్చని తెలుస్తుంది. రెండవ పరిమాణ బహుపదికి (వర్గ బహుపదికి) అత్యధికంగా రెండు శూన్యాలు మాత్రమే ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

ఘన బహుపదుల శూన్యాలను జ్యామితీయంగా అర్థం చేసుకోవటంలో మీరు ఏమి ఆశిస్తారు?

ఇది ఏ విధంగా సాధ్యమో కనుగొందాము. ఇందుకు గాను ఒక ఘన బహుపది $x^3 - 4x$ ను తీసుకుందాము. $y = x^3 - 4x$ రేఖా చిత్రాన్ని పరిశీలిద్దాము. పట్టిక 2.2 లో ఇచ్చిన విధముగా చరరాశి 'x' కు కొన్ని విలువలు ఇచ్చి దానికి తగిన y విలువలు కనుగొందాము.

పట్టిక 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

గ్రాఫ్ కాగితము నందు పై పట్టిక 2.2 లో గల బిందువులను గుర్తించి, క్రమములో కలిపి చూడండి. $y = x^3 - 4x$ రేఖా చిత్రం పటం 2.6 లో చూపిన విధంగా ఏర్పడుతుంది.

We see from the table above that -2, 0 and 2 are zeroes of the cubic polynomial $x^3 - 4x$. Observe that -2, 0 and 2 are, in fact, the x-coordinates of the only points where the graph of $y = x^3 - 4x$ intersects the x-axis. Since the curve meets the x-axis in only these 3 points, their x-coordinates are the only zeroes of the polynomial.

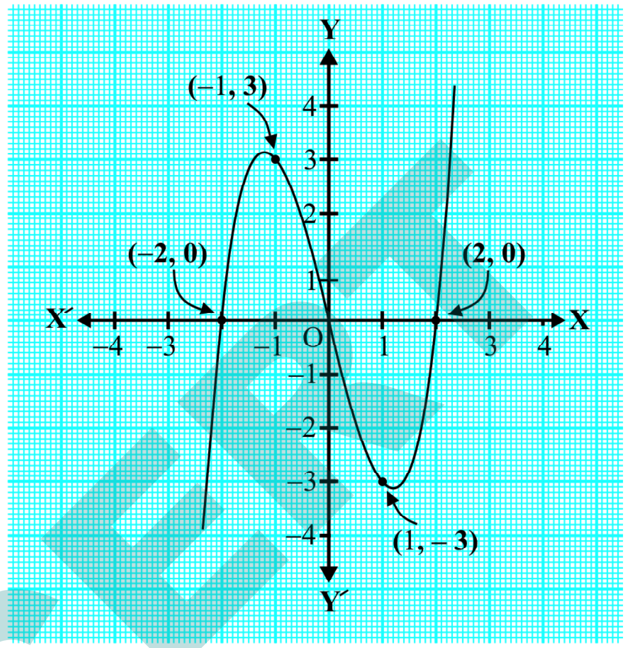


Fig. 2.6

Let us take a few more examples. Consider the cubic polynomials x^3 and $x^3 - x^2$. We draw the graphs of $y = x^3$ and $y = x^3 - x^2$ in Fig. 2.7 and Fig. 2.8 respectively.

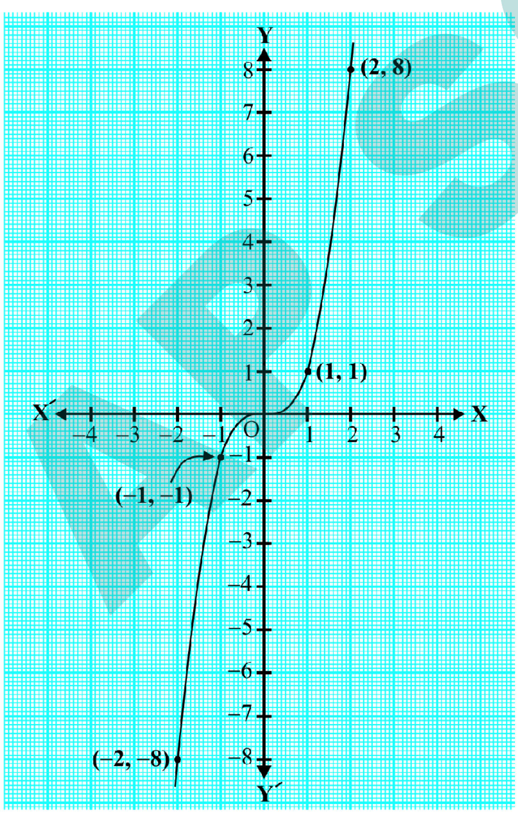


Fig. 2.7

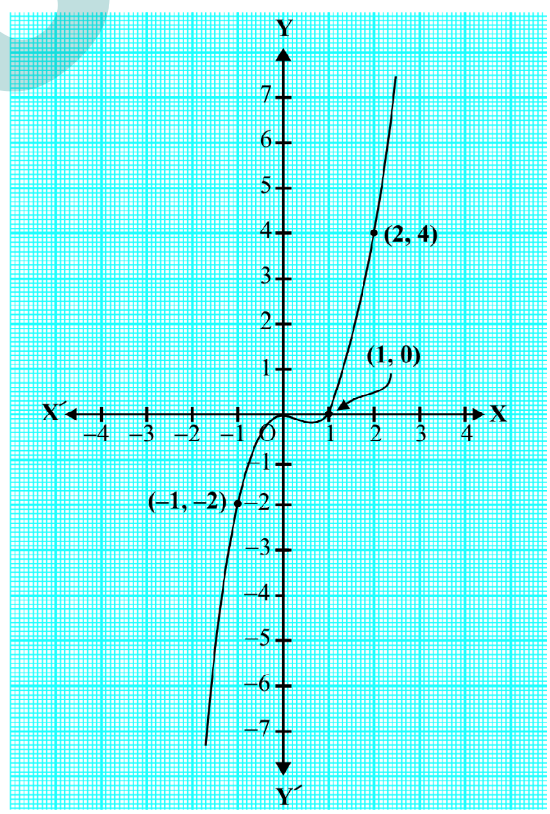
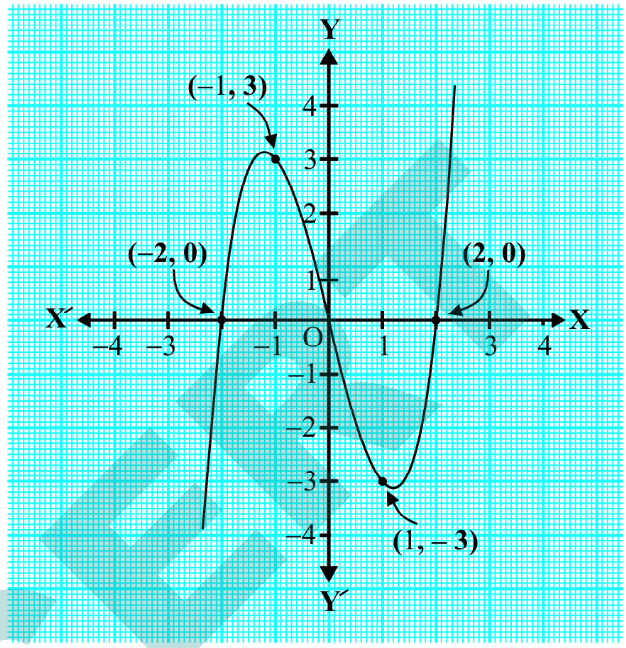


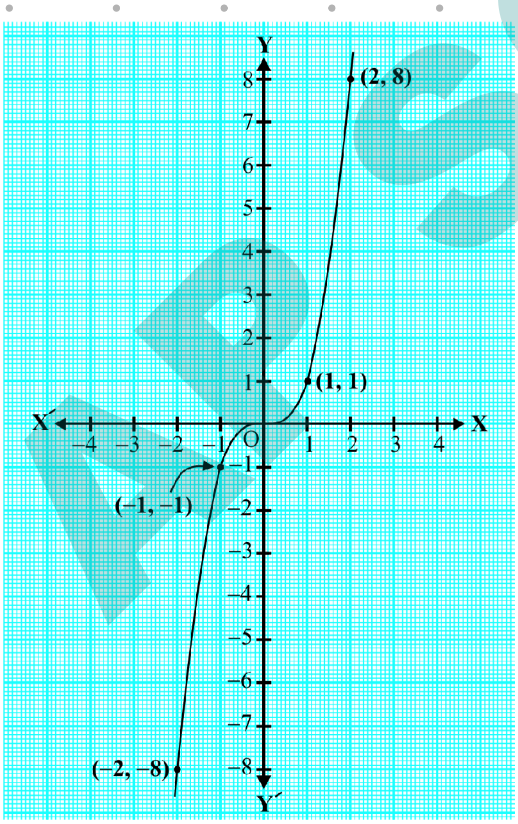
Fig. 2.8

పట్టిక 2.2 ని పరిశీలిస్తే ఘన బహుపది $x^3 - 4x$ యొక్క శూన్యాలు −2, 0 మరియు 2 అని తెలుస్తోంది. రేఖా చిత్రము $y = x^3 - 4x$ గీస్తే వచ్చు వక్రము x−అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువుల x_నిరూపకాలు −2, 0 మరియు 2 గా కలవు. ఈ వక్రము x− అక్షాన్ని మూడు బిందువుల వద్ద మాత్రమే ఖండిస్తున్నది కావున ఈ ఘన బహుపదికి మూడు శూన్యాలు అని చెప్పవచ్చు.

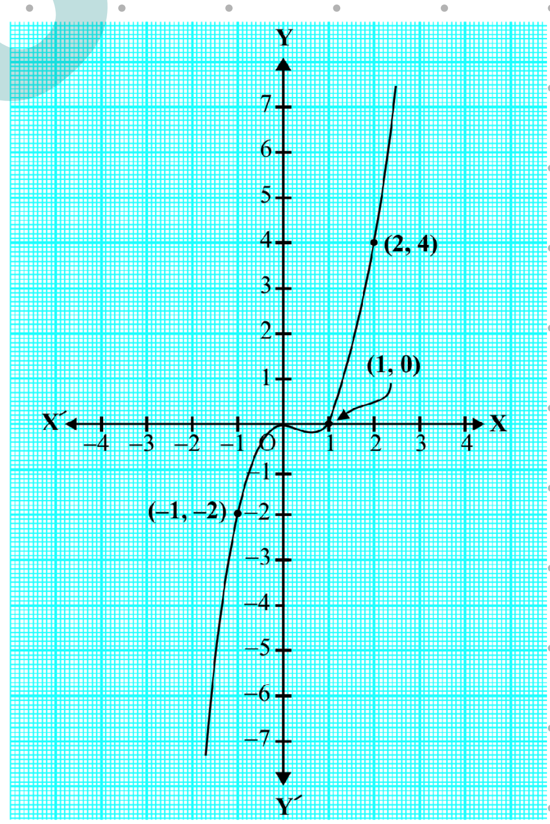
మరిన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని పరిశీలిద్దాం. x^3 , $x^3 - x^2$ అనే ఘన బహుపదులను తీసుకొందాం. $y = x^3$ (పటం 2.7), మరియు $y = x^3 - x^2$ (పటం 2.8) రేఖాచిత్రాలను గీస్తాము.



పటం 2.6



పటం 2.7



పటం 2.8

AP SCERT

Note that 0 is the only zero of the polynomial x^3. Also, from Fig. 2.7, you can see that 0 is the x-coordinate of the only point where the graph of $y = x^3$ intersects the x-axis. Similarly, since $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$, 0 and 1 are the only zeroes of the polynomial $x^3 - x^2$. Also, from Fig. 2.8, these values are the x-coordinates of the only points where the graph of $y = x^3 - x^2$ intersects the x-axis.

From the examples above, we see that there are at most 3 zeroes for any cubic polynomial. In other words, any polynomial of degree 3 can have at most three zeroes.

Remark : In general, given a polynomial $p(x)$ of degree n, the graph of $y = p(x)$ intersects the x-axis at atmost n points. Therefore, a polynomial $p(x)$ of degree n has at most n zeroes.

Example 1 : Look at the graphs in Fig. 2.9 given below. Each is the graph of $y = p(x)$, where $p(x)$ is a polynomial. For each of the graphs, find the number of zeroes of $p(x)$.

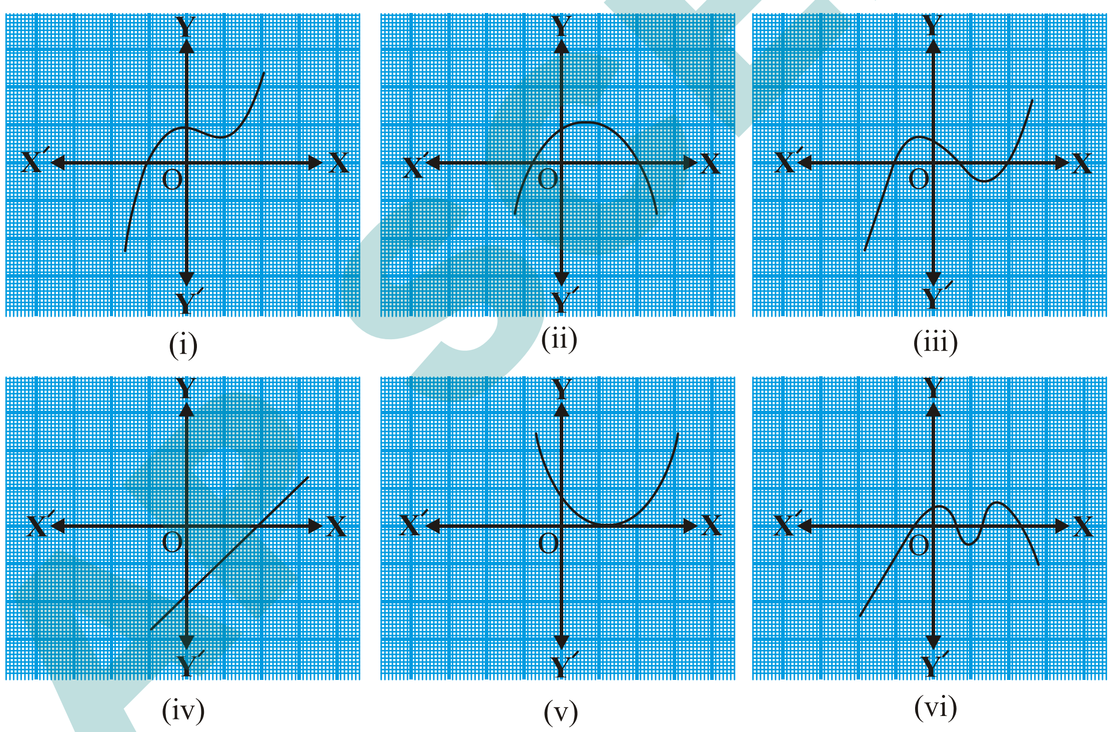


Fig. 2.9

Solution :

(i) The number of zeroes is 1 as the graph intersects the x-axis at one point only.

(ii) The number of zeroes is 2 as the graph intersects the x-axis at two points.

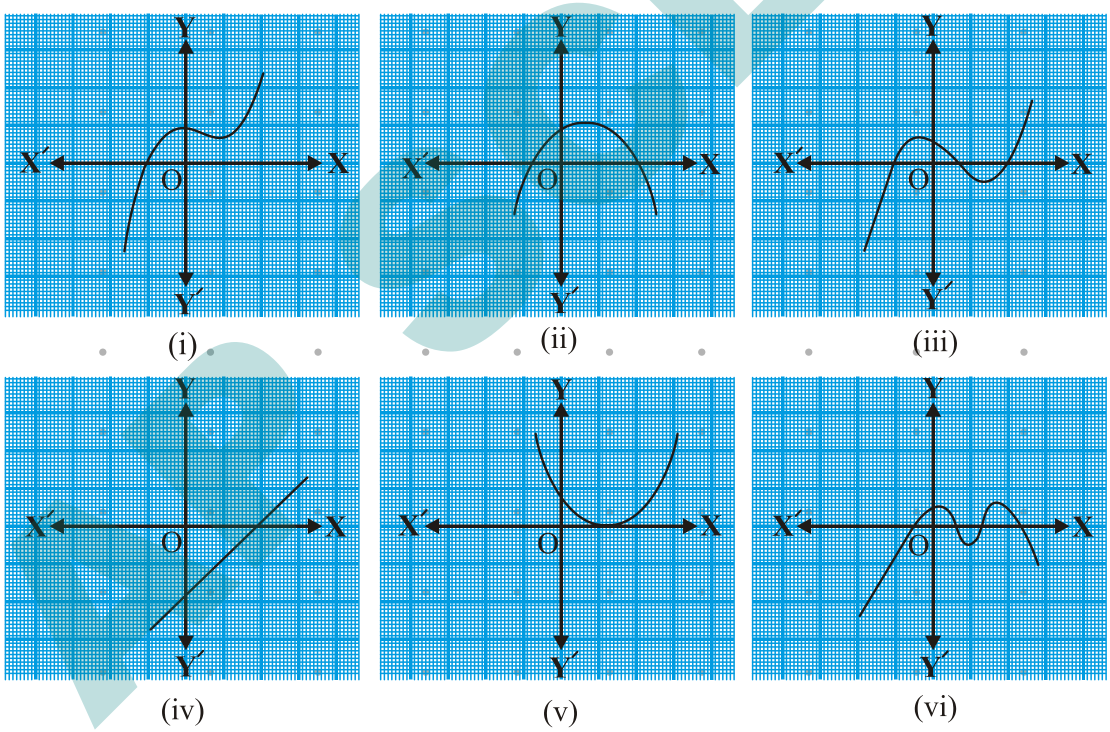
(iii) The number of zeroes is 3. (Why?)

$y = x^3$ (పటం 2.7) పరిశీలిస్తే, ఇది x-అక్షమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తోంది. ఆ బిందువు x నిరూపకము '0' కాబట్టి $y = x^3$కు ఒకే ఒక శూన్యం కలదు. అదేవిధముగా $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. ఈ బహుపది $x^3 - x^2$ శూన్య విలువలు 0 మరియు 1 అయినవి. $y = x^3 - x^2$ రేఖాచిత్రాన్ని (పటం 2.8) పరిశీలిస్తే , ఇది x- అక్షమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే వాటి x నిరూపకాలు 0 మరియు 1 అయినవి. ఈ సందర్భములో ఘన బహుపదికి రెండు శూన్యాలు వచ్చినవి.

పైన చూపిన ఉదాహరణలను మనము పరిశీలిస్తే ఒక ఘన బహుపదికి గరిష్ఠముగా మూడు శూన్యాలు వచ్చినవి. దీనిని బట్టి మూడవ పరిమాణం గల బహుపది (ఘన బహుపది) కి గరిష్ఠముగా మూడు శూన్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చును.

సూచన : 'n'వ పరిమాణం కలిగిన ఒక బహుపది $p(x)$ రేఖాచిత్రము $y = p(x)$ x- అక్షమును గరిష్ఠముగా n బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. అందుచే 'n' వ పరిమాణం కలిగిన ఒక బహుపది $p(x)$కు గరిష్ఠముగా 'n' శూన్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ 1 : క్రింది పటం 2.9లోని రేఖాచిత్రాలని గమనించండి. ప్రతి రేఖాచిత్రం $y = p(x)$ నందు $p(x)$ అనేది ఒక బహుపది. ప్రతి రేఖాచిత్రం నుండి ఆ బహుపది $p(x)$ శూన్యాల సంఖ్యను కనుగొనండి.



పటం 2.9

సాధన :

(i) రేఖాచిత్రం x- అక్షమును ఒక బిందువు వద్ద ఖండించినది. కావున శూన్యాల సంఖ్య 1

(ii) రేఖాచిత్రం x- అక్షమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించినది. కావున శూన్యాల సంఖ్య 2

(iii) శూన్యాల సంఖ్య 3 (ఎందుకు?)

(iv) The number of zeroes is 1. (Why?)

(v) The number of zeroes is 1. (Why?)

(vi) The number of zeroes is 4. (Why?)

EXERCISE 2.1

1. The graphs of $y = p(x)$ are given in Fig. 2.10 below, for some polynomials $p(x)$. Find the number of zeroes of $p(x)$, in each case.

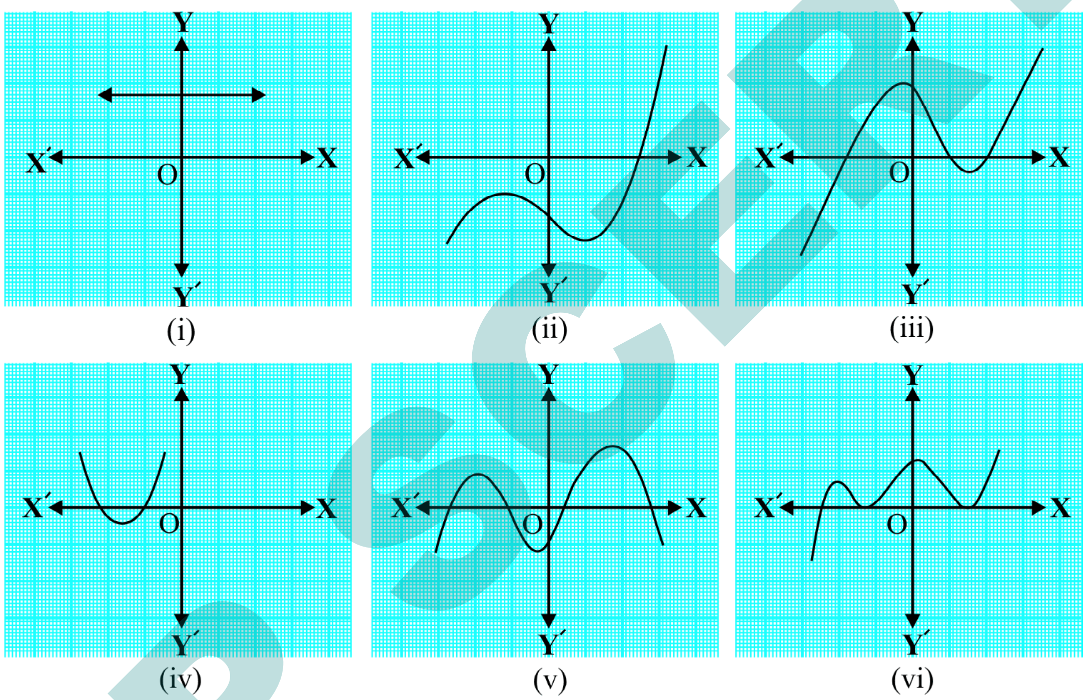


Fig. 2.10

2.3 Relationship between Zeroes and Coefficients of a Polynomial

You have already seen that zero of a linear polynomial $ax + b$ is $-\frac{b}{a}$. We will now try to answer the question raised in Section 2.1 regarding the relationship between zeroes and coefficients of a quadratic polynomial. For this, let us take a quadratic polynomial, say $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$. In Class IX, you have learnt how to factorise quadratic polynomials by splitting the middle term. So, here we need to split the middle term '$-8x$' as a sum of two terms, whose product is $6 \times 2x^2 = 12x^2$. So, we write

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$
$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

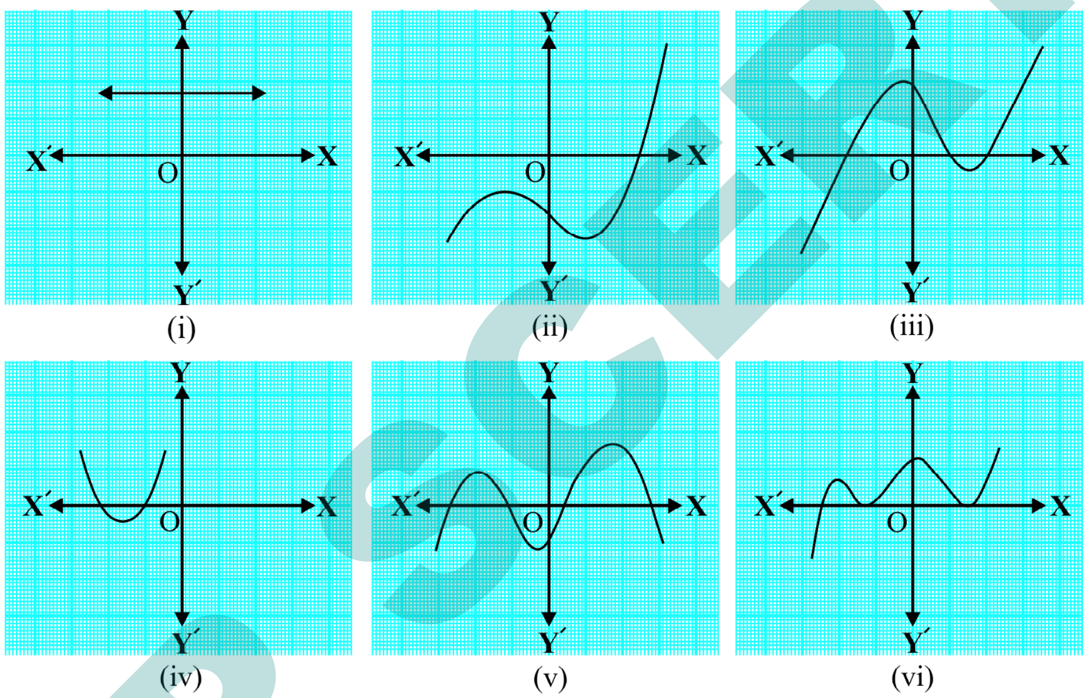
(iv) శూన్యాల సంఖ్య 1 (ఎందుకు?)

(v) శూన్యాల సంఖ్య 1 (ఎందుకు?)

(vi) శూన్యాల సంఖ్య 4 (ఎందుకు?)

అభ్యాసం 2.1

1. కొన్ని బహుపదుల $p(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రాల $y = p(x)$ పటాలు కింద పటం 2.10లో ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి సంధర్భాన్ని పరిశీలించి $p(x)$ యొక్క శూన్యాల సంఖ్యను తెలపండి?



పటం 2.10

AP SCERT

2.3 బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య సంబంధము

$a x + b,\ a \neq 0$ అను రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యము $-\dfrac{b}{a}$ అని మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు మనము విభాగము 2.1 లో ప్రస్తావించిన విషయము వర్గ బహుపది యొక్క గుణకాలకు, శూన్యాలకు గల సంబంధాన్ని తెలుసుకునే ప్రయత్నం చేద్దాము. దీని కొరకు మనము ఒక వర్గ బహుపది $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ తీసుకుందాము. మనం 9వ తరగతిలో వర్గ బహుపదిని దాని మధ్య పదాన్ని విడదీయుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేయవచ్చన్న విషయం నేర్చుకున్నాము. కావున, మనం ఇలా రాద్దాం.

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$

$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

So, the value of $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ is zero when $x - 1 = 0$ or $x - 3 = 0$, i.e., when $x = 1$ or $x = 3$. So, the zeroes of $2x^2 - 8x + 6$ are 1 and 3. Observe that :

$$\text{Sum of its zeroes} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2}$$

$$\text{Product of its zeroes} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$$

Let us take one more quadratic polynomial, say, $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$. By the method of splitting the middle term,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) -1(x + 2)$$
$$= (3x - 1)(x + 2)$$

Hence, the value of $3x^2 + 5x - 2$ is zero when either $3x - 1 = 0$ or $x + 2 = 0$, i.e., when $x = \frac{1}{3}$ or $x = -2$. So, the zeroes of $3x^2 + 5x - 2$ are $\frac{1}{3}$ and -2. Observe that :

$$\text{Sum of its zeroes} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2}$$

$$\text{Product of its zeroes} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$$

In general, if α* and β* are the zeroes of the quadratic polynomial $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, then you know that $x - \alpha$ and $x - \beta$ are the factors of $p(x)$. Therefore,

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ where } k \text{ is a constant}$$
$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

Comparing the coefficients of x^2, x and constant terms on both the sides, we get

$$a = k, \; b = -k(\alpha + \beta) \text{ and } c = k\alpha\beta.$$

This gives

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = \frac{-b}{a}},$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

* α, β are Greek letters pronounced as 'alpha' and 'beta' respectively. We will use later one more letter 'γ' pronounced as 'gamma'.

APSCERT

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ కు శూన్యములు కావాలంటే $x - 1 = 0$ లేదా $x - 3 = 0$, కావాలి. అంటే $x = 1$ లేదా $x = 3$. అగును. కావున, $2x^2 - 8x + 6$ యొక్క శూన్యాలు 1 మరియు 3 అయినవి.

శూన్యాల మొత్తము $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల లబ్ధము $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఇప్పుడు మనం మరొక వర్గ బహుపదిని తీసుకొందాము, $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$. మధ్య పదమును విభజన పద్ధతిలో విడదీసి రాయగా

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2)$$

$$= (3x - 1)(x + 2)$$

$3x^2 + 5x - 2$ శూన్యాలు కావాలంటే $3x - 1 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$ కావాలి. అంటే $x = \frac{1}{3}$ లేదా $x = -2$ అగును. అందుచే, $3x^2 + 5x - 2$ యొక్క శూన్యాలు $\frac{1}{3}$ మరియు -2. వీటి నుండి మనము దిగువ సంబంధము పరిశీలిద్దాము

శూన్యాల మొత్తము $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల లబ్ధము $= \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

సాధారణముగా, ఒక వర్గ బహుపది $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ యొక్క శూన్యాలు α* మరియు β* లు అయినచో $x - \alpha$ మరియు $x - \beta$ లు $p(x)$ యొక్క కారణాంకాలు అగును. కావున

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ ఇందు } k \text{ ఒక స్థిరాంకం,}$$

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

దీనిని వర్గ బహుపదిలో x^2, x గుణకాల, స్థిరపదముతో పోల్చగా, మనకు

$$a = k, \; b = -k(\alpha + \beta) \text{ మరియు } c = k\alpha\beta.$$

దీని నుండి

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

* α, β అనునవి గ్రీకు అక్షరాలు. వీటిని మనము వరుసగా 'ఆల్ఫా' , 'బీటా' అని పలుకుతాము. తరువాతి భావనలలో మనము అక్షరం 'γ' ని ఉపయోగిస్తాము. దీనిని 'గామా' అని పలుకుతాము.

AP SCERT

i.e., sum of zeroes $= \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2}$,

product of zeroes $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$.

Let us consider some examples.

Example 2 : Find the zeroes of the quadratic polynomial $x^2 + 7x + 10$, and verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

Solution : We have

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

So, the value of $x^2 + 7x + 10$ is zero when $x + 2 = 0$ or $x + 5 = 0$, i.e., when $x = -2$ or $x = -5$. Therefore, the zeroes of $x^2 + 7x + 10$ are -2 and -5. Now,

$$\text{sum of zeroes} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2},$$

$$\text{product of zeroes} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}.$$

Example 3 : Find the zeroes of the polynomial $x^2 - 3$ and verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

Solution : Recall the identity $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Using it, we can write:

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

So, the value of $x^2 - 3$ is zero when $x = \sqrt{3}$ or $x = -\sqrt{3}$.

Therefore, the zeroes of $x^2 - 3$ are $\sqrt{3}$ and $-\sqrt{3}$.

Now,

$$\text{sum of zeroes} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(\text{Coefficient of } x)}{\text{Coefficient of } x^2},$$

$$\text{product of zeroes} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}.$$

AP SCERT

అనగా శూన్యాల మొత్తము $= \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}.$$

కింద కొన్ని ఉదాహరణలను మనం పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 2 : $x^2 + 7x + 10$, అను వర్గ బహుపది శూన్యాలను కనుగొని , శూన్యాలకు బహుపది గుణకాలకు మధ్య సంబంధాన్ని సరిచూడండి .

సాధన :

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5) \text{ అగును}$$

కావున, $x^2 + 7x + 10$ యొక్క శూన్యాలు కావాలి అంటే $x + 2 = 0$ లేదా $x + 5 = 0$, అంటే $x = -2$ లేదా $x = -5$ అగును. కావున $x^2 + 7x + 10$ శూన్యాలు -2 మరియు -5. ఇప్పుడు

$$\text{శూన్యాల మొత్తము} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}},$$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{(\text{స్థిర పదము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}.$$

ఉదాహరణ 3 : $x^2 - 3$ అను వర్గ బహుపది శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు, బహుపది గుణకాలకు మధ్య సంబంధాన్ని సరిచూడండి .

సాధన: సర్వసమీకరణం $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ను గుర్తు తెచ్చుకోండి

దీనిని ఉపయోగించి $x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$ అని వ్రాయవచ్చు

$x^2 - 3$ యొక్క విలువ శూన్యం. కాబట్టి $x = \sqrt{3}$ లేదా $x = -\sqrt{3}$

కావున, $x^2 - 3$ యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{3}$ మరియు $-\sqrt{3}$

ఇప్పుడు,

$$\text{శూన్యాల మొత్తము} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}},$$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{(\text{స్థిర పదము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}.$$

AP SCERT

Example 4 : Find a quadratic polynomial, the sum and product of whose zeroes are – 3 and 2, respectively.

Solution : Let the quadratic polynomial be $ax^2 + bx + c$, and its zeroes be α and β. We have

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

and $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

If $a = 1$, then $b = 3$ and $c = 2$.

So, one quadratic polynomial which fits the given conditions is $x^2 + 3x + 2$.

You can check that any other quadratic polynomial that fits these conditions will be of the form $k(x^2 + 3x + 2)$, where k is real.

Let us now look at cubic polynomials. Do you think a similar relation holds between the zeroes of a cubic polynomial and its coefficients?

Let us consider $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$.

You can check that $p(x) = 0$ for $x = 4, -2, \frac{1}{2}.$ Since $p(x)$ can have atmost three zeroes, these are the zeores of $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$. Now,

$$\text{sum of the zeroes} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(\text{Coefficient of } x^2)}{\text{Coefficient of } x^3},$$

$$\text{product of the zeroes} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^3}.$$

However, there is one more relationship here. Consider the sum of the products of the zeroes taken two at a time. We have

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } x^3}.$$

In general, it can be proved that if α, β, γ are the zeroes of the cubic polynomial $ax^3 + bx^2 + cx + d$, then

AP SCERT

ఉదాహరణ 4 : ఒకవర్గ బహుపది శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్ధము వరుసగా -3 మరియు 2, అయిన ఆ వర్గ బహుపదిని కనుగొనండి.

సాధన : α మరియు β శూన్యాలుగా కలిగిన వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c$, అనుకోండి.

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

మరియు
$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

మనము $a = 1$, తీసుకుంటే $b = 3$ మరియు $c = 2$ అగును

కావున ఇచ్చిన విలువలకు లోబడి ఏర్పడే వర్గ బహుపది $x^2 + 3x + 2$ అవుతుంది.

k ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయి ఉండి, $k(x^2 + 3x + 2)$లా ఇతర వర్గ బహుపదులు కూడా ఈ నియమానికి లోబడి ఏర్పడే వర్గబహుపదులు అవుతాయి

మనము ఇప్పుడు ఘన బహుపదులను పరిశీలిద్దాము. ఘన బహుపదులలో కూడా వాటి శూన్యాలకు , బహుపది గుణకాలకు మధ్య ఇటువంటి సంబంధమే ఉంటుందని మీరు భావిస్తున్నారా ?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ అను ఘన బహుపదిని తీసుకోండి. $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ విలువల వద్ద $p(x) = 0$ అయినదని గమనించండి.

ఇప్పుడు, శూన్యాల మొత్తము $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-\,(x^2 \text{ యొక్క గుణకము})}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల లబ్ధము $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\,(\text{స్థిర పదము})}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}.$

వీటితోబాటు, ఈ ఘన బహుపదిలో మరొక ప్రత్యేక సంబంధము కలిగి ఉంది. బహుపది యొక్క శూన్యాలను రెండేసి తీసుకుని వాటి లబ్ధాల మొత్తమును పరిశీలిస్తే మనకు ఈ సంబంధము తెలుస్తుంది. అంటే

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

దీనిని సాధారణీకరించగా $ax^3 + bx^2 + cx + d$ అను ఘన బహుపది శూన్యాలు α, β, γ అయిన

AP SCERT

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

Let us consider an example.

Example 5* : Verify that 3, –1, $-\frac{1}{3}$ are the zeroes of the cubic polynomial $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$, and then verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

Solution : Comparing the given polynomial with $ax^3 + bx^2 + cx + d$, we get

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$. Further

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

Therefore, 3, –1 and $-\frac{1}{3}$ are the zeroes of $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$.

So, we take $\alpha = 3, \beta = -1$ and $\gamma = -\frac{1}{3}$.

Now,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

* Not from the examination point of view.

AP SCERT

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}.$$

కింది ఉదాహరణను మనము పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 5* : ఘన బహుపది $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1, -\frac{1}{3}$ అగునని చూపండి. బహుపది గుణకాలకు శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : ఇచ్చిన ఘన బహుపది $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ని $ax^3 + bx^2 + cx + d$, తో సరిపోల్చిన

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$. అగును. దీని నుండి

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

కావున $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1$ మరియు $-\frac{1}{3}$ అని చూపడమైనది.

కాబట్టి, $\alpha = 3, \beta = -1$ మరియు $\gamma = -\frac{1}{3}$ గా తీసుకుందాము.

ఇప్పుడు,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

* పరీక్షలకు నిర్దేశించబడినది కాదు.

AP SCERT

EXERCISE 2.2

1. Find the zeroes of the following quadratic polynomials and verify the relationship between the zeroes and the coefficients.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. Find a quadratic polynomial each with the given numbers as the sum and product of its zeroes respectively.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. Polynomials of degrees 1, 2 and 3 are called linear, quadratic and cubic polynomials respectively.
2. A quadratic polynomial in x with real coefficients is of the form $ax^2 + bx + c$, where a, b, c are real numbers with $a \neq 0$.
3. The zeroes of a polynomial $p(x)$ are precisely the x-coordinates of the points, where the graph of $y = p(x)$ intersects the x-axis.
4. A quadratic polynomial can have at most 2 zeroes and a cubic polynomial can have at most 3 zeroes.
5. If α and β are the zeroes of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$, then

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. If α, β, γ are the zeroes of the cubic polynomial $ax^3 + bx^2 + cx + d$, then

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

and $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

AP SCERT

అభ్యాసం 2.2

1. క్రింది ఇవ్వబడిన వర్గ బహుపదుల శూన్యాలను కనుగొని, బహుపది శూన్యాలకు, గుణకాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి ?

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ఒక వర్గ బహుపది శూన్యాల మొత్తము , శూన్యాల లబ్ధములు ఇవ్వబడినవి. వీటి నుంచి ఆ వర్గ బహుపదిని కనుగొనుము.

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 సారాంశము

ఈ అధ్యాయంలో, క్రింది విషయాలను నేర్చుకున్నాం :

1. 1,2 మరియు 3 పరిమాణంగా బహుపదులను వరుసగా రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులు అంటాము.

2. వాస్తవ గుణకాలు కలిగి ఉండి, x చరరాశిగా గలిగిన వర్గ బహుపది సాధారణ రూపము $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ మరియు a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

3. బహుపది శూన్యాలు, బహుపది సమీకరణం $p(x)$ యొక్క రేఖా చిత్రము $y = p(x)$, x-అక్షాన్ని ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన బిందువుల x- నిరూపకాలు అవుతాయి.

4. వర్గ బహుపదికి గరిష్ఠంగా 2 శూన్యాలు, ఘన బహుపదికి గరిష్ఠంగా 3 శూన్యాలు మాత్రమే ఉంటాయి.

5. α, β అనునవి $ax^2 + bx + c$, అను వర్గ బహుపది శూన్యాలు అయిన

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. α, β, γ అనునవి ఘన బహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d$, శూన్యాలు అయిన

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

మరియు $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$.

AP SCERT

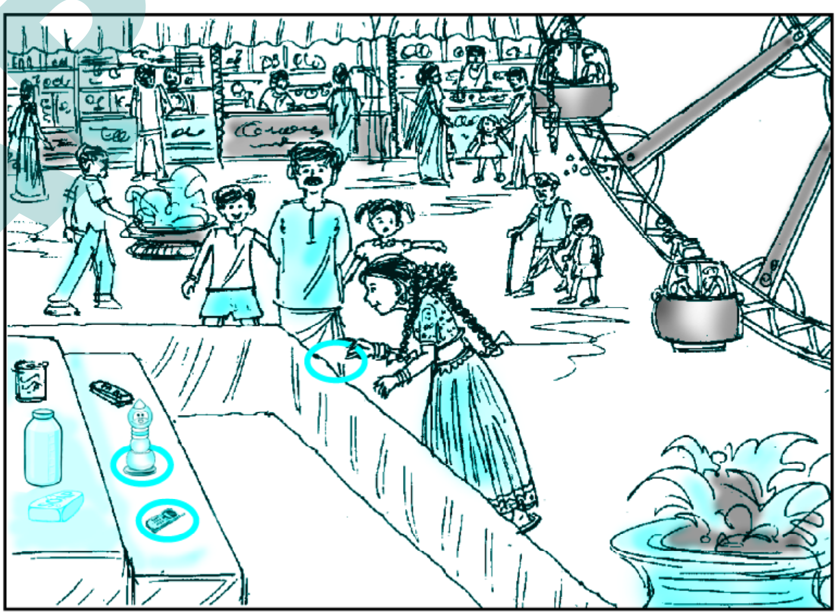
Pair of Linear Equations in Two Variables 3

3.1 Introduction

You must have come across situations like the one given below :

Akhila went to a fair in her village. She wanted to enjoy rides on the Giant Wheel and play Hoopla (a game in which you throw a ring on the items kept in a stall, and if the ring covers any object completely, you get it). The number of times she played Hoopla is half the number of rides she had on the Giant Wheel. If each ride costs ₹ 3, and a game of Hoopla costs ₹ 4, how would you find out the number of rides she had and how many times she played Hoopla, provided she spent ₹ 20.

May be you will try it by considering different cases. If she has one ride, is it possible? Is it possible to have two rides? And so on. Or you may use the knowledge of Class IX, to represent such situations as linear equations in two variables.



AP SCERT

W4W1A5

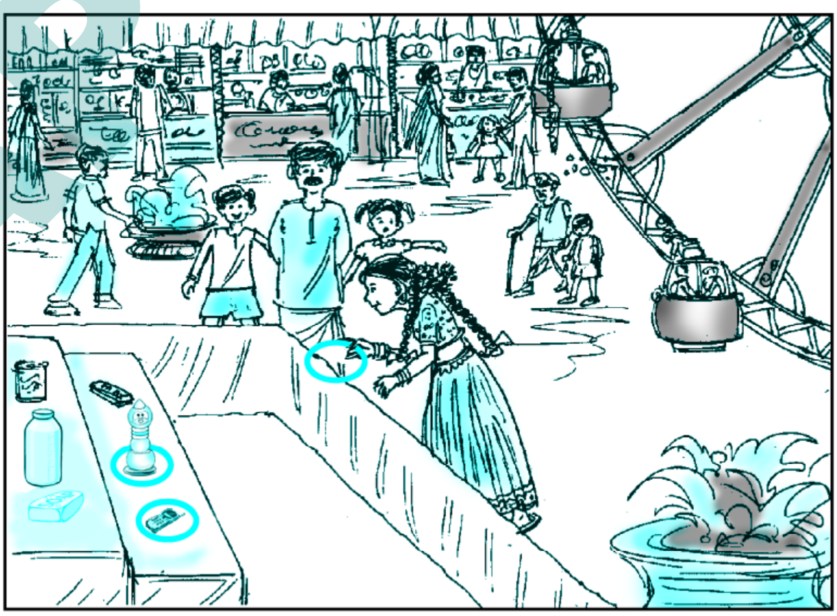
రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత 3

3.1 పరిచయం

క్రింద ఇవ్వబడినటువంటి పరిస్థితులను మీరు కూడా ఎదుర్కొని ఉంటారు:

అఖిల తన గ్రామంలో జాతరకు వెళ్ళింది. ఆమె జెయింట్ వీల్ పై సవారీలను ఆస్వాదించాలని మరియు హూప్లా హుషారుగా ఆడాలని కోరుకుంది. (స్టాల్‌లో పెట్టిన వస్తువుల పైకి రింగు వేసినప్పుడు, ఆ రింగు ఏ వస్తువును కవర్ చేస్తుందో, ఆ వస్తువును మీరు పొందుతారు). ఆమె హూప్లా ఆడిన ఆటల సంఖ్య ఆమె జెయింట్ వీల్ పై చేసిన సవారీల సంఖ్యలో సగం ఉంటుంది. ఒక్కొక్క సవారీ ఖరీదు రూ. 3 మరియు హూప్లా ఆట ఖరీదు ₹4. ఆమె ₹20 కేటాయించిన, ఆమె ఎన్ని సవారీలు చేసినది మరియు ఎన్నిసార్లు హోప్లా ఆడినది నీవు ఎలా కనుగొనగలవు?

వేర్వేరు పరిస్థితులను తీసుకోవడం ద్వారా మీరు ప్రయత్నించవచ్చు. ఆమెకు ఒక సవారీ ఉంటే ఇది సాధ్యమా? రెండు సవారీలు ఉంటే చేయడం సాధ్యమేనా? ఆ విధంగా లేదా ఈ పరిస్థితులను రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలుగా ప్రాతినిధ్యం చేయడానికి మీరు 9వ తరగతిలోని విధానాన్ని ఉపయోగించవచ్చును.



AP SCERT

Let us try this approach.

Denote the number of rides that Akhila had by x, and the number of times she played Hoopla by y. Now the situation can be represented by the two equations:

$$y = \frac{1}{2}x \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

Can we find the solutions of this pair of equations? There are several ways of finding these, which we will study in this chapter.

3.2 Graphical Method of Solution of a Pair of Linear Equations

A pair of linear equations which has no solution, is called an *inconsistent* pair of linear equations. A pair of linear equations in two variables, which has a solution, is called a *consistent* pair of linear equations. A pair of linear equations which are equivalent has infinitely many distinct common solutions. Such a pair is called a *dependent* pair of linear equations in two variables. Note that a dependent pair of linear equations is always consistent.

We can now summarise the behaviour of lines representing a pair of linear equations in two variables and the existence of solutions as follows:

(i) the lines may intersect in a single point. In this case, the pair of equations has a unique solution (consistent pair of equations).

(ii) the lines may be parallel. In this case, the equations have no solution (inconsistent pair of equations).

(iii) the lines may be coincident. In this case, the equations have infinitely many solutions [dependent (consistent) pair of equations].

Consider the following three pairs of equations.

(i) $x - 2y = 0$ and $3x + 4y - 20 = 0$ (The lines intersect)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ and $4x + 6y - 18 = 0$ (The lines coincide)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ and $2x + 4y - 12 = 0$ (The lines are parallel)

Let us now write down, and compare, the values of $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ and $\frac{c_1}{c_2}$ in all the three examples.

Here, a_1, b_1, c_1 and a_2, b_2, c_2 denote the coefficents of equations given in the general form in Section 3.2.

ఈ విధానాన్ని ప్రయత్నిద్దాం.

అఖిల చేసిన సవారీల సంఖ్యను x తోనూ మరియు ఆమె హూప్లా ఆట ఆడిన సంఖ్యను y తోనూ చూపిద్దాము. ఇప్పుడు ఈ పరిస్థితిని రెండు సమీకరణాలలో తెలియజేద్దాము:

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

మనము ఈ సమీకరణాల జతకు సాధనలను కనుగొనగలమా? వీటిని కనుగొనే అనేక విధానాలను ఈ అధ్యాయంలో నేర్చుకుందాం.

3.2 గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధనను కనుగొనుట

ఒక జత రేఖీయ సమీకరణలకు సాధన లేకపోతే వాటిని అసంగత *రేఖీయ* సమీకరణాల జత అంటారు. రెండు చరరాశులలోని రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన ఉన్నట్లయితే, వాటిని *సంగత* రేఖీయ సమీకరణాల జత అని పిలుస్తారు. రేఖీయ సమీకరణాల జత తుల్యాలు అయిన వాటికి అనంతమైన విభిన్న సాధనలు ఉంటాయి. అలాంటి జతలను రెండు చరరాశులలో పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాల జత అంటారు. పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాల జత ఎల్లప్పుడూ సంగతము అని గమనించగలరు.

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు సూచించే రేఖల స్వభావము మరియు సాధ్యమయ్యే సాధనలను దిగువన తెలుసుకుందాము:

(i) రెండు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. ఈ సందర్భంలో ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఒకే ఒక సాధన ఉంటుంది. (సంగత సమీకరణాల జత).

(ii) రెండు రేఖలు సమాంతరాలు. ఈ సందర్భంలో ఆ సమీకరణాల జతకు సాధన లేదు. (అసంగత సమీకరణాల జత).

(iii) రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి. ఈ సందర్భంలో సమీకరణాల జతకు అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి. [పరస్పరాధారిత (సంగత) సమీకరణాల జత].

క్రింది మూడు సమీకరణాల జతలను పరిగణించండి.

(i) $x - 2y = 0$ మరియు $3x + 4y - 20 = 0$ (ఇవి ఖండన రేఖలు)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ మరియు $4x + 6y - 18 = 0$ (ఇవి ఏకీభవించే రేఖలు)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ మరియు $2x + 4y - 12 = 0$ (ఇవి సమాంతర రేఖలు)

మనం ఇప్పుడు $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ మరియు $\frac{c_1}{c_2}$ విలువలను ఈ మూడు ఉదాహరణలలో వ్రాసుకుందాం మరియు పోల్చుదాం. ఇక్కడ, a_1, b_1, c_1 మరియు a_2, b_2, c_2 లు విభాగం 3.2 నందు ఇవ్వబడిన సమీకరణాల సాధారణ రూపం యొక్క గుణకాలు.

AP SCERT

Table 3.1

Sl No.	Pair of lines	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	Compare the ratios	Graphical representation	Algebraic interpretation
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	Intersecting lines	Exactly one solution (unique)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	Coincident lines	Infinitely many solutions
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	Parallel lines	No solution

From the table above, you can observe that if the lines represented by the equation

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

and $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

are (i) intersecting, then $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

(ii) coincident, then $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(iii) parallel, then $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

In fact, the converse is also true for any pair of lines. You can verify them by considering some more examples by yourself.

Let us now consider some more examples to illustrate it.

Example 1 : Check graphically whether the pair of equations

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

and $$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

is consistent. If so, solve them graphically.

Solution : Let us draw the graphs of the Equations (1) and (2). For this, we find two solutions of each of the equations, which are given in Table 3.2

పట్టిక 3.1

క్ర. సం.	సరళరేఖల జతలు	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	నిష్పత్తుల పోలిక	సూచించే గ్రాఫ్	బీజగణిత వివరణ
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ఖండన రేఖలు	ఒకే ఒక సాధన (ఏకైక)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ఏకీభవించే రేఖలు	అనంతమైన అనేక సాధనలు
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	సమాంతర రేఖలు	సాధన లేదు

పై పట్టిక నుండి, మీరు గమనించిన రేఖీయ సమీకరణాలు

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

మరియు $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

సమీకరణాలచే సూచించే రేఖలు (i) ఖండన రేఖలు, అయిన $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

(ii) ఏకీభవించే రేఖలు, అయిన $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(iii) సమాంతరాలు, అయిన $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

ఏ రెండు జతల రేఖలకైనా విపర్యయము కూడా సత్యమే అవుతుంది. వీటిని మరికొన్ని ఉదాహరణలను పరిగణనలోనికి తీసుకొనుట ద్వారా కూడా మీరు పరిశీలించవచ్చును.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని పరిశీలిద్దాం. వాస్తవికత నిర్ధారించుకుందాం.

ఉదాహరణ 1 : గ్రాఫ్ ద్వారా సరిచూడడం

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

మరియు $$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగతం అవునో కాదో సరిచూడండి. అయినచో గ్రాఫ్ ద్వారా సాధించండి.

సాధన : (1) మరియు (2) సమీకరణాలకు మనం గ్రాఫ్ గీద్దాం. దీనికోసం పట్టిక 3.2 లో ఇచ్చిన విధంగా ప్రతి సమీకరణానికి రెండు సాధనలను కనుగొందాం.

AP SCERT

Table 3.2

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	– 4	–2

Plot the points A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) and Q(3, – 2) on graph paper, and join the points to form the lines AB and PQ as shown in Fig. 3.1.

We observe that there is a point B (6, 0) common to both the lines AB and PQ. So, the solution of the pair of linear equations is $x = 6$ and $y = 0$, i.e., the given pair of equations is consistent.

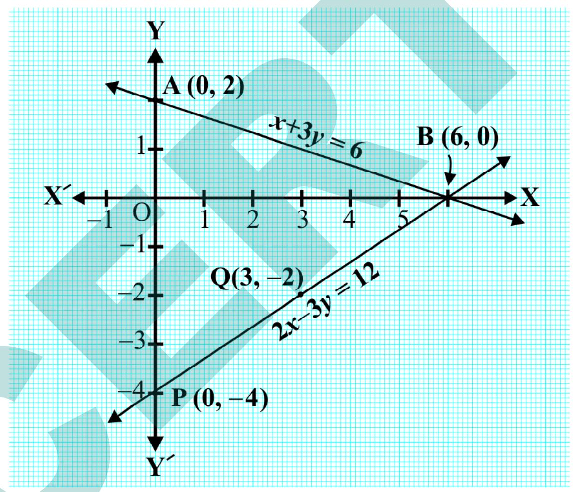


Fig. 3.1

Example 2 : Graphically, find whether the following pair of equations has no solution, unique solution or infinitely many solutions:

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

Solution : Multiplying Equation (2) by $\frac{5}{3}$, we get

$$5x - 8y + 1 = 0$$

But, this is the same as Equation (1). Hence the lines represented by Equations (1) and (2) are coincident. Therefore, Equations (1) and (2) have infinitely many solutions.

Plot few points on the graph and verify it yourself.

Example 3 : Champa went to a 'Sale' to purchase some pants and skirts. When her friends asked her how many of each she had bought, she answered, "The number of skirts is two less than twice the number of pants purchased. Also, the number of skirts is four less than four times the number of pants purchased". Help her friends to find how many pants and skirts Champa bought.

AP SCERT

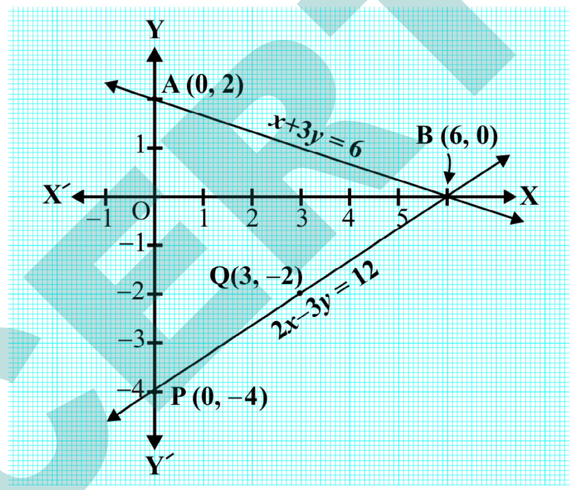
పట్టిక 3.2

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	-4	-2

గ్రాఫ్ పేపర్ పైన A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) మరియు Q(3, – 2) బిందువులను గుర్తించండి మరియు పటం 3.1 లో సూచించినట్లుగా AB మరియు PQ అను రేఖలు ఏర్పడునట్లు బిందువులను కలపండి.

రెండు రేఖలు AB మరియు PQ లకు B (6, 0) ఉమ్మడి బిందువుగా ఉన్నట్లు మనం గమనించాము. కావున, రేఖీయ సమీకరణాల జతకు $x = 6$ మరియు $y = 0$, సాధన అవుతుంది. అనగా ఇవ్వబడిన సమీకరణాల జత సంగతం అవుతాయి.



పటం 3.1

ఉదాహరణ 2 : క్రింది సమీకరణాల జతలకు సాధన లేదా, ఏకైక సాధన ఉన్నదా, అనంతమైన సాధనలు ఉన్నాయా గ్రాఫ్ ద్వారా కనుగొనండి:

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

సాధన : సమీకరణం (2) ను $\frac{5}{3}$, చే గుణించగా

$5x - 8y + 1 = 0$ పొందుతాము.

అయితే ఇది సమీకరణం (1)కి సమానంగా ఉన్నది. కావున సమీకరణం (1) మరియు (2)లను సూచించే రేఖలు ఏకీభవించే విధంగా ఉన్నవి. కావున సమీకరణం (1) మరియు (2) లు సూచించే రేఖలు అనంత సాధనలు కలిగి ఉంటాయి.

గ్రాఫ్ పైన కొన్ని బిందువులను గుర్తించి మీరే స్వయంగా పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 3 : చంపా కొన్ని ప్యాంటులను మరియు స్కర్ట్‌లను కొనడానికి దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె మిత్రురాలు ఒక్కొక్కటి ఎన్ని కొన్నావని అడగగా "కొన్న స్కర్ట్‌ల సంఖ్య, ప్యాంట్ల సంఖ్యకు రెట్టింపు కన్నా రెండు తక్కువ. అలాగే, స్కర్ట్‌ల సంఖ్య ప్యాంట్ల సంఖ్యకు నాలుగు రెట్ల కన్నా నాలుగు తక్కువ" అని చెప్పింది. చంపా ఎన్ని ప్యాంట్లు మరియు ఎన్ని స్కర్ట్ లు కొన్నదో తెలుసుకోవడానికి ఆమె మిత్రురాలికి సహాయం చేయండి.

AP SCERT

Solution : Let us denote the number of pants by x and the number of skirts by y. Then the equations formed are :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

and

$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

Let us draw the graphs of Equations (1) and (2) by finding two solutions for each of the equations. They are given in Table 3.3.

Table 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	– 2

x	0	1
$y = 4x - 4$	– 4	0

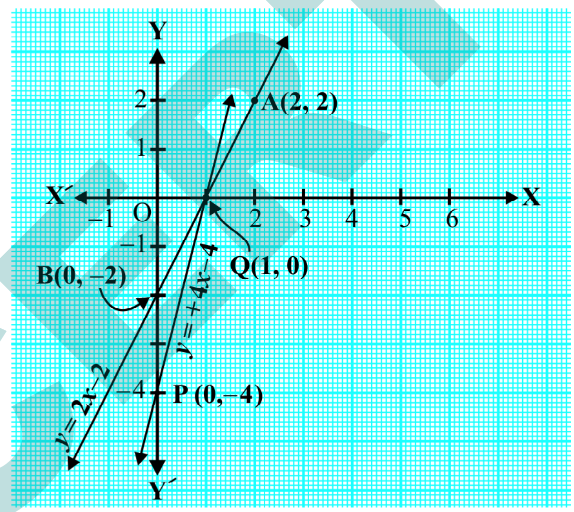


Fig. 3.2

Plot the points and draw the lines passing through them to represent the equations, as shown in Fig. 3.2.

The two lines intersect at the point (1, 0). So, $x = 1$, $y = 0$ is the required solution of the pair of linear equations, i.e., the number of pants she purchased is 1 and she did not buy any skirt.

Verify the answer by checking whether it satisfies the conditions of the given problem.

EXERCISE 3.1

1. Form the pair of linear equations in the following problems, and find their solutions graphically.

   (i) 10 students of Class X took part in a Mathematics quiz. If the number of girls is 4 more than the number of boys, find the number of boys and girls who took part in the quiz.

AP SCERT

సాధన : ప్యాంట్‌ల సంఖ్య x మరియు స్కర్టుల సంఖ్య y అనుకొనుము. అప్పుడు ఏర్పడిన సమీకరణాలు :

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

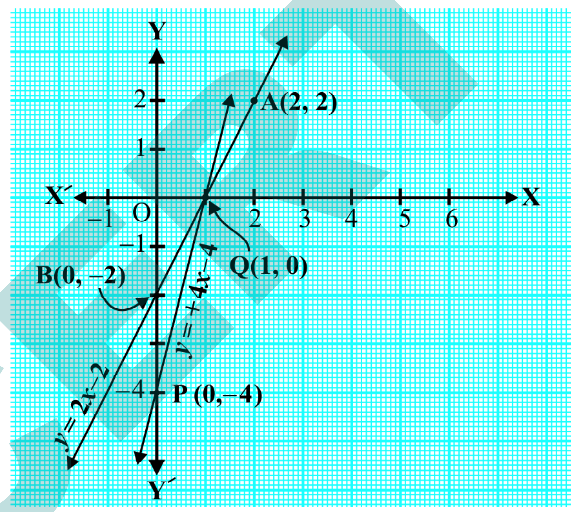
మరియు
$$y = 4x - 4 \quad (2)$$

సమీకరణాలు (1) మరియు (2) లకు, ప్రతి సమీకరణానికి రెండు సాధనలు కనుగొనడం ద్వారా గ్రాఫ్‌ను గీయండి. అవి పట్టిక 3.3లో ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	– 2

x	0	1
$y = 4x - 4$	– 4	0



పటం 3.2

పటము 3.2 లో సూచించిన విధంగా సమీకరణాలను ప్రాతినిధ్యము వహించే విధంగా బిందువులను గుర్తించి, వాటి గుండా పోవునట్లు సమీకరణాలను ప్రాతినిధ్యం చేసే రేఖలను గీయండి.

ఈ రెండు రేఖలు (1, 0) బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. కావున, $x = 1, y = 0$ అనేది రేఖీయ సమీకరణాల జతకు కావలసిన సాధన అవుతుంది. అనగా, కొన్న ప్యాంట్ల సంఖ్య 1 మరియు ఆమె ఏ స్కర్టులు కొనలేదు.

సమస్యలోని నిబంధనలను తృప్తి పరుస్తుందో లేదో **సరి చూడడం** ద్వారా ఫలితాన్ని ధృవపరచుకోండి.

అభ్యాసం 3.1

1. దిగువ ఇవ్వబడిన సమస్యలకు రేఖీయ సమీకరణాల జతలను తయారు చేయండి మరియు గ్రాఫ్ పద్ధతిలో వాటి సాధనలను కనుగొనండి.

   (i) 10 మంది పదవ తరగతి విద్యార్థులు ఒక గణిత క్విజ్ లో పాల్గొన్నారు. దానిలో పాల్గొన్న బాలికల సంఖ్య కన్నా బాలుర సంఖ్య 4 తక్కువ. అయిన క్విజ్ లో పాల్గొన్న బాలురు మరియు బాలికల సంఖ్యను కనుగొనుము.

(ii) 5 pencils and 7 pens together cost ₹ 50, whereas 7 pencils and 5 pens together cost ₹ 46. Find the cost of one pencil and that of one pen.

2. On comparing the ratios $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ and $\frac{c_1}{c_2}$, find out whether the lines representing the following pairs of linear equations intersect at a point, are parallel or coincident:

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. On comparing the ratios $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ and $\frac{c_1}{c_2}$, find out whether the following pair of linear equations are consistent, or inconsistent.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. Which of the following pairs of linear equations are consistent/inconsistent? If consistent, obtain the solution graphically:

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. Half the perimeter of a rectangular garden, whose length is 4 m more than its width, is 36 m. Find the dimensions of the garden.

6. Given the linear equation $2x + 3y - 8 = 0$, write another linear equation in two variables such that the geometrical representation of the pair so formed is:

(i) intersecting lines
(ii) parallel lines
(iii) coincident lines

7. Draw the graphs of the equations $x - y + 1 = 0$ and $3x + 2y - 12 = 0$. Determine the coordinates of the vertices of the triangle formed by these lines and the x-axis, and shade the triangular region.

AP SCERT

(ii) 5 పెన్సిళ్ళు మరియు 7 కలముల ధరల మొత్తం విలువ ₹ 50. అలాగే 7 పెన్సిళ్ళు మరియు 5 కలముల ధరల మొత్తం విలువ ₹46. ఒక పెన్సిల్ మరియు ఒక కలము ధరలను కనుగొనుము.

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ మరియు $\frac{c_1}{c_2}$, నిష్పత్తులను పోల్చి క్రింద ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయో, సమాంతరాలు అవుతాయో లేదా ఏకీభవిస్తాయో కనుగొనుము:

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ మరియు $\frac{c_1}{c_2}$, నిష్పత్తులను పోల్చి, క్రింద ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతలు సంగతాలు లేదా అసంగతాలో కనుగొనుము.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. క్రింది రేఖీయ సమీకరణాల జతలలో ఏవి సంగతాలు/ ఏవి అసంగతాలు? సంగతాలైనచో వాటి సాధనలను గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా రాబట్టండి:

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. వెడల్పు కన్నా పొడవు 4 మీటర్లు ఎక్కువ కలిగిన ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార తోట చుట్టుకొలతలో సగము 36 మీటర్లు అయిన, ఆ తోట కొలతలు కనుగొనుము.

6. ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణము $2x + 3y - 8 = 0$ తో జ్యామితీయంగా క్రింది షరతులకు సరిపోవు రెండవ జత రేఖీయ సమీకరణాలన్ని వ్రాయండి:

(i) ఖండన రేఖలు (ii) సమాంతర రేఖలు

(iii) ఏకీభవించే రేఖలు

7. $x - y + 1 = 0$ మరియు $3x + 2y - 12 = 0$ సమీకరణాలకు గ్రాఫును గీయండి. ఈ రేఖలతో మరియు x- అక్షంతో ఏర్పడిన త్రిభుజ శీర్షాలను గుర్తించండి మరియు త్రిభుజాకార ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయండి.

AP SCERT

3.3 Algebraic Methods of Solving a Pair of Linear Equations

In the previous section, we discussed how to solve a pair of linear equations graphically. The graphical method is not convenient in cases when the point representing the solution of the linear equations has non-integral coordinates like $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$, (–1.75, 3.3), $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$, etc. There is every possibility of making mistakes while reading such coordinates. Is there any alternative method of finding the solution? There are several algebraic methods, which we shall now discuss.

3.3.1 Substitution Method : We shall explain the method of substitution by taking some examples.

Example 4 : Solve the following pair of equations by substitution method:

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

Solution :

Step 1 : We pick either of the equations and write one variable in terms of the other. Let us consider the Equation (2) :

$$x + 2y = 3$$

and write it as

$$x = 3 - 2y \quad (3)$$

Step 2 : Substitute the value of x in Equation (1). We get

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

i.e.,

$$21 - 14y - 15y = 2$$

i.e.,

$$-29y = -19$$

Therefore,

$$y = \frac{19}{29}$$

Step 3 : Substituting this value of y in Equation (3), we get

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

Therefore, the solution is $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$.

AP SCERT

3.3 రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి బీజగణిత పద్ధతులు

గత విభాగము నందు గ్రాఫ్ పద్ధతిలో రేఖీయ సమీకణాలను సాధించే విధానాన్ని చర్చించుకున్నాము. కానీ రేఖీయ సమీకరణాల సాధన సూచించే బిందు నిరూపకాలు $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$, ... వలే పూర్ణ సంఖ్యలు కానప్పుడు గ్రాఫ్ పద్ధతి అంత అనుకూలమైనది కాదు. ఆ విధమైన బిందువుల నిరూపకాలను గుర్తించేటప్పుడు తప్పు జరిగే అవకాశాలు చాలా ఎక్కువ. మరి ఈ సాధన కనుగొనడానికి ఏవైనా ఇతర పద్ధతులు ఉన్నాయా? అనేక బీజగణిత పద్ధతులు ఉన్నాయి. వాటిని ఇప్పుడు చర్చించుకుందాం :

3.3.1 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి : కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకోవడం ద్వారా ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని మనం ఇప్పుడు వివరించుకుందాం.

ఉదాహరణ 4 : క్రింది రేఖీయ సమీకరణాల జతను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి:

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

సాధన :

సోపానం 1 : ఏదైనా ఒక సమీకరణాన్ని తీసుకోవాలి మరియు ఒక చరరాశిని వేరొక చరరాశి పదాలలో వ్రాయాలి. (2)వ సమీకరణాన్ని పరిగణలోనికి తీసుకుందాము:

$$x + 2y = 3$$

మరియు $x = 3 - 2y$ గా రాద్దాం. (3)

సోపానం 2 : x యొక్క విలువను సమీకరణం (1) లో ప్రతిక్షేపించాలి.

$7(3 - 2y) - 15y = 2$ పొందుతాము.

i.e., $21 - 14y - 15y = 2$

i.e., $-29y = -19$

అందువలన, $y = \frac{19}{29}$

సోపానం 3 : y విలువను సమీకరణం (3) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$ పొందుతాము.

అందువలన, కావలసిన సాధన $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$

AP SCERT

Verification : Substituting $x = \frac{49}{29}$ and $y = \frac{19}{29}$, you can verify that both the Equations (1) and (2) are satisfied.

To understand the substitution method more clearly, let us consider it stepwise:

Step 1 : Find the value of one variable, say y in terms of the other variable, i.e., x from either equation, whichever is convenient.

Step 2 : Substitute this value of y in the other equation, and reduce it to an equation in one variable, i.e., in terms of x, which can be solved. Sometimes, as in Examples 9 and 10 below, you can get statements with no variable. If this statement is true, you can conclude that the pair of linear equations has infinitely many solutions. If the statement is false, then the pair of linear equations is inconsistent.

Step 3 : Substitute the value of x (or y) obtained in Step 2 in the equation used in Step 1 to obtain the value of the other variable.

Remark : We have **substituted** the value of one variable by expressing it in terms of the other variable to solve the pair of linear equations. That is why the method is known as the *substitution method*.

Example 5 : Solve the following question—Aftab tells his daughter, "Seven years ago, I was seven times as old as you were then. Also, three years from now, I shall be three times as old as you will be." (Isn't this interesting?) Represent this situation algebraically and graphically by the method of substitution.

Solution : Let s and t be the ages (in years) of Aftab and his daughter, respectively. Then, the pair of linear equations that represent the situation is

$$s - 7 = 7\,(t - 7), \text{ i.e., } \quad s - 7t + 42 = 0 \qquad (1)$$

and

$$s + 3 = 3\,(t + 3), \text{ i.e., } \quad s - 3t = 6 \qquad (2)$$

Using Equation (2), we get $s = 3t + 6$.

Putting this value of s in Equation (1), we get

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

i.e.,

$$4t = 48, \text{ which gives } t = 12.$$

Putting this value of t in Equation (2), we get

$$s = 3\,(12) + 6 = 42$$

సరిచూడడం : $x = \frac{49}{29}$ మరియు $y = \frac{19}{29}$ లను రెండు సమీకరణాలు (1) మరియు (2) లలో ప్రతిక్షేపించి అవి సంతృప్తి పరుస్తాయని సరి చూడవచ్చును.

ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని మరింత స్పష్టంగా అర్థం చేసుకునేందుకు, సోపానాలవారీగా పరిశీలిద్దాం:

సోపానం 1 : ఏదో ఒక అనుకూలమైన సమీకరణమునందు ఏదో ఒక చరరాశి విలువను వేరొక చరరాశి పదాలలో కనుగొనుము. చరరాశి y ని చరరాశి x పదాలలో రాయాలి అనుకుందాము.

సోపానం 2 : చరరాశి y విలువను మరొక రెండవ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించాలి. మరియు ఒక చరరాశిలో సాధించే విధంగా సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించాలి. అనగా x పదాలలో సాధించే విధంగా కొన్ని సందర్భాలలో క్రింది ఉదాహరణలు 9, 10లలో వలె చరరాశులు లేని ప్రవచనాలు పొందుతారు. ఆ ప్రవచనం సత్యమైతే ఆ రేఖీయ సమీకరణాలకు అనంత సాధనలు ఉంటాయని మీరు పేర్కొనవచ్చును. ఆ ప్రవచనం అసత్యమైతే ఆ రేఖీయ సమీకరణాలు అసంగతము.

సోపానం 3 : రెండవ చరరాశి విలువను పొందడానికి సోపానం రెండులో పొందిన x (లేదా y) విలువను సోపానం (2) లో తీసుకున్న సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించాలి.

సూచన : రేఖీయ సమీకరణాల జతలను సాధించేందుకు ఒక చరరాశి విలువను మరొక చరరాశి పదాలలో వ్యక్తపరిచి, **ప్రతిక్షేపిస్తున్నాము.** అందువలన ఈ పద్ధతిని *ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి* అని అంటాము.

ఉదాహరణ 5 : దిగువ సమస్యను సాధించండి. అఫ్తాబ్ తన కూతురుతో ఇలా చెప్పాడు: "ఏడు సంవత్సరాల క్రితం నా వయస్సు అప్పటి నీ వయస్సుకు ఏడు రెట్లు, అలాగే ఇప్పటినుండి మూడు సంవత్సరాల తర్వాత నా వయస్సు నీ వయస్సుకు మూడు రెట్లు ఉంటుంది" (ఇది ఆసక్తికరంగా లేదా?) ఈ పరిస్థితులను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో బీజగణితం ప్రకారం మరియు గ్రాఫికల్‌గాను వ్యక్తపరచండి.

సాధన : అఫ్తాబ్ మరియు ఆయన కూతురు వయసులను s మరియు t అనుకొనుము. అప్పుడు పై పరిస్థితులను వ్యక్తపరిచే సమీకరణాలు

$s - 7 = 7(t - 7)$, అనగా, $\qquad s - 7t + 42 = 0 \qquad (1)$

మరియు $s + 3 = 3(t + 3)$, అనగా, $\qquad s - 3t = 6 \qquad (2)$

సమీకరణము (2)ను ఉపయోగించి $s = 3t + 6$ పొందుతాం.

సమీకరణ (1)లో s విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$, పొందుతాం. (వస్తుంది)

అనగా, $4t = 48$, దీని నుండి $t = 12$ వస్తుంది.

ఈ t విలువను సమీకరణం (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$s = 3(12) + 6 = 42$ వస్తుంది.

So, Aftab and his daughter are 42 and 12 years old, respectively.

Verify this answer by checking if it satisfies the conditions of the given problems.

Example 6 : In a shop the cost of 2 pencils and 3 erasers is ₹9 and the cost of 4 pencils and 6 erasers is ₹18. Find the cost of each pencil and each eraser.

Solution : The pair of linear equations formed were:

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

We first express the value of x in terms of y from the equation $2x + 3y = 9$, to get

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

Now we substitute this value of x in Equation (2), to get

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

i.e., $$18 - 6y + 6y = 18$$

i.e., $$18 = 18$$

This statement is true for all values of y. However, we do not get a specific value of y as a solution. Therefore, we cannot obtain a specific value of x. This situation has arisen because both the given equations are the same. Therefore, Equations (1) and (2) have *infinitely many solutions*. We cannot find a unique cost of a pencil and an eraser, because there are many common solutions, to the given situation.

Example 7 : Two rails are represented by the equations
$x + 2y - 4 = 0$ and $2x + 4y - 12 = 0$. Will the rails cross each other?

Solution : The pair of linear equations formed were:

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

We express x in terms of y from Equation (1) to get

$$x = 4 - 2y$$

Now, we substitute this value of x in Equation (2) to get

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

AP SCERT

కాబట్టి, అఫ్తాబ్ మరియు అతని కూతురు వయస్సులు వరుసగా 42 మరియు 12 సంవత్సరాలు.

ఈ సమస్యలో ఇవ్వబడిన నిబంధనలను సంతృప్తి పరుస్తున్నాయా లేదో మీకు వచ్చిన సమాధానముతో సరి చూడండి.

ఉదాహరణ 6 : ఒక దుకాణంలో 2 పెన్సిళ్ళు మరియు 3 రబ్బర్ల విలువ ₹9 మరియు 4 పెన్సిళ్ళు మరియు 6 రబ్బర్ల విలువ ₹18. అయిన ఒక్కొక్క పెన్సిల్ మరియు ఒక్కొక్క రబ్బర్ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : ఏర్పడే రేఖీయ సమీకరణాల జత:

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

మొదటగా మనము $2x + 3y = 9$ సమీకరణం నుండి x యొక్క విలువను y పదాలలో వ్యక్తపరచగా,

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \text{ ని పొందుతాము.} \qquad (3)$$

ఇప్పుడు ఈ x విలువను సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపించుదాం

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

i.e., $18 - 6y + 6y = 18$

i.e., $18 = 18$

ఈ ప్రకటన అన్ని y విలువలకు సత్యం అవుతుంది. అయితే సాధనగా y కి ఒక నిర్దిష్టమైన విలువను పొందలేము. అందువలన x కి కూడా ఒక నిర్దిష్టమైన విలువను కనుగొనలేము. రెండు సమీకరణాలు ఒకటే అవడం వలన ఈ పరిస్థితి ఏర్పడింది. అందువలన (1) మరియు (2) సమీకరణాలకు అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి. ఒక పెన్సిల్ మరియు ఒక రబ్బరు విలువకు ఏకైక విలువను కనుగొనలేము. ఎందుకనగా ఇవ్వబడిన పరిస్థితులకు అనంతమైన ఉమ్మడి సాధనలు కలవు.

ఉదాహరణ 7 : రెండు పట్టాలు $x + 2y - 4 = 0$ మరియు $2x + 4y - 12 = 0$ లచే ప్రాతినిధ్యం చేయబడ్డాయి. ఈ పట్టాలు ఒకదానికొకటి కలుస్తాయా?

సాధన : ఏర్పడే రేఖీయ సమీకరణాల జత:

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

సమీకరణం (1) నుండి x విలువను y లో వ్యక్తపరచగా

$$x = 4 - 2y$$

ఇప్పుడు ఈ x విలువను సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

AP SCERT

i.e., $8 - 12 = 0$

i.e., $-4 = 0$

which is a false statement.

Therefore, the equations do not have a common solution. So, the two rails will not cross each other.

EXERCISE 3.2

1. Solve the following pair of linear equations by the substitution method.

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. Solve $2x + 3y = 11$ and $2x - 4y = -24$ and hence find the value of 'm' for which $y = mx + 3$.

3. Form the pair of linear equations for the following problems and find their solution by substitution method.

(i) The difference between two numbers is 26 and one number is three times the other. Find them.

(ii) The larger of two supplementary angles exceeds the smaller by 18 degrees. Find them.

(iii) The coach of a cricket team buys 7 bats and 6 balls for ₹ 3800. Later, she buys 3 bats and 5 balls for ₹ 1750. Find the cost of each bat and each ball.

(iv) The taxi charges in a city consist of a fixed charge together with the charge for the distance covered. For a distance of 10 km, the charge paid is ₹ 105 and for a journey of 15 km, the charge paid is ₹ 155. What are the fixed charges and the charge per km? How much does a person have to pay for travelling a distance of 25 km?

(v) A fraction becomes $\frac{9}{11}$, if 2 is added to both the numerator and the denominator. If, 3 is added to both the numerator and the denominator it becomes $\frac{5}{6}$. Find the fraction.

AP SCERT

i.e., $8 - 12 = 0$

i.e., $-4 = 0$

ఇది అసత్యపు ప్రవచనం

అందువలన, ఈ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి సాధన లేదు. కాబట్టి, ఈ రెండు పట్టాలు ఒకదానికొకటి కలవవు.

అభ్యాసం 3.2

1. క్రింద ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతలను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ మరియు $2x - 4y = -24$ లను సాధించండి మరియు $y = mx + 3$ అయ్యే విధంగా 'm' విలువను కనుగొనుము.

3. దిగువ ఇవ్వబడిన సమస్యలకు రేఖీయ సమీకరణాల జతలను తయారు చేయండి. మరియు వాటి సాధనలను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

(i) రెండు సంఖ్యల మధ్య భేదము 26 మరియు ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యకు మూడు రెట్లు అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

(ii) రెండు సంపూరక కోణాలలో పెద్దకోణము, చిన్నకోణము కన్నా 18° ఎక్కువ. అయిన వాటిని కనుగొనండి.

(iii) క్రికెట్ టీం కోచ్ (శిక్షకురాలు) 7 బ్యాట్లు మరియు 6 బంతులను ₹ 3,800కు కొన్నది. ఆమె తరువాత 3 బ్యాట్లు మరియు 5 బంతులను ₹ 1,750 కు కొన్నది. ప్రతి బ్యాట్ మరియు ప్రతి బంతి వెలను కనుగొనండి.

(iv) ఒక నగరంలో టాక్సీ చార్జీలు స్థిర చార్జీతో పాటుగా ప్రయాణం చేసిన దూరమునకు చార్జీలు వసూలు చేస్తారు. 10 కిలోమీటర్ల దూరంనకు చెల్లించిన చార్జీ ₹105 మరియు 15 కిలోమీటర్ల దూరం వరకు చెల్లించిన చార్జీ ₹155. స్థిర చార్జీ విలువ మరియు ఒక కిలోమీటర్‌కు అయ్యే చార్జీ విలువ ఎంత? ఒక వ్యక్తి 25 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించిన అతను చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?

(v) ఒక భిన్నములో లవము మరియు హారములు రెండింటికి 2ను కలిపిన ఆ భిన్నము $\frac{9}{11}$ అవుతుంది. లవము మరియు హారములకు 3ను కలిపిన ఆ భిన్నము $\frac{5}{6}$ అవుతుంది. అయిన, ఆ భిన్నాన్ని కనుగొనండి.

AP SCERT

(vi) Five years hence, the age of Jacob will be three times that of his son. Five years ago, Jacob's age was seven times that of his son. What are their present ages?

3.3.2 Elimination Method

Now let us consider another method of eliminating (i.e., removing) one variable. This is sometimes more convenient than the substitution method. Let us see how this method works.

Example 8 : The ratio of incomes of two persons is 9 : 7 and the ratio of their expenditures is 4 : 3. If each of them manages to save ₹ 2000 per month, find their monthly incomes.

Solution : Let us denote the incomes of the two person by ₹ $9x$ and ₹ $7x$ and their expenditures by ₹ $4y$ and ₹ $3y$ respectively. Then the equations formed in the situation is given by :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

and

$$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

Step 1 : Multiply Equation (1) by 3 and Equation (2) by 4 to make the coefficients of y equal. Then we get the equations:

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

Step 2 : Subtract Equation (3) from Equation (4) to *eliminate* y, because the coefficients of y are the same. So, we get

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

i.e.,

$$x = 2000$$

Step 3 : Substituting this value of x in (1), we get

$$9(2000) - 4y = 2000$$

i.e.,

$$y = 4000$$

So, the solution of the equations is $x = 2000$, $y = 4000$. Therefore, the monthly incomes of the persons are ₹ 18,000 and ₹ 14,000, respectively.

Verification : 18000 : 14000 = 9 : 7. Also, the ratio of their expenditures = 18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3

Remarks :

1. The method used in solving the example above is called the *elimination* method, because we eliminate one variable first, to get a linear equation in one variable.

AP SCERT

(vi) ఇప్పటినుండి ఐదు సంవత్సరముల తర్వాత జాకబ్ అతని కుమారుని వయసునకు మూడు రెట్లు. ఐదు సంవత్సరముల క్రితము జాకబ్ వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సునకు 7 రెట్లు అయిన వారి వయస్సులు ఎంతెంత?

3.3.2 చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి

ఇప్పుడు మనము ఒక చరరాశిని తొలగించి మరొక చరరాశిని పొందే పద్ధతిని పరిశీలిద్దాం. ఇది కొన్ని సందర్భాలలో ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి కంటే మరింత సౌకర్యవంతమైనది (పద్ధతి). ఈ పద్ధతి ఏ విధంగా పనిచేస్తుందో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 8 : ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాల నిష్పత్తి 9:7 మరియు వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4 : 3. వారు ప్రతి ఒక్కరూ నెలకు ₹ 2000 సొమ్ము ఆదా చేసిన వారి నెలవారి ఆదాయాలను కనుగొనండి.

సాధన : ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాలను వరుసగా ₹ $9x$ మరియు ₹ $7x$ అనుకొనుము. వారి వ్యయాల నిష్పత్తిని ₹ $4y$ మరియు ₹ $3y$ అనుకొనుము. అప్పుడు పై నిబంధనలతో ఏర్పడే సమీకరణాలు :

$$9x - 4y = 2000 \qquad (1)$$

మరియు
$$7x - 3y = 2000 \qquad (2)$$

సోపానం 1 : y యొక్క గుణకాలు సమానము చేయుటకు సమీకరణం (1)ని 3 చేత మరియు సమీకరణం (2)ని 4 చేత గుణించండి. అప్పుడు:

$$27x - 12y = 6000 \qquad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \qquad (4)$$

సోపానం 2 : y గుణకాలు సమానం కనుక y ను తొలగించుటకు సమీకరణం (4) నుండి సమీకరణం (3) ను తీసివేయాలి. అప్పుడు

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

అనగా,
$$x = 2000$$

సోపానం 3 : ఈ x విలువను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$9(2000) - 4y = 2000$$

అనగా,
$$y = 4000$$

కావున సమీకరణాల సాధన $x = 2000, y = 4000$. $\therefore$ ఆ వ్యక్తుల నెలవారి ఆదాయాలు వరుసగా ₹18,000 మరియు ₹ 14000.

సరిచూచుట : 18000 : 14000 = 9 : 7. అలాగే వారి వ్యయాల నిష్పత్తి = 18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3

సూచనలు :

1. పై ఉదాహరణను సాధించుటకు మనం ఉపయోగించిన పద్ధతిని *చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి* అంటారు. ఎందుకనగా ఒక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాన్ని పొందడానికి మనము మొదట ఒక చరరాశిని తొలగిస్తున్నాము.

AP SCERT

In the example above, we eliminated y. We could also have eliminated x. Try doing it that way.

2. You could also have used the substitution, or graphical method, to solve this problem. Try doing so, and see which method is more convenient.

Let us now note down these steps in the elimination method :

Step 1 : First multiply both the equations by some suitable non-zero constants to make the coefficients of one variable (either x or y) numerically equal.

Step 2 : Then add or subtract one equation from the other so that one variable gets eliminated. If you get an equation in one variable, go to Step 3.

If in Step 2, we obtain a true statement involving no variable, then the original pair of equations has infinitely many solutions.

If in Step 2, we obtain a false statement involving no variable, then the original pair of equations has no solution, i.e., it is inconsistent.

Step 3 : Solve the equation in one variable (x or y) so obtained to get its value.

Step 4 : Substitute this value of x (or y) in either of the original equations to get the value of the other variable.

Now to illustrate it, we shall solve few more examples.

Example 9 : Use elimination method to find all possible solutions of the following pair of linear equations :

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

Solution :

Step 1 : Multiply Equation (1) by 2 and Equation (2) by 1 to make the coefficients of x equal. Then we get the equations as :

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

Step 2 : Subtracting Equation (4) from Equation (3),

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

i.e., $0 = 9$, which is a false statement.

Therefore, the pair of equations has no solution.

Example 10 : The sum of a two-digit number and the number obtained by reversing the digits is 66. If the digits of the number differ by 2, find the number. How many such numbers are there?

AP SCERT

పై ఉదాహరణ యందు మనము y ని తొలగిస్తున్నాము. మనము x ని కూడా తొలగించవచ్చు. మీరు ఆవిధంగా ప్రయత్నం చేయండి.

2. ఈ సమస్యను సాధించుటకు మీరు ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి లేదా గ్రాఫ్ పద్ధతిని కూడా ఉపయోగించవచ్చును. ఆవిధంగా ప్రయత్నించండి మరియు ఏ పద్ధతి ఎక్కువ అనుకూలమైనదిగా ఉంటుందో చూడండి.

ఇప్పుడు తొలగించు పద్ధతిలో సోపానాలను గమనిద్దాం:

సోపానం 1 : మొదట రెండు సమీకరణాలలోని ఒక చరరాశిని (x లేదా y గుణకాలు) సంఖ్యాపరంగా సమానం అగునట్లు రెండు సమీకరణాలను సరైన శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలతో గుణించండి.

సోపానం 2 : ఇప్పుడు ఒక చరరాశిని తొలగించే విధంగా, ఒక సమీకరణానికి మరొక సమీకరణాన్ని కూడడం లేదా తీసివేయడం ద్వారా చేయాలి. ఒక చరరాశిలో సమీకరణం వచ్చిన ఎడల సోపానం 3 నకు వెళ్లాలి.

సోపానం 2 నందు ఏ చరరాశి లేనియెడల, ఒక సత్య వాక్యము వచ్చినయెడల, అసలు సమీకరణాల జతకు అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి.

సోపానం 2 నందు ఏ చరరాశి లేని అసత్య వాక్యము (ప్రవచనం) వచ్చినయెడల అసలు సమీకరణాల జతకు సాధన ఉండదు. అనగా, అవి అసంగతము.

సోపానం 3 : చరరాశి (x లేదా y) విలువను పొందుటకు ఒక చరరాశి సమీకరణాలను సాధించండి.

సోపానం 4 : మనకు వచ్చిన x (లేదా y) విలువను వాస్తవ సమీకరణాలలో ప్రతిక్షేపించిన మరొక చరరాశి విలువను పొందుతాము.

ఇప్పుడు, ఈ వివరణను రుజువు చేయుటకు మనము కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : దిగువ రేఖీయ సమీకరణాల జతలకు సాధ్యమయ్యే అన్ని సాధనలు కనుగొనుటకు, తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించండి:

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$
$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

సాధన :

సోపానం 1 : x గుణకాలు సమానం అగునట్లు సమీకరణం (1) ని 2 చే మరియు సమీకరణం (2) ని 1 చే గుణించండి. అప్పుడు మనం పొందే సమీకరణాలు:

$$4x + 6y = 16 \qquad (3)$$
$$4x + 6y = 7 \qquad (4)$$

సోపానం 2 : సమీకరణం (4) ను సమీకరణం (3) నుండి తీసివేయగా,

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

i.e., $0 = 9$, ఇది అసత్యపు వాక్యం.

కావున, సమీకరణాల జతకు సాధన లేదు.

ఉదాహరణ 10 : ఒక రెండు అంకెల సంఖ్య మరియు దానిలోని స్థానాలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్యల మొత్తము 66. ఆ సంఖ్యలోని రెండు అంకెల భేదము 2 అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము. అటువంటి సంఖ్యలు ఎన్ని ఉంటాయి?

AP SCERT

Solution : Let the ten's and the unit's digits in the first number be x and y, respectively. So, the first number may be written as $10x + y$ in the expanded form (for example, $56 = 10(5) + 6$).

When the digits are reversed, x becomes the unit's digit and y becomes the ten's digit. This number, in the expanded notation is $10y + x$ (for example, when 56 is reversed, we get $65 = 10(6) + 5$).

According to the given condition.

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

i.e., $11(x + y) = 66$

i.e., $x + y = 6$ (1)

We are also given that the digits differ by 2, therefore,

either $x - y = 2$ (2)

or $y - x = 2$ (3)

If $x - y = 2$, then solving (1) and (2) by elimination, we get $x = 4$ and $y = 2$. In this case, we get the number 42.

If $y - x = 2$, then solving (1) and (3) by elimination, we get $x = 2$ and $y = 4$. In this case, we get the number 24.

Thus, there are two such numbers 42 and 24.

Verification : Here $42 + 24 = 66$ and $4 - 2 = 2$. Also $24 + 42 = 66$ and $4 - 2 = 2$.

EXERCISE 3.3

1. Solve the following pair of linear equations by the elimination method and the substitution method :
   (i) $x + y = 5$ and $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ and $2x - 2y = 2$
   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ and $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ and $x - \frac{y}{3} = 3$
2. Form the pair of linear equations in the following problems, and find their solutions (if they exist) by the elimination method :
   (i) If we add 1 to the numerator and subtract 1 from the denominator, a fraction reduces to 1. It becomes $\frac{1}{2}$ if we only add 1 to the denominator. What is the fraction?
   (ii) Five years ago, Nuri was thrice as old as Sonu. Ten years later, Nuri will be twice as old as Sonu. How old are Nuri and Sonu?
   (iii) The sum of the digits of a two-digit number is 9. Also, nine times this number is twice the number obtained by reversing the order of the digits. Find the number.

AP SCERT

సాధన : మొదటి సంఖ్యలోని పదుల స్థానం మరియు ఒకట్ల స్థానంలో అంకెలను వరుసగా x మరియు y అనుకొనుము. కాబట్టి మొదటి సంఖ్యను $10x + y$ అని విస్తృత రూపంలో రాయవచ్చును. (ఉదాహరణకు $56 = 10(5) + 6$).

అంకెలను తారుమారు చేయగా, ఒకట్ల స్థానంలో x మరియు పదుల స్థానంలో y వస్తాయి. అప్పుడు ఆ సంఖ్య విస్తృత రూపంలో $10y + x$ వస్తుంది. (ఉదాహరణకు 56 లోని అంకెలను తారుమారు చేయగా, $65 = 10(6) + 5$).

ఇవ్వబడిన నిబంధనల మేరకు నియమము మేరకు

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

i.e., $$11(x + y) = 66$$

i.e., $$x + y = 6 \qquad (1)$$

మనకు రెండు అంకెల భేదము 2 అని ఇవ్వబడింది. కావున,

$$x - y = 2 \text{ కానీ} \qquad (2)$$

లేదా $$y - x = 2 \text{ అగును.} \qquad (3)$$

$x - y = 2$, అయిన (1) మరియు (2) లను తొలగించు పద్ధతిలో సాధించగా $x = 4$ మరియు $y = 2$ అవుతాయి. ఈ సందర్భంలో ఆ సంఖ్య 42 అవుతుంది.

$y - x = 2$, అయిన (1) మరియు (3) లను తొలగించు పద్ధతిలో సాధించగా $x = 2$ మరియు $y = 4$ అవుతాయి. ఈ సందర్భంలో ఆ సంఖ్య 24 అవుతుంది.

ఆ విధంగా 42 మరియు 24 అనే రెండు సంఖ్యలు కలవు.

సరిచూచుట : ఇందు $42 + 24 = 66$ మరియు $4 - 2 = 2$. ఇంకా $24 + 42 = 66$ మరియు $4 - 2 = 2$.

అభ్యాసం 3.3

1. క్రింది రేఖీయ సమీకరణాల జతలను తొలగించు పద్ధతి మరియు ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి:

(i) $x + y = 5$ మరియు $2x - 3y = 4$

(ii) $3x + 4y = 10$ మరియు $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ మరియు $9x = 2y + 7$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ మరియు $x - \frac{y}{3} = 3$

2. క్రింది సమస్యలకు రేఖీయ సమీకరణాల జతలను తయారు చేయండి మరియు (సాధ్యమైనచో) తొలగించు పద్ధతి ద్వారా వాటి సాధనలను కనుగొనుము :

(i) ఒక భిన్నములో లవమునకు 1 ని కలిపి మరియు హారము నుండి 1 ని తీసివేసిన ఆ భిన్నము 1 అవుతుంది. హారమునకు మాత్రమే 1 ని కలిపిన ఆ భిన్నము $\frac{1}{2}$ అవుతుంది. అయిన, ఆ భిన్నము ఏది?

(ii) ఐదు సంవత్సరముల క్రితం, నూరి వయస్సు సోను వయస్సునకు మూడు రెట్లు. 10 సంవత్సరముల తరువాత నూరి వయస్సు, సోను వయస్సునకు రెండు రెట్లు ఉంటుంది. నూరి మరియు సోనుల వయస్సులు ఎంతెంత?

(iii) రెండంకెల సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం 9. అదే విధంగా ఈ సంఖ్యకు 9 రెట్లు, ఆ సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా ఏర్పడిన సంఖ్యకు రెండు రెట్లు ఉంటుంది. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

AP SCERT

(iv) Meena went to a bank to withdraw ₹ 2000. She asked the cashier to give her ₹ 50 and ₹ 100 notes only. Meena got 25 notes in all. Find how many notes of ₹ 50 and ₹ 100 she received.

(v) A lending library has a fixed charge for the first three days and an additional charge for each day thereafter. Saritha paid ₹ 27 for a book kept for seven days, while Susy paid ₹ 21 for the book she kept for five days. Find the fixed charge and the charge for each extra day.

3.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A pair of linear equations in two variables can be represented, and solved, by the:
   (i) graphical method
   (ii) algebraic method

2. Graphical Method :
The graph of a pair of linear equations in two variables is represented by two lines.
   (i) If the lines intersect at a point, then that point gives the unique solution of the two equations. In this case, the pair of equations is **consistent**.
   (ii) If the lines coincide, then there are infinitely many solutions — each point on the line being a solution. In this case, the pair of equations is **dependent (consistent)**.
   (iii) If the lines are parallel, then the pair of equations has no solution. In this case, the pair of equations is **inconsistent**.

3. Algebraic Methods : We have discussed the following methods for finding the solution(s) of a pair of linear equations :
   (i) Substitution Method
   (ii) Elimination Method

4. If a pair of linear equations is given by $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, then the following situations can arise :

   (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$: In this case, the pair of linear equations is consistent.

   (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: In this case, the pair of linear equations is inconsistent.

   (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: In this case, the pair of linear equations is dependent and consistent.

5. There are several situations which can be mathematically represented by two equations that are not linear to start with. But we alter them so that they are reduced to a pair of linear equations.

(iv) మీనా బ్యాంకు నుండి ₹ 2000 తీసుకొనుటకు వెళ్ళినది. ఆమె క్యాషియర్‌ను ₹ 50, మరియు ₹ 100 నోట్లు మాత్రమే ఇవ్వమని కోరినది. మొత్తం ఆమెకు 25 నోట్లు వచ్చినవి. ఆమె ఎన్ని ₹ 50 నోట్లు మరియు ఎన్ని ₹ 100 నోట్లు తీసుకొన్నదో కనుగొనుము.

(v) పుస్తకాలు అద్దెకు ఇచ్చే లెండింగ్ లైబ్రరీ మొదటి మూడు రోజులకు స్థిరచార్జీ మరియు ఆ తరువాత ప్రతి రోజుకు అదనపు చార్జీ వసూలు చేస్తారు. సరిత ఒక పుస్తకానికి 7 రోజులు ఉంచుకున్నందుకు ₹ 27 చెల్లించినది. అదే పుస్తకానికి ఐదు రోజులు ఉంచుకున్నందుకు ₹ 21 చెల్లించినది. అయిన స్థిరచార్జి మరియు ఒక్కో రోజుకు అదనపు చార్జీని కనుగొనుము.

3.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయము నందు క్రింది విషయాలు మీరు నేర్చుకున్నారు:

1. రెండు చరరాశులలో ఒక జత రేఖీయ సమీకరణాలను:

(i) గ్రాఫ్ పద్ధతి

(ii) బీజగణిత పద్ధతులలో ప్రాతినిధ్యము చేయుట మరియు సాధించుట.

2. గ్రాఫ్ పద్ధతి :

రెండు చరరాశులలో రెండు రేఖలను ప్రాతినిధ్యం చేసే ఒక జత రేఖీయ సమీకరణాల గ్రాఫ్‌లు.

(i) రెండు సరళరేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటే వాటికి ఒకే ఒక సాధన ఉంటుంది. ఆ బిందువు ఆ రెండు సమీకరణాలకు ఒకే ఒక సాధనను ఇస్తుంది. ఈ సందర్భంలో, ఆ సమీకరణాల జత సంగతము.

(ii) ఈ రేఖలు ఏకీభవిస్తే, అప్పుడు అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి. ఆ రేఖ పైన ఉన్న ప్రతి బిందువు సాధనలు అవుతాయి. ఈ సందర్భంలో, ఈ సమీకరణాల జత పరస్పరాధారితము (సంగతము).

(iii) రెండు రేఖలు సమాంతరాలు అయిన, ఆ సమీకరణాల జతకు సాధన లేదు. ఈ సందర్భంలో, సమీకరణాల జత అసంగతము.

3. బీజగణిత పద్ధతి : రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధనలు కనుగొనడానికి, మనం క్రింది పద్ధతులను చర్చించాము :

(i) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

(ii) తొలగించు పద్ధతి

4. ఒక జత రేఖీయ సమీకరణాలు $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, అయిన క్రింది ఇవ్వబడిన పరిస్థితులు తలెత్తుతాయి :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$ అయిన ఈ సందర్భంలో, ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగతము.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఈ సందర్భంలో, ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత అసంగతము.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఈ సందర్భంలో, ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత పరస్పరాధారితము మరియు సంగతము.

5. అనేక సందర్భాలలో గణిత గుర్తులతో రెండు సమీకరణాలు రాసినప్పుడు, అవి ప్రారంభంలో రేఖీయ సమీకరణాలుగా ఉండవు. కాని, వాటిని సరైన ప్రతిక్షేపన చేయడం ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చవచ్చును.

AP SCERT

QUADRATIC EQUATIONS 4

4.1 Introduction

In Chapter 2, you have studied different types of polynomials. One type was the quadratic polynomial of the form $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. When we equate this polynomial to zero, we get a quadratic equation. Quadratic equations come up when we deal with many real-life situations. For instance, suppose a charity trust decides to build a prayer hall having a carpet area of 300 square metres with its length one metre more than twice its breadth. What should be the length and breadth of the hall? Suppose the breadth of the hall is x metres. Then, its length should be $(2x + 1)$ metres. We can depict this information pictorially as shown in Fig. 4.1.

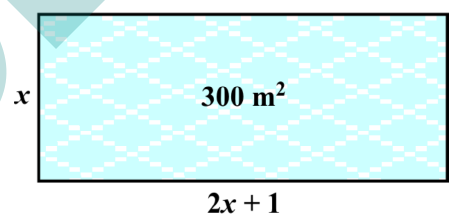


Fig. 4.1

Now, area of the hall $= (2x + 1).\ x\ \text{m}^2 = (2x^2 + x)\ \text{m}^2$

So, $2x^2 + x = 300$ (Given)

Therefore, $2x^2 + x - 300 = 0$

So, the breadth of the hall should satisfy the equation $2x^2 + x - 300 = 0$ which is a quadratic equation.

Many people believe that Babylonians were the first to solve quadratic equations. For instance, they knew how to find two positive numbers with a given positive sum and a given positive product, and this problem is equivalent to solving a quadratic equation of the form $x^2 - px + q = 0$. Greek mathematician Euclid developed a geometrical approach for finding out lengths which, in our present day terminology, are solutions of quadratic equations. Solving of quadratic equations, in general form, is often credited to ancient Indian mathematicians. In fact, Brahmagupta (C.E.598–665) gave an explicit formula to solve a quadratic equation of the form $ax^2 + bx = c$. Later,

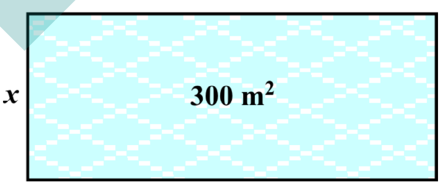
AP SCERT

J8A6K9

4 వర్గ సమీకరణాలు

4.1 పరిచయం

రెండవ అధ్యాయములో, మీరు వివిధ రకాల బహుపదుల గురించి అధ్యయనము చేశారు. అందులో ఒక రకం $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ రూపంలో ఉన్న వర్గ బహుపది. ఈ వర్గ బహుపదిని సున్నాకు సమానం చేసినప్పుడు మనం వర్గ సమీకరణంను పొందుతాం. నిత్య జీవితములో అనేక సందర్భాలలో వర్గ సమీకరణాలు మనకు ఎదురవుతాయి. ఉదాహరణకు ఒక స్వచ్ఛంద సంస్థ పొడవు వెడల్పు యొక్క రెట్టింపు కన్నా ఒక మీటరు అధికముగా ఉండునట్లు 300 చదరపు మీటర్ల కార్పెట్ వైశాల్యము గల ఒక ప్రార్థనా మందిరాన్ని నిర్మించదలిచింది. ఆ మందిరం యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు ఎంత ఉండాలి? మందిరము యొక్క వెడల్పు x మీటర్లు అనుకుందాం. అపుడు పొడవు $(2x + 1)$ మీటర్లు అవుతుంది. ఈ సమాచారాన్ని పటం 4.1 లో చూపించిన విధముగా పటరూపంలో చూపవచ్చు.



పటం 4.1

ఇప్పుడు, మందిరం వైశాల్యం $= (2x + 1). x$ మీ.$^2 = (2x^2 + x)$ మీ^{2}.

కావున, $2x^2 + x = 300$ (దత్తాంశం)

అనగా, $2x^2 + x - 300 = 0$

కాబట్టి, హాలు వెడల్పు వర్గ సమీకరణము $2x^2 + x - 300 = 0$ అనే సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరచాలి.

వర్గ సమీకరణాలను మొదట సాధించినవారు బాబిలోనియన్లు అని చాలామంది నమ్ముతారు. ఉదాహరణకు, ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యల ధనాత్మక మొత్తం మరియు ధనాత్మక లబ్ధమును ఉపయోగించి ఆ ధన సంఖ్యలను ఎలా కనుగొనాలో వారికి తెలుసు. మరియు ఈ సమస్య $x^2 - px + q = 0$ రూపం యొక్క వర్గ సమీకరణాలను సాధించడానికి సమానం. గ్రీకు గణితశాస్త్రజ్ఞుడు యూక్లిడ్ ప్రస్తుతం వర్గ సమీకరణ సాధనలు అంటున్న పొడవులను కనుగొనడానికి రేఖాగణిత విధానాన్ని అభివృద్ధిచేశారు. సాధారణ రూపంలో ఉన్న వర్గ సమీకరణాలను సాధించిన ఘనత మన ప్రాచీన భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞులకే దక్కుతుంది. వాస్తవానికి, బ్రహ్మగుప్తుడు (క్రీ.శ. 598–665) $ax^2 + bx = c$ రూపంలోని వర్గ సమీకరణాన్ని పరిష్కరించడానికి స్పష్టమైన సూత్రాన్ని ఇచ్చారు.

AP SCERT

Sridharacharya (C.E. 1025) derived a formula, now known as the quadratic formula, (as quoted by Bhaskara II) for solving a quadratic equation by the method of completing the square. An Arab mathematician Al-Khwarizmi (about C.E. 800) also studied quadratic equations of different types. Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, in his book 'Liber embadorum' published in Europe in C.E. 1145 gave complete solutions of different quadratic equations.

In this chapter, you will study quadratic equations, and various ways of finding their roots. You will also see some applications of quadratic equations in daily life situations.

4.2 Quadratic Equations

A quadratic equation in the variable x is an equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, c are real numbers, $a \neq 0$. For example, $2x^2 + x - 300 = 0$ is a quadratic equation. Similarly, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ and $1 - x^2 + 300 = 0$ are also quadratic equations.

In fact, any equation of the form $p(x) = 0$, where $p(x)$ is a polynomial of degree 2, is a quadratic equation. But when we write the terms of $p(x)$ in descending order of their degrees, then we get the standard form of the equation. That is, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ is called the **standard form of a quadratic equation**.

Quadratic equations arise in several situations in the world around us and in different fields of mathematics. Let us consider a few examples.

Example 1 : Represent the following situations mathematically:

(i) John and Jivanti together have 45 marbles. Both of them lost 5 marbles each, and the product of the number of marbles they now have is 124. We would like to find out how many marbles they had to start with.

(ii) A cottage industry produces a certain number of toys in a day. The cost of production of each toy (in rupees) was found to be 55 minus the number of toys produced in a day. On a particular day, the total cost of production was ₹ 750. We would like to find out the number of toys produced on that day.

Solution :

(i) Let the number of marbles John had be x.

Then the number of marbles Jivanti had $= 45 - x$ (Why?).

The number of marbles left with John, when he lost 5 marbles $= x - 5$

The number of marbles left with Jivanti, when she lost 5 marbles $= 45 - x - 5$

$= 40 - x$

AP SCERT

శ్రీధరాచార్యులు (క్రీ.శ. 1025) వర్గమును పూర్తి చేసే పద్ధతి ద్వారా వర్గ సమీకరణాన్ని పరిష్కరించడానికి ఇప్పుడు వర్గ సమీకరణ సూత్రం అని పిలువబడే ఒక సూత్రాన్ని (రెండవ భాస్కరుడు ఉదహరించినట్లు) ఇచ్చారు. అరబ్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు అల్-ఖ్వారీజ్మి (సుమారు క్రీ.శ. 800) కూడా వివిధ రకాల వర్గ సమీకరణాలను అధ్యయనం చేశారు. క్రీ.శ. 1145లో ఐరోపాలో ప్రచురితమైన అబ్రహాం బార్ హియ్యా హ-నాసి వ్రాసిన పుస్తకం 'లిబర్ ఎంబాడోరమ్'లో వివిధ వర్గ సమీకరణాలకు పూర్తి సాధన ఇచ్చాడు.

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు వర్గ సమీకరణాలు మరియు వాటి మూలాలను కనుగొనే విభిన్న మార్గాలను అధ్యయనం చేస్తారు. నిత్య జీవిత పరిస్థితులలో వర్గ సమీకరణాల యొక్క కొన్ని అనువర్తనాలను కూడా మీరు చూస్తారు.

4.2 వర్గ సమీకరణాలు

a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a \neq 0$, అయిన $ax^2 + bx + c = 0$ చరరాశి x లో వర్గ సమీకరణము అంటారు. ఉదాహరణకు $2x^2 + x - 300 = 0$ ఒక వర్గ సమీకరణము. అదే విధంగా $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ మరియు $1 - x^2 + 300 = 0$ లు కూడా వర్గ సమీకరణాలే.

వాస్తవానికి $p(x)$ ఒక ద్విపరిమాణ బహుపది అవుతూ $p(x) = 0$ రూపంలో వున్న ఏ సమీకరణాన్నైనా వర్గ సమీకరణం అంటాం. అయితే $p(x)$ లోని పదాలను వాని పరిమాణాల ఆధారంగా అవరోహణ క్రమంలో రాస్తే దానిని వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం. అనగా $ax^2 + bx + c = 0$ ను **వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం** అంటారు.

మన చుట్టూ ఉన్న ప్రపంచంలోని అనేక సందర్భాలలో మరియు వివిధ గణిత విభాగాలలో వర్గ సమీకరణాలు ఉత్పన్నమౌతాయి. కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : క్రింది వానికి సరియగు సమీకరణాలను గణితపరంగా రాయుము:

(i) జాన్ మరియు జీవంతి ఇద్దరి వద్ద కలసి 45 గోళీలు కలవు. అయితే ఇద్దరూ చెరి 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్నారు. ఇద్దరి వద్ద మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల యొక్క లబ్ధము 124 అయిన ఇద్దరి వద్ద మొదట వున్న గోళీల సంఖ్యను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును కనుగొనుము.

(ii) ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ప్రతిరోజు ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యలో బొమ్మలను తయారు చేస్తారు. ఒకరోజు తయారైన ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు (రూపాయలలో) ఆరోజు తయారైన బొమ్మల సంఖ్య నుండి 55 తీసివేయగా వచ్చును. ఆరోజు తయారైన బొమ్మల మొత్తం ఖరీదు ₹ 750 . ఆరోజు తయారైన బొమ్మల సంఖ్యను మనం కనుగొనాలి.

సాధన :

(i) జాన్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య x అనుకొందాం.

జీవంతి వద్ద గల గోళీల సంఖ్య = $45 - x$ (ఎందుకు?).

5 గోళీలను పోగొట్టుకున్న తరువాత జాన్ వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య = $x - 5$

అదేవిధంగా, 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్న తరువాత జీవంతి వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య = $45 - x - 5$

$= 40 - x$

AP SCERT

Therefore, their product $= (x-5)(40-x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

So, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (Given that product = 124)

i.e., $-x^2 + 45x - 324 = 0$

i.e., $x^2 - 45x + 324 = 0$

Therefore, the number of marbles John had, satisfies the quadratic equation

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

which is the required representation of the problem mathematically.

(ii) Let the number of toys produced on that day be x.

Therefore, the cost of production (in rupees) of each toy that day = $55 - x$

So, the total cost of production (in rupees) that day = $x(55 - x)$

Therefore, $x(55 - x) = 750$

i.e., $55x - x^2 = 750$

i.e., $-x^2 + 55x - 750 = 0$

i.e., $x^2 - 55x + 750 = 0$

Therefore, the number of toys produced that day satisfies the quadratic equation

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

which is the required representation of the problem mathematically.

Example 2 : Check whether the following are quadratic equations:

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

Solution :

(i) LHS = $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

Therefore, $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ can be rewritten as

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$

i.e., $x^2 - 6x + 8 = 0$

It is of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

Therefore, the given equation is a quadratic equation.

AP SCERT

అనగా, మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల లబ్ధం $= (x-5)(40-x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

కావున, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (లబ్ధము $= 124$ గా ఇచ్చారు)

అనగా, $-x^2 + 45x - 324 = 0$

అనగా, $x^2 - 45x + 324 = 0$

అనగా, $x^2 - 45x + 324 = 0$ సమీకరణమునకు తృప్తి పరచే x విలువయే జాన్ వద్ద మొదట వున్న గోళీల సంఖ్యను ఇస్తుంది.

$x^2 - 45x + 324 = 0$ కావలసిన గణితాత్మక వర్గ సమీకరణం అవుతుంది.

(ii) ఆరోజు ఉత్పత్తి చేయబడిన బొమ్మల సంఖ్య x గా అనుకుందాం.

అందువలన, ఆరోజు తయారయిన ప్రతి బొమ్మ యొక్క ఉత్పత్తి ఖరీదు (రూపాయలలో) $= 55 - x$

కాబట్టి, ఆ రోజు మొత్తం ఉత్పత్తి ఖరీదు (రూపాయలలో) $= x(55 - x)$

కాబట్టి, $x(55 - x) = 750$

అనగా, $55x - x^2 = 750$

అనగా, $-x^2 + 55x - 750 = 0$

అనగా, $x^2 - 55x + 750 = 0$

అందువలన, ఆరోజు తయారయిన ఉత్పత్తి చేయబడిన బొమ్మల సంఖ్య $x^2 - 55x + 750 = 0$ వర్గ సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది.

$x^2 - 55x + 750 = 0$ కావలసిన వర్గ సమీకరణం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2 : క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవుతాయేమో సరిచూడండి :

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

సాధన :

(i) ఎడమ చేతి వైపు $= (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

కాబట్టి, $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ గా రాయవచ్చు.

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$

అనగా, $x^2 - 6x + 8 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో ఉంది.

అందువలన, ఇవ్వబడిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం.

AP SCERT

(ii) Since $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ and $(x + 2)(x – 2) = x^2 – 4$

Therefore, $x^2 + x + 8 = x^2 – 4$

i.e., $x + 12 = 0$

It is not of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

Therefore, the given equation is not a quadratic equation.

(iii) Here, LHS $= x (2x + 3) = 2x^2 + 3x$

So, $x (2x + 3) = x^2 + 1$ can be rewritten as

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$

Therefore, we get $x^2 + 3x – 1 = 0$

It is of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

So, the given equation is a quadratic equation.

(iv) Here, LHS $= (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Therefore, $(x + 2)^3 = x^3 – 4$ can be rewritten as

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 – 4$

i.e., $6x^2 + 12x + 12 = 0$ or, $x^2 + 2x + 2 = 0$

It is of the form $ax^2 + bx + c = 0$.

So, the given equation is a quadratic equation.

Remark : Be careful! In (ii) above, the given equation appears to be a quadratic equation, but it is not a quadratic equation.

In (iv) above, the given equation appears to be a cubic equation (an equation of degree 3) and not a quadratic equation. But it turns out to be a quadratic equation. As you can see, often we need to simplify the given equation before deciding whether it is quadratic or not.

EXERCISE 4.1

1. Check whether the following are quadratic equations :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x – 3)$ (ii) $x^2 – 2x = (–2) (3 – x)$

(iii) $(x – 2)(x + 1) = (x – 1)(x + 3)$ (iv) $(x – 3)(2x +1) = x(x + 5)$

(v) $(2x – 1)(x – 3) = (x + 5)(x – 1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x – 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x (x^2 – 1)$ (viii) $x^3 – 4x^2 – x + 1 = (x – 2)^3$

2. Represent the following situations in the form of quadratic equations :

(i) The area of a rectangular plot is 528 m^2. The length of the plot (in metres) is one more than twice its breadth. We need to find the length and breadth of the plot.

(ii) $x(x+1)+8 = x^2+x+8$ మరియు $(x+2)(x-2) = x^2-4$

కాబట్టి, $x^2+x+8 = x^2-4$

అనగా, $x+12 = 0$

ఇది $ax^2+bx+c=0$ రూపంలో లేదు.

అందువలన, ఇవ్వబడిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం కాదు.

(iii) ఇక్కడ, ఎడమ చేతి వైపు $= x(2x+3) = 2x^2+3x$

కావున, $x(2x+3) = x^2+1$ ను

$2x^2+3x = x^2+1$ గా రాయవచ్చు.

అందువలన, $x^2+3x-1 = 0$ ను పొందుతాము.

ఇది $ax^2+bx+c=0$ రూపంలో ఉంటుంది.

అందువలన, ఇవ్వబడిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం.

(iv) ఇక్కడ, ఎడమ చేతి వైపు $= (x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$

కావున, $(x+2)^3 = x^3-4$ ను

$x^3+6x^2+12x+8 = x^3-4$ గా రాయవచ్చు.

అనగా, $6x^2+12x+12 = 0$ లేదా, $x^2+2x+2=0$

ఇది $ax^2+bx+c=0$ రూపంలో ఉంటుంది.

అందువలన, ఇవ్వబడిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం.

సూచన : పై ఉదాహరణ (ii) లో ఇచ్చిన సమీకరణం చూడగానే వర్గ సమీకరణంలాగా కనపడుతుంది. కాని అది వర్గ సమీకరణం కాదు.

అదేవిధంగా ఉదాహరణ (iv) లో ఇచ్చిన సమీకరణం ఘన సమీకరణం (పరిమాణం 3 గా గల సమీకరణం) లాగా కనపడుతుంది. కానీ ఇది వర్గ సమీకరణమే. పై ఉదాహరణల నుంచి ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం అవునో కాదో నిర్ణయించుటకు ముందు దానిని సూక్ష్మీకరించటము మంచిదని మనం గమనించాలి.

అభ్యాసం 4.1

1. క్రింది సమీకణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవునో, కాదో నిర్ణయించండి :
   - (i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$
   - (ii) $x^2-2x = (-2)(3-x)$
   - (iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$
   - (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
   - (v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$
   - (vi) $x^2+3x+1 = (x-2)^2$
   - (vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$
   - (viii) $x^3-4x^2-x+1 = (x-2)^3$
2. క్రింది సందర్భాలకు సరియగు వర్గ సమీకరణాలను కనుగొనుము:
   - (i) ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము 528 చ.మీ. దీని పొడవు, వెడల్పు యొక్క రెట్టింపు కంటే ఒక మీటరు ఎక్కువ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను మనం కనుగొనాలి.

AP SCERT

(ii) The product of two consecutive positive integers is 306. We need to find the integers.

(iii) Rohan's mother is 26 years older than him. The product of their ages (in years) 3 years from now will be 360. We would like to find Rohan's present age.

(iv) A train travels a distance of 480 km at a uniform speed. If the speed had been 8 km/h less, then it would have taken 3 hours more to cover the same distance. We need to find the speed of the train.

4.3 Solution of a Quadratic Equation by Factorisation

Consider the quadratic equation $2x^2 - 3x + 1 = 0$. If we replace x by 1 on the LHS of this equation, we get $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ RHS of the equation. We say that 1 is a root of the quadratic equation $2x^2 - 3x + 1 = 0$. This also means that 1 is a zero of the quadratic polynomial $2x^2 - 3x + 1$.

In general, a real number α is called a root of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ if $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. We also say that **$x = \alpha$ is a solution of the quadratic equation**, or that **α satisfies the quadratic equation**. Note that **the zeroes of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ and the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are the same**.

You have observed, in Chapter 2, that a quadratic polynomial can have at most two zeroes. So, any quadratic equation can have atmost two roots.

You have learnt in Class IX, how to factorise quadratic polynomials by splitting their middle terms. We shall use this knowledge for finding the roots of a quadratic equation. Let us see how.

Example 3 : Find the roots of the equation $2x^2 - 5x + 3 = 0$, by factorisation.

Solution : Let us first split the middle term $-5x$ as $-2x - 3x$ [because $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

So, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

Now, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ can be rewritten as $(2x - 3)(x - 1) = 0$.

So, the values of x for which $2x^2 - 5x + 3 = 0$ are the same for which $(2x - 3)(x - 1) = 0$, i.e., either $2x - 3 = 0$ or $x - 1 = 0$.

Now, $2x - 3 = 0$ gives $x = \frac{3}{2}$ and $x - 1 = 0$ gives $x = 1$.

So, $x = \frac{3}{2}$ and $x = 1$ are the solutions of the equation.

In other words, 1 and $\frac{3}{2}$ are the roots of the equation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

AP SCERT

(ii) రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము 306. అయిన ఆ సంఖ్యలను మనం కనుగొనవలెను.

(iii) రోహన్ తల్లి, రోహన్ కంటే 26 సం॥లు పెద్దది. 3 సం॥లు తరువాత వారిద్దరి వయస్సుల లబ్ధం 360 అయిన రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును మనం కనుగొనవలెను.

(iv) 480 కి.మీ. దూరమును ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణిస్తుంది. ఒకవేళ ఇదే రైలు ఇప్పటి వేగం కంటే 8 కి.మీ తక్కువ వేగముతో ప్రయాణిస్తే గమ్యం చేరుటకు పట్టే కాలం 3 గం॥ లు పెరుగుతుంది. అయిన రైలు వేగమును మనం కనుగొనవలెను.

4.3 కారణాంక పద్ధతిన వర్గ సమీకరణమును సాధించుట

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణమును తీసుకుందాం. దీనిలో x బదులు 1 ని సమీకరణములో ఎడమచేతి వైపు ప్రతిక్షేపించిన $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ కుడిచేతి వైపు సమీకరణం వస్తుంది. $x = 1$కు సమీకరణం సంతృప్తి చెందినది, కనుక $x = 1$ను $2x^2 - 3x + 1 = 0$ కు మూలము లేదా సాధన అంటాము. అనగా '1' అనునది $2x^2 - 3x + 1$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కూడా అవుతుందని అర్థం.

సాధారణంగా $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన, వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ కు వాస్తవ సంఖ్య αను మూలము అంటారు. మరియు **$x = \alpha$ను వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధన** అని కూడా అంటాం. లేదా 'α' వర్గ సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తుంది అంటాము. **$ax^2 + bx + c$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలు, $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం యొక్కమూలాలు ఒక్కటే** అని గుర్తించగలరు.

2వ అధ్యాయంలో, ఒక వర్గ బహుపదికి గరిష్టముగా రెండు శూన్య విలువలుంటాయని మనం గమనించాం. కనుక వర్గ సమీకరణమునకు కూడా గరిష్టముగా రెండు మూలాలే వుంటాయి.

మనం 9వ తరగతిలో మధ్య పదమును రెండింటిగా విడగొట్టుట ద్వారా ఒక వర్గ బహుపది యొక్క కారణాంకాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో నేర్చుకున్నాము. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 3 : కారణాంక పద్ధతిన $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనుము.

సాధన : ముందుగా మధ్యపదం $-5x$ ని $-2x -3x$ గా విడదీద్దాం. [ఎందుకంటే $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

కావున, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

ఇప్పుడు, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ను $(2x - 3)(x - 1) = 0$ గా మార్చి రాయవచ్చు.

కావున, x విలువలు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ మరియు $(2x - 3)(x - 1) = 0$ కు ఒకేరకంగా ఉంటాయి. అనగా $2x - 3 = 0$ లేదా $x - 1 = 0$.

ఇప్పుడు, $2x - 3 = 0$ నుండి $x = \frac{3}{2}$ మరియు $x - 1 = 0$ నుండి $x = 1$ వస్తుంది.

కావున,, $x = \frac{3}{2}$ మరియు $x = 1$ లు సమీకరణ సాధనలు.

అనగా 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ సమీకరణ మూలాలు అని చెప్పవచ్చు.

ఇచ్చుట $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి ప్రతీ రేఖీయ కారణాంకాన్ని సున్నాకు సమానం చేయటం ద్వారా $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క **మూలాలను** కనుగొన్నామని గమనించండి.

AP SCERT

Verify that these are the roots of the given equation.

Note that we have found the roots of $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **by factorising** $2x^2 - 5x + 3$ **into two linear factors and equating each factor to zero**.

Example 4 : Find the roots of the quadratic equation $6x^2 - x - 2 = 0$.

Solution : We have

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$

$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$

$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

The roots of $6x^2 - x - 2 = 0$ are the values of x for which $(3x - 2)(2x + 1) = 0$

Therefore, $3x - 2 = 0$ or $2x + 1 = 0$,

i.e., $x = \frac{2}{3}$ or $x = -\frac{1}{2}$

Therefore, the roots of $6x^2 - x - 2 = 0$ are $\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{2}$.

We verify the roots, by checking that $\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{2}$ satisfy $6x^2 - x - 2 = 0$.

Example 5 : Find the roots of the quadratic equation $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$.

Solution : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

So, the roots of the equation are the values of x for which

$$\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) = 0$$

Now, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ for $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

So, this root is repeated twice, one for each repeated factor $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$.

AP SCERT

ఇవి ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క మూలాలు అని **ధృవీకరించండి.**

మనం $2x^2 - 5x + 3 = 0$ మూలాలను $2x^2 - 5x + 3$ని రెండు సరళ కారణాంకాలుగా మార్చడం ద్వారా మరియు ప్రతి కారణాంకాన్ని సున్నాకి సమానం చేయడం ద్వారా కనుగొన్నామని గమనించండి.

ఉదాహరణ 4 : వర్గ సమీకరణం $6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనుము.

సాధన :

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ యొక్క x విలువలు

కావున, $3x - 2 = 0$ లేదా $2x + 1 = 0$,

అనగా, $x = \frac{2}{3}$ లేదా $x = -\frac{1}{2}$

కావున, $6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{2}$

కావున మూలాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{2}$ లు $6x^2 - x - 2$ ని తృప్తిపరచడాన్ని మనం సరిచూడవచ్చు.

ఉదాహరణ 5 : వర్గ సమీకరణం $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనుము.

సాధన : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$
$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

కాబట్టి x యొక్క విలువతో సమీకరణము యొక్క మూలాలు

$$(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$$

ఇప్పుడు, వర్గ సమీకరణం $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ కు $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$

కావున ప్రతి పునరావృత కారణాంకము $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ కు ఈ మూలము రెండుసార్లు పునరావృతమగును.

AP SCERT

Therefore, the roots of $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ are $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Example 6 : Find the dimensions of the prayer hall discussed in Section 4.1.

Solution : In Section 4.1, we found that if the breadth of the hall is x m, then x satisfies the equation $2x^2 + x - 300 = 0$. Applying the factorisation method, we write this equation as

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

i.e., $$(x - 12)(2x + 25) = 0$$

So, the roots of the given equation are $x = 12$ or $x = -12.5$. Since x is the breadth of the hall, it cannot be negative.

Thus, the breadth of the hall is 12 m. Its length $= 2x + 1 = 25$ m.

EXERCISE 4.2

1. Find the roots of the following quadratic equations by factorisation:

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. Solve the problems given in Example 1.

3. Find two numbers whose sum is 27 and product is 182.

4. Find two consecutive positive integers, sum of whose squares is 365.

5. The altitude of a right triangle is 7 cm less than its base. If the hypotenuse is 13 cm, find the other two sides.

6. A cottage industry produces a certain number of pottery articles in a day. It was observed on a particular day that the cost of production of each article (in rupees) was 3 more than twice the number of articles produced on that day. If the total cost of production on that day was ₹ 90, find the number of articles produced and the cost of each article.

4.4 Nature of Roots

The equation $ax^2 + bx + c = 0$ are given by

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

AP SCERT

కావున, వర్గ సమీకరణం $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$.

ఉదాహరణ 6 : విభాగం 4.1 నందు చర్చించిన సమస్యలోని ప్రార్థన మందిరం యొక్క కొలతలను కనుగొనుము.

సాధన : విభాగం 4.1 నందు హాల్ యొక్క వెడల్పు x మీటర్లు అయిన, x విలువ సమీకరణము $2x^2 + x - 300 = 0$ను తృప్తిపరుస్తుంది. కారణాంక పద్ధతిని ఈ సమీకరణమునకు అనువర్తింపజేసిన, ఈ సమీకరణమును కింది విధముగా రాయవచ్చు.

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

అనగా, $(x - 12)(2x + 25) = 0$

కావున, వర్గ సమీకరణ సాధనలు $x = 12$ లేదా $x = -12.5$. x అనేది హాలు వెడల్పు కావున, ఎప్పుడు రుణాత్మకం కాదు. కావున హాలు వెడల్పు 12 మీ. దాని పొడవు $= 2x + 1 = 25$ మీ.

అభ్యాసం 4.2

1. కింది వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలను కారణాంక పద్ధతిలో కనుగొనుము :
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. ఉదాహరణ 1 నందు ఇచ్చిన సమస్యలను సాధించుము.
3. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 27 మరియు వాటి లబ్ధం 182 అయ్యే విధంగా ఆ రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.
4. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 365 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
5. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు దాని భూమి కంటే 7 సెం.మీ తక్కువ. కర్ణం పొడవు 13 సెం.మీ అయిన మిగిలిన రెండు భుజాలను కనుగొనుము.
6. ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ప్రతిరోజు ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యలో వస్తువులను తయారు చేస్తారు. ఒకరోజు తయారైన ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు (రూపాయలలో) ఆరోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్యకు రెట్టింపు కంటే ₹3 ఎక్కువ. ఆరోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల ఖరీదు ₹90 అయిన, ఆరోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల సంఖ్య మరియు ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదును కనుగొనుము.

4.4 మూలాల స్వభావం

$ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

AP SCERT

If $b^2 - 4ac > 0$, we get two distinct real roots $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ and $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

If $b^2 - 4ac = 0$, then $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, i.e., $x = -\frac{b}{2a}$ or $-\frac{b}{2a}$.

So, the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are both $\frac{-b}{2a}$.

Therefore, we say that the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has two equal real roots in this case.

If $b^2 - 4ac < 0$, then there is no real number whose square is $b^2 - 4ac$. Therefore, there are no real roots for the given quadratic equation in this case.

Since $b^2 - 4ac$ determines whether the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has real roots or not, $b^2 - 4ac$ is called the **discriminant** of this quadratic equation.

So, a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has

(i) two distinct real roots, if $b^2 - 4ac > 0$,

(ii) two equal real roots, if $b^2 - 4ac = 0$,

(iii) no real roots, if $b^2 - 4ac < 0$.

Let us consider some examples.

Example 7: Find the discriminant of the quadratic equation $2x^2 - 4x + 3 = 0$, and hence find the nature of its roots.

Solution : The given equation is of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a = 2$, $b = -4$ and $c = 3$. Therefore, the discriminant

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

So, the given equation has no real roots.

Example 8 : A pole has to be erected at a point on the boundary of a circular park of diameter 13 metres in such a way that the differences of its distances from two diametrically opposite fixed gates A and B on the boundary is 7 metres. Is it possible to do so? If yes, at what distances from the two gates should the pole be erected?

Solution : Let us first draw the diagram (see Fig. 4.2).

Let P be the required location of the pole. Let

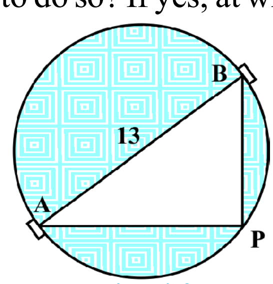


Fig. 4.2

AP SCERT

$b^2 - 4ac > 0$, అయిన మనము రెండు విభిన్న మూలాలు $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ మరియు $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

లను పొందుతాము.

$b^2 - 4ac > 0$ అయిన $x -\frac{b}{2a} \pm 0$ అనగా $x = -\frac{b}{2a}$ లేదా $-\frac{b}{2a}$.

కావున $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలాలు రెండు $\frac{-b}{2a}$ అగును.

అందువల్ల, ఈ సందర్భంలో వర్గసమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$. రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉందని మనము చెప్పగలము.

$b^2 - 4ac < 0$, అయిన వర్గము $b^2 - 4ac$ అయ్యేవిధంగా ఏ వాస్తవ సంఖ్యా ఉండదు. అందువల్ల ఈ సందర్భంలో ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు లేవు.

వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉన్నదా? లేదా? అను దానిని $b^2 - 4ac$ విలువ నిర్ధారించును. కావున $b^2 - 4ac$ ని వర్గ సమీకరణం యొక్క **విచక్షణి** అంటాం.

అనగా $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం,

(i) $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉండదు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 7: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క విచక్షణి కనుగొనండి. తద్వారా దాని మూలాల స్వభావాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : ఇవ్వబడ్డ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలోఉంటుంది, ఇక్కడ $a = 2$, $b = -4$ మరియు $c = 3$. కావున విచక్షణి,

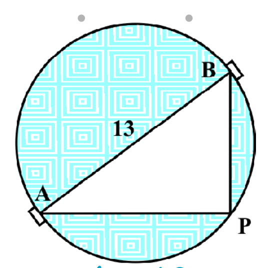
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు లేవు.

ఉదాహరణ 8 : 3 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఒక వృత్తాకార పార్కు సరిహద్దు మీద ఒక స్తంభమును ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. పార్కు యొక్క సరిహద్దు మీద ఎదురెదురుగా అనగా ఒక వ్యాసం యొక్క చివరి బిందువుల వద్ద ఏర్పాటు చేయబడిన A మరియు B అనే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభము వరకూ గల దూరాల బేధము 7 మీ. వుండునట్లు స్తంభమును ఏర్పాటు చేయగలమా? ఒకవేళ చేయగలిగితే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభం ఎంతదూరంలో వుంటుంది?

సాధన : ముందుగా తగిన చిత్రాన్ని గీద్దాం (పటం 4.2 చూడండి).

స్తంభమును ఏర్పాటు చేసే బిందువు P అనుకుందాం.



పటం 4.2

the distance of the pole from the gate B be x m, i.e., BP = x m. Now the difference of the distances of the pole from the two gates = AP – BP (or, BP – AP) = 7 m. Therefore, AP = $(x + 7)$ m.

Now, AB = 13m, and since AB is a diameter,

$$\angle APB = 90^\circ \qquad \text{(Why?)}$$

Therefore, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (By Pythagoras theorem)

i.e., $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

i.e., $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

i.e., $2x^2 + 14x - 120 = 0$

So, the distance 'x' of the pole from gate B satisfies the equation

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

So, it would be possible to place the pole if this equation has real roots. To see if this is so or not, let us consider its discriminant. The discriminant is

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$$

So, the given quadratic equation has two real roots, and it is possible to erect the pole on the boundary of the park.

Solving the quadratic equation $x^2 + 7x - 60 = 0$, by the quadratic formula, we get

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

Therefore, $x = 5$ or -12.

Since x is the distance between the pole and the gate B, it must be positive. Therefore, $x = -12$ will have to be ignored. So, $x = 5$.

Thus, the pole has to be erected on the boundary of the park at a distance of 5m from the gate B and 12m from the gate A.

Example 9 : Find the discriminant of the equation $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ and hence find the nature of its roots. Find them, if they are real.

Solution : Here $a = 3$, $b = -2$ and $c = \frac{1}{3}$.

AP SCERT

B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరమును x అనుకుందాం.

అనగా $BP = x$ మీ. ఇప్పుడు, గేట్ల నుండి రెండు స్తంభాల యొక్క దూరాల మధ్య తేడా $= AP - BP$ (లేదా, $BP - AP$) $=7$ మీ. కనుక, $AP = (x + 7)$ మీ అవుతుంది.

ఇప్పుడు $AB = 13$మీ. మరియు AB అనేది ఒక వ్యాసం కనుక,

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

కాబట్టి, $$AP^2 + PB^2 = AB^2 \quad \text{(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..)}$$

అనగా, $$(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$$

అనగా, $$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

అనగా, $$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

కాబట్టి, గేటు B నుంచి స్తంభం యొక్క 'x' దూరం సమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరుస్తుంది.

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

కాబట్టి, ఈ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు ఉంటే స్తంభాన్ని ఉంచడం సాధ్యమవుతుంది. ఇది నిజమో కాదో తెలుసుకోవడానికి, దాని విచక్షిణిని పరిశీలిద్దాం. విచక్షిణి

$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణం రెండు వాస్తవ మూలాలను కలిగిఉంది, మరియు పార్కు యొక్క సరిహద్దులో స్తంభాన్ని నిర్మించడం సాధ్యమవుతుంది.

వర్గ సమీకరణము $x^2 + 7x - 60 = 0$ ను వర్గ సమీకరణ సూత్రం ద్వారా సాధించగా,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

కావున, $x = 5$ లేదా -12.

x అనేది స్తంభం మరియు గేటు B, మధ్య దూరం కనుక, అది తప్పనిసరిగా ధనాత్మకంగా ఉండాలి. అందువల్ల, $x = -12$ను విస్మరించాల్సి ఉంటుంది. కాబట్టి $x = 5$.

ఈ విధంగా పార్కు సరిహద్దులో గేటు B నుండి 5 మీ.మరియు గేటు A నుండి 12 మీ దూరంలో స్తంభాన్ని ఏర్పాటు చేయాలి.

ఉదాహరణ 9 : సమీకరణం $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుము. తద్వారా మూలాల స్వభావాన్ని తెలుపుము. ఒకవేళ వాస్తవ మూలాలు ఉంటే వాటిని కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ $a = 3, b = -2$ మరియు $c = \frac{1}{3}$.

AP SCERT

Therefore, discriminant $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$.

Hence, the given quadratic equation has two equal real roots.

The roots are $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, i.e., $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, i.e., $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

EXERCISE 4.3

1. Find the nature of the roots of the following quadratic equations. If the real roots exist, find them:

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. Find the values of k for each of the following quadratic equations, so that they have two equal roots.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. Is it possible to design a rectangular mango grove whose length is twice its breadth, and the area is 800 m^2? If so, find its length and breadth.

4. Is the following situation possible? If so, determine their present ages.
The sum of the ages of two friends is 20 years. Four years ago, the product of their ages in years was 48.

5. Is it possible to design a rectangular park of perimeter 80 m and area 400 m^2? If so, find its length and breadth.

AP SCERT

కావున, విచక్షణి, $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$.

అందువల్ల, ఇవ్వబడ్డ వర్గ సమీకరణం రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

కావున, విచక్షణి $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, అనగా $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, అనగా $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

అభ్యాసం 4.3

1. క్రింది వర్గ సమీకరణాల మూలాల స్వభావం కనుగొనుము. ఒకవేళ వాస్తవ మూలాలు ఉంటే వాటిని కనుగొనుము.

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. క్రింది వర్గ సమీకరణాలలో ప్రతిదానికి రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు ఉంటే k విలువను కనుగొనుము.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. మామిడి తోట 800 చదరపు మీటర్ల వైశాల్యం ఉంటూ పొడవు, వెడల్పు కంటే రెండు రెట్లు ఉండే విధంగా ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార తోటను ఏర్పాటు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు వెడల్పులను కనుగొనుము.

4. క్రింది సందర్భము సాధ్యమవుతుందా? ఒకవేళ సాధ్యమైతే వారి వయస్సులను కనుగొనుము.
ఇద్దరి మిత్రుల వయస్సుల మొత్తం 20 సంవత్సరాలు. 4 సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48.

5. చుట్టుకొలత 80 మీ. మరియు వైశాల్యం 400మీ^{2} ఉండునట్లు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు పార్కును ఏర్పాటు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

AP SCERT

4.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A quadratic equation in the variable x is of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, c are real numbers and $a \neq 0$.
2. A real number α is said to be a root of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, if $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. The zeroes of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$ and the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are the same.
3. If we can factorise $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, into a product of two linear factors, then the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ can be found by equating each factor to zero.
4. Quadratic formula: The roots of a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are given by $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, provided $b^2 - 4ac \geq 0$.
5. A quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has

   (i) two distinct real roots, if $b^2 - 4ac > 0$, (ii) two equal roots (i.e., coincident roots), if $b^2 - 4ac = 0$, and (iii)no real roots, if $b^2 - 4ac < 0$.

AP SCERT

4.5 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. చలరాశి x లో వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం $ax^2 + bx + c = 0$, ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

2. సాధారణంగా $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ సంఖ్య α ను మూలము అంటారు. $ax^2 + bx + c$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువలు, $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు ఒక్కటే అని గుర్తించగలరు.

3. $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి ప్రతి దానిని 0 కు సమానం చేయడం ద్వారా $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనగలుగుతాము.

4. వర్గ సమీకరణ సూత్రం: వర్గ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినపుడు $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ అవుతాయి.

5. వర్గ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ నందు

(i) $b^2 - 4ac > 0$, అయిన, రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలు కలిగి ఉంటుంది. (ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయిన, రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది మరియు (iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన, వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉండదు.

AP SCERT

D1T5C8

ARITHMETIC PROGRESSIONS 5

5.1 Introduction

You must have observed that in nature, many things follow a certain pattern, such as the petals of a sunflower, the holes of a honeycomb, the grains on a maize cob, the spirals on a pineapple and on a pine cone, etc.

We now look for some patterns which occur in our day-to-day life. Some such examples are :

(i) Reena applied for a job and got selected. She has been offered a job with a starting monthly salary of ₹ 8000, with an annual increment of ₹ 500 in her salary. Her salary (in ₹) for the 1st, 2nd, 3rd, . . . years will be, respectively

8000, 8500, 9000, ...

(ii) The lengths of the rungs of a ladder decrease uniformly by 2 cm from bottom to top (see Fig. 5.1). The bottom rung is 45 cm in length. The lengths (in cm) of the 1st, 2nd, 3rd, . . ., 8th rung from the bottom to the top are, respectively

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

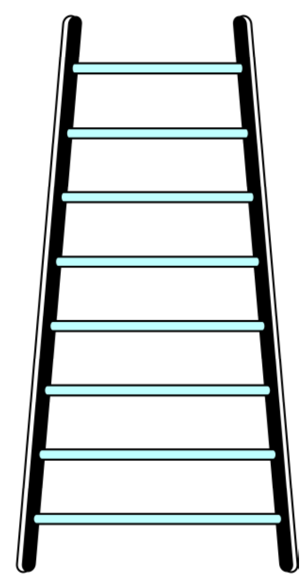


Fig. 5.1

(iii) In a savings scheme, the amount becomes $\frac{5}{4}$ times of itself after every 3 years. The maturity amount (in ₹) of an investment of ₹ 8000 after 3, 6, 9 and 12 years will be, respectively :

10000, 12500, 15625, 19531.25

AP SCERT

అంకశ్రేఢులు 5

5.1 పరిచయం

ప్రకృతిలో చాలా వస్తువులు ఒక ప్రత్యేకమైన అమరికలను పాటించడం మనం గమనించే ఉంటాము. ఉదాహరణకు ప్రొద్దు తిరుగుడు పువ్వులోని పూలరెక్కలు, తేనెతుట్టెలోని రంధ్రాలు, మొక్కజొన్న కంకిలోని విత్తనాలు, అనాస మరియు దేవదారు పండ్లమీద సర్పిలాకారాలు మొదలైనవి.

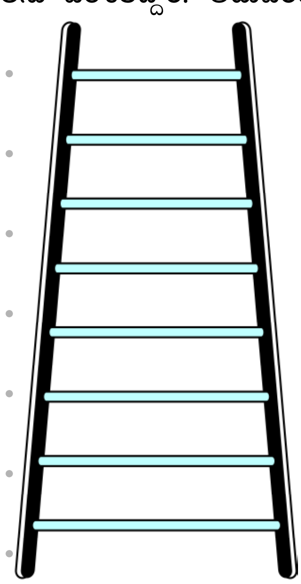
ఇప్పుడు మనము నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే ఇటువంటి మరికొన్ని అమరికలను పరిశీలిద్దాం. అటువంటి కొన్ని ఉదాహరణలు:

(i) రీనా ఒక ఉద్యోగానికి దరఖాస్తు చేయగా ఎంపిక కాబడినది. ఆమె నెలకు ₹ 8000 /– చొప్పున మరియు సంవత్సరానికి ₹ 500 పెంచే విధంగా గల ఉద్యోగంలో నియమితురాలైంది. అయిన ఆమె జీతం (₹లలో) మొదటి, రెండవ, మూడవ వరుస సంవత్సరాలలో నెలకు

8000, 8500, 9000, ...

(ii) ఒక నిచ్చెన మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింది నుంచి పైకి క్రమంగా 2 సెం.మీ. తగ్గుతూ ఉంది. (పటం 5.1 చూడండి.) క్రింద నుంచి మొదటి మెట్టు యొక్క పొడవు 45 సెం.మీ. అయిన క్రింద నుంచి పైకి క్రమంగా మొదటి, రెండవ, మూడవ ... ఎనిమిదవ మెట్ల పొడవులు వరుసగా

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31



పటం 5.1

(iii) ఒక సేవింగ్ స్కీములో సొమ్ము మూడు సంవత్సరాలకు ఒకసారి దానిమీద $\frac{5}{4}$ రెట్లు పెరుగుతుంది. ఈ స్కీములో ₹ 8000ను పెట్టుబడిగా పెట్టిన 3, 6, 9 మరియు 12 సంః తరువాత వచ్చే మొత్తం సొమ్ము (₹లలో) వరుసగా:

10000, 12500, 15625, 19531.25

AP SCERT

(iv) The number of unit squares in squares with side 1, 2, 3, . . . units (see Fig. 5.2) are, respectively

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

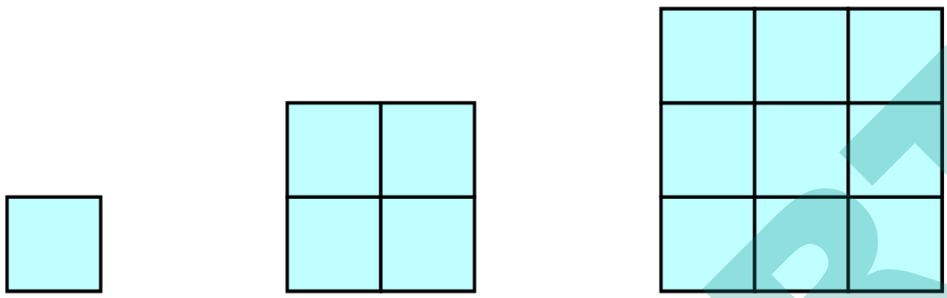


Fig. 5.2

(v) Shakila puts ₹ 100 into her daughter's money box when she was one year old and increased the amount by ₹ 50 every year. The amounts of money (in ₹) in the box on the 1st, 2nd, 3rd, 4th, . . . birthday were

100, 150, 200, 250, . . ., respectively.

(vi) A pair of rabbits are too young to produce in their first month. In the second, and every subsequent month, they produce a new pair. Each new pair of rabbits produce a new pair in their second month and in every subsequent month (see Fig. 5.3). Assuming no rabbit dies, the number of pairs of rabbits at the start of the 1st, 2nd, 3rd, . . ., 6th month, respectively are :

1, 1, 2, 3, 5, 8

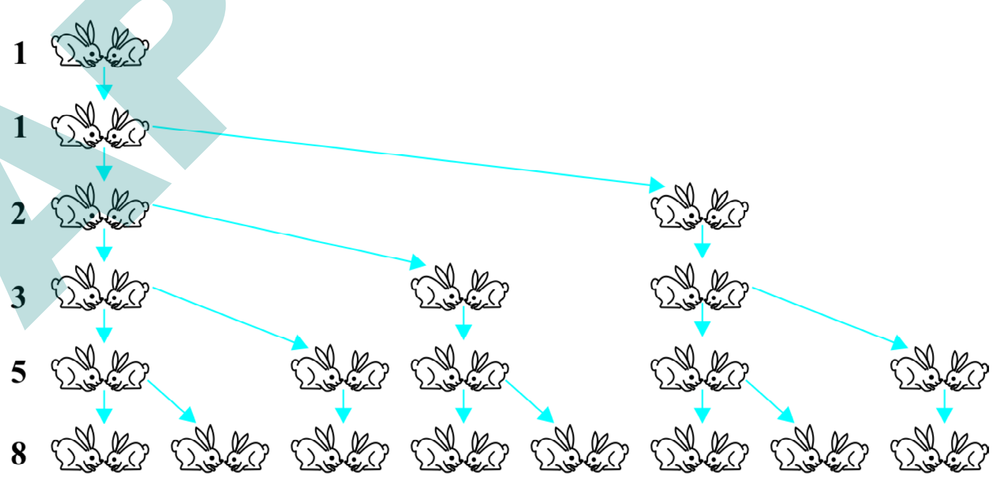
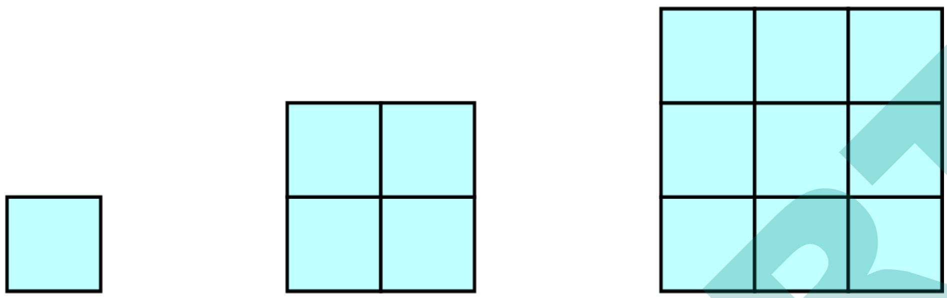


Fig. 5.3

AP SCERT

(iv) 1, 2, 3 యూనిట్లు భుజాలుగా గల చతురస్రాలలోని యూనిట్ చతురస్రాల సంఖ్య వరుసగా

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ (పటం 5.2 చూడండి)



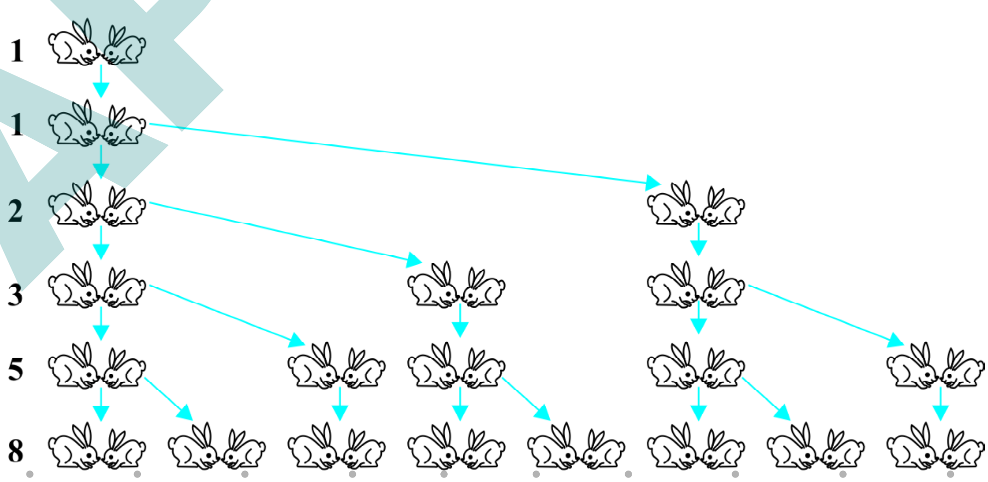
పటం 5.2

(v) షకీలా తన కూతురు మొదటి పుట్టిన రోజున ₹100 లను తన కూతురు యొక్క డబ్బుల పెట్టెలో దాచింది. ప్రతి సంవత్సరము ఈ విధంగా దాచే సొమ్ము ₹50 పెంచుతూ పోయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ. నాల్గవ .... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా

100, 150, 200, 250, . . .

(vi) ఒక కుందేళ్ళ జంట మొదటి నెలలో చిన్నవిగా ఉన్నందున ఏం ఉత్పత్తి లేదు కానీ, రెండవ నెల నుంచి ప్రతి నెల ఒక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. ఇలా ఉత్పత్తి అయిన కుందేళ్ళ జంట కూడా తిరిగి రెండవ నెల నుంచి ప్రతి నెల ఇంకొక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. (పటం 5.3 చూడండి) ఏ కుందేళ్ళ జంట చనిపోలేదని భావిస్తే 1, 2, 3, ..., 6వ నెలలో వుండే కుందేళ్ళ జంటల సంఖ్య వరుసగా :

1, 1, 2, 3, 5, 8



పటం 5.3

In the examples above, we observe some patterns. In some, we find that the succeeding terms are obtained by adding a fixed number, in other by multiplying with a fixed number, in another we find that they are squares of consecutive numbers, and so on.

In this chapter, we shall discuss one of these patterns in which succeeding terms are obtained by adding a fixed number to the preceding terms. We shall also see how to find their nth terms and the sum of n consecutive terms, and use this knowledge in solving some daily life problems.

5.2 Arithmetic Progressions

Consider the following lists of numbers :

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

Each of the numbers in the list is called a **term**.

Given a term, can you write the next term in each of the lists above? If so, how will you write it? Perhaps by following a pattern or rule. Let us observe and write the rule.

In (i), each term is 1 more than the term preceding it.

In (ii), each term is 30 less than the term preceding it.

In (iii), each term is obtained by adding 1 to the term preceding it.

In (iv), all the terms in the list are 3 , i.e., each term is obtained by adding (or subtracting) 0 to the term preceding it.

In (v), each term is obtained by adding – 0.5 to (i.e., subtracting 0.5 from) the term preceding it.

In all the lists above, we see that successive terms are obtained by adding a fixed number to the preceding terms. Such list of numbers is said to form an **Arithmetic Progression (AP)**.

So, **an arithmetic progression is a list of numbers in which each term is obtained by adding a fixed number to the preceding term except the first term.**

This fixed number is called the **common difference** of the AP. Remember that it **can be positive, negative or zero**.

పై ఉదాహరణలో మనం కొన్ని అమరికలను గమనించగలము. కొన్నింటిలో, ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలపటం వల్ల లభిస్తాయి. కొన్నింటిలో ప్రతి పదమును ఒక స్థిర పదంచే గుణించటం వల్ల తరువాత పదాలను పొందగలము. మరికొన్నింటిలో వరుస సంఖ్యల వర్గాలను గమనించగలము ఇలాగే మరికొన్ని.

ఈ అధ్యాయంలో, ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలపటం వల్ల తరువాత లభించే అమరికల గూర్చి చర్చిస్తాం. వాని యొక్క nవ పదాలను మరియు n వరుస పదాల మొత్తాలను కనుగొనుట గురించి చర్చిస్తాం. ఇది కొన్ని నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనకు ఉపయోగపడును.

5.2 అంకశ్రేఢులు

క్రింది సంఖ్యల జాబితాలను పరిశీలించండి:

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

జాబితాలోని ప్రతి సంఖ్యను ఒక **పదం** అంటాము.

ఇచ్చిన పదాల ఆధారంగా ప్రతి జాబితాలో తరువాత పదమును రాయగలరా? రాయగలిగితే ఎలా రాయగలరు? బహుశా అమరికలోని నియమం ఆధారంగా రాయగలరు. పై వాటికి నియమం ఏమిటో మనం పరిశీలించి రాద్దాం.

(i) లో ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికంటే '1' ఎక్కువ.

(ii) లో ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదము కంటే 30 తక్కువ

(iii) లో ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికి '1' కలపటం వల్ల వస్తుంది.

(iv) లో అన్ని పదాలు 3యే. అనగా ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికి సున్న ('0') కలపటం లేదా తీసివేయటం వల్ల వస్తుంది.

(v) లో ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికి -0.5 ను కలపటం వల్ల (అనగా 0.5ను తీసివేయడం వల్ల) వస్తుంది.

పై అన్ని జాబితాలలో ప్రతి జాబితాలోని ప్రతి పదము దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల వస్తున్నాయి. ఇలాంటి సంఖ్యల జాబితాను **అంకశ్రేఢి (AP)** అంటాము.

కావున **'ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన అన్ని పదాలు దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిరసంఖ్యను కలపటం వల్ల వస్తూ ఉంటే ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము.**

కలిపే స్థిర సంఖ్యను అంకశ్రేణి యొక్క **సామాన్య భేదము** లేదా **పదాంతరము** అంటాము. ఇది **ధనాత్మకము, ఋణాత్మకము లేదా శూన్యం** కావచ్చు అని గుర్తుంచుకోండి.

AP SCERT

Let us denote the first term of an AP by a_1, second term by a_2, . . ., nth term by a_n and the common difference by d. Then the AP becomes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

So, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

Some more examples of AP are:

(a) The heights (in cm) of some students of a school standing in a queue in the morning assembly are 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) The minimum temperatures (in degree celsius) recorded for a week in the month of January in a city, arranged in ascending order are

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) The balance money (in ₹) after paying 5 % of the total loan of ₹ 1000 every month is 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) The cash prizes (in ₹) given by a school to the toppers of Classes I to XII are, respectively, 200, 250, 300, 350, . . ., 750.

(e) The total savings (in ₹) after every month for 10 months when ₹ 50 are saved each month are 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

It is left as an exercise for you to explain why each of the lists above is an AP.

You can see that

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

represents an arithmetic progression where a is the first term and d the common difference. This is called the **general form of an AP.**

Note that in examples (a) to (e) above, there are only a finite number of terms. Such an AP is called a **finite AP.** Also note that each of these Arithmetic Progressions (APs) has a last term. The APs in examples (i) to (v) in this section, are not finite APs and so they are called **infinite Arithmetic Progressions**. Such APs do not have a last term.

Now, to know about an AP, what is the minimum information that you need? Is it enough to know the first term? Or, is it enough to know only the common difference? You will find that you will need to know both – the first term a and the common difference d.

For instance if the first term a is 6 and the common difference d is 3, then the AP is

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

and if a is 6 and d is -3, then the AP is

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

AP SCERT

ఒక అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదమును a_1, రెండవ పదమును a_2, . . ., nవ పదమును a_n మరియు సామాన్య భేదము d అనుకొనిన అంకశ్రేఢి $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అవుతుంది.

కావున, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

మరిన్ని అంకశ్రేఢుల ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం:

(a) ఒక పాఠశాలలో ఉదయం ప్రార్థనా సమయంలో వరుసగా నిలబడిన విద్యార్థుల ఎత్తులు (సెం.మీ.లలో) 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) ఒక పట్టణములో జనవరి మాసంలోని ఒక వారంలో నమోదైన కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలను (డిగ్రీ సెల్సియస్‌లలో) ఆరోహణ క్రమములో అమర్చగా $-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$

(c) ₹1000ల అప్పులో మొత్తం పైన 5% చొప్పున ప్రతినెల చెల్లిస్తున్నచో ప్రతినెల చివర ఇంకనూ చెల్లించవలసిన సొమ్ము 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) ఒక పాఠశాలలో I నుంచి XII తరగతి వరకూ ప్రతి తరగతిలో అత్యధిక మార్కులు సాధించిన వారికి ఇచ్చే బహుమతుల విలువ ₹ లలో వరుసగా 200, 250, 300, 350, . . ., 750.

(e) 10 నెలల్లో ప్రతి నెలలో ₹ 50 లు చొప్పున పొదుపు చేసిన ప్రతి నెల చివరలో వుండే మొత్తం సొమ్ము (₹లలో) వరుసగా 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

ఎగువ జాబితాలలో ప్రతి ఒక్కటి అంకశ్రేఢిలో ఎందుకు కలవో అని వివరించుట మీకు ఒక అభ్యాసంగా వదిలివేయబడినది.

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

అనునది అంకశ్రేఢిని సూచించును. ఇందులో a మొదటి పదము మరియు d సామాన్య భేదం లేదా పదాంతరము. దీనిని **అంకశ్రేఢి సామాన్యరూపము అని పిలుస్తారు.**

ఉదాహరణలు (a) నుంచి (e) వరకూ పైన ఇవ్వబడిన జాబితాలన్నీ కూడా పరిమిత సంఖ్యలో పదాలను కలిగి ఉన్నాయని గమనించండి. ఇటువంటి అంకశ్రేఢులను **పరిమిత అంకశ్రేఢులు** అంటారు. వీటి ప్రతి అంకశ్రేణిలో చివరి పదము ఉంటుంది. అయితే పై శీర్షికలోని ఉదా॥ (i) నుంచి (v) వరకూ ఇవ్వబడిన జాబితాలలో పదాల సంఖ్య అపరిమితము. ఇటువంటి అంక శ్రేఢులను **అనంత అంకశ్రేఢులు** అంటాము. ఆ అంకశ్రేణిలో చివర పదము ఉండదు.

ఒక అంకశ్రేఢి గురించి తెలియాలంటే కనీసం మనకు ఏమేమి సమాచారం అవసరము? ఈ శ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము తెలిస్తే సరిపోతుందా? లేదా సామాన్య భేదం తెలిస్తే సరిపోతుందా? అయితే ఒక అంకశ్రేఢి గురించి తెలియాలంటే లేదా దానిని పూర్తి చేయాలంటే మనకు రెండూ - అనగా దాని మొదటి పదము a మరియు సామాన్య భేదము d అవసరమని మనం గమనించగలము.

ఉదాహరణకు మొదటి పదము a విలువ 6 మరియు సామాన్య భేదం d విలువ 3 అయిన అంకశ్రేఢి.

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

మరియు a విలువ 6 మరియు d విలువ -3 అయిన అంకశ్రేఢి

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

AP SCERT

Similarly, when

$a = -7, \quad d = -2, \quad$ the AP is $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0, \quad d = 0.1, \quad$ the AP is $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0, \quad d = 1\frac{1}{2}, \quad$ the AP is $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2, \quad d = 0, \quad$ the AP is $2, 2, 2, 2, \ldots$

So, if you know what a and d are, you can list the AP. What about the other way round? That is, if you are given a list of numbers can you say that it is an AP and then find a and d? Since a is the first term, it can easily be written. We know that in an AP, every succeeding term is obtained by adding d to the preceding term. So, d found by subtracting any term from its succeeding term, i.e., the term which immediately follows it should be same for an AP.

For example, for the list of numbers :

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

We have

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

Here the difference of any two consecutive terms in each case is 3. So, the given list is an AP whose first term a is 6 and common difference d is 3.

For the list of numbers : $6, 3, 0, -3, \ldots,$

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

Similarly this is also an AP whose first term is 6 and the common difference is –3.

In general, for an AP $a_1, a_2, \ldots, a_n$, we have

$$d = a_{k+1} - a_k$$

where a_{k+1} and a_k are the $(k + 1)$th and the kth terms respectively.

To obtain d in a given AP, we need not find all of $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$. It is enough to find only one of them.

Consider the list of numbers 1, 1, 2, 3, 5, ... By looking at it, you can tell that the difference between any two consecutive terms is not the same. So, this is not an AP.

AP SCERT

అదే విధంగా,

$a = -7,\quad d = -2,$ అయిన అంకశ్రేఢి $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0,\quad d = 0.1,$ అయిన అంకశ్రేఢి $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0,\quad d = 1\frac{1}{2},$ అయిన అంకశ్రేఢి $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2,\quad d = 0,$ అయిన అంకశ్రేఢి $2, 2, 2, 2, \ldots$

కావున, a మరియు d ల విలువలు తెలిసిన అంకశ్రేఢిని రాయగలం. వేరొక పద్ధతి గూర్చి చూద్దాం. ఒక వేళ మీకు సంఖ్యల జాబితా ఇస్తే అది AP లో ఉందని చెప్పి a మరియు d ల విలువలను కనుగొనగలరా? a అనునది మొదటి పదము కావున దానిని సులభంగా రాయవచ్చు. అంకశ్రేఢిలో ప్రతి పదము దాని ముందు పదమునకు d ను కలుపుట వలన వచ్చునని మనకు తెలుసు. కావున ఏదైనా పదమును దాని తర్వాత పదము నుండి తీసివేయుట ద్వారా d ను పొందవచ్చును. అనగా తరువాత వచ్చే పదము అంకశ్రేఢిలోనే ఉండాలి.

ఉదాహరణకు, క్రింది సంఖ్యల జాబితాలో :

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

అదేవిధంగా,

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

ఇచ్చిన ఏ రెండు వరుస సంఖ్యల భేదం ఏ సందర్భంలోనైనా 3 గానే ఉంది. అందువల్ల ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీనిలో మొదటి పదము $a = 6$ మరియు సామాన్య భేదం $d = 3$.

$6, 3, 0, -3, \ldots$ అను సంఖ్యల జాబితాలో

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

అనగా, ఇది కూడా ఒక అంకశ్రేఢియే. దీనిలో మొదటి పదము $a = 6$ మరియు సామాన్య భేదం $d = -3$.

సాధారణంగా, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ఒక అంకశ్రేఢి అయిన

$$d = a_{k+1} - a_k$$

ఇచ్చట a_{k+1}, a_k లు వరుసగా $(k+1)$ వ మరియు k వ పదాలు

ఒక అంకశ్రేఢిలో d ని కనుగొనుటకు $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ లను అన్నింటిని కనుగొనవలసిన అవసరం లేదు. వానిలో ఏదైనా ఒక దాని విలువను కనుగొంటే సరిపోతుంది.

1, 1, 2, 3, 5 ...... సంఖ్యల జాబితాను పరిశీలించండి. దీనిలో రెండు వరుస పదాల మధ్య భేదం స్థిరంగా (ఒకే విధంగా) లేదు. అందువల్ల ఇది అంకశ్రేఢి కాదు.

AP SCERT

Note that to find d in the AP : 6, 3, 0, – 3, . . ., we have subtracted 6 from 3 and not 3 from 6, i.e., we should subtract the kth term from the $(k + 1)$ th term even if the $(k + 1)$ th term is smaller.

Let us make the concept more clear through some examples.

Example 1 : For the AP : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, . . ., write the first term a and the common difference d.

Solution : Here, $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

Remember that we can find d using any two consecutive terms, once we know that the numbers are in AP.

Example 2 : Which of the following list of numbers form an AP? If they form an AP, write the next two terms :

(i) 4, 10, 16, 22, . . .   (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .   (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

Solution :(i) We have
$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

i.e., $a_{k+1} - a_k$ is the same every time.

So, the given list of numbers forms an AP with the common difference $d = 6$.

The next two terms are: 22 + 6 = 28 and 28 + 6 = 34.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

i.e., $a_{k+1} - a_k$ is the same every time.

So, the given list of numbers forms an AP with the common difference $d = -2$.

The next two terms are:

$$-5 + (-2) = -7 \quad \text{and} \quad -7 + (-2) = -9$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

As $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, the given list of numbers does not form an AP.

అంకశ్రేఢి 6, 3, 0, – 3 .....లో d ని కనుగొనుటకు మనము 3 నుండి 6ను తీసివేసామని గమనించవలెను. అంతేకాని 6 నుంచి 3ను కాదు. అనగా $(k + 1)$ వ పదము చిన్నదైనప్పటికీ దీని నుండి kవ పదమును తీసివేయాలి.

మరికొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా అంకశ్రేఢి భావనను మరింత స్పష్టంగా తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1 : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ అను అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము a మరియు సామాన్యభేదము d లను కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట, $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$

ఇచ్చినది అంకశ్రేఢి అని తెలుసు కనుక d ని కనుగొనుటకు రెండు వరుస పదాలను ఉపయోగించాము.

ఉదాహరణ 2 : క్రింది వానిలో ఏవి అంకశ్రేఢులను ఏర్పరచును. ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయితే, తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు తెలపండి:

(i) 4, 10, 16, 22, . . .
(ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .
(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .
(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

సాధన : (i) ఇచ్చుట

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

i.e., $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతిసారి స్థిరము.

కావున, ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అగును. దీని సామాన్యభేదం $d = 6$.

తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు: $22 + 6 = 28$ మరియు $28 + 6 = 34$.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

i.e., $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతిసారి స్థిరము.

కావున, ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్యభేదం $d = -2$.

తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు:

$$-5 + (-2) = -7 \quad \text{మరియు} \quad -7 + (-2) = -9$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

ఇచ్చుట $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$
$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$
$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

Here, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

So, the given list of numbers does not form an AP.

EXERCISE 5.1

1. In which of the following situations, does the list of numbers involved make an arithmetic progression, and why?

(i) The taxi fare after each km when the fare is ₹ 15 for the first km and ₹ 8 for each additional km.

(ii) The amount of air present in a cylinder when a vacuum pump removes $\frac{1}{4}$ of the air remaining in the cylinder at a time.

(iii) The cost of digging a well after every metre of digging, when it costs ₹ 150 for the first metre and rises by ₹ 50 for each subsequent metre.

(iv) The amount of money in the account every year, when ₹ 10000 is deposited at compound interest at 8 % per annum.

2. Write first four terms of the AP, when the first term a and the common difference d are given as follows:

(i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$

(iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

3. For the following APs, write the first term and the common difference:

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. Which of the following are APs ? If they form an AP, find the common difference d and write three more terms.

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

AP SCERT

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$
$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$
$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$
ఇచట $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.
కావున, ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

అభ్యాసం 5.1

1. ఈ కింది సంఘటనలలో ఏ సంఘటనలో ఏర్పడే సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢి అవుతుంది? ఎందుకు?
   (i) ఒక టాక్సీకి మొదటి కిలోమీటరు ప్రయాణానికి ₹ 15 చొప్పున తరువాత ప్రతి కిలోమీటరుకు ₹ 8 చొప్పున చెల్లించవలసి ఉన్న ప్రతి కిలోమీటరు తరువాత చెల్లించవలసిన సొమ్ము.
   (ii) ఒక వాక్యూమ్ పంపు సిలెండరులో వుండే గాలి నుంచి $\frac{1}{4}$ వ వంతు తీసివేయును. అయిన ప్రతిసారీ సిలెండరులో మిగిలి ఉండే గాలి పరిమాణము.
   (iii) ఒక బావిని తవ్వడానికి మొదట మీటరుకు ₹ 150 వంతున ఆపై ప్రతి మీటరుకు ₹ 50 వంతున చెల్లించాలి. అయిన ప్రతి మీటరు తరువాత చెల్లించవలసిన సొమ్ము.
   (iv) ఒక బ్యాంకులో ₹ 10000 లను సంవత్సరానికి 8 % చక్రవడ్డీ ప్రకారం పొదుపు చేసిన ప్రతి సంవత్సరము చివరలో ఖాతాలో వుండే సొమ్ము.
2. అంకశ్రేఢుల యొక్క మొదటి పదము a మరియు సామాన్యభేదం d విలువలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. అయిన ఆ శ్రేఢిలోని మొదటి నాలుగు పదాలను కనుగొనుము:
   (i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$
   (iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$
   (v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$
3. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢులకు మొదటి పదమును, సామాన్య భేదంను కనుగొనుము:
   (i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$
   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$
4. క్రింది జాబితాలలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఒక వేళ అంకశ్రేఢి అయిన సామాన్యభేదం d ను, తరువాత వచ్చే మూడు పదాలను కనుగొనుము.
   (i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$
   (iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$
   (v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$
   (vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

AP SCERT

(ix) 1, 3, 9, 27, . . .

(x) a, $2a$, $3a$, $4a$, . . .

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 *n*th Term of an AP

Let us consider the situation again, given in Section 5.1 in which Reena applied for a job and got selected. She has been offered the job with a starting monthly salary of ₹ 8000, with an annual increment of ₹ 500. What would be her monthly salary for the fifth year?

To answer this, let us first see what her monthly salary for the second year would be.

It would be ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500. In the same way, we can find the monthly salary for the 3rd, 4th and 5th year by adding ₹ 500 to the salary of the previous year. So, the salary for the 3rd year = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (for the **3rd year**)

= ₹ 9000

Salary for the 4th year = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + **(4 – 1)** × 500] (for the **4th year**)

= ₹ 9500

Salary for the 5th year = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + **(5 – 1)** × 500] (for the **5th year**)

= ₹ 10000

Observe that we are getting a list of numbers

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

These numbers are in AP. (Why?)

AP SCERT

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 అంకశ్రేఢి యొక్క nవ పదము

5.1 విభాగంలో చర్చించిన రీనా ఉద్యోగం కోసం దరఖాస్తు చేసి ఉద్యోగం పొందిన విషయాన్ని మరొకసారి పరిశీలిద్దాం. ఈమెకు నెలకు ₹ 8000 చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ 500 చొప్పున పెంచే విధంగా వున్న ఉద్యోగంలో నియమించటం జరిగింది. అయితే ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత ఐదవ సంవత్సరములో ఆమె జీతం ఎంత ఉండవచ్చు?

దీనికి సమాధానం కనుగొనాలంటే ముందు ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత రెండవ సంవత్సరములో ఆమె జీతమును కనుగొనాలి.

అది ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500 ఇదే విధంగా, 3వ, 4వ, 5వ సంవత్సరములలో ఆమె జీతమును ముందు సంవత్సరములో ఉన్న జీతానికి ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

కావున, 3వ సం॥లో ఆమె జీతం = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] **(3వ సంవత్సరమునకు)**

= ₹ 9000

4వ సం॥లో ఆమె జీతం = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + **(4 – 1)** × 500] **(4వ సంవత్సరమునకు)**

= ₹ 9500

5వ సం॥లో ఆమె జీతం = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + **(5 – 1)** × 500] **(5వ సంవత్సరమునకు)**

= ₹ 10000

పై వాని నుంచి ఒక సంఖ్యల జాబితా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చును. అది క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి. (ఎందుకు?)

AP SCERT

Now, looking at the pattern formed above, can you find her monthly salary for the 6th year? The 15th year? And, assuming that she will still be working in the job, what about the monthly salary for the 25th year? You would calculate this by adding ₹ 500 each time to the salary of the previous year to give the answer. Can we make this process shorter? Let us see. You may have already got some idea from the way we have obtained the salaries above.

Salary for the 15th year

$$= \text{Salary for the 14th year} + ₹\ 500$$

$$= ₹\ (8000+\underbrace{500+500+500+\ldots+500}_{13\ \text{times}}) + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹\ [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500] = ₹\ 15000$$

i.e., First salary + (15 – 1) × Annual increment.

In the same way, her monthly salary for the 25th year would be

$$₹\ [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500] = ₹\ 20000$$

$$= \text{First salary} + \mathbf{(25 - 1)} \times \text{Annual increment}$$

This example would have given you some idea about how to write the 15th term, or the 25th term, and more generally, the nth term of the AP.

Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an AP whose first term a_1 is a and the common difference is d.

Then,

the **second term** $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\,d$

the **third** term $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\,d$

the **fourth** term $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\,d$

. . . .

. . . .

Looking at the pattern, we can say that the ***n*th** term $a_n = a + (n - 1)\,d$.

So, **the *n*th term a_n of the AP with first term *a* and common difference *d* is given by $a_n = a + (n - 1)\,d$.**

a_n is also called the **general term of the AP**. If there are m terms in the AP, then a_m

AP SCERT

పై అమరిక ఆధారంగా 6వ, 15వ సంవత్సరములో ఆమె యొక్క జీతమును కనుగొనగలమా? ఆమె ఒకవేళ ఇప్పటికీ అదే ఉద్యోగంలో కొనసాగితే 25వ సంవత్సరములో ఆమె జీతము ఎంత ఉండవచ్చును? ప్రతి సంవత్సరము ఆమె జీతమును ముందున్న సంవత్సరములో ఆమె జీతానికి ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు. అయితే దీనిని వీలైనంత తక్కువ సమయంలో వీలైనంత సులభంగా కనుగొనగలమా? ఇప్పుడు చూద్దాం. పై ప్రక్రియలలో జీతమును కనుగొనే విధానం మనకు కొంత అవగాహన అయినది కనుక దానిని ఉపయోగిద్దాం.

15వ సంవత్సరములో జీతము

= 14వ సంవత్సరములో జీతము + ₹ 500

= ₹ $\underbrace{(8000+500+500+500+....+500)}_{13 \text{ సార్లు}}$ + ₹ 500

= ₹ [8000 + 14 × 500]

= ₹ [8000 + **(15 – 1)** × 500] = ₹ 15000

అనగా, మొదటి జీతం + (15 – 1) × వార్షిక పెరుగుదల

అదే విధంగా 25వ సంవత్సరములో ఆమె జీతం

₹ [8000 + **(25 – 1)** × 500] = ₹ 20000

= మొదటి జీతం + **(25 – 1)** × వార్షిక పెరుగుదల

ఈ ఉదాహరణ ఒక అంకశ్రేఢిలో 15వ పదమును, 25వ పదమును రాయుటకు కావలసిన ఒక సులువు పద్ధతిని ఇచ్చింది. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క nవ పదమును కనుగొందాం.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ అనే ఒక అంకశ్రేఢిని తీసుకుందాం. దీనిలో మొదటి పదం a_1 అనేది a మరియు సామాన్య భేదం d అనుకుందాం.

అప్పుడు,

రెండవ పదం $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

మూడవ పదం $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

నాల్గవ పదం $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

....

....

పై అమరిక ఆధారంగా ***n***వ పదం $a_n = a + (n - 1)\, d$ అని చెప్పవచ్చు.

కావున, **మొదటి పదం a, సామాన్య భేదం d గా ఉంటే అంకశ్రేఢి యొక్క nవ పదము $a_n = a + (n - 1)\, d$.**

a_n ను అంకశ్రేఢి యొక్క **సాధారణ పదము** అని కూడా అంటాం. ఒక అంకశ్రేఢిలో m పదాలున్న a_m పదం చివరి పదం అవుతుంది.

represents the **last term which is sometimes also denoted by *l*.**

Let us consider some examples.

Example 3 : Find the 10th term of the AP : 2, 7, 12, . . .

Solution : Here, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ and $n = 10$.

We have $a_n = a + (n - 1)\,d$

So, $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

Therefore, the 10th term of the given AP is 47.

Example 4 : Which term of the AP : 21, 18, 15, . . . is -81? Also, is any term 0? Give reason for your answer.

Solution : Here, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ and $a_n = -81$, and we have to find n.

As $a_n = a + (n - 1)\,d$,

we have $-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

$-81 = 24 - 3n$

$-105 = -3n$

So, $n = 35$

Therefore, the 35th term of the given AP is -81.

Next, we want to know if there is any n for which $a_n = 0$. If such an n is there, then

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

i.e., $3(n - 1) = 21$

i.e., $n = 8$

So, the eighth term is 0.

Example 5 : Determine the AP whose 3rd term is 5 and the 7th term is 9.

Solution : We have

$$a_3 = a + (3 - 1)\,d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

and $$a_7 = a + (7 - 1)\,d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

Solving the pair of linear equations (1) and (2), we get

$$a = 3,\ d = 1$$

Hence, the required AP is 3, 4, 5, 6, 7, . . .

APSCERT

దీనిని కొన్నిసార్లు l తో కూడా సూచిస్తారు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 3 : 2, 7, 12 .... అంకశ్రేఢిలో 10వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ మరియు $n = 10$.

$a_n = a + (n - 1)\, d$ నుంచి

కావున, $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

అందువలన అంకశ్రేఢిలో 10వ పదము 47.

ఉదాహరణ 4 : 21, 18, 15, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము -81అగును? ఏదైనా ఒక పదము '0' అవుతుందా? నీ సమాధానమునకు కారణాలిమ్ము?

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ మరియు $a_n = -81$, మనము n విలువ కనుగొనాలి.

$a_n = a + (n - 1)\, d$ అని మనకు తెలుసు

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

కావున, $n = 35$

అనగా పై అంకశ్రేఢిలో 35వ పదము -81 అవుతుంది.

తరువాత $a_n = 0$ అయ్యేవిధంగా n ను కనుగొనాలి

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

i.e., $3(n - 1) = 21$

i.e., $n = 8$

కావున, అంకశ్రేఢి ఎనిమిదవ పదము 0 అవుతుంది.

ఉదాహరణ 5 : 3వ పదము 5, 7వ పదము 9గా ఉండునట్లు ఒక అంకశ్రేఢిని కనుగొనుము.

సాధన : లెక్క ప్రకారం

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

మరియు $a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$

సమీకరణాలు సాధన చేయగా, (1) మరియు (2) ల నుండి

$$a = 3, \; d = 1$$

కాబట్టి, కావలసిన అంకశ్రేఢి : 3, 4, 5, 6, 7, . . .

AP SCERT

Example 6 : Check whether 301 is a term of the list of numbers 5, 11, 17, 23, . . .

Solution : We have :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

As $a_{k+1} - a_k$ is the same for $k = 1, 2, 3$, etc., the given list of numbers is an AP.

Now, $a = 5$ and $d = 6$.

Let 301 be a term, say, the nth term of this AP.

We know that

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

So, $$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

i.e., $$301 = 6n - 1$$

So, $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

But n should be a positive integer (Why?). So, 301 is not a term of the given list of numbers.

Example 7 : How many two-digit numbers are divisible by 3?

Solution : The list of two-digit numbers divisible by 3 is :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

Is this an AP? Yes it is. Here, $a = 12,\ d = 3,\ a_n = 99.$

As $$a_n = a + (n - 1)\, d,$$

we have $$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

i.e., $$87 = (n - 1) \times 3$$

i.e., $$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

i.e., $$n = 29 + 1 = 30$$

So, there are 30 two-digit numbers divisible by 3.

Example 8 : Find the 11th term from the last term (towards the first term) of the AP : 10, 7, 4, . . ., – 62.

Solution : Here, $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3,\ l = -62,$

where $$l = a + (n - 1)\, d$$

AP SCERT

ఉదాహరణ 6 : 5, 11, 17, 23, . . . జాబితాలో 301 ఉంటుందో లేదో కనుగొనుము?

సాధన : ఇక్కడ :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

అనగా $k = 1, 2, 3 ....$ లకు $a_{k+1} - a_k$ స్థిరముగా ఉంటే, ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఈ అంకశ్రేఢిలో $a = 5$ మరియు $d = 6$.

301వ పదమును అంకశ్రేఢిలో n వ పదము అనుకుందాం. అనగా $a_n = 301$ అయితే

$a_n = a + (n-1)\,d$ అని మనకు తెలుసు

కావున, $$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

$$301 = 6n - 1$$

కావున, $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

అయితే n ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య కావలెను (ఎందుకు?) కావున 301 ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితాలో ఉండదు.

ఉదాహరణ 7 : 3చే భాగింపబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

సాధన : 3చే భాగింపబడే రెండంకెల సంఖ్యల జాబితా:

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

ఇది ఒక అంకశ్రేఢియేనా? అవును. ఇక్కడ, $a = 12, \; d = 3, \; a_n = 99.$

$a_n = a + (n-1)\,d$, అని మనకు తెలుసు

$$99 = 12 + (n-1) \times 3$$

$$87 = (n-1) \times 3$$

$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$n = 29 + 1 = 30$$

అనగా 3 చే భాగింపబడే రెండంకెల సంఖ్యలు 30 గలవు.

ఉదాహరణ 8 : 10, 7, 4, . . ., – 62 అంకశ్రేఢిలో చివరి నుండి 11వ పదమును (మొదటి పదం వైపుకు) కనుగొనుము?

సాధన : ఇక్కడ, $a = 10, \; d = 7 - 10 = -3, \; l = -62,$

అయితే $l = a + (n-1)\,d$ అని మనకు తెలుసు.

To find the 11th term from the last term, we will find the total number of terms in the AP.

So, $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

i.e., $-72 = (n - 1)(-3)$

i.e., $n - 1 = 24$

or $n = 25$

So, there are 25 terms in the given AP.

The 11th term from the last term will be the 15th term. (Note that it will not be the 14th term. Why?)

So, $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

i.e., the 11th term from the last term is – 32.

Alternative Solution :

If we write the given AP in the reverse order, then $a = -62$ and $d = 3$ (Why?)

So, the question now becomes finding the 11th term with these a and d.

So, $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

So, the 11th term, which is now the required term, is – 32.

Example 9 : A sum of ₹ 1000 is invested at 8% simple interest per year. Calculate the interest at the end of each year. Do these interests form an AP? If so, find the interest at the end of 30 years making use of this fact.

Solution : We know that the formula to calculate simple interest is given by

$$\text{Simple Interest} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

So, the interest at the end of the 1st year = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ = ₹ 80

The interest at the end of the 2nd year = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ = ₹ 160

The interest at the end of the 3rd year = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ = ₹ 240

Similarly, we can obtain the interest at the end of the 4th year, 5th year, and so on.

So, the interest (in ₹) at the end of the 1st, 2nd, 3rd, . . . years, respectively are

80, 160, 240, . . .

AP SCERT

చివరి నుండి 11వ పదమును కనుగొనవలెనన్న ముందుగా శ్రేఢిలో మొత్తం ఎన్ని పదాలు ఉన్నవో కనుగొనవలెను.

కావున, $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

i.e., $-72 = (n-1)(-3)$

i.e., $n - 1 = 24$

లేదా $n = 25$

అనగా ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢిలో 25 పదాలు ఉంటాయి.

అంటే చివరి నుంచి 11వ పదము మొదటి నుంచి 15వ పదం అవుతుంది. (14వ పదం కాదు ఎందుకు?)

కావున, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

అనగా, చివరి నుంచి 11వ పదము -32.

ప్రత్యామ్నాయ సాధన :

ఇచ్చిన అంకశ్రేఢిని వెనుక నుండి వ్రాయగా అపుడు $a = -62$ మరియు $d = 3$ (ఎందుకు?)

ఇపుడు a మరియు d లను ఉపయోగించి 11వ పదమును కనుగొనుట మన సమస్య అగును.

కావున, $a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

కావున, ఇపుడు మనకు కావల్సిన 11వ పదము -32.

ఉదాహరణ 9 : ₹ 1000 లకు సంవత్సరానికి 8% బారువడ్డీ ప్రకారము ప్రతి సంవత్సరాంతానికి అయ్యే వడ్డీని కనుగొనుము? ఈ వడ్డీల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుందా? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయితే 30వ సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనుము?

సాధన : బారువడ్డీని కనుగొనుటకు సూత్రము

$$\text{బారువడ్డీ} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ అని మనకు తెలుసు}$$

కావున, 1వ సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹ 80$

2వ సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹ 160$

3వ సంవత్సరము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹ 240$

ఈ విధంగా 4వ, 5వ .... సంవత్సరాల చివర అయ్యే వడ్డీలను కనుగొనవచ్చు.

అనగా 1వ, 2వ, 3వ .... సంవత్సరాల చివర అయ్యే వడ్డీల విలువ (₹ లలో) వరుసగా,

$$80, 160, 240, \ldots$$

AP SCERT

It is an AP as the difference between the consecutive terms in the list is 80, i.e., $d = 80$. Also, $a = 80$.

So, to find the interest at the end of 30 years, we shall find a_{30}.

Now, $$a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

So, the interest at the end of 30 years will be ₹ 2400.

Example 10 : In a flower bed, there are 23 rose plants in the first row, 21 in the second, 19 in the third, and so on. There are 5 rose plants in the last row. How many rows are there in the flower bed?

Solution : The number of rose plants in the 1st, 2nd, 3rd, . . ., rows are :

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

It forms an AP (Why?). Let the number of rows in the flower bed be n.

Then $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

As, $$a_n = a + (n - 1)\, d$$

We have, $$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

i.e., $$-18 = (n - 1)(-2)$$

i.e., $$n = 10$$

So, there are 10 rows in the flower bed.

EXERCISE 5.2

1. Fill in the blanks in the following table, given that a is the first term, d the common difference and a_n the nth term of the AP:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

AP SCERT

పై జాబితాలో రెండు వరుస పదాల భేదము 80 స్థిరము కనుక ఇది ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. అనగా $d = 80$. ఇచ్చట $a = 80$

అనగా 30సంవత్సరాల చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనవలెనన్న మనము a_{30} ని కనుగొనవలెను.

$$\therefore \qquad a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

$\therefore$ 30 సంవత్సరముల చివర అయ్యే వడ్డీ ₹ 2400.

ఉదాహరణ 10 : ఒక పూలతోటలో మొదటి వరుసలో 23 గులాబీ మొక్కలు, రెండవ వరుసలో 21, మూడవ వరుసలో 19 .... ఉన్నాయి. చివరి వరుసలో 5 గులాబీ మొక్కలు ఉన్నాయి. ఆ పూల తోటలో ఎన్ని వరుసలు కలవు?

సాధన : 1వ, 2వ, 3వ .... చివరి వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య వరుసగా :

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి (ఎందుకు?) పూల తోటలోని వరుసల సంఖ్య n అనుకొనిన

ఇప్పుడు $\quad a = 23,\ \ d = 21 - 23 = -2,\ \ a_n = 5$

$a_n = a + (n - 1)\, d$ అని మనకు తెలుసు

$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

i.e., $\quad -18 = (n - 1)(-2)$

i.e., $\quad n = 10$

కావున, పూల తోటలోని వరుసల సంఖ్య 10

అభ్యాసం 5.2

1. అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదము a, సామాన్య బేధము d, n వ పదము a_n అయిన క్రింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరింపుము:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

AP SCERT

2. Choose the correct choice in the following and justify :

(i) 30th term of the AP: 10, 7, 4, . . . , is

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) 11th term of the AP: – 3, $-\frac{1}{2}$, 2, . . ., is

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. In the following APs, find the missing terms in the boxes :

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5, $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) – 4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, – 22

4. Which term of the AP : 3, 8, 13, 18, . . . ,is 78?

5. Find the number of terms in each of the following APs :

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, . . . , – 47

6. Check whether – 150 is a term of the AP : 11, 8, 5, 2 . . .

7. Find the 31st term of an AP whose 11th term is 38 and the 16th term is 73.

8. An AP consists of 50 terms of which 3rd term is 12 and the last term is 106. Find the 29th term.

9. If the 3rd and the 9th terms of an AP are 4 and – 8 respectively, which term of this AP is zero?

10. The 17th term of an AP exceeds its 10th term by 7. Find the common difference.

11. Which term of the AP : 3, 15, 27, 39, . . . will be 132 more than its 54th term?

12. Two APs have the same common difference. The difference between their 100th terms is 100, what is the difference between their 1000th terms?

13. How many three-digit numbers are divisible by 7?

14. How many multiples of 4 lie between 10 and 250?

15. For what value of n, are the nth terms of two APs: 63, 65, 67, . . . and 3, 10, 17, . . . equal?

16. Determine the AP whose third term is 16 and the 7th term exceeds the 5th term by 12.

AP SCERT

2. క్రింది వానిలో సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము మరియు సరిచూడండి :

(i) 10, 7, 4 ...... అంకశ్రేఢిలో 30వ పదము

(A) 97 (B) 77 (C) −77 (D) − 87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$ అంకశ్రేఢిలో 11వ పదము

(A) 28 (B) 22 (C) −38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢుల్లో బాక్సుల్లో లోపించిన పదాలను కనుగొనుము :

(i) 2, ☐, 26

(ii) ☐, 13, ☐, 3

(iii) 5, ☐, ☐, $9\frac{1}{2}$

(iv) − 4, ☐, ☐, ☐, ☐, 6

(v) ☐, 38, ☐, ☐, ☐, − 22

4. 3, 8, 13, 18 .... అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 78 అవుతుంది?

5. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢులలోని పదాల సంఖ్యను కనుగొనుము?

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

6. 11, 8, 5, 2 ..... అంకశ్రేఢిలో − 150 ఒక పదంగా ఉంటుందో లేదో పరిశీలించుము.

7. ఒక అంకశ్రేఢిలో 11వ పదము 38 మరియు 16వ పదము 73 అయిన 31వ పదము కనుగొనుము?

8. 50 పదాలు కలిగిన ఒక అంకశ్రేఢిలో 3వ పదము 12 మరియు చివరి పదము 106. అయిన 29వ పదాన్ని కనుగొనుము.

9. ఒక అంకశ్రేఢిలో 3వ, 9వ పదాలు వరుసగా 4, − 8 అయిన ఈ అంకశ్రేఢిలోని ఎన్నవ పదం '0' (సున్న) అవుతుంది?

10. ఒక అంకశ్రేఢిలో 17వ పదము 10వ పదము కంటే 7 ఎక్కువ అయిన సామాన్య భేదం కనుగొనండి.

11. 3, 15, 27, 39 .... అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 54వ పదము కంటే 132 ఎక్కువగా ఉంటుంది?

12. రెండు అంకశ్రేఢుల సామాన్య బేధం సమానము. వాని 100వ పదాల మధ్య భేదం 100 అయిన వాని 1000వ పదాల మధ్య భేదం ఎంత?

13. 7చే భాగింపబడే మూడంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని కలవు?

14. 10 మరియు 250 ల మధ్య గల 4 యొక్క గుణిజాల సంఖ్యను కనుగొనుము?

15. 63, 65, 67 .... మరియు 3, 10, 17 ..... రెండు అంకశ్రేఢుల nవ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనుము.

16. 3వ పదము 16గా, 7వ పదము, 5వ పదము, కంటే 12 ఎక్కువ ఉండునట్లుగా ఒక అంకశ్రేఢిని కనుగొనుము.

AP SCERT

17. Find the 20th term from the last term of the AP : 3, 8, 13, . . ., 253.

18. The sum of the 4th and 8th terms of an AP is 24 and the sum of the 6th and 10th terms is 44. Find the first three terms of the AP.

19. Subba Rao started work in 1995 at an annual salary of ₹ 5000 and received an increment of ₹ 200 each year. In which year did his income reach ₹ 7000?

20. Ramkali saved ₹ 5 in the first week of a year and then increased her weekly savings by ₹ 1.75. If in the *n*th week, her weekly savings become ₹ 20.75, find *n*.

5.4 Sum of First *n* Terms of an AP

Let us consider the situation again given in Section 5.1 in which Shakila put ₹ 100 into her daughter's money box when she was one year old, ₹ 150 on her second birthday, ₹ 200 on her third birthday and will continue in the same way. How much money will be collected in the money box by the time her daughter is 21 years old?

Here, the amount of money (in ₹) put in the money box on her first, second, third, fourth . . . birthday were respectively 100, 150, 200, 250, . . . till her 21st birthday. To find the total amount in the money box on her 21st birthday, we will have to write each of the 21 numbers in the list above and then add them up. Don't you think it would be a tedious and time consuming process? Can we make the process shorter? This would be possible if we can find a method for getting this sum. Let us see.

We consider the problem given to Gauss (about whom you read in Chapter 1), to solve when he was just 10 years old. He was asked to find the sum of the positive integers from 1 to 100. He immediately replied that the sum is 5050. Can you guess how did he do? He wrote :

$$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$$

And then, reversed the numbers to write

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

Adding these two, he got

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$
$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \quad \text{(100 times)}$$

So, $$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050, \text{ i.e., the sum} = 5050.$$

APSCERT

17. 3, 8, 13 .... 253 అంకశ్రేఢి యొక్క చివరి నుంచి 20వ పదమును కనుగొనుము.

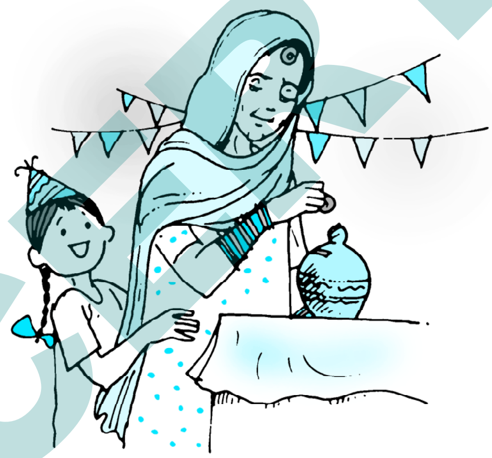
18. ఒక అంకశ్రేఢిలో 4వ మరియు 8వ పదాల మొత్తము 24 మరియు 6వ, 10వ పదాల మొత్తము 44 అయిన,అంకశ్రేఢిలో మొదటి మూడు పదాలను కనుగొనుము.

19. సుబ్బారావు 1995వ సంవత్సరంలో ₹ 5000 వార్షిక జీతంతో ఉద్యోగంలో చేరాడు. అతని జీతము సంవత్సరమునకు ₹ 200 పెరిగిన, అతని జీతము ఏ సంవత్సరములో ₹ 7000 అవుతుంది?

20. రామకాళి సంవత్సరపు మొదటి వారంలో ₹ 5 లను ఆదా చేసెను. మరియు తరువాత ఆమె పొదుపును ₹ 1.75 చొప్పున ప్రతి వారం పెంచినది. n వ వారములో ఆమె వారపు పొదుపు ₹ 20.75 అయిన n విలువ కనుగొనుము.

5.4 ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి *n* పదాల మొత్తం

విభాగం 5.1లో చర్చించిన షకీలా విషయాన్ని మరొకసారి పరిశీలిద్దాం. ఈమె తన కూతురు మొదటి పుట్టిన రోజున ₹ 100 రెండవ పుట్టిన రోజున ₹ 150 మూడవ పుట్టిన రోజున ₹ 200 ...... ఒక డబ్బుల పెట్టెలో దాచుతూ పోయింది. అయితే ఆమె కూతురు యొక్క 21వ పుట్టిన రోజు అనంతరము డబ్బుల పెట్టెలోని సొమ్ము మొత్తం ఎంత ఉంటుంది?



ఇచ్చట మొదటి, రెండవ, మూడవ .... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో ఉంచిన సొమ్ము విలువలు (₹ లలో) వరుసగా 100, 150, 200.... ఇలా 21వ పుట్టిన రోజు వరకూ కొనసాగించబడినది. 21వ పుట్టిన రోజు అనంతరం పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనవలెనన్న పై జాబితాలో 21 పదాలను వరుసగా రాసి వాని మొత్తమును కనుగొనవలసి ఉంటుంది. ఈ విధంగా చేయటం సమయం వృధా చేయేడమే కాకుండా కష్టమైనదిగా మీరు భావించటం లేదా? దీనిని తక్కువ సమయంలో సులభంగా చేయలేమా? ఈ మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు ఒక సూత్రాన్ని కనుగొన్నట్లయితే, ఇది సులభ సాధనమవుతుంది.

గాస్ (1వ అధ్యాయంలో మీరు చదివిన వ్యక్తి)10 సంవత్సరాల వయస్సులో సాధించిన ఒక సమస్యను ఇప్పుడు మనము పరిశీలిద్దాం. 1 నుంచి 100 వరకూ గల అన్ని సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? అని ఇతనిని ప్రశ్నించడం జరిగింది. ఇతను దానికి సమాధానంగా 5050 అని చెప్పినాడు. అతను ఏ విధంగా సమాధానం చెప్పాడో ఊహించగలరా? అతను దానిని ఈ క్రింది విధంగా రాసాడు:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

తిరిగి అతను దీనినే తిరిగి క్రింద విధంగా రాసాడు

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

అతను ఈ రెండింటిని కూడి సూక్ష్మీకరించి ఫలితమును ఈ క్రింది విధంగా కనుగొన్నాడు

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$
$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \quad \text{(100 సార్లు)}$$

కావున, $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$, అనగా మొత్తము = 5050.

AP SCERT

We will now use the same technique to find the sum of the first n terms of an AP :

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

The nth term of this AP is $a + (n - 1) d$. Let S denote the sum of the first n terms of the AP. We have

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1) d] \quad (1)$$

Rewriting the terms in reverse order, we have

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + \ldots + (a + d) + a \quad (2)$$

On adding (1) and (2), term-wise. we get

$$2S = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ times}}$$

or, $2S = n [2a + (n - 1) d]$ (Since, there are n terms)

or, $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

So, **the sum of the first n terms of an AP is given by**

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]}$$

We can also write this as $S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$

i.e., $$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + a_n)} \quad (3)$$

Now, if there are only n terms in an AP, then $a_n = l$, the last term. From (3), we see that

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + l)} \quad (4)$$

This form of the result is useful when the first and the last terms of an AP are given and the common difference is not given.

Now we return to the question that was posed to us in the beginning. The amount of money (in Rs) in the money box of Shakila's daughter on 1st, 2nd, 3rd, 4th birthday, . . ., were 100, 150, 200, 250, . . ., respectively.

This is an AP. We have to find the total money collected on her 21st birthday, i.e., the sum of the first 21 terms of this AP.

మనం కూడా $a, a + d, a + 2d, \ldots$ శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు పై పద్ధతినే పాటిద్దాం.

పై శ్రేఢి యొక్క n వ పదము $a + (n - 1) d$ అగును. పై అంకశ్రేఢిలో n పదాల మొత్తము S అనుకొనిన

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1) d] \quad (1)$$

మరలా పదాలను వెనుకనుండి వరుసక్రమంలోను వ్రాయగా

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + \ldots + (a + d) + a \quad (2)$$

(1) మరియు (2) లను కలుపగా,

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\ldots+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{n \text{ సార్లు}}$$

లేదా, $2S = n [2a + (n - 1) d]$ (n పదాలు కలవు కావున)

లేదా, $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]}$$

$$S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d] \text{ గా కూడా రాయవచ్చు}$$

అనగా

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + a_n)} \quad (3)$$

ఒక అంకశ్రేఢిలో కేవలం n పదాలు మాత్రమే ఉన్నప్పుడు $a_n = l$, చివరి పదము అగును

(3) నుండి

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + l)} \text{ అని మనం చూడవచ్చు} \quad (4)$$

ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము, చివరి పదములు మాత్రమే తెలిసి సామాన్య భేదం తెలియనపుడు ఈ సూత్రం ఉపయోగపడును.

తిరిగి మనం మొదట్లో వేసుకున్న ప్రశ్నను పరిశీలిద్దాం. షకీలా కూతురు యొక్క 1వ, 2వ, 3వ, 4వ .... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో దాచిన సొమ్ము వరుసగా 100, 150, 200, 250 ....

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి. మనము షకీలా కూతురు యొక్క 21వ పుట్టినరోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనాలి. అనగా అంకశ్రేణిలో మొదటి 21 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనాలి.

AP SCERT

Here, $a = 100$, $d = 50$ and $n = 21$. Using the formula :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d],$$

we have $$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

So, the amount of money collected on her 21st birthday is ₹ 12600.

Hasn't the use of the formula made it much easier to solve the problem?

We also use S_n in place of S to denote the sum of first n terms of the AP. We write S_{20} to denote the sum of the first 20 terms of an AP. The formula for the sum of the first n terms involves four quantities S, a, d and n. If we know any three of them, we can find the fourth.

Remark : The nth term of an AP is the difference of the sum to first n terms and the sum to first $(n - 1)$ terms of it, i.e., $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Let us consider some examples.

Example 11 : Find the sum of the first 22 terms of the AP : 8, 3, –2, . . .

Solution : Here, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

We know that

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

Therefore, $$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

So, the sum of the first 22 terms of the AP is – 979.

Example 12 : If the sum of the first 14 terms of an AP is 1050 and its first term is 10, find the 20th term.

Solution : Here, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

As $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

so, $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

AP SCERT

ఇచ్చట, $a = 100$, $d = 50$ మరియు $n = 21$.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \text{ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి}$$

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

21వ పుట్టినరోజు అనంతరము పెట్టెలోని సొమ్ము ₹ 12600.

సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సమస్యను పరిష్కరించటం చాలా సులభతరం. కాదా?

S బదులుగా S_n ను వాడుదాం. దీనివల్ల ఎన్ని పదాల మొత్తం మనం కనుగొంటున్నామో తెలుస్తుంది. మొదటి 20 పదాల మొత్తం కనుగొనుటకు మనం S_{20} ని వాడతాం. మనం అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రములో నాలుగు రాశులు కలవు. అవి S, a, d మరియు n. దీనిలో ఏవైనా మూడు రాశుల విలువలు తెలిసిన నాలుగవ రాశిని కనుగొనగలం.

సూచన : ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తం నుంచి మొదటి $(n-1)$ పదాల మొత్తాన్ని తీసివేసిన ఆ శ్రేఢి యొక్క n వ పదము వస్తుంది. అనగా, $a_n = S_n - S_{n-1}$.

మనం కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 11 : 8, 3, – 2 ..... అంకశ్రేఢిలో మొదటి 22 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \text{ అని మనకు తెలుసు}$$

$$\therefore \quad S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

కావున అంకశ్రేఢిలో మొదటి 22 పదాల మొత్తము – 979.

ఉదాహరణ 12 : ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం 10 మరియు మొదటి 14 పదాల మొత్తము 1050 అయిన 20 వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

కావున, $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

AP SCERT

i.e., $910 = 91d$

or, $d = 10$

Therefore, $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$, i.e. 20th term is 200.

Example 13 : How many terms of the AP : 24, 21, 18, . . . must be taken so that their sum is 78?

Solution : Here, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. We need to find n.

We know that $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

So, $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

or $3n^2 - 51n + 156 = 0$

or $n^2 - 17n + 52 = 0$

or $(n - 4)(n - 13) = 0$

or $n = 4$ or 13

Both values of n are admissible. So, the number of terms is either 4 or 13.

Remarks :

1. In this case, the sum of the first 4 terms = the sum of the first 13 terms = 78.
2. Two answers are possible because the sum of the terms from 5th to 13th will be zero. This is because a is positive and d is negative, so that some terms will be positive and some others negative, and will cancel out each other.

Example 14 : Find the sum of :

(i) the first 1000 positive integers (ii) the first n positive integers

Solution :

(i) Let $S = 1 + 2 + 3 + . . . + 1000$

Using the formula $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ for the sum of the first n terms of an AP, we have

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

So, the sum of the first 1000 positive integers is 500500.

(ii) Let $S_n = 1 + 2 + 3 + . . . + n$

Here $a = 1$ and the last term l is n.

AP SCERT

అనగా, $910 = 91d$

లేదా, $d = 10$

కావున, $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$, అనగా 20వ పదము 200.

ఉదాహరణ 13 : 24, 21, 18 .... అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలను తీసుకున్న వాని మొత్తం 78 అవుతుంది?

సాధన : ఇచ్చట, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. n యొక్క విలువను మనం కనుగొనాలి.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ అని మనకు తెలుసు

కావున, $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

లేదా $3n^2 - 51n + 156 = 0$

లేదా $n^2 - 17n + 52 = 0$

లేదా $(n - 4)(n - 13) = 0$

$n = 4$ లేదా 13

n యొక్క రెండు విలువలను పరిగణలోకి తీసుకోవచ్చు. అనగా పదాల సంఖ్య 4 లేదా 13.

సూచనలు:

1. ఇచ్చట మొదటి 4 పదాల మొత్తము = మొదటి 13 పదాల మొత్తము = 78.
2. ఈ శ్రేఢిలో 5వ పదం నుంచి 13వ పదం వరకూ గల పదాల మొత్తం సున్నా. ఎందుకనగా ఇచ్చట 'a' ధనాత్మకం మరియు 'd' సామాన్యభేధము యొక్క విలువ ఋణాత్మకము. దీని వల్ల కొన్ని పదాలు ధనాకత్మకము, మరికొన్ని పదాలు ఋణాత్మకం అవుతూ ఫలితం శూన్యం కావచ్చు.

ఉదాహరణ 14 : క్రింది వాని మొత్తాలను కనుగొనుము:

(i) మొదటి 1000 ధనపూర్ణ సంఖ్యలు (ii) మొదటి n ధన పూర్ణ సంఖ్యలు

సాధన :

(i) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ అనుకొనుము.

అంకశ్రేఢిలో మొదటి 'n' పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు గల సూత్రము $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ను ఉపయోగించిన

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

కావున, మొదటి 1000 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం 500500.

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ అనుకొనుము.

ఇచ్చట $a = 1$ మరియు చివరి పదం $l = n$.

AP SCERT

Therefore, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ or $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

So, **the sum of first n positive integers is given by**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Example 15 : Find the sum of first 24 terms of the list of numbers whose nth term is given by

$$a_n = 3 + 2n$$

Solution :

As $a_n = 3 + 2n$,

so, $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

List of numbers becomes 5, 7, 9, 11, . . .

Here, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ and so on.

So, it forms an AP with common difference $d = 2$.

To find S_{24}, we have $n = 24$, $a = 5$, $d = 2$.

Therefore, $S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$

So, sum of first 24 terms of the list of numbers is 672.

Example 16 : A manufacturer of TV sets produced 600 sets in the third year and 700 sets in the seventh year. Assuming that the production increases uniformly by a fixed number every year, find :

(i) the production in the 1st year (ii) the production in the 10th year

(iii) the total production in first 7 years

Solution : (i) Since the production increases uniformly by a fixed number every year, the number of TV sets manufactured in 1st, 2nd, 3rd, . . ., years will form an AP.

Let us denote the number of TV sets manufactured in the nth year by a_n.

Then, $a_3 = 600$ and $a_7 = 700$

AP SCERT

అందువలన $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ లేదా $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

కావున **మొదటి n ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

ఉదాహరణ 15 : $a_n = 3 + 2n$ ను n వ పదంగా కలిగిన శ్రేఢి యొక్క మొదటి 24 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుము.

సాధన :

$a_n = 3 + 2n,$

కనుక, $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

సంఖ్యల జాబితా $5, 7, 9, 11, \ldots$

ఇచ్చట, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ....

అనగా ఈ జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి. దీని సామాన్య బేధము $d = 2$.

S_{24} కనుగొనుటకు $n = 24, \quad a = 5, \quad d = 2$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$

ఇచ్చిన శ్రేఢిలో 24 పదాల మొత్తము 672.

ఉదాహరణ 16 : ఒక టెలివిజన్ తయారీ కంపెనీ 3వ సంవత్సరంలో 600 టెలివిజన్లను 7వ సంవత్సరములో 700 సెట్లను తయారు చేసింది. ఇది తయారీ చేసే టెలివిజన్ల సంఖ్య ప్రతీ సంవత్సరము స్థిరంగా పెరుగుతూ ఉంటే:

(i) 1వ సం॥లో అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య (ii) 10వ సం॥లలో అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య

(iii) మొదటి 7 సం॥లలో అది తయారు చేసిన మొత్తం సెట్ల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: (i) ప్రతి సంవత్సరము తయారు చేసే టెలివిజన్ల సెట్ల సంఖ్య ఒక స్థిర విలువతో పెరుగుతూ ఉంటే 1వ, 2వ, 3వ .... సం॥లలో తయారయ్యే టెలివిజన్ల సెట్ల సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది.

n వ సంవత్సరములో తయారు చేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య a_n అనుకొనిన

$a_3 = 600$ మరియు $a_7 = 700$ గా ఇవ్వబడినది.

AP SCERT

or, $a + 2d = 600$

and $a + 6d = 700$

Solving these equations, we get $d = 25$ and $a = 550$.

Therefore, production of TV sets in the first year is 550.

(ii) Now $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

So, production of TV sets in the 10th year is 775.

(iii) Also, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$

$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$

Thus, the total production of TV sets in first 7 years is 4375.

EXERCISE 5.3

1. Find the sum of the following APs:

(i) 2, 7, 12, . . ., to 10 terms. (ii) –37, –33, –29, . . ., to 12 terms.

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., to 100 terms. (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . ., to 11 terms.

2. Find the sums given below :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. In an AP:

(i) given $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$, find n and S_n.

(ii) given $a = 7$, $a_{13} = 35$, find d and S_{13}.

(iii) given $a_{12} = 37$, $d = 3$, find a and S_{12}.

(iv) given $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$, find d and a_{10}.

(v) given $d = 5$, $S_9 = 75$, find a and a_9.

(vi) given $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$, find n and a_n.

(vii) given $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$, find n and d.

(viii) given $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$, find n and a.

(ix) given $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$, find d.

(x) given $l = 28$, $S = 144$, and there are total 9 terms. Find a.

AP SCERT

లేదా, $a + 2d = 600$

మరియు $a + 6d = 700$

పై సమీకరణాలను సాధించిన $d = 25$ మరియు $a = 550$ వచ్చును.

$\therefore$ మొదటి సంవత్సరములో తయారైన టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య 550.

(ii) ఇప్పుడు $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

అనగా 10వ సంవత్సరములో తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య 775.

(iii) మరియు, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

మొదటి 7 సం॥లలో తయారైన మొత్తం టెలివిజన్ల సంఖ్య 4375.

అభ్యాసం 5.3

1. కింది అంకశ్రేఢులలో పేర్కొన్న పదాల మొత్తాలను కనుగొనుము:

(i) 2, 7, 12, . . . 10 పదాలు (ii) –37, –33, –29, . . .12 పదాలు

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . . 100 పదాలు (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . . 11 పదాలు

2. క్రింది వాని మొత్తాలను కనుగొనుము :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. ఒక అంకశ్రేఢిలో:

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ అయిన n మరియు S_n లను కనుగొనుము.

(ii) $a = 7, a_{13} = 35$ అయిన d మరియు S_{13} లను కనుగొనుము.

(iii) $a_{12} = 37, d = 3$ అయిన a మరియు S_{12} లను కనుగొనుము.

(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$ అయిన d మరియు a_{10} లను కనుగొనుము.

(v) $d = 5, S_9 = 75$, అయిన a మరియు a_9 లను కనుగొనుము.

(vi) $a = 2, d = 8, S_n = 90$ అయిన n మరియు a_n లను కనుగొనుము.

(vii) $a = 8, a_n = 62, S_n = 210$ అయిన n మరియు d లను కనుగొనుము.

(viii) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$ అయిన n మరియు a లను కనుగొనుము.

(ix) $a = 3, n = 8, S = 192$ అయిన d ను కనుగొనుము.

(x) $l = 28, S = 144$ మరియు మొత్తం పదాల సంఖ్య 9 అయిన a ను కనుగొనుము.

AP SCERT

4. How many terms of the AP : 9, 17, 25, . . . must be taken to give a sum of 636?

5. The first term of an AP is 5, the last term is 45 and the sum is 400. Find the number of terms and the common difference.

6. The first and the last terms of an AP are 17 and 350 respectively. If the common difference is 9, how many terms are there and what is their sum?

7. Find the sum of first 22 terms of an AP in which $d = 7$ and 22nd term is 149.

8. Find the sum of first 51 terms of an AP whose second and third terms are 14 and 18 respectively.

9. If the sum of first 7 terms of an AP is 49 and that of 17 terms is 289, find the sum of first n terms.

10. Show that $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ form an AP where a_n is defined as below :

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

Also find the sum of the first 15 terms in each case.

11. If the sum of the first n terms of an AP is $4n - n^2$, what is the first term (that is S_1)? What is the sum of first two terms? What is the second term? Similarly, find the 3rd, the 10th and the nth terms.

12. Find the sum of the first 40 positive integers divisible by 6.

13. Find the sum of the first 15 multiples of 8.

14. Find the sum of the odd numbers between 0 and 50.

15. A contract on construction job specifies a penalty for delay of completion beyond a certain date as follows: ₹ 200 for the first day, ₹ 250 for the second day, ₹ 300 for the third day, etc., the penalty for each succeeding day being ₹ 50 more than for the preceding day. How much money the contractor has to pay as penalty, if he has delayed the work by 30 days?

16. A sum of ₹ 700 is to be used to give seven cash prizes to students of a school for their overall academic performance. If each prize is ₹ 20 less than its preceding prize, find the value of each of the prizes.

17. In a school, students thought of planting trees in and around the school to reduce air pollution. It was decided that the number of trees, that each section of each class will plant, will be the same as the class, in which they are studying, e.g., a section of Class I will plant 1 tree, a section of Class II will plant 2 trees and so on till Class XII. There are three sections of each class. How many trees will be planted by the students?

18. A spiral is made up of successive semicircles, with centres alternately at A and B, starting with centre at A, of radii 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, . . . as shown in Fig. 5.4. What is the total length of such a spiral made up of thirteen consecutive semicircles? (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

AP SCERT

4. 9, 17, 25 ..... అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలను తీసుకొంటే వాని మొత్తము 636 అగును?

5. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము 5, చివరి పదము 45 మరియు పదాల మొత్తము 400. అయిన పదాల సంఖ్యను మరియు సామాన్య భేదమును కనుగొనుము.

6. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి, చివరి పదాలు వరుసగా 17 మరియు 350. సామాన్య భేదం 9 అయిన శ్రేఢిలోని పదాల సంఖ్యను, పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

7. సామాన్య భేదము $d = 7$ మరియు 22వ పదము 149గా గల అంకశ్రేఢిలో మొదటి 22 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

8. ఒక అంకశ్రేఢిలో 2వ, 3వ పదాలు వరుసగా 14 మరియు 18 అయిన ఆ శ్రేఢిలోని మొదటి 51 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

9. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి 7 పదాల మొత్తము 49 మరియు 17 పదాల మొత్తము 289 అయిన మొదటి n పదాల మొత్తము కనుగొనుము.

10. a_n క్రింది విధంగా నిర్వచించబడితే $a_1, a_2, \ldots, a_n$ అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుందని చూపండి మరియు ప్రతి సందర్భంలో మొదటి 15 పదాల మొత్తమును కనుగొనండి:

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

11. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $4n - n^2$ అయిన మొదటి పదం ఎంత? (అనగా S_1)? మొదటి రెండు పదాల మొత్తం ఎంత? 2వ పదము ఎంత? అదే విధంగా 3వ పదమును, 10వ పదమును మరియు n వ పదమును కనుగొనుము.

12. 6చే భాగింపబడే మొదటి 40 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

13. 8 యొక్క మొదటి 15 గుణిజాల మొత్తమును కనుగొనుము.

14. 0 మరియు 50 మధ్యగల బేసి సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

15. నిర్మాణ పనులపై ఈ విధమైన ఒప్పందం కలదు. కట్టడాలు / నిర్మాణాలు నిర్దేశించిన సమయానికి పూర్తి చేయటంలో ఆలస్యం జరిగిన క్రింది తెల్పిన విధంగా జరిమానాను చెల్లించాలి. మొదటి రోజుకు ₹ 200, 2వ రోజుకు ₹ 250, 3వ రోజుకు ₹ 300....... మొదలగు విధంగా, ప్రతిరోజు జరిమానా దాని ముందు రోజు జరిమానా కంటే ₹ 50 అదనం. ఒక వేళ కాంట్రాక్టరు ఆ పనిని 30 రోజులు ఆలస్యం చేసిన ఎంత సొమ్ము జరిమానాగా చెల్లించాలి?

16. ఒక పాఠశాలలో విద్యావిషయక సంబంధిత విషయాలలో అత్యున్నత ప్రతిభ కనపరిచిన వారికి మొత్తం ₹ 700కు 7 బహుమతులు ఇవ్వాలని భావించారు. ప్రతి బహుమతి విలువ దాని ముందున్న దాని కంటే ₹ 20 తక్కువ అయిన ప్రతి బహుమతి విలువను కనుగొనుము?

17. ఒక పాఠశాల ఆవరణలో పర్యావరణ పరిరక్షణకు విద్యార్థులు చెట్లు నాటాలని భావించారు. ప్రతి సెక్షను విద్యార్థులు వారు చదువుతున్న తరగతి సంఖ్యకు సమానమైన చెట్లను అనగా 1వ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షను విద్యార్థులు 1 చెట్టును, 2వ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షను విద్యార్థులు 2 చెట్లను నాటాలని, ఈ విధంగా 12వ తరగతి వరకూ చేయాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ప్రతి తరగతిలో మూడు సెక్షన్లు వున్న మొత్తం నాటిన చెట్లు ఎన్ని?

18. అర్థ వృత్తాలచే ఒక సర్పిలాకారము తయారు చేయబడింది. పటంలో చూపిన విధంగా అర్థవృత్తాల కేంద్రాలు A వద్ద ప్రారంభించబడి A, B ల మధ్య మారుతూ ఉన్నాయి. అనగా మొదటి అర్థవృత్త కేంద్రం A, 2వ అర్థవృత్త కేంద్రం B, మూడవ అర్థవృత్త కేంద్రము A ..... మరియు అర్థవృత్తాల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 0.5 సెం.మీ, 0.1 సెం.మీ, 1.5 సెం.మీ., 2.0 సెం.మీ. .... ఈ విధంగా మొత్తం 13. అర్థవృత్తాలు ఉన్న సర్పిలం మొత్తం పొడవు ఎంత?

($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము)

AP SCERT

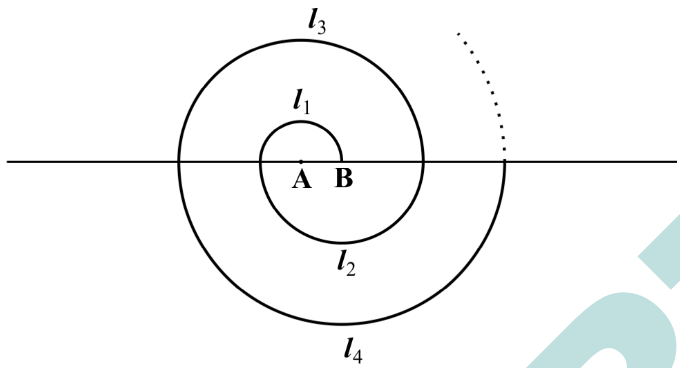


Fig. 5.4

[**Hint :** Length of successive semicircles is $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ with centres at A, B, A, B, . . ., respectively.]

19. 200 logs are stacked in the following manner: 20 logs in the bottom row, 19 in the next row, 18 in the row next to it and so on (see Fig. 5.5). In how many rows are the 200 logs placed and how many logs are in the top row?

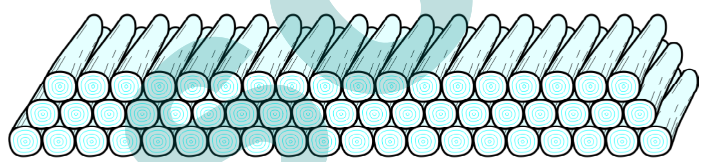


Fig. 5.5

20. In a potato race, a bucket is placed at the starting point, which is 5 m from the first potato, and the other potatoes are placed 3 m apart in a straight line. There are ten potatoes in the line (see Fig. 5.6).

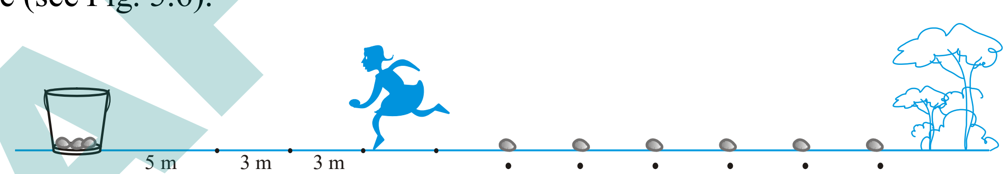
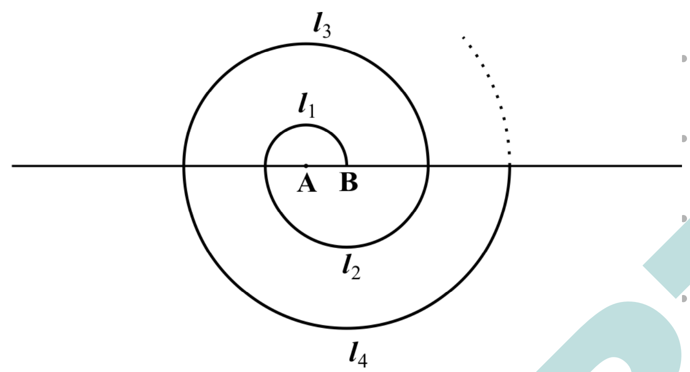


Fig. 5.6

A competitor starts from the bucket, picks up the nearest potato, runs back with it, drops it in the bucket, runs back to pick up the next potato, runs to the bucket to drop it in, and she continues in the same way until all the potatoes are in the bucket. What is the total distance the competitor has to run?

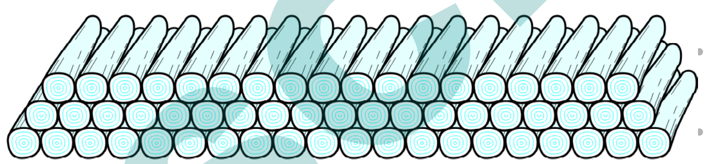
[**Hint :** To pick up the first potato and the second potato, the total distance (in metres) run by a competitor is $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]



పటం 5.4

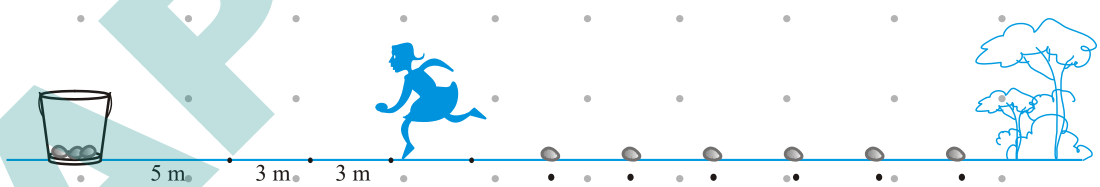
[సూచన : వరుస అర్థవృత్తాల పొడవులు $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ మరియు వీని కేంద్రాలు వరసగా A, B, A, B, ...]

19. 200 చెక్క దుంగలను క్రింది పటములో చూపిన విధంగా అమర్చారు. అన్నింటి కంటే క్రింద ఉన్న వరుసలో 20 చెక్క దుంగలను, దాని పై 19 దుంగలను, దానిపైన 18 దుంగలను .... అమర్చిన మొత్తం 200 దుంగలను అమర్చుటకు ఎన్ని వరుసలు కావాలి? అన్నింటి కంటే పైన ఉన్న వరుసలో ఎన్ని చెక్క దుంగలు కలవు?



పటం 5.5

20. బంగాళా దుంపలు తెచ్చేపోటీలో (potato race) ప్రారంభంలో ఒక బకెట్ ఉంచి దాని నుంచి 5మీ. దూరంలో ఒక బంగాళదుంప వుంచబడినది. మొత్తం 10 బంగాళ దుంపలు ఒకదానికొకటి 3మీ. దూరంలో ఒకే సరళరేఖపై అమర్చబడినవి. (పటం 5.6 చూడండి).



పటం 5.6

ఆటలో పాల్గొనే వ్యక్తి మొదటి బకెట్ వద్ద నుంచి బయలుదేరి మొదటి బంగాళదుంప వద్దకుపోయి, దానిని తీసుకుని వెనుకకు వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. తరువాత తిరిగి బకెట్ నుంచి బయలుదేరి 2వ బంగాళదుంప వద్దకు పోయి దానిని తీసుకువచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. ఈ విధంగా అన్ని దుంపలను బకెట్‌లో వేయవలెనన్న ఆ వ్యక్తి పరిగెత్తవలసిన మొత్తం దూరం ఎంత?

[సూచన : మొదటి, 2వ దుంపలను తీసుకుని రావటానికి ఆట ఆడే వ్యక్తి పరుగెత్తవలసిన దూరము వరుసగా (మీ.లలో) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

EXERCISE 5.4 (Optional)*

1. Which term of the AP : 121, 117, 113, . . ., is its first negative term?

[**Hint :** Find n for $a_n < 0$]

2. The sum of the third and the seventh terms of an AP is 6 and their product is 8. Find the sum of first sixteen terms of the AP.

3. A ladder has rungs 25 cm apart. (see Fig. 5.7). The rungs decrease uniformly in length from 45 cm at the bottom to 25 cm at the top. If the top and the bottom rungs are $2\frac{1}{2}$ m apart, what is the length of the wood required for the rungs?

[**Hint :** Number of rungs = $\frac{250}{25} + 1$]

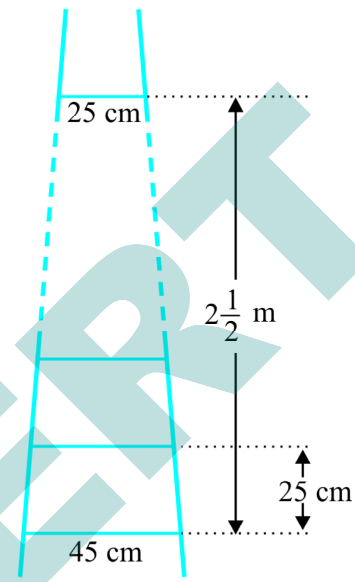


Fig. 5.7

4. The houses of a row are numbered consecutively from 1 to 49. Show that there is a value of x such that the sum of the numbers of the houses preceding the house numbered x is equal to the sum of the numbers of the houses following it. Find this value of x.

[**Hint :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. A small terrace at a football ground comprises of 15 steps each of which is 50 m long and built of solid concrete.

Each step has a rise of $\frac{1}{4}$ m and a tread of $\frac{1}{2}$ m. (see Fig. 5.8). Calculate the total volume of concrete required to build the terrace.

[**Hint :** Volume of concrete required to build the first step = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 \text{ m}^3$]

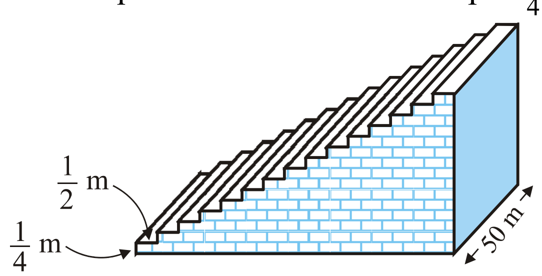


Fig. 5.8

* These exercises are not from the examination point of view.

AP SCERT

అభ్యాసం 5.4 (ఐచ్ఛికం)*

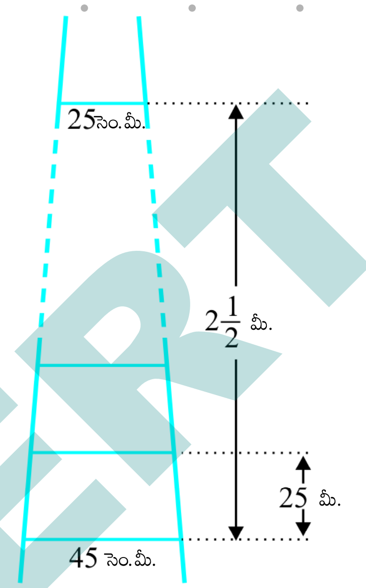
1. 121, 117, 113, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము మొదటి ఋణ పదము అవుతుంది.

   [సూచన : $a_n < 0$ అయ్యే విధంగా n విలువ కనుగొనుము.]

2. ఒక అంకశ్రేఢి 3వ, 7వ పదాల మొత్తము 6 మరియు వాని లబ్ధము 8 అయిన ఆ శ్రేఢిలోని మొదటి 16 పదాల మొత్తము కనుగొనుము?

3. ఒక నిచ్చెనకు 25 మెట్లు కలవు. (పటం 5.7 చూడండి) మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింద నుంచి పైకి ఏకరీతిని తగ్గుతూ ఉంది. క్రింద నుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 45 సెం.మీ. మరియు పై నుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 25సెం.మీ. ఈ రెండింటి మధ్య దూరము $2\frac{1}{2}$ మీ. అయిన అన్ని మెట్ల తయారీకి కావల్సిన చెక్క పొడవు ఎంత?

   [సూచన : మెట్ల సంఖ్య $= \frac{250}{25} + 1$]



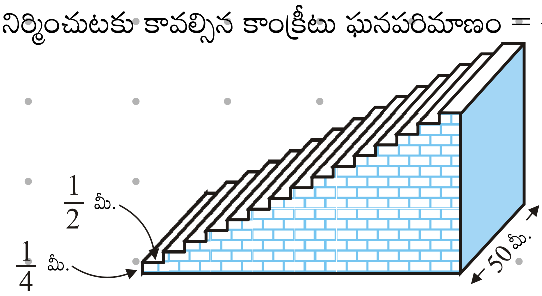
పటం 5.7

4. కొన్ని ఇండ్లు ఒక వరుసలో కలవు. వీనికి 1 నుంచి 49 వరకూ సంఖ్యలను కేటాయించడం జరిగింది. ఏదైనా ఒక ఇంటికి కేటాయించిన సంఖ్యను x అనుకుంటే ఈ ఇంటికి ముందు ఉన్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము, తరువాత ఉన్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము సమానం అయ్యేవిధంగా ఆ ఇంటి సంఖ్య x వ్యవస్థితమని చూపండి? మరియు x విలువను కనుగొనుము.

   [సూచన : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. క్రింది పటములో చూపిన విధంగా ఒక ఫుట్‌బాల్ గ్రౌండ్‌లో 15 మెట్లు గల ఒక మెట్ల సోపానము కలదు, దీనిలో ప్రతి మెట్టు పొడవు 50 మీ. మరియు వెడల్పు $\frac{1}{2}$ మీ. మొదటి మెట్టు భూమి నుంచి $\frac{1}{4}$మీ. ఎత్తులో మరియు ప్రతి మెట్టు దాని ముందున్న మెట్టుకు $\frac{1}{4}$మీ. ఎత్తులో ఉన్న ఆ మెట్ల సోపానాన్ని నిర్మించడానికి కావలసిన కాంక్రీటు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

   [సూచన : మొదటి సోపానం నిర్మించుటకు కావల్సిన కాంక్రీటు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ మీ^{3}]



పటం 5.8

* ఇది పరీక్షల కొరకు ఉద్దేశించినది కాదు.

AP SCERT

5.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. An **arithmetic progression** (AP) is a list of numbers in which each term is obtained by adding a fixed number d to the preceding term, except the first term. The fixed number d is called the **common difference**.

   The general form of an AP is $a, \ a+d, \ a+2d, \ a+3d, \ldots$

2. A given list of numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is an AP, if the differences $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, give the same value, i.e., if $a_{k+1} - a_k$ is the same for different values of k.

3. In an AP with first term a and common difference d, the nth term (or the general term) is given by $a_n = a + (n-1)\,d$.

4. The sum of the first n terms of an AP is given by :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. If l is the last term of the finite AP, say the nth term, then the sum of all terms of the AP is given by :

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

A NOTE TO THE READER

If $a, \ b, \ c$ are in AP, then $b = \frac{a+c}{2}$ and b is called the arithmetic mean of a and c.

AP SCERT

5.5 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మనము చర్చించిన అంశాలు:

1. ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదాలు అన్నీ వాటి ముందున్న పదాలకు ఒక స్థిర సంఖ్య కలపటం వల్ల ఏర్పడుతూ వుంటే ఆ జాబితాను **అంకశ్రేఢి** అంటారు. కలిపే స్థిర సంఖ్య **సామాన్య భేధము** అంటారు.

అంకశ్రేఢి సాధారణ రూపం $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ సంఖ్యల జాబితాలో $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ విలువలు సమానమైన అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ స్థిరమైన ఆ జాబితా అంకశ్రేఢి అగును.

3. మొదటి పదము a గా, పదాంతరము d గా గల ఒక అంకశ్రేఢిలో nవ పదము (లేదా సాధారణ పదం) $a_n = a + (n-1)\,d$ అగును.

4. అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. ఒక పరిమిత అంకశ్రేఢిలో చివరి పదము l అయిన ఆ అంకశ్రేణి పదాల మొత్తం $S = \frac{n}{2}(a+l)$. ఇచ్చట n పదాల సంఖ్య.

పాఠకులకు ఒక గమనిక

$a,\ b,\ c$ అనునవి అంకశ్రేఢిలో ఉన్న $b = \frac{a+c}{2}$ అగును. మరియు bను $a,\ c$ ల యొక్క అంకమధ్యమము అంటారు.

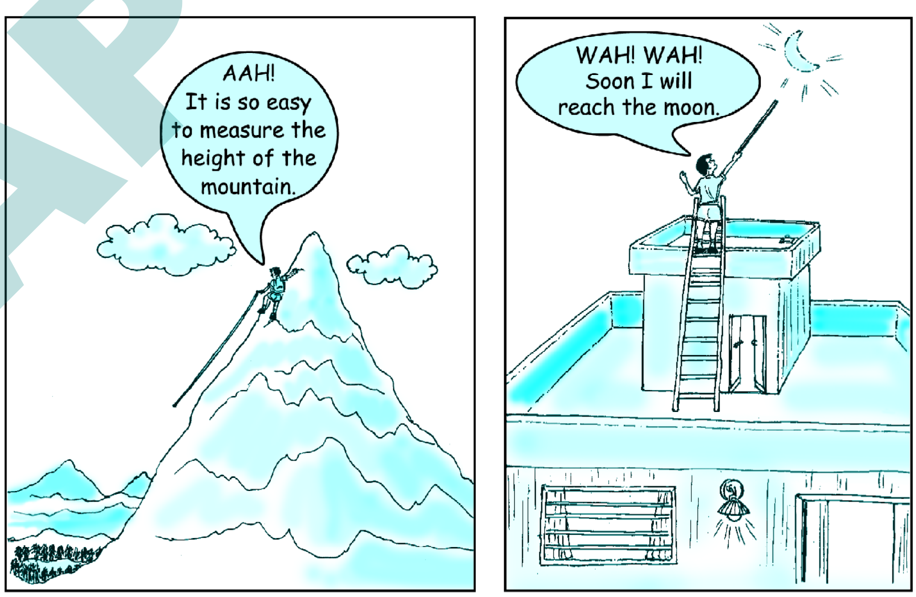
AP SCERT

TRIANGLES 6

6.1 Introduction

You are familiar with triangles and many of their properties from your earlier classes. In Class IX, you have studied congruence of triangles in detail. Recall that two figures are said to be *congruent*, if they have the same shape and the same size. In this chapter, we shall study about those figures which have the same shape but not necessarily the same size. Two figures having the same shape (and not necessarily the same size) are called *similar figures*. In particular, we shall discuss the similarity of triangles and apply this knowledge in giving a simple proof of Pythagoras Theorem learnt earlier.

Can you guess how heights of mountains (say Mount Everest) or distances of some long distant objects (say moon) have been found out? Do you think these have



AP SCERT

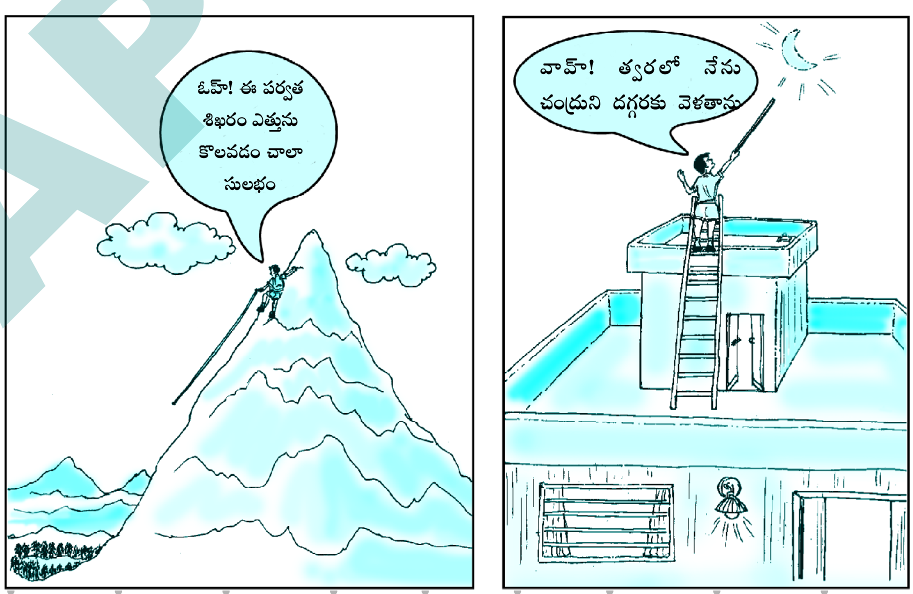
P1G2M8

6 త్రిభుజాలు

6.1 పరిచయం

త్రిభుజాలు మరియు వీటి అనేక ధర్మాల గురించి క్రింది తరగతిలో మీకు బాగుగా తెలుసు. 9వ తరగతిలో మీరు త్రిభుజాల యొక్క సర్వ సమానత్వమును విపులంగా అధ్యయనం చేశారు. ఒకే ఆకారము మరియు ఒకే పరిమాణము కలిగిన రెండు పటములు సర్వసమానంగా ఉంటాయని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఈ అధ్యాయములో మనము ఒకే ఆకారము కలిగి ఉండే పటముల గురించి అధ్యయనం చేస్తాము. కానీ, ఇవి ఒకే పరిమాణం కలిగి ఉండనవసరం లేదు. ఒకే ఆకారం కలిగి ఉండే (ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉండనవసరం లేని) పటాలను సరూప పటాలు అంటారు. ప్రత్యేకించి మనము త్రిభుజాల యొక్క సరూపకతను చర్చించుకుందాము మరియు ముందుగా నేర్చుకున్న పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క సాధారణ నిరూపణను అందించడంలో ఈ జ్ఞానాన్ని వర్తింపచేద్దాం.

పర్వతాల ఎత్తును (ఉదాహరణకు మౌంట్ ఎవరెస్ట్ పర్వత శిఖరం) లేదా చంద్రుడిలా దూరంగానున్న వాటి మధ్య దూరాలను ఎలా కనుగొంటారో మీరు ఊహించగలరా? వీటిని మనము ప్రత్యక్షంగా టేపు సహాయంతో కొలవగలమా?



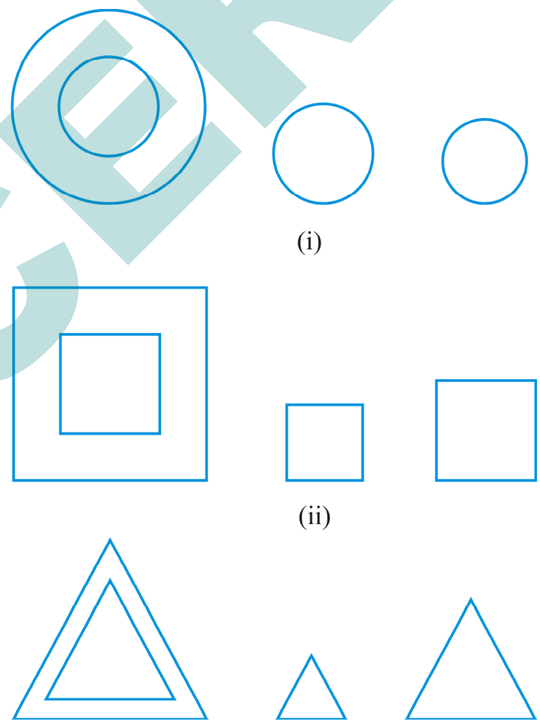
AP SCERT

been measured directly with the help of a measuring tape? In fact, all these heights and distances have been found out using the idea of indirect measurements, which is based on the principle of similarity of figures (see Example 7, Q.15 of Exercise 6.3 and also Chapters 8 and 9 of this book)

6.2 Similar Figures

In Class IX, you have seen that all circles with the same radii are congruent, all squares with the same side lengths are congruent and all equilateral triangles with the same side lengths are congruent.

Now consider any two (or more) circles [see Fig. 6.1 (i)]. Are they congruent? Since all of them do not have the same radius, they are not congruent to each other. Note that some are congruent and some are not, but all of them have the same shape. So they all are, what we call, *similar*. Two similar figures have the same shape but not necessarily the same size. Therefore, all circles are similar. What about two (or more) squares or two (or more) equilateral triangles [see Fig. 6.1 (ii) and (iii)]? As observed in the case of circles, here also all squares are similar and all equilateral triangles are similar.



(i)

(ii)

(iii)

Fig. 6.1

From the above, we can say *that all congruent figures are similar but the similar figures need not be congruent.*

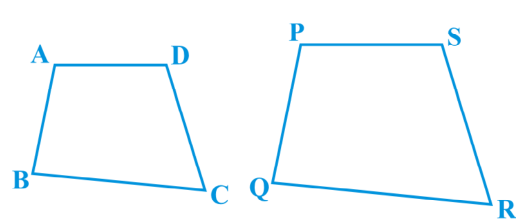


Fig. 6.2

Can a circle and a square be similar? Can a triangle and a square be similar? These questions can be answered by just looking at the figures (see Fig. 6.1). Evidently these figures are not similar. (Why?)

AP SCERT

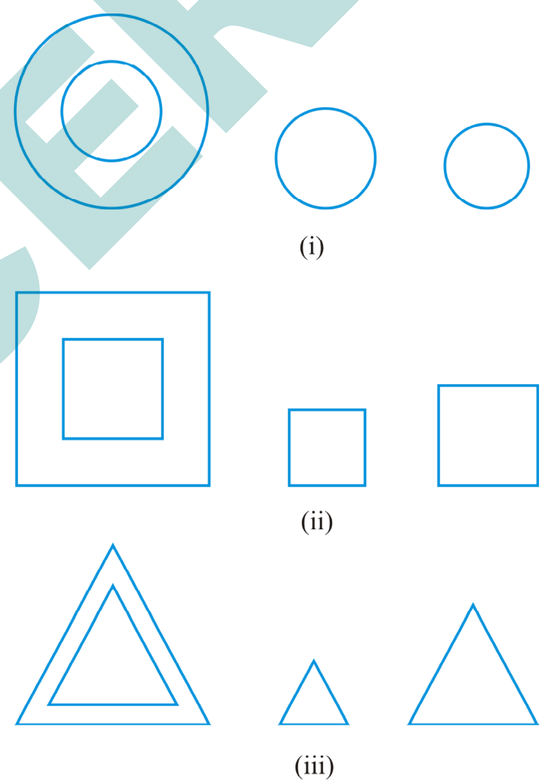
నిజానికి ఈ ఎత్తులు మరియు దూరాలను మనం పరోక్ష పద్ధతుల ద్వారా కనుగొంటాము. ఈ పరోక్ష పద్ధతులన్నీ సరూప పటాల నియమాలపై ఆధారపడినవే. (ఈ పుస్తకంలోని ఉదాహరణ 7, అభ్యాసం 6.3 లో 15వ ప్రశ్న మరియు అధ్యాయములు 8 మరియు 9 కూడా చూడండి)

6.2 సరూప పటములు

9వ తరగతిలో మీరు, ఒకే వ్యాసార్ధం కలిగిన అన్ని వృత్తాలు సర్వసమానాలు, ఒకే భుజము పొడవు కలిగిన అన్ని చతురస్రాలు సర్వసమానాలు మరియు అన్ని ఒకే భుజ పొడవు కల్గిన సమబాహు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అని తెలుసుకున్నారు.

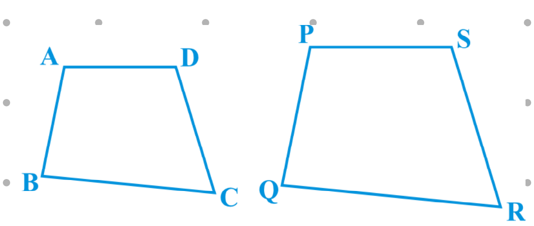
ఏదైనా రెండు (లేదా అంతకంటే ఎక్కువ) వృత్తాలను పరిగణించండి. (పటము 6.1 (i) చూడండి) అవి సర్వ సమానమేనా? వీటి అన్నిటికీ ఒకే వ్యాసార్ధం లేనందున అవి ఒకదానికొకటి సర్వసమానముగా లేవు. కొన్ని సర్వసమానము మరియు కొన్ని కావు, కానీ అవి అన్ని ఒకే ఆకారము కలిగి ఉన్నాయి అని గమనించండి. అందుకని వాటి అన్నిటినీ సరూపాలు అని అంటాము. రెండు సరూప పటాలు ఒకే ఆకారాన్ని కలిగి ఉంటాయే కానీ ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉండనవసరం లేదు. అందువలన, అన్ని వృత్తాలు సరూపాలు. రెండు (లేదా అంతకంటే ఎక్కువ) చతురస్రాలు లేదా రెండు (లేదా అంతకంటే ఎక్కువ) సమబాహు త్రిభుజాలు గురించి ఏమి చెప్పగలరు? [పటము 6.1 (ii) మరియు (iii)] చూడండి. వృత్తాల విషయంలో గుర్తించినట్లుగా ఇక్కడ కూడా అన్ని చతురస్రాలు సరూపాలు మరియు అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు కూడా సరూపాలు.

పైన పేర్కొన్న దాని నుండి అన్ని సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు కానీ, అన్ని సరూప పటాలు సర్వసమాన పటాలు కానవసరం లేదు.



పటం 6.1

వృత్తము మరియు చతురస్రము సరూపాలని చెప్పగలమా? అలానే త్రిభుజము మరియు చతురస్రము సరూపాలా? ఈ ప్రశ్నలకు కేవలం పటములను చూడడం ద్వారా సమాధానం ఇవ్వవచ్చును. (పటము 6.1 చూడండి) ఈ పటములు సరూపాలు కావని స్పష్టంగా చెప్పవచ్చు (ఎందుకు?)



పటం 6.2

AP SCERT

What can you say about the two quadrilaterals ABCD and PQRS (see Fig 6.2)?Are they similar? These figures appear to be similar but we cannot be certain about it.Therefore, we must have some definition of similarity of figures and based on this definition some rules to decide whether the two given figures are similar or not. For this, let us look at the photographs given in Fig. 6.3:

Fig. 6.3

You will at once say that they are the photographs of the same monument (Taj Mahal) but are in different sizes. Would you say that the three photographs are similar? Yes,they are.

What can you say about the two photographs of the same size of the same person one at the age of 10 years and the other at the age of 40 years? Are these photographs similar? These photographs are of the same size but certainly they are not of the same shape. So, they are not similar.

What does the photographer do when she prints photographs of different sizes from the same negative? You must have heard about the stamp size, passport size and postcard size photographs. She generally takes a photograph on a small size film, say of 35mm size and then enlarges it into a bigger size, say 45mm (or 55mm). Thus, if we consider any line segment in the smaller photograph (figure), its corresponding line segment in the bigger photograph (figure) will be $\frac{45}{35}\left(\text{or } \frac{55}{35}\right)$ of that of the line segment. This really means that every line segment of the smaller photograph is enlarged (increased) *in the ratio* 35:45 (or 35:55). It can also be said that every line segment of the bigger photograph is reduced (decreased) in the ratio 45:35 (or 55:35). Further, if you consider inclinations (or angles) between any pair of corresponding line segments in the two photographs of different sizes, you shall see that these inclinations(or angles) *are always equal.* This is the essence of the similarity of two figures and in particular of two polygons. We say that:

Two polygons of the same number of sides are similar, if (*i*) *their corresponding angles are equal and* (*ii*) *their corresponding sides are in the same ratio* (*or proportion*).

AP SCERT

ABCD మరియు PQRS అనే రెండు చతుర్భుజాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? (పటము 6.2 చూడండి) అవి సరూపాలా? ఈ పటములు సరూపాలుగా కనిపిస్తున్నాయి కానీ మనం వాటి గురించి ఖచ్చితముగా చెప్పలేము. అందువలన పటముల సరూపత గురించి మనకు కొంత నిర్వచనం ఉండాలి మరియు ఈ నిర్వచనం ఆధారంగా ఇచ్చిన రెండు పటములు సరూపాలో కాదో నిర్ణయించటానికి కొన్ని నియమాలు ఉండాలి. దీని కోసం పటం 6.3 లో ఇవ్వబడిన ఫోటోగ్రాఫ్‌లు చూద్దాం.

పటం 6.3

పటం 6.3 లో అవి ఒకే స్మారక చిహ్నం (తాజ్ మహల్) యొక్క ఫోటోలు అని మీరు చూసిన వెంటనే చెప్పగలరు. కానీ వాటి పరిమాణాలు వేరువేరు. ఆ మూడు ఫోటోలు సరూపాలని చెప్పగలరా? అవును అవి సరూపాలే.

ఒకే వ్యక్తి యొక్క ఒకే పరిమాణంలో ఉన్న రెండు ఫోటోలు ఒకటి పది సంవత్సరాల వయసులో మరియు మరొకటి 40 సంవత్సరాల వయసులో ఉన్న వాటి గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఈ ఫోటోలు సరూపాలా? ఈ ఫోటోలు ఒకే పరిమాణంలో ఉంటాయే కానీ ఖచ్చితంగా ఒకే ఆకారంలో ఉండవు. కాబట్టి అవి సరూపాలు కావు.

ఒక ఫోటోగ్రాఫర్ ఒకే ఫిల్మ్ (నెగిటివ్) నుండి వేరువేరు పరిమాణాలు గల ఫోటోలను ఎలా ముద్రించగలుగుతుందో ఆలోచించండి. మీరు ఈ ఫోటోలలో స్టాంపు సైజు, పాస్‌పోర్ట్ సైజ్, కార్డ్ సైజు ఫోటోల గురించి వినే ఉంటారు. ఆమె సాధారణంగా ఫోటోను 35 మి.మీ. పరిమాణం కలిగిన చిన్న ఫిల్మ్ పై తీసుకుంటుంది తరువాత దానిని 45 మి.మీ.(లేదా 55 మి .మీ) కు పెద్దదిగా చేస్తుంది. ఆ చిన్న ఫోటోగ్రాఫ్‌లో ప్రతి రేఖాఖండము తర్వాత దానిని (లేదా) నిష్పత్తిలో చిన్నది కావడాన్ని మనం గమనించవచ్చు. చిన్న ఫోటోగ్రాఫ్ లోని ప్రతి రేఖాఖండము 35: 45 (లేదా 35:55) నిష్పత్తిలో పెద్దవి కావడాన్ని గమనించవచ్చును. ఇంకా పెద్ద ఫోటోగ్రాఫ్ లోని ప్రతి రేఖాఖండము $\frac{45}{35}$ $\left(\text{లేదా} \frac{55}{35}\right)$ నిష్పత్తిలో చిన్నది కావడాన్ని గమనించవచ్చు అని విని ఉంటారు. ఇంకా మీరు వేరు వేరు పరిమాణాల రెండు ఫోటోగ్రాఫ్‌లలో ఏదైనా ఒక జత సంబంధిత రేఖఖండాల మధ్య కోణాలను పరిశీలిస్తే, ఆ కోణాలు ఎల్లప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయి అని గమనిస్తారు. ఇదియే రెండు పటముల సరూపత మరియు ప్రత్యేకించి రెండు బహుభుజాల సరూపత యొక్క సారాంశము.

భుజాల సంఖ్య సమానంగా ఉన్న రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి మరియు (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (లేదా అనుపాతంలో) ఉండాలి.

Note that the same ratio of the corresponding sides is referred to as *the scale factor* (or the *Representative Fraction*) for the polygons. You must have heard that world maps (i.e., global maps) and blue prints for the construction of a building are prepared using a suitable scale factor and observing certain conventions.

In order to understand similarity of figures more clearly, let us perform the following activity:

Activity 1 : Place a lighted bulb at a point O on the ceiling and directly below it a table in your classroom. Let us cut a polygon, say a quadrilateral ABCD, from a plane cardboard and place this cardboard parallel to the ground between the lighted bulb and the table. Then a shadow of ABCD is cast on the table. Mark the outline of this shadow as A′B′C′D′ (see Fig.6.4).

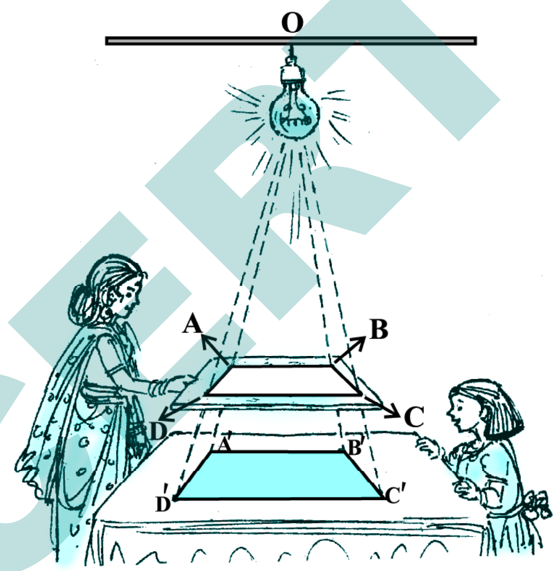


Fig. 6.4

Note that the quadrilateral A′B′C′D′ is an enlargement (or magnification) of the quadrilateral ABCD. This is because of the property of light that light propogates in a straight line. You may also note that A′ lies on ray OA, B′ lies on ray OB, C′ lies on OC and D′ lies on OD. Thus, quadrilaterals A′B′C′D′ and ABCD are of the same shape but of different sizes.

So, quadrilateral A′B′C′D′ is similiar to quadrilateral ABCD. We can also say that quadrilateral ABCD is similar to the quadrilateral A′B′C′D′.

Here, you can also note that vertex A′ corresponds to vertex A, vertex B′ corresponds to vertex B, vertex C′ corresponds to vertex C and vertex D′ corresponds to vertex D. Symbolically, these correspondences are represented as $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ and $D' \leftrightarrow D$. By actually measuring the angles and the sides of the two quadrilaterals, you may verify that

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ and

(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$.

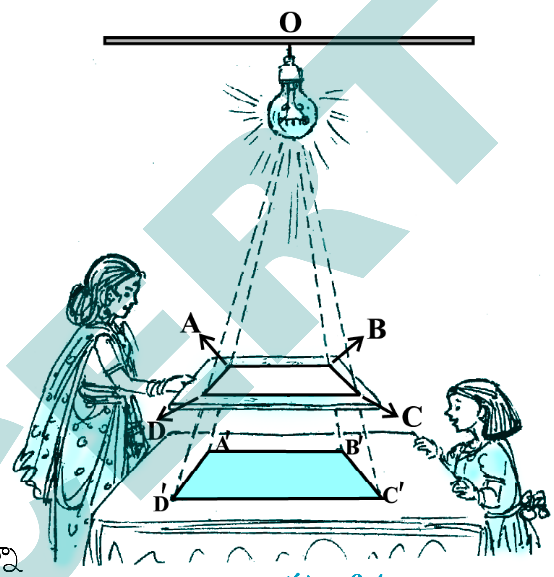
This again emphasises that *two polygons of the same number of sides are similar, if* (*i*) *all the corresponding angles are equal and* (*ii*) *all the corresponding sides are in the same ratio* (*or proportion*).

బహుభుజులలోని అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని *స్కేల్ గుణకం* (లేదా *ప్రత్యామ్నాయ గుణకం*) అంటారని గమనించండి. తగిన స్కేలు గుణకము తీసుకొని మరియు కొన్ని సాంప్రదాయాలను గమనిస్తూ ప్రపంచ పటాలు (గ్లోబల్ పటాలు) మరియు భవన నిర్మాణం కోసం వాడే బ్లూప్రింట్లు తయారు చేయబడతాయని మీరు వినే ఉంటారు.

సరూప పటాల గురించి మరింత స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోటానికి, ఈ క్రింది కృత్యం చేద్దాం:

కృత్యం 1 :

మీ తరగతి గదిలోని పై కప్పుకు O బిందువు వద్ద అమర్చిన బల్బుకు సరిగ్గా క్రిందకు వచ్చేటట్లు బల్లను అమర్చుము. ఒక సమతలంగా ఉన్న దళసరి అట్ట నుండి ఒక బహుభుజి (ABCD అనుకొనుము) ని కత్తిరించుము. దానిని నేలకు సమాంతరంగా బల్బుకు మరియు బల్లకు మధ్యలో అమర్చుము. అపుడు బల్లపై చతుర్భుజము ABCD నీడ ఏర్పడును. ఆ నీడ యొక్క అంచులను గీచి ఆ చతుర్భుజానికి A′B′C′D′ అని పేరు పెట్టుము (పటము 6.4 చూడుము).



పటం 6.4

ఈ చతుర్భుజము A′B′C′D′ అనేది చతుర్భుజము ABCD కన్నా పెద్దది (లేదా వృద్ధి చెందినది) బల్బు స్థానము O అనుకుంటే A^1 అనేది కిరణము OA పై ఉండును. అలాగే B′ అనేది OB పై, C^1అనేది OCపై, D^1 అనేది OD పై ఉండును. చతుర్భుజములు A′B′C′D′ మరియు ABCDలు ఒకే ఆకారము మరియు వివిధ పరిమాణములకు చెందిన పటములు.

కావున, A′B′C′D′ చతుర్భుజం ABCD చతుర్భుజానికి సమానం. దీనినే మనం చతుర్భుజము ABCD మరియు చతుర్భుజము A′B′C′D′ సరూపాలు అని కూడా చెప్పవచ్చు.

ఇందులో శీర్షం A′ అనేది శీర్షం Aకు, శీర్షం B′ అనేది శీర్షం Bకు, శీర్షం C′ అనేది శీర్షం Cకు మరియు శీర్షం D′అనేది శీర్షం Dకు అనురూపం. సంజ్ఞాత్మకంగా $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ మరియు $D' \leftrightarrow D$ గా వ్రాస్తాము. వాస్తవంగా ఆయా కోణాలు, భుజాలను కొలవడం ద్వారా ఆ రెండు చతుర్భుజాలలో క్రింది అంశాలు సరిచూడగలరు.

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ మరియు

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$

దీని నుండి సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే (*i*) వాటి అనురూప కోణాలన్నీ సమానంగా ఉండాలి మరియు (*ii*) వాటి అనురూప భుజాలన్నీ ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండాలి (అనుపాతములో ఉండాలి) అని ధ్రువపడుతుంది.

AP SCERT

From the above, you can easily say that quadrilaterals ABCD and PQRS of Fig. 6.5 are similar.

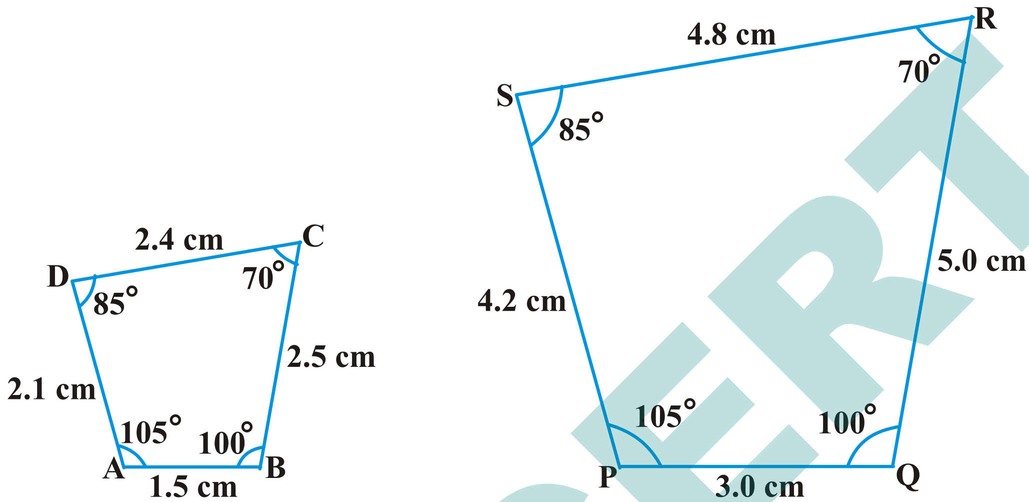


Fig. 6.5

Remark : You can verify that if one polygon is similar to another polygon and this second polygon is similar to a third polygon, then the first polygon is similar to the third polygon.

You may note that in the two quadrilaterals (a square and a rectangle) of Fig. 6.6, corresponding angles are equal, but their corresponding sides are not in the same ratio.

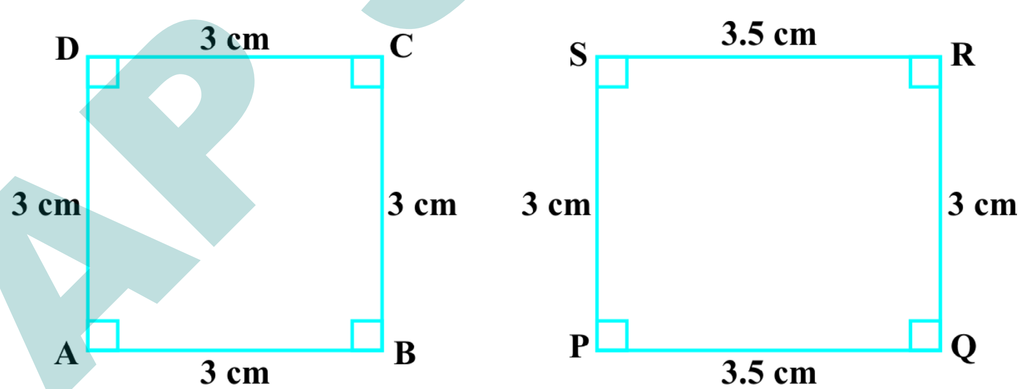
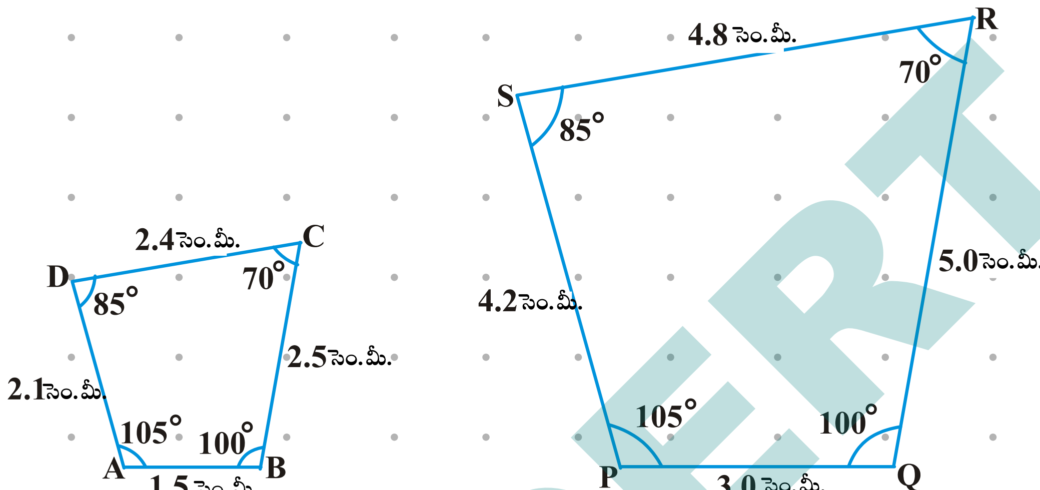


Fig. 6.6

So, the two quadrilaterals are not similar. Similarly, you may note that in the two quadrilaterals (a square and a rhombus) of Fig. 6.7, corresponding sides are in the same ratio, but their corresponding angles are not equal. Again, the two polygons (quadrilaterals) are not similar.

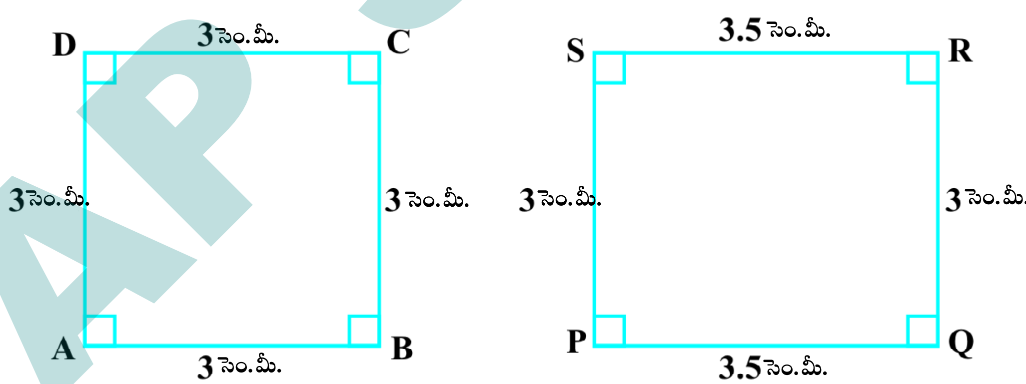
పై కృత్యము ద్వారా పటము 6.5 లో ఇవ్వబడిన చతుర్భుజాలు ABCD మరియు PQRS సరూపాలు అని సులభంగా చెప్పవచ్చును.



పటం 6.5

సూచన: ఒక బహుభుజి మరొక బహుభుజికి సరూపము మరియు ఈ రెండో బహుభుజి మూడవ బహుభుజికి సరూపము అయితే మొదటి బహుభుజి మూడో బహుభుజికి సరూపముగా ఉంటుందని మీరు ధ్రువీకరించవచ్చును.

పటము 6.6 లోని రెండు చతుర్భుజాలలో (చతురస్రం మరియు దీర్ఘ చతురస్రాల) అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటాయే కానీ, వీటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండవు అని మీరు గమనించవచ్చును.



పటం 6.6

కాబట్టి, రెండు చతుర్భుజాలు సరూపాలు కావు. అదే విధముగా పటము 6.7 లోని రెండు చతుర్భుజాలు (చతురస్రం మరియు సమ చతుర్భుజం)లో అనురూప భుజాలు సమాన నిష్పత్తిలో ఉంటాయి. కానీ, వాటి సంబంధిత కోణాలు సమానం కాదు అని మీరు గమనించవచ్చు. మళ్ళీ రెండు బహుభుజాలు (చతుర్భుజాలు) సరూపాలు కావు.

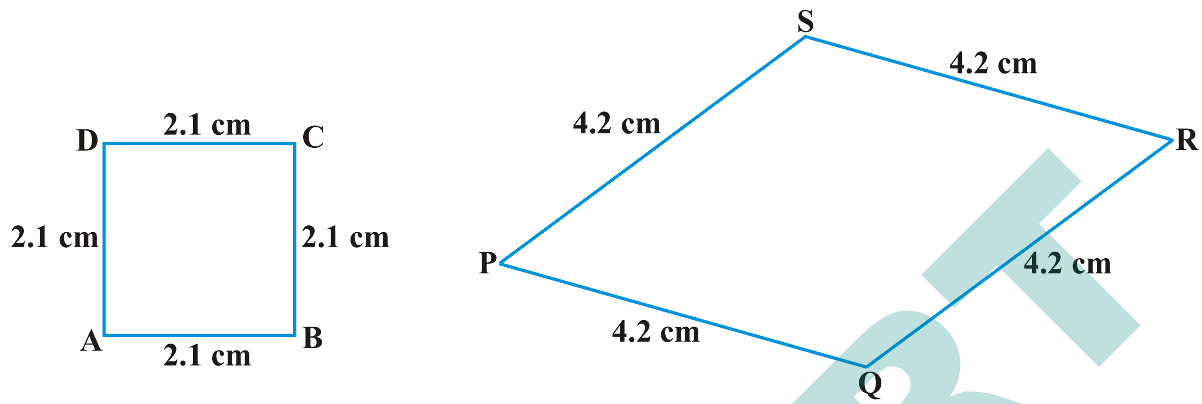


Fig. 6.7

Thus, *either of the above two conditions* (*i*) *and* (*ii*) *of similarity of two polygons is not sufficient for them to be similar*.

EXERCISE 6.1

1. Fill in the blanks using the correct word given in brackets :

(i) All circles are ______. (congruent, similar)

(ii) All squares are ______. (similar, congruent)

(iii) All ______ triangles are similar. (isosceles, equilateral)

(iv) Two polygons of the same number of sides are similar, if (a) their corresponding angles are ______ and (b) their corresponding sides are ______. (equal, proportional)

2. Give two different examples of pair of

(i) similar figures. (ii) non-similar figures.

3. State whether the following quadrilaterals are similar or not:

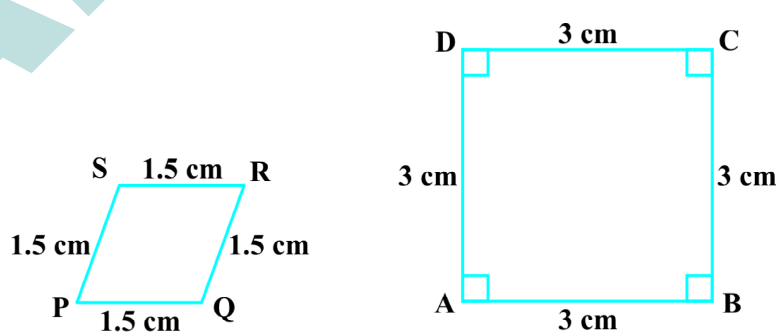
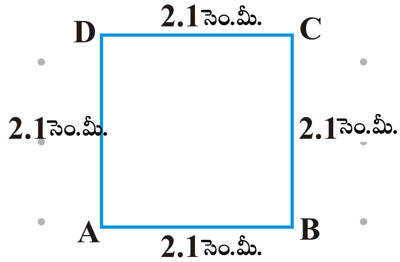
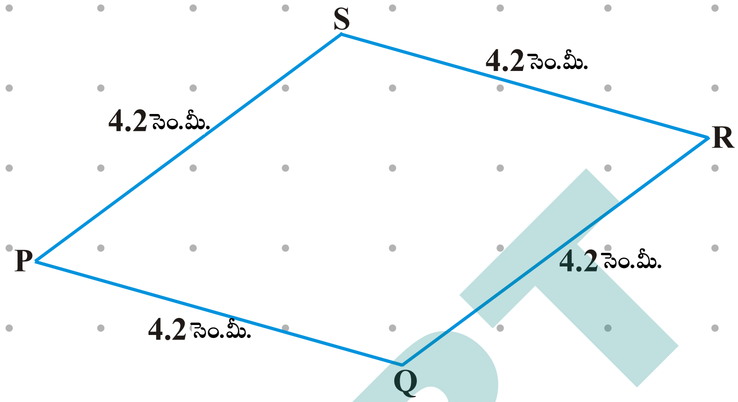


Fig. 6.8

AP SCERT





పటం 6.7

రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే పై రెండు (*i*) మరియు (*ii*) నియమాలల్లో ఏదో ఒక్క నియమం సరిపోదు.

అభ్యాసం 6.1

1. ఇచ్చిన పదాలలో సరైన పదాన్ని ఉపయోగించి ఖాళీలను పూరించండి :

(i) అన్ని వృత్తాలు ఎల్లప్పుడూ ________ (సర్వసమానాలు / సరూపాలు)

(ii) అన్ని చతురస్రాలు ఎల్లప్పుడూ ________ (సరూపాలు / సర్వసమానాలు)

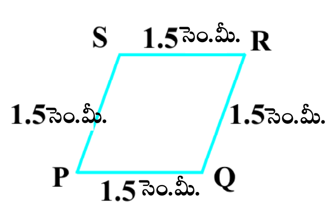
(iii) అన్ని ________ త్రిభుజాలు సరూపాలు (సమద్విబాహు / సమబాహు)

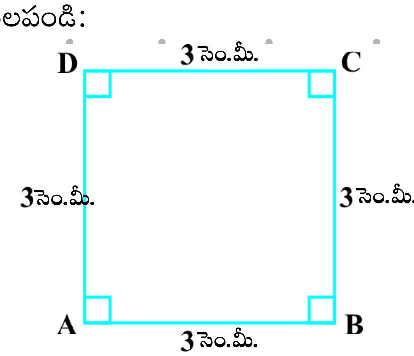
(iv) సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే (అ) వాటి అనురూప కోణాలు ________ మరియు (ఆ) వాటి అనురూప భుజాలు ________ ఉండాలి (సమానము / అనుపాతం)

2. ఈ క్రింది వాటికి రెండు వేరు వేరు ఉదాహరణ లివ్వండి

(i) సరూప పటాలు (ii) సరూప పటాలు కానివి

3. ఈ క్రింది ఇచ్చిన చతుర్భుజాలు సరూపాలో, కాదో తెలపండి:





పటం 6.8

AP SCERT

6.3 Similarity of Triangles

What can you say about the similarity of two triangles?

You may recall that triangle is also a polygon. So, we can state the same conditions for the similarity of two triangles. That is:

Two triangles are similiar, if

(*i*) *their corresponding angles are equal and*

(*ii*) *their corresponding sides are in the same ratio* (*or proportion*).

Note that if corresponding angles of two triangles are equal, then they are known as *equiangular triangles*. A famous Greek mathematician Thales gave an important truth relating to two equiangular triangles which is as follows:

Thales
(640 – 546 B.C.)

The ratio of any two corresponding sides in two equiangular triangles is always the same.

It is believed that he had used a result called the *Basic Proportionality Theorem* (now known as the *Thales Theorem*) for the same.

To understand the Basic Proportionality Theorem, let us perform the following activity:

Activity 2 : Draw any angle XAY and on its one arm AX, mark points (say five points) P, Q, D, R and B such that AP = PQ = QD = DR = RB.

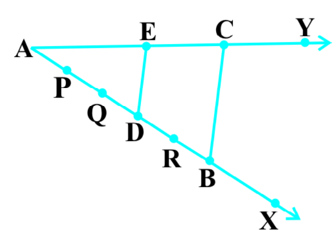


Fig. 6.9

Now, through B, draw any line intersecting arm AY at C (see Fig. 6.9).

Also, through the point D, draw a line parallel to BC to intersect AC at E. Do you observe from your constructions that $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? Measure AE and EC. What about $\frac{AE}{EC}$? Observe that $\frac{AE}{EC}$ is also equal to $\frac{3}{2}$. Thus, you can see that in Δ ABC, DE || BC and $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Is it a coincidence? No, it is due to the following theorem (known as the Basic Proportionality Theorem):

AP SCERT

6.3 త్రిభుజాల సరూపత

రెండు త్రిభుజాల సరూపకత గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

త్రిభుజం కూడా ఒక బహుభుజి అని మీరు గుర్తు తెచ్చుకోవచ్చును. కాబట్టి మనము త్రిభుజాల సరూపతకు కూడా అవే షరతులను చెప్పగలము.

అంటే రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి.

(ii) వాటి అనురూప భుజాలు సమాన నిష్పత్తిలో ఉండాలి (అనుపాతంలో ఉండాలి).

రెండు త్రిభుజాల యొక్క అనురూప కోణాలు సమానముగా ఉన్నట్లు మీరు గమనించినట్లయితే వాటిని *సమకోణీయ త్రిభుజాలు* అంటారు. ప్రముఖ గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త థేల్స్ రెండు సమకోణీయ త్రిభుజములకు సంబంధించిన ఒక ముఖ్యమైన సత్యమును ఈ క్రింది విధముగా తెలిపారు :

రెండు సమకోణీయ త్రిభుజాలలో ఏ రెండు అనురూప భుజాల నిష్పత్తి అయిన ఒకేలా ఉంటుంది.

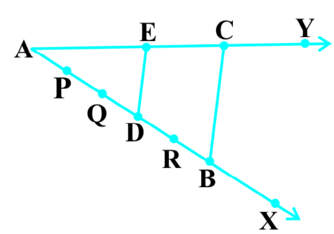
థేల్స్
(640 – 546 B.C.)

దీని నిరూపణకు *ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము (థేల్స్ సిద్ధాంతము* అని కూడా అంటాము) అవసరము.

ఈ ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాం :

కృత్యం 2 : కోణము XAY ని గీయండి మరియు ఒక కిరణము AX పై AP = PQ = QD = DR = RB అగునట్లు బిందువులు (ఐదు బిందువులు అనుకొనుము) P, Q, D, R మరియు Bలను గుర్తించుము.

ఇప్పుడు B ద్వారా కిరణము AYను ఖండించు ఒక రేఖను గీయుము. ఇది AYని C బిందువు వద్ద తాకును (పటం 6.9 చూడవచ్చును).



పటం 6.9

అలాగే బిందువు D గుండా BC కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయుము. ఆ రేఖ ACని E బిందువు వద్ద తాకును. ఇది $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ అని నిర్మాణం ద్వారా గమనించారా? AE మరియు EC లను కొలవండి. $\frac{AE}{EC}$ విలువ ఎంత ? $\frac{AE}{EC}$ కూడా $\frac{3}{2}$ కి సమానము అవుతుందని గమనించగలరు. ఈ విధముగా ΔABC లో $DE \parallel BC$ మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అని చూడవచ్చును. ఇది యాదృచ్ఛికమా? కాదు, ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సిద్ధాంతం వలన (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం అని అంటారు) సాధ్యపడింది.

AP SCERT

Theorem 6.1 : *If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides in distinct points, the other two sides are divided in the same ratio.*

Proof : We are given a triangle ABC in which a line parallel to side BC intersects other two sides AB and AC at D and E respectively (see Fig. 6.10).

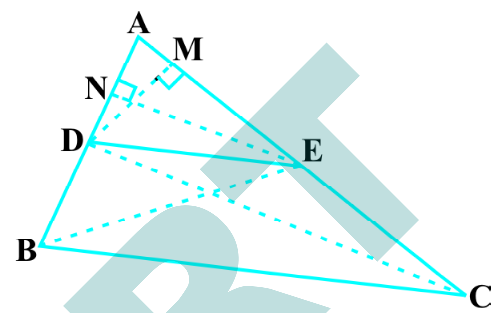


Fig. 6.10

We need to prove that $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Let us join BE and CD and then draw DM $\perp$ AC and EN $\perp$ AB.

Now, area of Δ ADE (= $\frac{1}{2}$ base $\times$ height) = $\frac{1}{2}$ AD $\times$ EN.

Recall from Class IX, that area of Δ ADE is denoted as ar(ADE).

So, $\quad \text{ar(ADE)} = \frac{1}{2} \text{AD} \times \text{EN}$

Similarly, $\quad \text{ar(BDE)} = \frac{1}{2} \text{DB} \times \text{EN},$

$$\text{ar(ADE)} = \frac{1}{2} \text{AE} \times \text{DM} \quad \text{and} \quad \text{ar(DEC)} = \frac{1}{2} \text{EC} \times \text{DM}.$$

Therefore, $$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(BDE)}} = \frac{\frac{1}{2} \text{AD} \times \text{EN}}{\frac{1}{2} \text{DB} \times \text{EN}} = \frac{\text{AD}}{\text{DB}} \qquad (1)$$

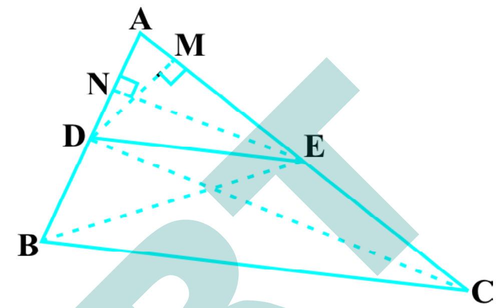
and $$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(DEC)}} = \frac{\frac{1}{2} \text{AE} \times \text{DM}}{\frac{1}{2} \text{EC} \times \text{DM}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}} \qquad (2)$$

Note that Δ BDE and DEC are on the same base DE and between the same parallels BC and DE.

So, $\quad \text{ar(BDE)} = \text{ar(DEC)} \qquad (3)$

సిద్ధాంతం 6.1 : ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.

నిరూపణ : ΔABC లో BC కు సమాంతరంగా AB మరియు AC లను వరుసగా D మరియు E ల వద్ద ఖండించు ఒక రేఖ మనకు ఇవ్వబడినది (పటము 6.10 చూడండి).



పటం 6.10

మనం $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ అని నిరూపించవలెను.

B,E మరియు C,D లను కలుపుము మరియు $DM \perp AC$ మరియు $EN \perp AB$ లను గీయుము.

ఇప్పుడు, Δ ADE వైశాల్యము $(= \frac{1}{2}$ భూమి $\times$ ఎత్తు$) = \frac{1}{2} AD \times EN$.

Δ ADE యొక్క ఆ ప్రాంతం ar(ADE) గా సూచించ వచ్చని 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్నాం, గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

కాబట్టి, ADE వైశాల్యం $= \frac{1}{2} AD \times EN$

ఇదేవిధంగా, BDE వైశాల్యం $= \frac{1}{2} DB \times EN$,

ADE వైశాల్యం $= \frac{1}{2} AE \times DM$ మరియు DEC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} EC \times DM$.

కావున, $$\frac{\text{ADE వైశాల్యం}}{\text{BDE వైశాల్యం}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

మరియు $$\frac{\text{ADE వైశాల్యం}}{\text{DEC వైశాల్యం}} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

Δ BDE, ΔDEC లు ఒకే భూమి DE మరియు సమాంతర రేఖలు BC మరియు DEల మధ్య ఉన్నట్లు గమనించవచ్చును.

కావున, BDE వైశాల్యం = DEC వైశాల్యం (3)

AP SCERT

Therefore, from (1), (2) and (3), we have :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Is the converse of this theorem also true (For the meaning of converse, see Appendix 1)? To examine this, let us perform the following activity:

Activity 3 : Draw an angle XAY on your notebook and on ray AX, mark points B_1, B_2, B_3, B_4 and B such that $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

Similarly, on ray AY, mark points C_1, C_2, C_3, C_4 and C such that $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Then join B_1C_1 and BC (see Fig. 6.11).

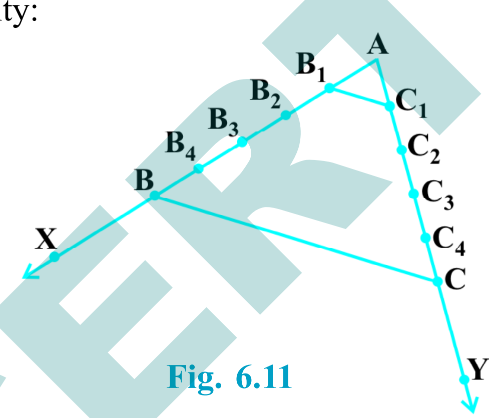


Fig. 6.11

Note that $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (Each equal to $\frac{1}{4}$)

You can also see that lines B_1C_1 and BC are parallel to each other, i.e.,

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

Similarly, by joining B_2C_2, B_3C_3 and B_4C_4, you can see that:

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3}\right) \text{ and } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2}\right) \text{ and } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1}\right) \text{ and } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

From (1), (2), (3) and (4), it can be observed that if a line divides two sides of a triangle in the same ratio, then the line is parallel to the third side.

You can repeat this activity by drawing any angle XAY of different measure and taking any number of equal parts on arms AX and AY . Each time, you will arrive at the same result. Thus, we obtain the following theorem, which is the converse of Theorem 6.1:

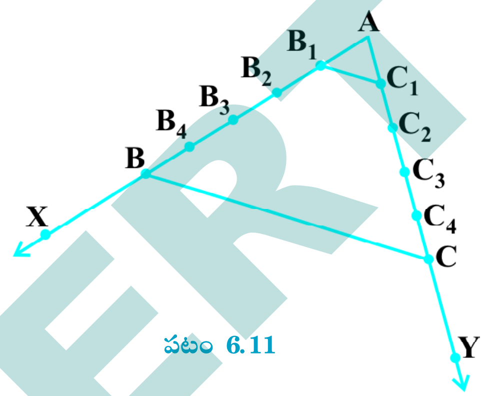
APSCERT

$\therefore$ (1), (2) మరియు (3) ల నుండి :

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము కూడా సత్యమేనా (విపర్యయము అర్థం కోసం అనుబంధం-1 చూడండి)? దీనిని నిర్ధారించుకొనుటకు క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాం.

కృత్యం 3 : మీ నోటు పుస్తకంలో కోణము XAY గీయండి. ఇంకా కిరణము AX పై $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ అగునట్లు బిందువులు B_1, B_2, B_3, B_4 మరియు B లను గుర్తించుము. అలాగే కిరణము AY పై $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ అగునట్లు బిందువులు C_1, C_2, C_3, C_4 మరియు C లను గుర్తించుము. B_1C_1 మరియు BC బిందువులను కలుపుము (పటం 6.11 చూడుము).



పటం 6.11

ఇప్పుడు, $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ప్రతిది $\frac{1}{4}$ కు సమానం)

B_1C_1 మరియు BC లు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉండుటను మీరు చూడవచ్చును.

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

ఇదేవిధంగా B_2C_2 , B_3C_3 మరియు B_4C_4 లను కలుపగా మీరు ఈవిధంగా చూడగలరు.

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ మరియు } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ మరియు } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ మరియు } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1),(2) ,(3) మరియు (4) ల నుండి ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉండును.

మీరు వివిధ కొలతల XAY కోణాన్ని గీయడం ద్వారా, AX మరియు AY పై సమాన భాగాలను ఎన్నింటినైనా తీసుకోవడం ద్వారా ఈ కృత్యం పునరావృతం చేయవచ్చు. ప్రతిసారి మీకు ఒకే ఫలితం వస్తుంది. ఈ విధంగా మనం ఈ క్రింది సిద్ధాంతాన్ని పొందుతాము. ఇది సిద్ధాంతం 6.1కు విపర్యయము.

AP SCERT

Theorem 6.2 : *If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, then the line is parallel to the third side.*

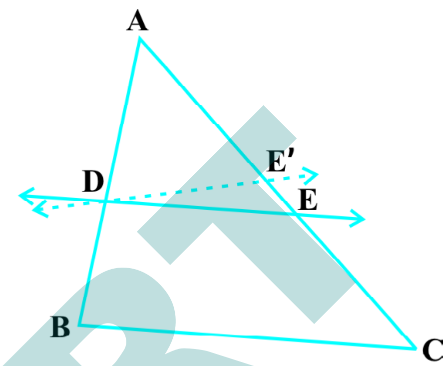


Fig. 6.12

This theorem can be proved by taking a line DE such that $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ and assuming that DE is not parallel to BC (see Fig. 6.12).

If DE is not parallel to BC, draw a line DE′ parallel to BC.

So, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (Why ?)

Therefore, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (Why ?)

Adding 1 to both sides of above, you can see that E and E′ must coincide. (Why ?)

Let us take some examples to illustrate the use of the above theorems.

Example 1 : If a line intersects sides AB and AC of a Δ ABC at D and E respectively and is parallel to BC, prove that $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (see Fig. 6.13).

Solution : DE || BC (Given)

So, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (Theorem 6.1)

or, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

or, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

or, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

So, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

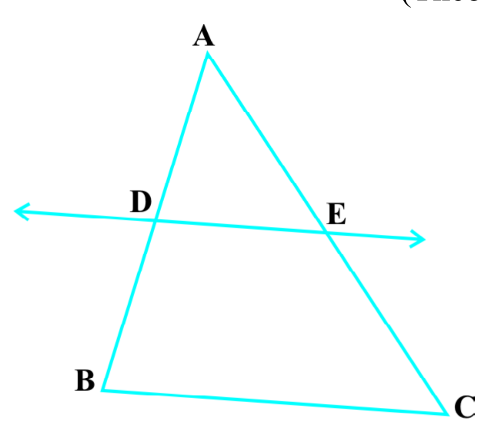
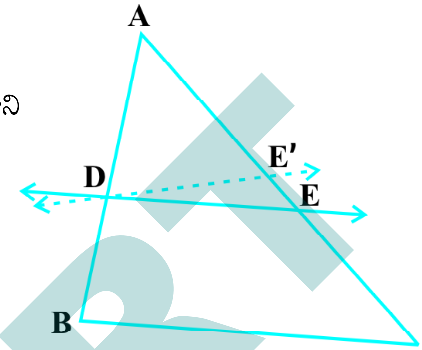


Fig. 6.13

AP SCERT

సిద్ధాంతము 6.2 : ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉండును.



పటం 6.12

ఈ సిద్ధాంతంను $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగునట్లు మరియు అది BCకు సమాంతరం కాని విధంగా గీయబడిన సరళరేఖ DE ని తీసుకొనుము (పటం 6.12 చూడుము).

DE అనేదిBC కి సమాంతరము కాదు అనుకొనుము. అప్పుడు BCకి సమాంతరంగా DE′ గీయుము (పటము 6.12).

కావున, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు ?)

అందువలన, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు ?)

ఇరువైపులా 1 కలుపగా E మరియు E′లు తప్పనిసరిగా ఏకీభవించాలి అని తెలుస్తుంది (ఎందుకు?)

ఈ సిద్ధాంత ప్రయోజనాలను వివరించేందుకు, కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాము.

ఉదాహరణ 1 : Δ ABC లో BC కి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ AB మరియు AC లను వరుసగా D మరియు Eల వద్ద ఖండించినచో $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ అని చూపండి (పటం 6.13చూడండి).

సాధన : DE || BC (ఇవ్వబడినది)

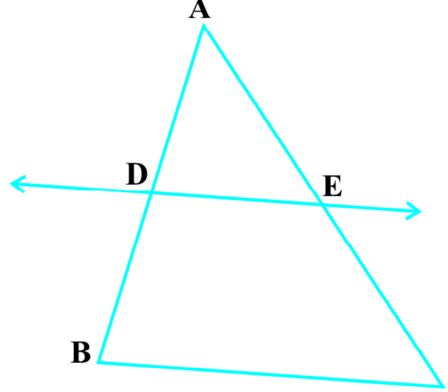
కావున, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (సిద్ధాంతం 6.1)

లేక, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

లేక, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

లేక, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

కాబట్టి, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



పటం 6.13

Example 2 : ABCD is a trapezium with AB || DC. E and F are points on non-parallel sides AD and BC respectively such that EF is parallel to AB (see Fig. 6.14). Show that $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

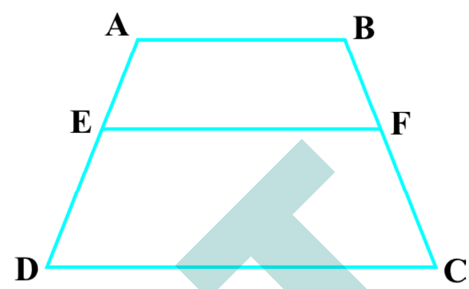


Fig. 6.14

Solution : Let us join AC to intersect EF at G (see Fig. 6.15).

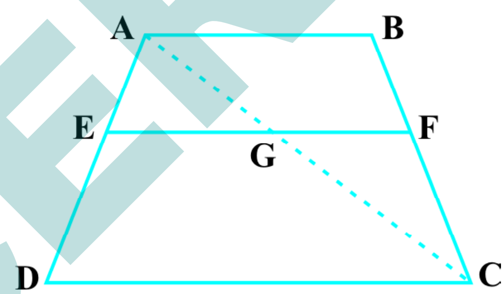


Fig. 6.15

AB || DC and EF || AB (Given)

So, EF || DC (Lines parallel to the same line are parallel to each other)

Now, in Δ ADC,

EG || DC (As EF || DC)

So, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (Theorem 6.1) (1)

Similarly, from Δ CAB,

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

i.e., $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

Therefore, from (1) and (2),

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

Example 3 : In Fig. 6.16, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ and ∠ PST = ∠ PRQ. Prove that PQR is an isosceles triangle.

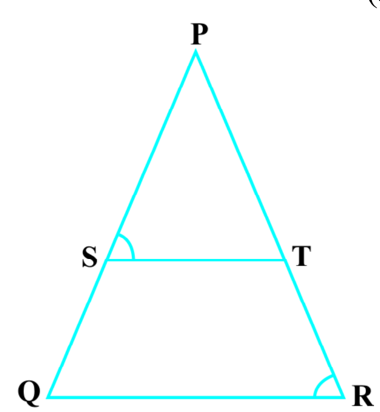


Fig. 6.16

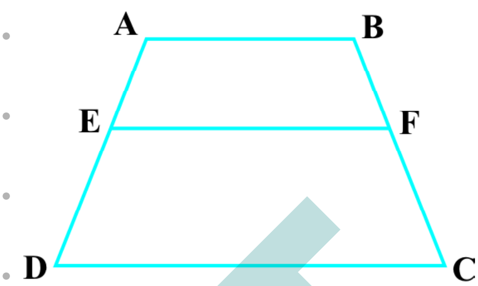
Solution : It is given that $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$.

So, ST || QR (Theorem 6.2)

Therefore, ∠ PST = ∠ PQR (Corresponding angles) (1)

AP SCERT

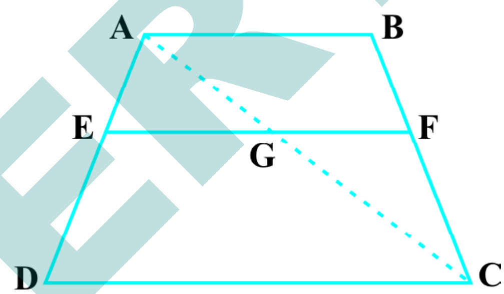
ఉదాహరణ 2 : ట్రెపీజియం ABCD లో AB || DC. E మరియు F బిందువులు వరుసగా EF || AB అగునట్లు సమాంతరం కానీ భుజాలు AD, BC లపై ఉన్నవి. (పటం 6.14 చూడండి)



పటం 6.14

అయిన $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ అని చూపండి.

సాధన : AC ను కలుపగా ఏర్పడిన రేఖా ఖండము, EF ను G వద్ద ఖండించినది. (పటము 6.15 చూడండి).



పటం 6.15

దత్తాంశము: AB || DC మరియు EF || AB (ఇవ్వబడినది)

కావున, EF || DC (ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖలు సమాంతరాలు)

Δ ADC లో EG || DC ($\because$ EF || DC)

కావున $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$

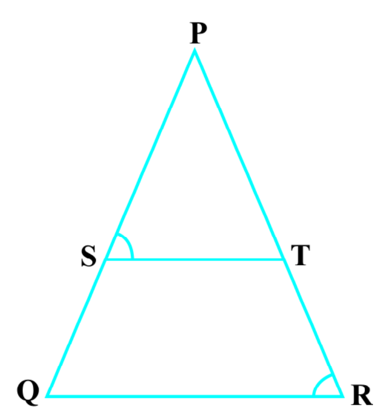
(సిద్ధాంతము 6.1) .... (1)

అదేవిధంగా, Δ CAB లో $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

అనగా $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ......(2)

అందువలన, (1) మరియు (2)ల నుండి $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

ఉదాహరణ 3 : పటము 6.16 లో చూపిన విధంగా, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ మరియు $\angle$ PST = $\angle$ PRQ అయిన PQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.



పటం 6.16

సాధన : దత్తాంశము $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$.

కావున, ST || QR (సిద్ధాంతం 6.2)

$\therefore$ $\angle$ PST = $\angle$ PQR (సదృశ్య కోణాలు) ....(1)

AP SCERT

Also, it is given that

$$\angle PST = \angle PRQ \qquad (2)$$

So, $\angle PRQ = \angle PQR$ [From (1) and (2)]

Therefore, PQ =PR (Sides opposite to the equal angles in a Triangle are equal)

i.e., PQR is an isosceles triangle.

EXERCISE 6.2

1. In Fig. 6.17, (i) and (ii), DE || BC. Find EC in (i) and AD in (ii).

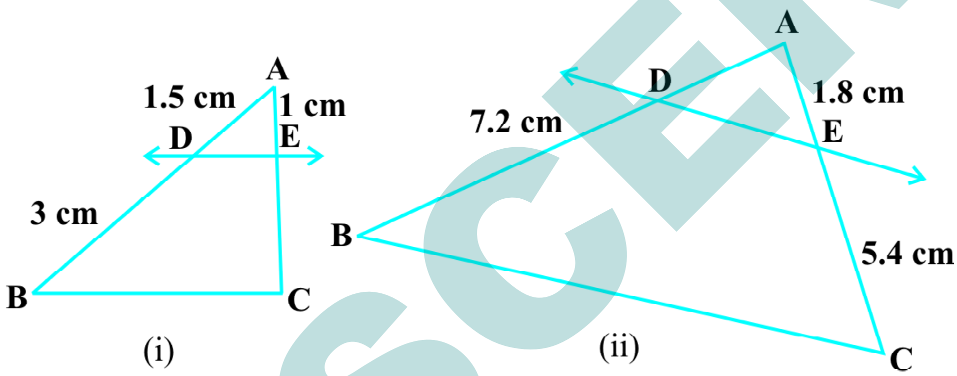


Fig. 6.17

2. E and F are points on the sides PQ and PR respectively of a Δ PQR. For each of the following cases, state whether EF || QR :

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm and FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm and RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm and PF = 0.36 cm

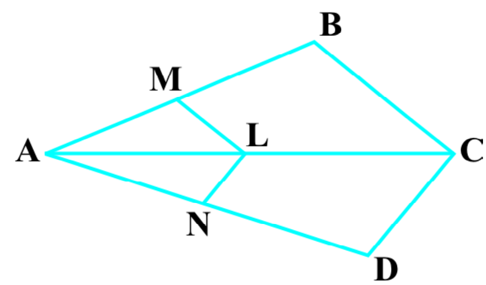


Fig. 6.18

3. In Fig. 6.18, if LM || CB and LN || CD, prove that $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.

4. In Fig. 6.19, DE || AC and DF || AE. Prove that $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.

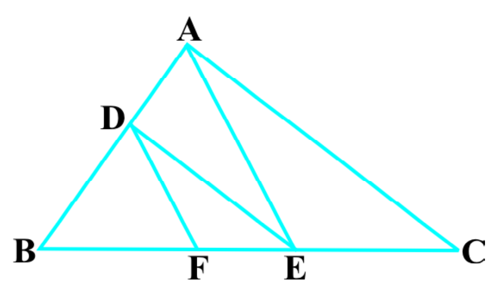


Fig. 6.19

అలాగే అది ఇవ్వబడినది

దత్తాంశం ప్రకారం $\angle PST = \angle PRQ$ అని ఇవ్వబడినది. (2)

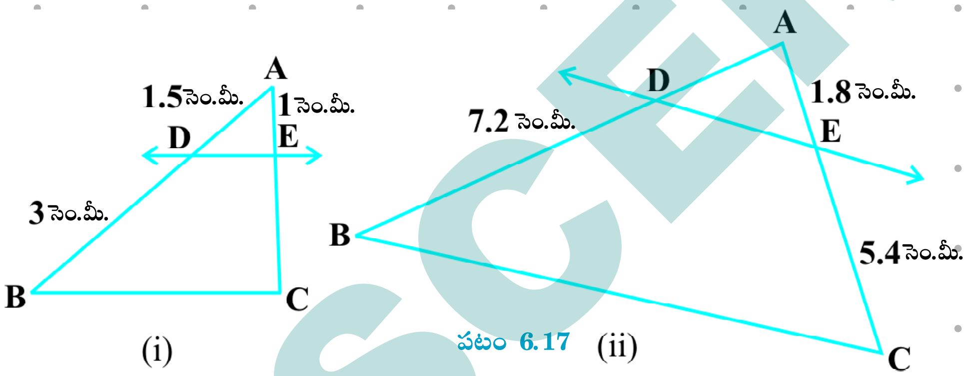
కావున, (1) మరియు (2) ల నుండి $\angle PRQ = \angle PQR$

$\therefore$ PQ = PR (త్రిభుజములో సమాన కోణాలకు ఎదురెదురు భుజాలు సమానము)

కావున PQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము.

అభ్యాసము 6.2

1. ఇచ్చిన పటము 6.17, (i) మరియు (ii) లో DE || BC అయిన (i) లో EC ని మరియు (ii) లో ADని కనుగొనుము



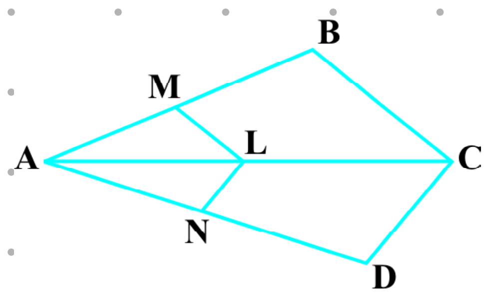
పటం 6.17

2. Δ PQR లో భుజాలు PQ మరియు QR లపై బిందువులు వరుసగా E మరియు F లు. ఈ క్రింది వాటిలో ప్రతి సందర్భంలో EF || QR అవునో, కాదో తెలపండి.

(i) PE = 3.9 సెం.మీ, EQ = 3 సెం.మీ, PF = 3.6 సెం.మీ మరియు FR = 2.4 సెం.మీ,

(ii) PE = 4 సెం.మీ, QE = 4.5 సెం.మీ, PF = 8 సెం.మీ. మరియు RF = 9 సెం.మీ,

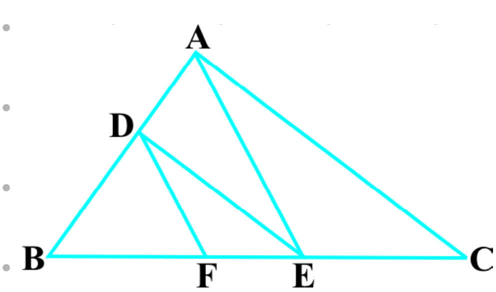
(iii) PQ = 1.28 సెం.మీ, PR = 2.56 సెం.మీ, PE = 0.18 సెం.మీ, మరియు PF = 0.36 సెం.మీ,



పటం 6.18

3. పటము 6.18 లో LM || CB మరియు LN || CD, అయిన $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ అని నిరూపించండి.

4. ఇచ్చిన పటము 6.19లో DE || AC మరియు DF || AE అయిన $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ అని నిరూపించండి.



పటం 6.19

AP SCERT

5. In Fig. 6.20, DE || OQ and DF || OR. Show that EF || QR.

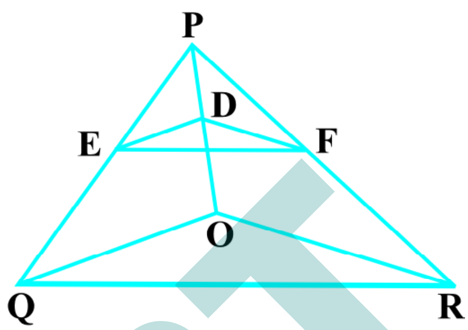


Fig. 6.20

6. In Fig. 6.21, A, B and C are points on OP, OQ and OR respectively such that AB || PQ and AC || PR. Show that BC || QR.
7. Using Theorem 6.1, prove that a line drawn through the mid-point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side. (Recall that you have proved it in Class IX).
8. Using Theorem 6.2, prove that the line joining the mid-points of any two sides of a triangle is parallel to the third side. (Recall that you have done it in Class IX).
9. ABCD is a trapezium in which AB || DC and its diagonals intersect each other at the point O. Show that $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

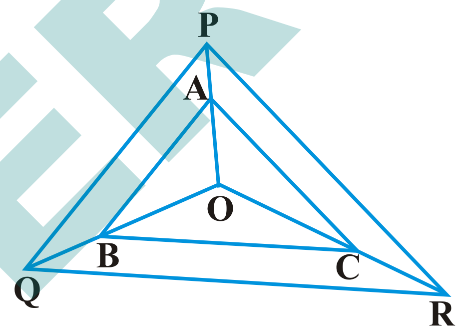


Fig. 6.21

10. The diagonals of a quadrilateral ABCD intersect each other at the point O such that $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. Show that ABCD is a trapezium.

6.4 Criteria for Similarity of Triangles

In the previous section, we stated that two triangles are similar, if (i) their corresponding angles are equal and (ii) their corresponding sides are in the same ratio (or proportion).

That is, in Δ ABC and Δ DEF, if

(i) ∠ A = ∠ D, ∠ B = ∠ E, ∠ C = ∠ F and

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, then the two triangles are similar (see Fig. 6.22).

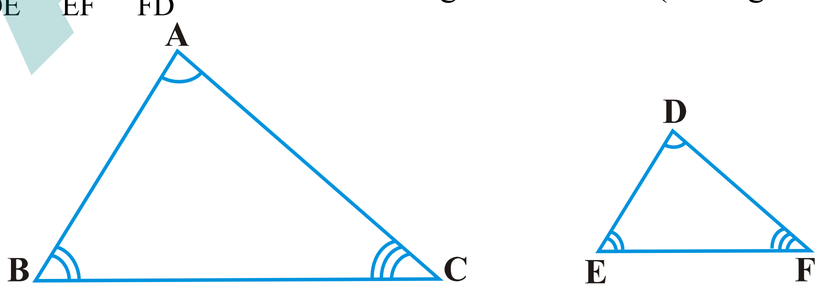
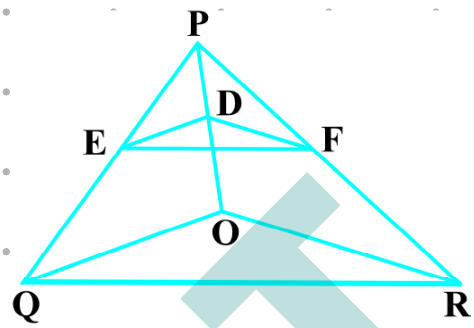


Fig. 6.22

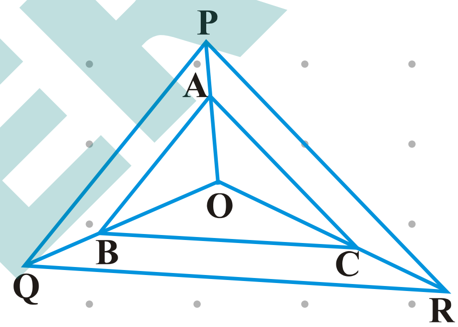
AP SCERT

5. ఇచ్చిన పటము 6.20 లో DE || OQ మరియు DF || OR. అయిన EF || QR అని చూపండి.



పటం 6.20

6. ఇచ్చిన పటము 6.21 లో A,B మరియు Cలు వరుసగా OP, OQ మరియు OR లపై బిందువులు. AB || PQ మరియు AC || PR అయిన BC || QR అని చూపండి.



పటం 6.21

7. సిద్ధాంతం 6.1ను ఉపయోగించి, ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజం మధ్య బిందువు గుండా పోయే రేఖ రెండవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటే అది మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి. (9వ తరగతిలో నిరూపించిన సిద్ధాంతాన్ని గుర్తు తెచ్చుకోండి).

8. సిద్ధాంతం 6.2 నుపయోగించి, ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుందని చూపండి. (9వ తరగతిలో నిరూపించిన సిద్ధాంతాన్ని గుర్తు తెచ్చుకోండి).

9. ఒక ట్రెపీజియం ABCD లో AB || DC మరియు దాని కర్ణములు పరస్పరం బిందువు O వద్ద ఖండించుకుంటాయి. అయిన $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అనిచూపండి.

10. ఒక చతుర్భుజం ABCDలో కర్ణములు పరస్పరం బిందువు O వద్ద $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అగునట్లుగా ఖండించుకొనును. అది ఒక ట్రెపీజియం అని చూపండి.

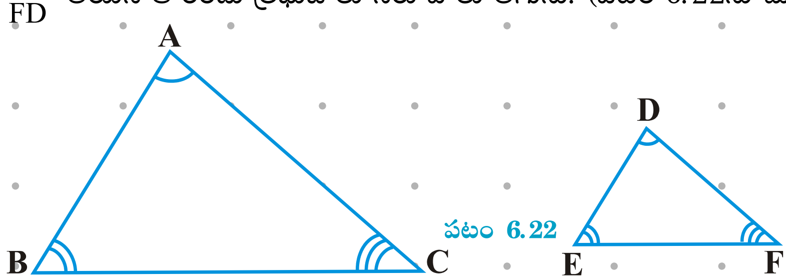
6.4 త్రిభుజాల సరూపకతకు నియమము

ముందు విభాగంలో చెప్పిన విధముగా, రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే, (i)వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి మరియు (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (లేదా అనుపాతంలో) ఉండాలి.

అనగా Δ ABC మరియు Δ DEF లలో

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ మరియు

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ అయిన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అగును. (పటం 6.22ను చూడండి)



పటం 6.22

AP SCERT

Here, you can see that A corresponds to D, B corresponds to E and C corresponds to F. Symbolically, we write the similarity of these two triangles as 'Δ ABC ~ Δ DEF' and read it as 'triangle ABC is similar to triangle DEF'. The symbol '~' stands for 'is similar to'. Recall that you have used the symbol '≅' for 'is congruent to' in Class IX.

> It must be noted that as done in the case of congruency of two triangles, the similarity of two triangles should also be expressed symbolically, using correct correspondence of their vertices. For example, for the triangles ABC and DEF of Fig. 6.22, we cannot write Δ ABC ~ Δ EDF or Δ ABC ~ Δ FED. However, we can write Δ BAC ~ Δ EDF.

Now a natural question arises : For checking the similarity of two triangles, say ABC and DEF, should we always look for all the equality relations of their corresponding angles ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) and all the equality relations of the ratios of their corresponding sides $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$? Let us examine. You may recall that in Class IX, you have obtained some criteria for congruency of two triangles involving only three pairs of corresponding parts (or elements) of the two triangles. Here also, let us make an attempt to arrive at certain criteria for similarity of two triangles involving relationship between less number of pairs of corresponding parts of the two triangles, instead of all the six pairs of corresponding parts. For this, let us perform the following activity:

Activity 4 : Draw two line segments BC and EF of two different lengths, say 3 cm and 5 cm respectively. Then, at the points B and C respectively, construct angles PBC and QCB of some measures, say, 60° and 40°. Also, at the points E and F, construct angles REF and SFE of 60° and 40° respectively (see Fig. 6.23).

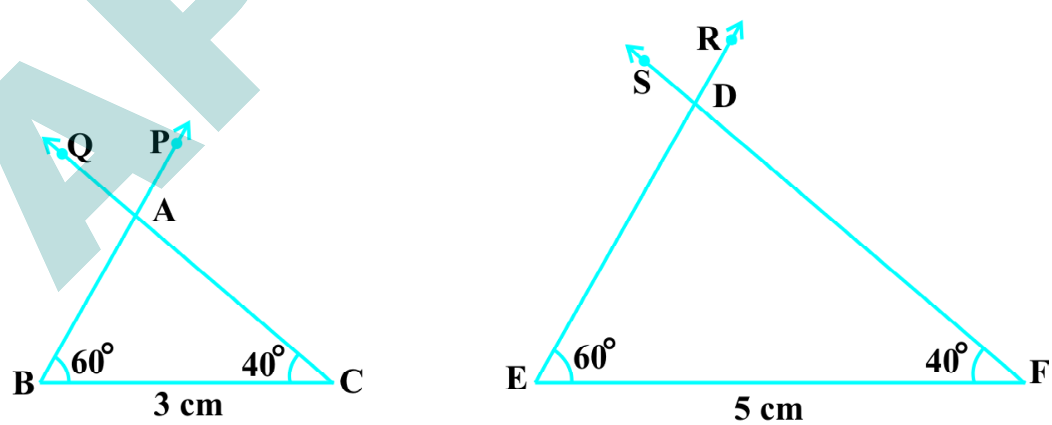


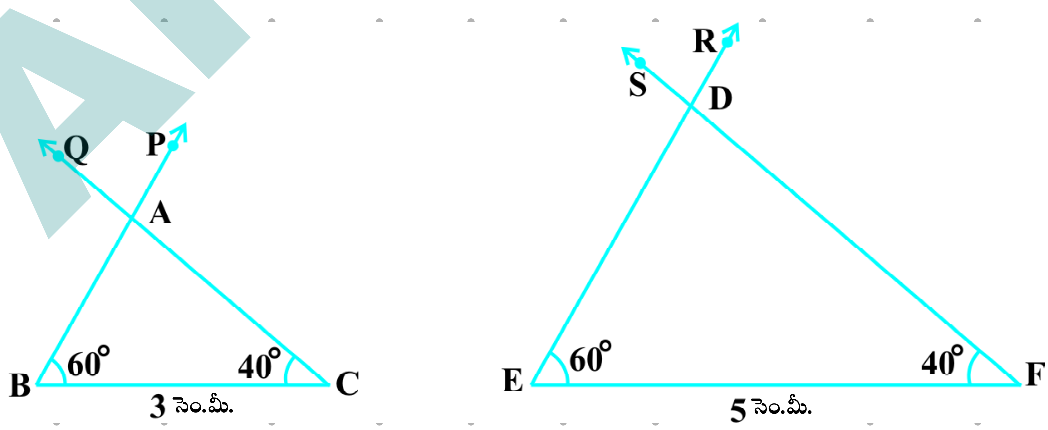
Fig. 6.23

ఇచ్చుట A అనేది Dకి అనురూపముగా, B అనేది Eకి అనురూపముగా మరియు C అనేది Fకి అనురూపముగా ఉన్నాయి. ఈ రెండు త్రిభుజాల సరూపకతను, చిహ్నాలను ఉపయోగించి ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు. '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' మరియు దీనిని త్రిభుజము ABC త్రిభుజము DEFకి సరూపంగా ఉంది అని చదువుతాము. '$\sim$' గుర్తు సరూపతను సూచిస్తుంది. మరియు తొమ్మిదో తరగతిలో మీరు సర్వసమానత్వమునకు '$\cong$' గుర్తుగా ఉపయోగించుట గుర్తు తెచ్చుకొనుము.

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వములో ఉపయోగించిన విధముగానే త్రిభుజాల సరూపకతలో కూడా చిహ్నాలు ఉపయోగించి రాసేటప్పుడు అనురూప శీర్షాలనే ఉపయోగించాలి. ఉదాహరణకు పటము 6.22లో త్రిభుజాలు ABC మరియు DEFలను $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ లేదా $\Delta ABC \sim \Delta FED$ గా వ్రాయకూడదు అయినప్పటికీ, $\Delta BAC \sim \Delta EDF$.అని వ్రాయవచ్చు.

ఇప్పుడు మనకు సహజంగా ఉద్భవించే ప్రశ్న: రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DEFల సరూపకతను పరిశీలించడానికి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉన్నాయేమో పరిశీలించాలి. ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) ఇంకా అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమేమో పరిశీలించాలి? $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$? రెండు త్రిభుజాల సర్వ సమానత్వాన్ని పరిశీలించడములో ఈ త్రిభుజాల మూడు జతల అనురూప భాగాలను (లేక అంశాలను) మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకుంటామని 9వ తరగతిలో మీరు నేర్చుకున్న విషయాన్ని గుర్తుతెచ్చుకోండి. ఇక్కడ కూడా రెండు త్రిభుజాల సరూపకతను పరిశీలించటానికి ఆరు జతల అనురూప భాగాల బదులుగా తక్కువ సంఖ్యలో అనురూప భాగాలను ఉపయోగించి కొన్ని నియమాలను ఏర్పరిచే ప్రయత్నం చేద్దాము. దీని కొరకు మనం క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

కృత్యం 4 : BC= 3 సెం.మీ, EF = 5సెం.మీ అయ్యే విధంగా BC మరియు EF రేఖాఖండాలను గీయండి. బిందువులు B మరియు Cల వద్ద వరుసగా కోణం PBC=60°, కోణం QCB=40° అగునట్లు కిరణాలను నిర్మించండి. అదేవిధంగా బిందువులు E మరియు Fల వద్ద వరుసగా కోణం REF= 60°, కోణం SFE = 40° అగునట్లు కోణ కిరణాలు నిర్మించండి. (పటం 6.23ను చూడండి)



పటం 6.23

AP SCERT

Let rays BP and CQ intersect each other at A and rays ER and FS intersect each other at D. In the two triangles ABC and DEF, you can see that $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ and $\angle A = \angle D$. That is, corresponding angles of these two triangles are equal. What can you say about their corresponding sides ? Note that $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6.$ What about $\frac{AB}{DE}$ and $\frac{CA}{FD}$? On measuring AB, DE, CA and FD, you will find that $\frac{AB}{DE}$ and $\frac{CA}{FD}$ are also equal to 0.6 (or nearly equal to 0.6, if there is some error in the measurement). Thus, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$ You can repeat this activity by constructing several pairs of triangles having their corresponding angles equal. Every time, you will find that their corresponding sides are in the same ratio (or proportion). This activity leads us to the following criterion for similarity of two triangles.

Theorem 6.3 : *If in two triangles, corresponding angles are equal, then their corresponding sides are in the same ratio (or proportion) and hence the two triangles are similar.*

This criterion is referred to as the AAA (Angle–Angle–Angle) criterion of similarity of two triangles.

This theorem can be proved by taking two triangles ABC and DEF such that $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$ (see Fig. 6.24)

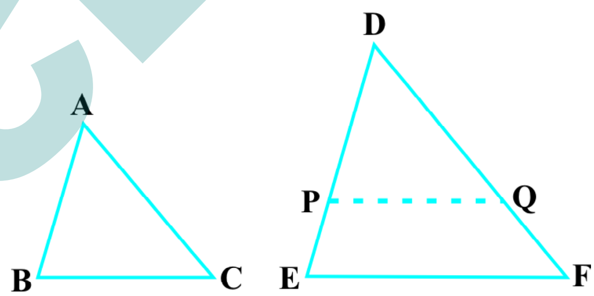


Fig. 6.24

Cut DP = AB and DQ = AC and join PQ.

So, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (Why ?)

This gives $\angle B = \angle P = \angle E$ and $PQ \parallel EF$ (How?)

Therefore, $$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \quad \text{(Why?)}$$

i.e., $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{(Why?)}$$

Similarly, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ and so $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

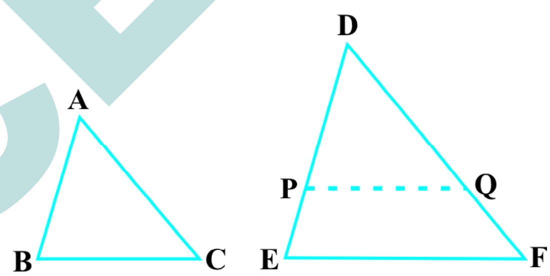
Remark : If two angles of a triangle are respectively equal to two angles of another triangle, then by the angle sum property of a triangle their third angles will also be equal. Therefore, AAA similarity criterion can also be stated as follows:

AP SCERT

కిరణములు BP మరియు CQలు పరస్పరం A వద్ద ఖండించుకున్నాయి అనుకుందాము మరియు కిరణములు ER మరియు FSలు D వద్ద ఖండించుకున్నాయి అనుకుందాము. రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DEFలలో $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ మరియు $\angle A = \angle D$ అనగా, ఆ రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానాలు. అయిన, వాటి అనురూప భుజాల గురించి మీకు ఏమి తెలుసు? $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ అని గమనించండి. $\frac{AB}{DE}$ మరియు $\frac{CA}{FD}$ గురించి మీకు ఏమి తెలుసు? AB, DE, CA మరియు FD భుజాలను కొలిచిన తర్వాత నీవు $\frac{AB}{DE}$ మరియు $\frac{CA}{FD}$ లు 0.6కి సమానమని తెలుసుకుంటారు (లేక కొలతలలో లోపం వలన 0.6 కు దగ్గరి విలువ వచ్చును) ఆవిధంగా $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$. అనురూప కోణాలు సమానం అయ్యే విధంగా వేరువేరు జతల త్రిభుజాలను నిర్మించి ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయగా, ప్రతిసారి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమని తెలుసుకుంటాం. ఈ కృత్యం ద్వారా త్రిభుజాల సరూపకతకు మనము ఈ క్రింద నియమాన్ని చెప్పవచ్చు.

సిద్ధాంతం 6.3 : *రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటే, వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా ఉంటాయి. (అనుపాతంలో ఉంటాయి). కనుక ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి.*

ఈ నియమమును కోకోకో (కోణం-కోణం-కోణం) త్రిభుజాల సరూప నియమముగా చెబుతాము.



పటం 6.24

సిద్ధాంతను $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ (పటం 6.24 చూడండి) Δ ABC మరియు Δ DEF లను తీసుకోవటం ద్వారా నిరూపించవచ్చును. AB = DP మరియు AC = DQ అగునట్లు P, Q లను కలుపుము.

కావున, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎందుకు ?)

దీని నుండి $\angle B = \angle P = \angle E$ మరియు $PQ \parallel EF$ (ఎలా?)

$$\therefore \quad \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

అదేవిధంగా, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ కాబట్టి $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

సూచన: ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు కోణములకు సమానమైన, త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం, ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని మూడవ కోణాలు కూడా సమానము అవుతాయి. కావున కో.కో.కో సరూప నియమాన్ని ఈ విధముగా కూడా చెప్పవచ్చును:

AP SCERT

If two angles of one triangle are respectively equal to two angles of another triangle, then the two triangles are similar.

This may be referred to as the AA *similarity criterion* for two triangles.

You have seen above that if the three angles of one triangle are respectively equal to the three angles of another triangle, then their corresponding sides are proportional (i.e., in the same ratio). What about the converse of this statement? Is the converse true? In other words, if the sides of a triangle are respectively proportional to the sides of another triangle, is it true that their corresponding angles are equal? Let us examine it through an activity :

Activity 5 : Draw two triangles ABC and DEF such that AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm and FD = 12 cm (see Fig. 6.25).

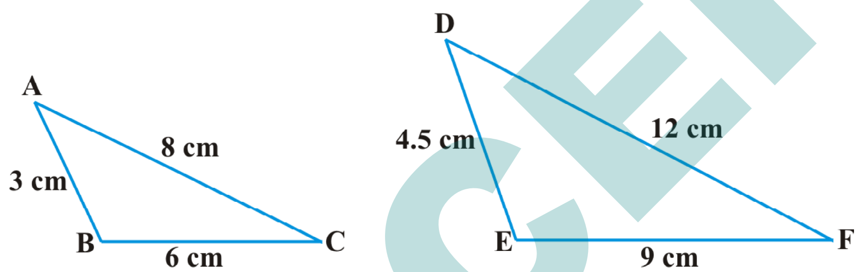


Fig. 6.25

So, you have : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (each equal to $\frac{2}{3}$)

Now measure $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C, $\angle$ D, $\angle$ E and $\angle$ F. You will observe that $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$, i.e., the corresponding angles of the two triangles are equal.

You can repeat this activity by drawing several such triangles (having their sides in the same ratio). Everytime you shall see that their corresponding angles are equal. It is due to the following criterion of similarity of two triangles:

Theorem 6.4 : *If in two triangles, sides of one triangle are proportional to (i.e., in the same ratio of) the sides of the other triangle, then their corresponding angles are equal and hence the two triangles are similiar.*

This criterion is referred to as the SSS (Side–Side–Side) *similarity criterion for two triangles*.

This theorem can be proved by taking two triangles ABC and DEF such that $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (see Fig. 6.26):

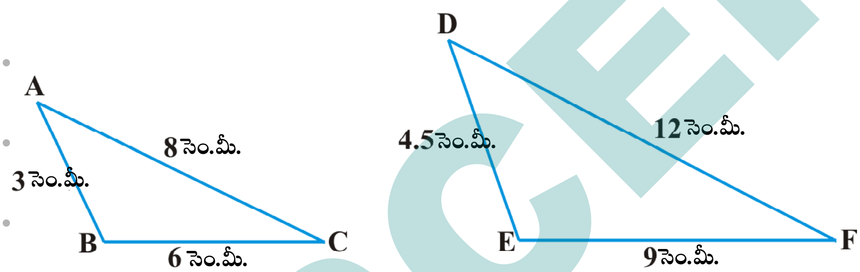
AP SCERT

ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజం లోని రెండు కోణములకు సమానమైన, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి.

ఈ నియమాన్ని రెండు త్రిభుజాలకు *AA త్రిభుజాల సరూపకత నియమముగా* చెబుతాము.

ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణాలు వరుసగా మరొక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలకు సమానమైన, వాటి అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో (అంటే ఒకే నిష్పత్తిలో) ఉంటాయి అని మీకు తెలుసు. మరి పై ప్రవచనము యొక్క విపర్యయము ఏమిటి? ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు, వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని అనురూప భుజాలతో అనుపాతములో ఉన్న, ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానమనుట సరియేనా? దీనిని మనము ఈ క్రింది కృత్యము ద్వారా పరిశీలిద్దాము.

కృత్యం 5 : AB = 3 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, CA = 8 సెం.మీ, DE = 4.5 సెం.మీ, EF = 9 సెం.మీ, మరియు FD = 12 సెం.మీ, కొలతలతో రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DEFలను నిర్మించుము (పటం 6.25ను చూడండి).



పటం 6.25

ఆ రెండు త్రిభుజాలలో : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ప్రతి ఒక్కటి $\frac{2}{3}$ సమానం)

$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ మరియు $\angle F$ కోణాలను కొలవండి. $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ అని మీరు గమనిస్తారు. అంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానమగును.

అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమయ్యే విధంగా వేరువేరు జతల త్రిభుజాలను నిర్మించి ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయుట ద్వారా, ప్రతి సందర్భంలో రెండు త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానమగుట మీరు గమనించగలరు. పై కృత్యం ద్వారా త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి ఈ క్రింది నియమం వస్తుంది.

సిద్ధాంతం 6.4 : *రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని భుజాలు, వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో ఉన్న, (ఒకే నిష్పత్తిలో ఉన్నట్లయితే) ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము. ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.*
ఈ నియమాన్ని *రెండు త్రిభుజాల* భు. భు. భు (భుజము– భుజము– భుజము) *సరూప నియమము* గా చెబుతాము.

ఈ సిద్ధాంతంను $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) అగునట్లు, రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DEFలను తీసుకొనుట ద్వారా నిరూపించవచ్చును. (పటం 6.26ను చూడండి)

AP SCERT

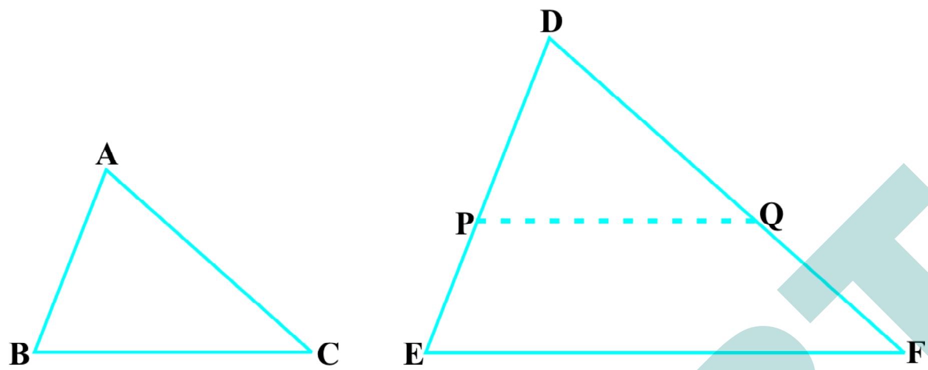


Fig. 6.26

Cut DP = AB and DQ = AC and join PQ.

It can be seen that $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ and PQ || EF (How?)

So, $\angle P = \angle E$ and $\angle Q = \angle F$.

Therefore, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

So, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (Why?)

So, BC = PQ (Why?)

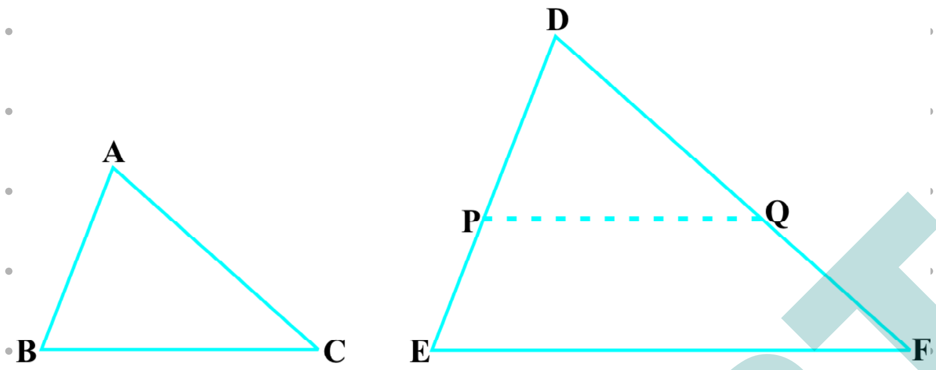
Thus, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (Why ?)

So, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$ (How ?)

Remark : You may recall that either of the two conditions namely, (i) corresponding angles are equal and (ii) corresponding sides are in the same ratio is not sufficient for two polygons to be similar. However, on the basis of Theorems 6.3 and 6.4, you can now say that in case of similarity of the two triangles, it is not necessary to check both the conditions as one condition implies the other.

Let us now recall the various criteria for congruency of two triangles learnt in Class IX. You may observe that SSS similarity criterion can be compared with the SSS congruency criterion.This suggests us to look for a similarity criterion comparable to SAS congruency criterion of triangles. For this, let us perform an activity.

Activity 6 : Draw two triangles ABC and DEF such that AB = 2 cm, $\angle A = 50°$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50°$ and DF = 6 cm (see Fig.6.27).



పటం 6.26

AB = DP మరియు AC = DQ అగునట్లు P,Qను కలుపుము.

దీనిని ఈవిధంగా కూడా చూడవచ్చు $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ మరియు $PQ \parallel EF$ (ఎందుకు?)

కావున, $\angle P = \angle E$ మరియు $\angle Q = \angle F$

$\therefore$ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

కనుక, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ఎందుకు?)

కానీ, $BC = PQ$ (ఎందుకు?)

అదేవిధంగా, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎందుకు ?)

కావున , $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ (ఎలా?)

సూచన : రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి మరియు (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (లేదా అనుపాతంలో) ఉండాలి. పై నియమాలల్లో ఏదో ఒక నియమం సరిపోదు అని చదివాము. కానీ సిద్ధాంతం 6.3 మరియు 6.4 ద్వారా త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి రెండు నియమాలు అవసరం లేదు. ఎందుకంటే ఒక నియమం నుండి మరొక నియమంను పొందవచ్చును.

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు తొమ్మిదో తరగతిలో మీరు నేర్చుకున్న వేరువేరు నియమాలను గుర్తు తెచ్చుకుందాం. భు.భు.భు సరూపకత నియమాన్ని భు.భు.భు సర్వసమానత్వ నియమముతో పోల్చవచ్చు. దీని నుండి భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమముతో పోల్చదగిన మరొక సరూపకత నియమం ఉందునని సూచిస్తుంది. దీని కొరకు క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాం.

కృత్యం 6 : AB = 2 సెం.మీ, $\angle A = 50°$, AC = 4 సెం.మీ ఉండునట్లు ΔABC ని DE = 3 సెం.మీ $\angle D = 50°$ మరియు DF = 6 సెం.మీ ఉండునట్లు రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DEF గీయుము (పటం 6.27 చూడండి).

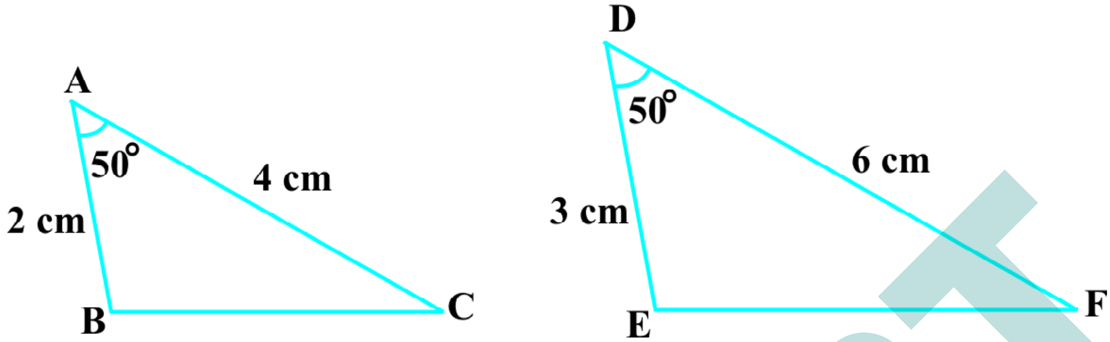


Fig. 6.27

Here, you may observe that $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (each equal to $\frac{2}{3}$) and $\angle$ A (included between the sides AB and AC) = $\angle$ D (included between the sides DE and DF). That is, one angle of a triangle is equal to one angle of another triangle and sides including these angles are in the same ratio (i.e., proportion). Now let us measure $\angle$ B, $\angle$ C, $\angle$ E and $\angle$ F.

You will find that $\angle$ B = $\angle$ E and $\angle$ C = $\angle$ F. That is, $\angle$ A = $\angle$ D, $\angle$ B = $\angle$ E and $\angle$ C = $\angle$ F. So, by AAA similarity criterion, Δ ABC ~ Δ DEF. You may repeat this activity by drawing several pairs of such triangles with one angle of a triangle equal to one angle of another triangle and the sides including these angles are proportional. Everytime, you will find that the triangles are similar. It is due to the following criterion of similarity of triangles:

Theorem 6.5 : *If one angle of a triangle is equal to one angle of the other triangle and the sides including these angles are proportional, then the two triangles are similar.*

This criterion is referred to as the SAS (Side–Angle–Side) similarity criterion for two triangles.

As before, this theorem can be proved by taking two triangles ABC and DEF such that $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) and $\angle$ A = $\angle$ D (see Fig. 6.28). Cut DP = AB, DQ = AC and join PQ.

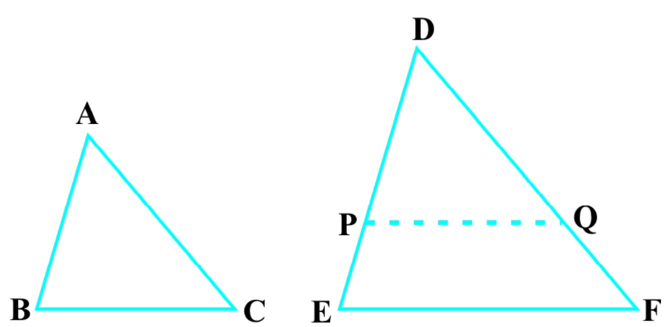
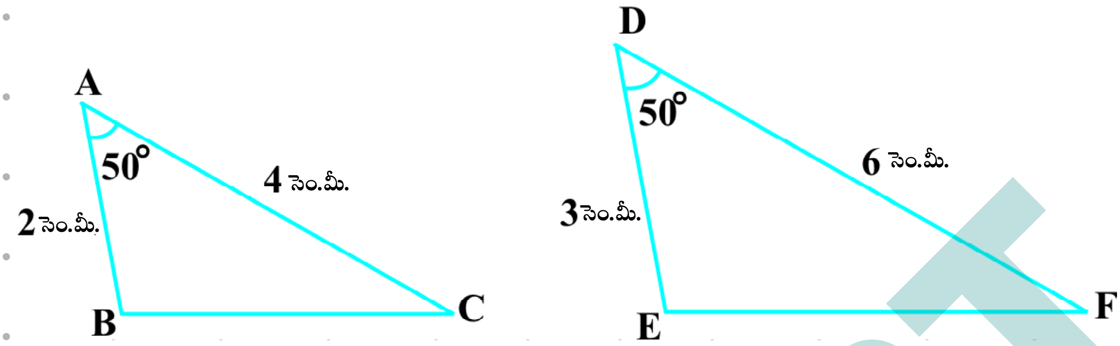


Fig. 6.28

AP SCERT



పటం 6.27

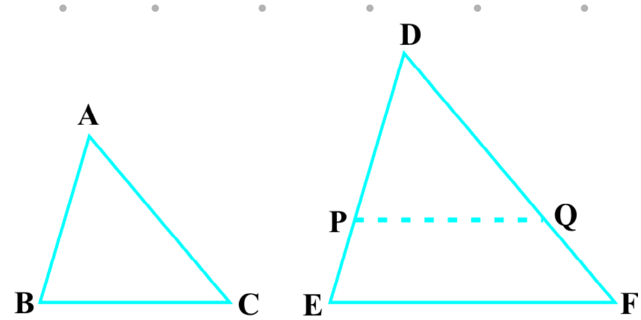
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ మరియు $\angle A = \angle D$ అని పరిశీలించుము. (ఇక్కడ AB మరియు ACల మధ్య $\angle A$, DE మరియు DFల మధ్య $\angle D$ కలవు అనగా ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణం ఇప్పుడు $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ మరియు $\angle F$ లను మరొక త్రిభుజంలోని మరొక కోణంకు దానిని కలిగి ఉన్న ఈ భుజాల నిష్పత్తి ఒకేవిధంగా (అనగా అనుపాతంగా) ఉంటుంది. కొలువుము.

$\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ అని మీరు కనుగొంటారు. అప్పుడు $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ కో.కో.కో. సరూపత నియమము ప్రకారం $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. ఒక త్రిభుజంలో కోణము మరొక త్రిభుజములోని కోణానికి సమానముగా సమాన కోణాన్ని కలిగిన అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా ఉండునట్లు వివిధ కొలతలు గల త్రిభుజాలను తీసుకుని, ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. ప్రతిసారి, ఆ త్రిభుజాలు సరూపాలని మీరు కనుగొంటారు. దీని నుంచి త్రిభుజాల సరూపతకు సంబంధించి క్రింది నియమం వస్తుంది.

సిద్ధాంతం 6.5 : *ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజంలోని కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి ఉన్నా భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.*

ఈ నియమాన్ని రెండు త్రిభుజాల భు.కో.భు (భుజము– కోణము – భుజము) సరూపకత నియమముగా చెబుతాము.

గతంలో చెప్పినట్లు, రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DEFలలో $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) మరియు $\angle A = \angle D$ లను తీసుకోవడం ద్వారా ఈ సిద్ధాంతంను నిరూపించ వచ్చును. (పటం 6.28 చూడండి). $DP = AB$, $DQ = AC$ అగునట్లుగా P,Q లను కలుపుము.



పటం 6.28

Now, $PQ \parallel EF$ and $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (How ?)

So, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ and $\angle C = \angle Q$

Therefore, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (Why?)

We now take some examples to illustrate the use of these criteria.

Example 4 : In Fig. 6.29, if $PQ \parallel RS$, prove that $\Delta POQ \sim \Delta SOR$.

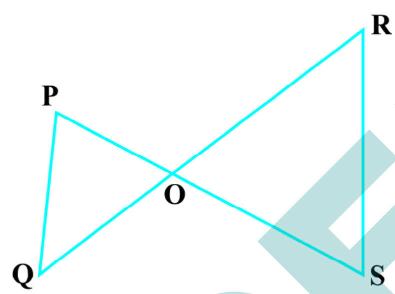


Fig. 6.29

Solution : $PQ \parallel RS$ (Given)

So, $\angle P = \angle S$ (Alternate angles)

and $\angle Q = \angle R$

Also, $\angle POQ = \angle SOR$ (Vertically opposite angles)

Therefore, $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA similarity criterion)

Example 5 : Observe Fig. 6.30 and then find $\angle P$.

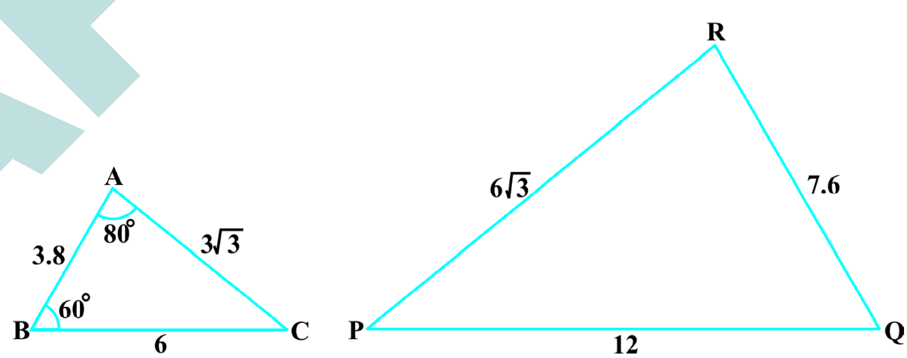


Fig. 6.30

Solution : In ΔABC and ΔPQR,

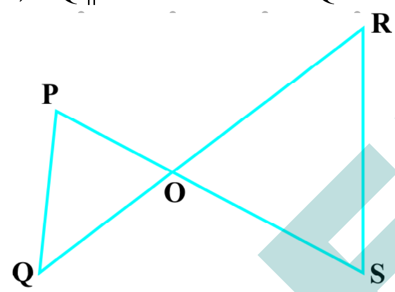
ఇప్పుడు, PQ $\|$EF మరియు $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎలా ?)

కనుక, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ మరియు $\angle C = \angle Q$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ఎందుకు?)

ఈ నియమాన్ని వివరించడానికి ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాము.

ఉదాహరణ 4 : ఇచ్చిన పటంలో 6.29లో, PQ $\|$ RS అయిన $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ అని నిరూపించండి.



పటం 6.29

సాధన : PQ $\|$ RS (దత్తాంశము)

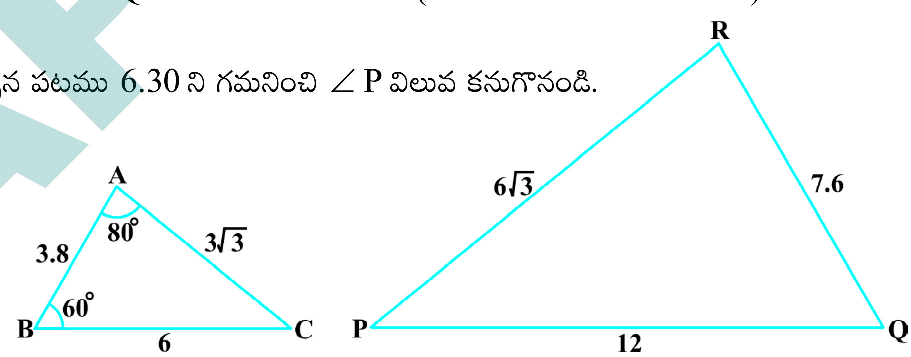
కావున, $\angle P = \angle S$ (ఏకాంతర కోణాలు)

మరియు $\angle Q = \angle R$

ఇంకా $\angle POQ = \angle SOR$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\therefore$ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (కో.కో.కో. సరూపకత నియమం)

ఉదాహరణ 5 : ఇచ్చిన పటము 6.30 ని గమనించి $\angle P$ విలువ కనుగొనండి.



పటం 6.30

సాధన : ΔABC మరియు ΔPQR లలో,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

That is, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

So, $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS similarity)

Therefore, $\angle C = \angle P$ (Corresponding angles of similar triangles)

But $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (Angle sum property)

$= 180° - 80° - 60° = 40°$

So, $\angle P = 40°$

Example 6 : In Fig. 6.31,

$OA . OB = OC . OD.$

Show that $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$.

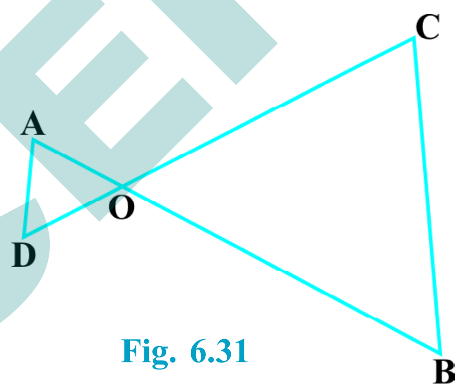


Fig. 6.31

Solution : $OA . OB = OC . OD$ (Given)

So, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

Also, we have $\angle AOD = \angle COB$ (Vertically opposite angles) (2)

Therefore, from (1) and (2), $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS similarity criterion)

So, $\angle A = \angle C$ and $\angle D = \angle B$

(Corresponding angles of similar triangles)

Example 7 : A girl of height 90 cm is walking away from the base of a lamp-post at a speed of 1.2 m/s. If the lamp is 3.6 m above the ground, find the length of her shadow after 4 seconds.

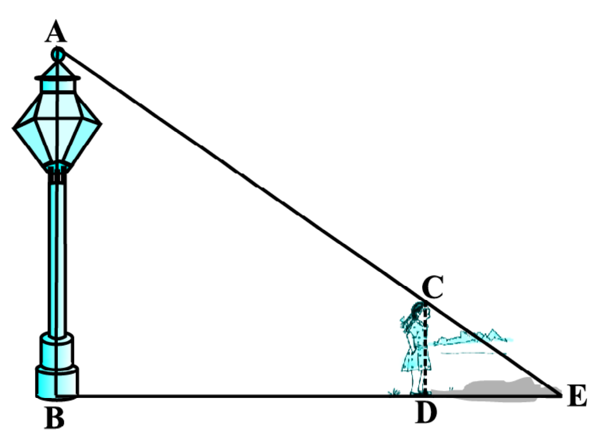


Fig. 6.32

Solution : Let AB denote the lamp-post and CD the girl after walking for 4 seconds away from the lamp-post (see Fig. 6.32).

From the figure, you can see that DE is the shadow of the girl. Let DE be x metres.

$$\frac{AB}{RQ}=\frac{3.8}{7.6}=\frac{1}{2}, \frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \text{ మరియు } \frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

అందువలన, $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta RQP$(భు.భు.భు. సరూపకత నియమము)

అందువలన, $\angle C = \angle P$ (సరూప త్రిభుజంలోని సదృశ్య కోణాలు)

కానీ $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (త్రిభుజాలలో కోణాల మొత్తం ధర్మం)

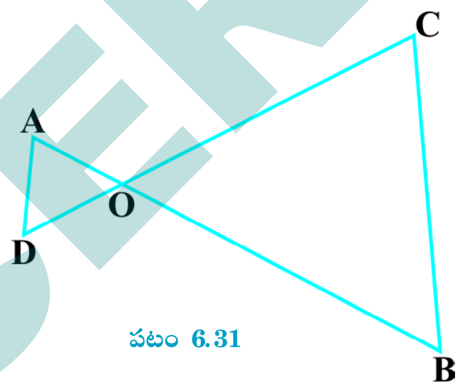
$\angle C = 180° - 80° - 60° = 40°$

$\therefore$ $\angle P = 40°$

ఉదాహరణ 6 : ఇచ్చిన పటము 6.31లో,

$OA . OB = OC . OD$ అయిన

$\angle A = \angle C$ మరియు $\angle B = \angle D$ అని చూపండి.



పటం 6.31

సాధన : $OA . OB = OC . OD$ (దత్తాంశము)

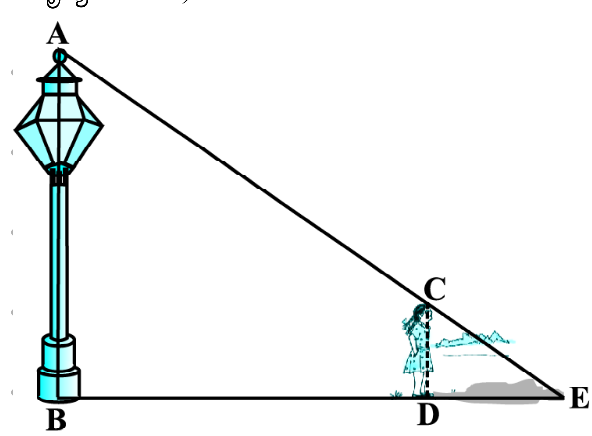
కావున $\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB}$ .... (1)

ఇంకా $\angle AOD = \angle COB$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు) .... (2)

కావున (1) మరియు (2) నుండి $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (భు.కో.భు.సరూపకత నియమము)

$\therefore$ $\angle A = \angle C$ మరియు $\angle D = \angle B$ (సరూప త్రిభుజాలలోని సదృశ్య కోణాలు)

ఉదాహరణ 7 : 90 సెం.మీ. ఎత్తుగల ఒక బాలిక దీప స్తంభం నుండి దూరముగా 1.2 మీ/సె వేగముతో నడుచుచున్నది. దీప స్తంభము ఎత్తు 3.6మీ అయినా 4 సెకండ్ల తరువాత ఏర్పడే ఆ బాలిక నీడ పొడవును కనుగొనుము.



పటం 6.32

సాధన : AB దీపస్తంభము మరియు 4 సెకండ్ల నడక తర్వాత బాలిక స్థానం CD ను సూచిస్తుంది అనుకుందాం. (పటం 6.32 చూడండి) పటము నుండి DE బాలిక నీడ పొడవును సూచిస్తుంది. DE=x మీ. అనుకొనుము.

Now, BD = 1.2 m × 4 = 4.8 m.

Note that in Δ ABE and Δ CDE,

$\angle B = \angle D$ (Each is of 90° because lamp-post as well as the girl are standing vertical to the ground)

and $\angle E = \angle E$ (Same angle)

So, Δ ABE ~ Δ CDE (AA similarity criterion)

Therefore, $$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

i.e., $$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9} \qquad \left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}\right)$$

i.e., $4.8 + x = 4x$

i.e., $3x = 4.8$

i.e., $x = 1.6$

So, the shadow of the girl after walking for 4 seconds is 1.6 m long.

Example 8 : In Fig. 6.33, CM and RN are respectively the medians of Δ ABC and Δ PQR. If Δ ABC ~ Δ PQR, prove that :

(i) Δ AMC ~ Δ PNR

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) Δ CMB ~ Δ RNQ

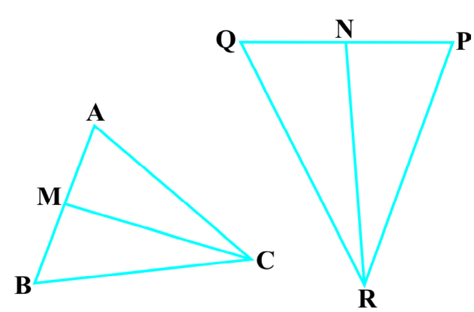


Fig. 6.33

Solution : (i) Δ ABC ~ Δ PQR (Given)

So, $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \qquad (1)$$

and $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ and $\angle C = \angle R$ (2)

But AB = 2 AM and PQ = 2 PN

(As CM and RN are medians)

So, from (1), $$\frac{2\,AM}{2\,PN} = \frac{CA}{RP}$$

ఇప్పుడు, BD = 1.2 మీ. × 4 = 4.8 మీ.

Δ ABE మరియు Δ CDE లలో,

$\angle B = \angle D$ (దీపస్తంభం మరియు బాలిక క్షితిజతలానికి 90° లంబంగా ఉండటం వలన)

మరియు $\angle E = \angle E$ (ఉమ్మడి కోణం)

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (కో.కో. సరూపకత నియమం)

అందువలన, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

అనగా, $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ (90 సెం.మీ = $\frac{90}{100}$ మీ = 0.9 మీ)

అనగా, $4.8 + x = 4x$

అనగా, $3x = 4.8$

అనగా, $x = 1.6$

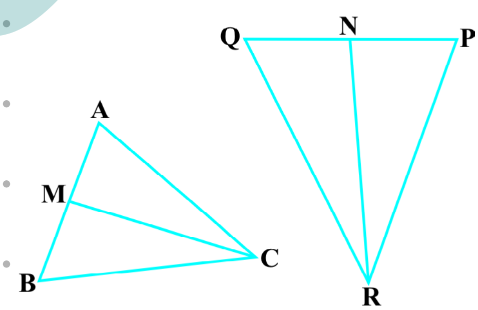
కావున, 4 సెకండ్ల నడక తర్వాత బాలిక నీడ పొడవు 1.6 మీ.

ఉదాహరణ 8 : పటం 6.33లో CM మరియు RNలు వరుసగా Δ ABC మరియు Δ PQR అనే త్రిభుజాలకు గీయబడిన మధ్యగత రేఖలు. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అయిన

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ అని నిరూపించండి.



పటం 6.33

సాధన : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (దత్తాంశము)

కావున, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ .... (1)

మరియు $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ మరియు $\angle C = \angle R$ ....(2)

కానీ, AB =2 AM మరియు PQ = 2 PN (CM మరియు RN లు మధ్యగత రేఖలు)

కనుక, (1) నుండి $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

i.e., $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

Also, $\angle MAC = \angle NPR$ [From (2)] (4)

So, from (3) and (4),

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS similarity) (5)

(ii) From (5), $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

But $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [From (1)] (7)

Therefore, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [From (6) and (7)] (8)

(iii) Again, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [From (1)]

Therefore, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [From (8)] (9)

Also, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\ BM}{2\ QN}$

i.e., $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

i.e., $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [From (9) and (10)]

Therefore, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (SSS similarity)

[**Note :** You can also prove part (iii) by following the same method as used for proving part (i).]

EXERCISE 6.3

1. State which pairs of triangles in Fig. 6.34 are similar. Write the similarity criterion used by you for answering the question and also write the pairs of similar triangles in the symbolic form :

AP SCERT

$$\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$$ ...... (3)

అలాగే, $\angle MAC = \angle NPR$ (2 నుండి) .... (4)

(3) మరియు (4) నుండి $\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (భు.కో.భు. సరూపకత నియమం) ...... (5)

(ii) (5) నుండి $$\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$$ .... (6)

కానీ (1) నుండి $$\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$$ ...... (7)

(6) మరియు (7) ల నుండి $$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$$ ...... (8)

(iii) మరలా (1) నుండి $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

కావున (8) నుండి $$\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$$ ..... (9)

మరియు, $$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\ BM}{2\ QN}$$

అనగా, $$\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$$ .... (10)

(9) మరియు (10) నుండి $$\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$$

$\therefore$ $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (భు.భు.భు. సరూపకత నియమం)

[**గమనిక:** ప్రశ్నలోని (i)వ భాగాన్ని నిరూపించిన విధంగానే (iii) వ భాగాన్ని కూడా నిరూపించవచ్చు.]

అభ్యాసం 6.3

1. పటము 6.34లో ఇవ్వబడిన త్రిభుజాల జతలలో ఏవి సరూపాలో తెలపండి. సరూపాలయితే ఏ నియమం ఆధారంగానో వివరిస్తూ త్రిభుజాల సరూపకతను గుర్తులను ఉపయోగించి వ్రాయండి.

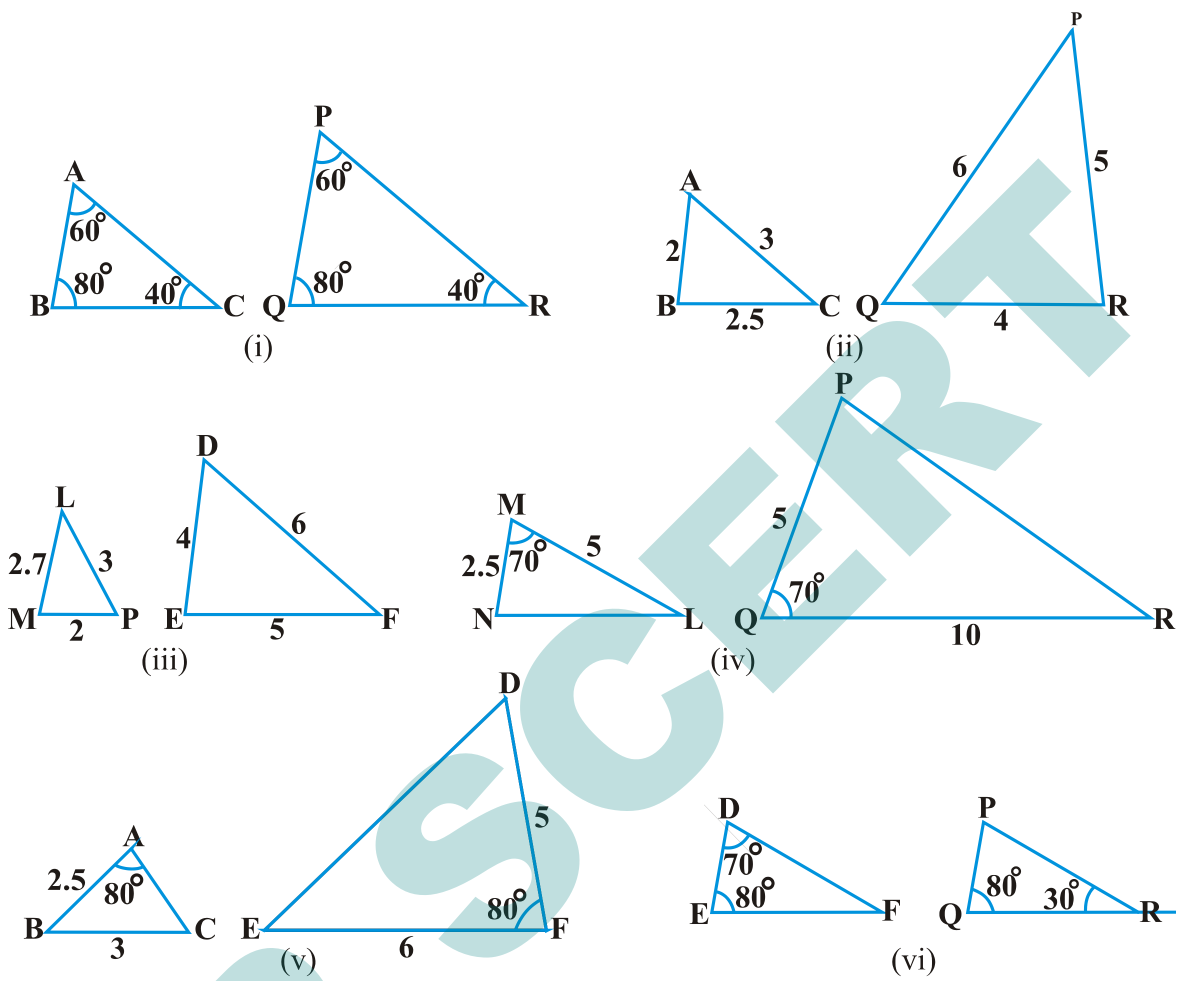


Fig. 6.34

AP SCERT

2. In Fig. 6.35, Δ ODC ~ Δ OBA, ∠ BOC = 125° and ∠ CDO = 70°. Find ∠ DOC, ∠ DCO and ∠ OAB.

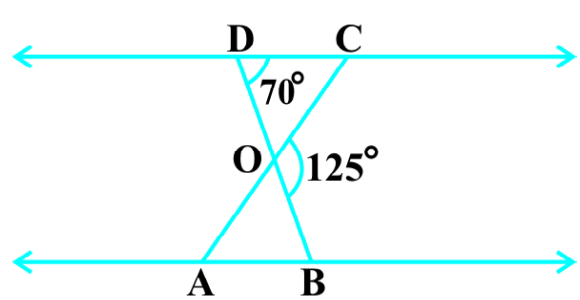
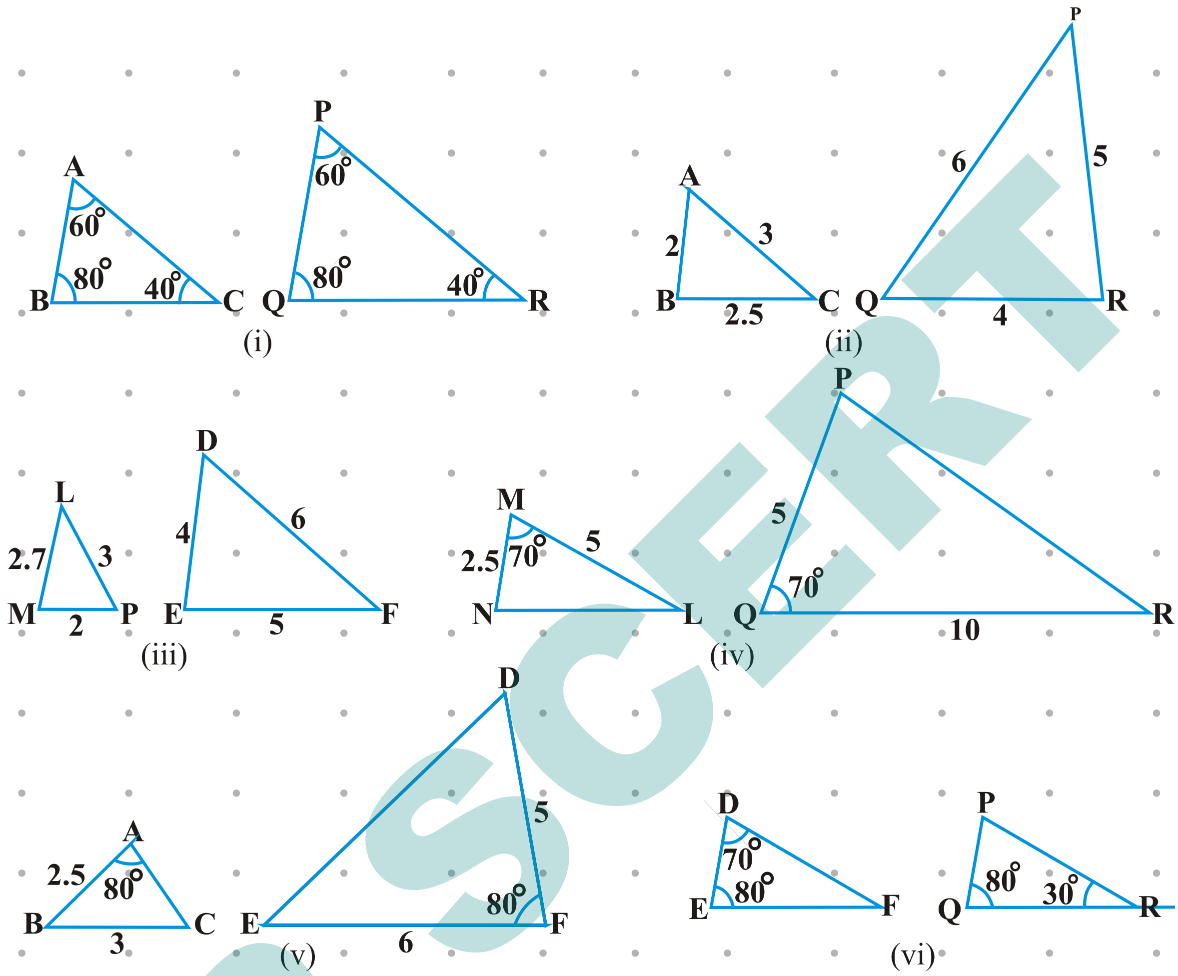


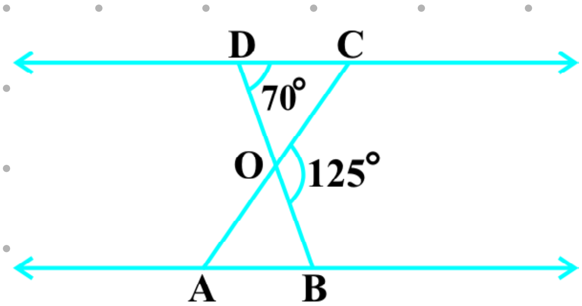
Fig. 6.35

3. Diagonals AC and BD of a trapezium ABCD with AB || DC intersect each other at the point O. Using a similarity criterion for two triangles, show that $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.



పటం 6.34

2. ఇచ్చిన పటం 6.35లో $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ మరియు $\angle CDO = 70°$. అయిన $\angle DOC$, $\angle DCO$ మరియు $\angle OAB$లను కనుగొనుము.



పటం 6.35

3. ట్రెపీజియం ABCD లో $AB \parallel DC$. కర్ణములు AC మరియు BD లు బిందువు 'O' వద్ద పరస్పరం ఖండించుకొనును. త్రిభుజముల సరూప నియమాలను ఉపయోగించుకొని $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ అని చూపండి.

4. In Fig. 6.36, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ and $\angle 1 = \angle 2$. Show that $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.

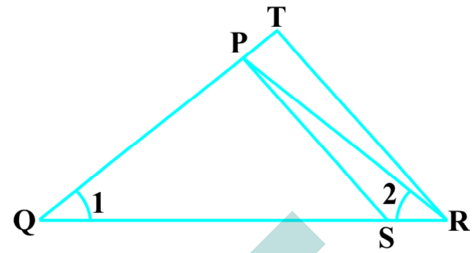


Fig. 6.36

5. S and T are points on sides PR and QR of ΔPQR such that $\angle P = \angle RTS$. Show that $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$.

6. In Fig. 6.37, if $\Delta ABE \cong \Delta ACD$, show that $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

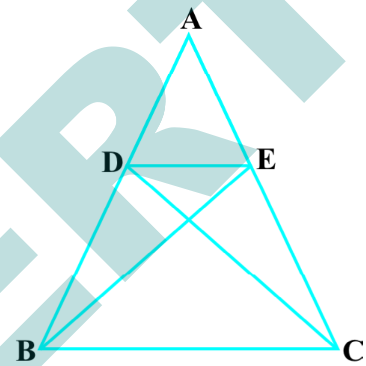


Fig. 6.37

7. In Fig. 6.38, altitudes AD and CE of ΔABC intersect each other at the point P. Show that:

   (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

   (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

   (iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

   (iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

8. E is a point on the side AD produced of a parallelogram ABCD and BE intersects CD at F. Show that $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

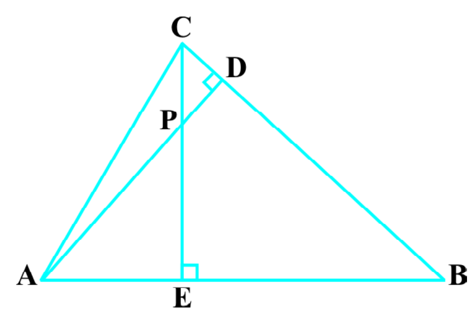


Fig. 6.38

9. In Fig. 6.39, ABC and AMP are two right triangles, right angled at B and M respectively. Prove that:

   (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

   (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

10. CD and GH are respectively the bisectors of $\angle ACB$ and $\angle EGF$ such that D and H lie on sides AB and FE of ΔABC and ΔEFG respectively. If $\Delta ABC \sim \Delta FEG$, show that:

   (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

   (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

   (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

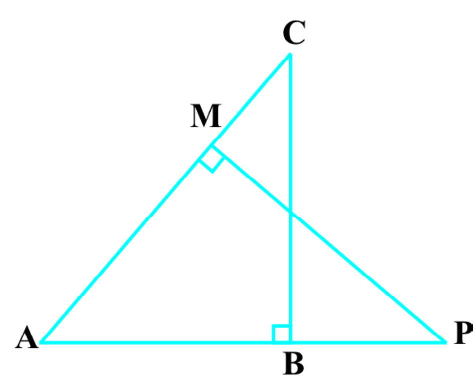
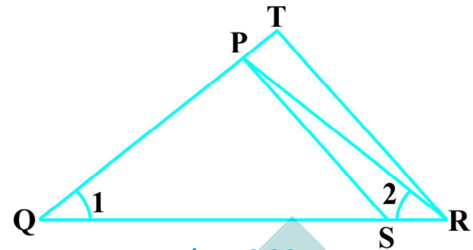


Fig. 6.39

AP SCERT

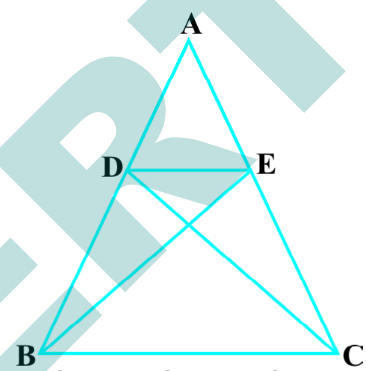
4. ఇచ్చిన పటం 6.36 లో, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ మరియు $\angle 1 = \angle 2$ అయిన $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ అని చూపుము.



పటం 6.36

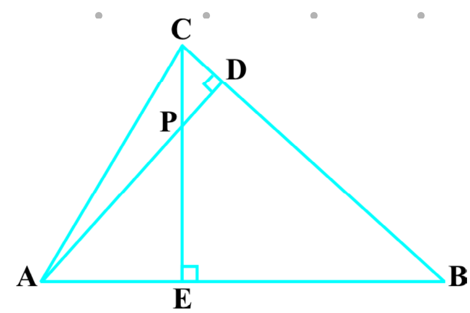
5. ΔPQR లో $\angle P = \angle RTS$ అయ్యేవిధంగా PR మరియు QR ల పై గల రెండు బిందువులు S మరియు T అయిన $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ అని చూపుము.

6. ఇచ్చిన పటం 6.37లో $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ అయిన $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ అని చూపుము.



పటం 6.37

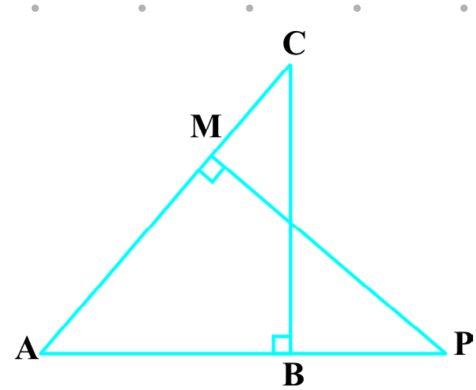
7. పటం 6.38లో చూపినట్లు ΔABC లో ఉన్నతులు AD మరియు CEలు P వద్ద పరస్పరం ఖండించుకొనిన క్రింది త్రిభుజాలు సరూపాలు అని చూపుము.
(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$ (iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$



పటం 6.38

8. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో, BE, CDను F వద్ద ఖండించునట్లు ADని E వరకు పొడిగించిన, $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ అని చూపుము.

9. పటం 6.39 లో చూపిన విధంగా ΔABC మరియు ΔAMPలు రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు. వీటిలో లంబకోణములు వరుసగా B మరియు M బిందువుల వద్ద కలవు అయిన
(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$
(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ అని నిరూపించండి.



పటం 6.39

10. ΔABC మరియు ΔEFG త్రిభుజాలలో AB మరియు FE భుజాలపై D మరియు H బిందువులు వరుసగా ఏర్పడునట్లు $\angle ACB$ మరియు $\angle EGF$ లకు గీసిన కోణ సమద్విఖండన రేఖలు వరుసగా CD మరియుGHలు. ఇంకా $\Delta ABC \sim \Delta FEG$అయిన
(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$
(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$అని చూపుము.

AP SCERT

11. In Fig. 6.40, E is a point on side CB produced of an isosceles triangle ABC with AB = AC. If AD ⊥ BC and EF ⊥ AC, prove that Δ ABD ~ Δ ECF.

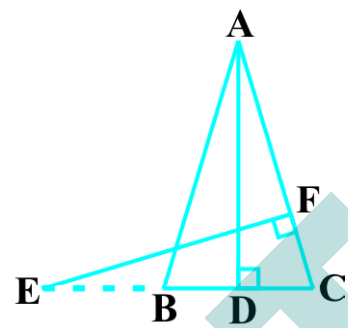


Fig. 6.40

12. Sides AB and BC and median AD of a triangle ABC are respectively proportional to sides PQ and QR and median PM of Δ PQR (see Fig. 6.41). Show that Δ ABC ~ Δ PQR.

13. D is a point on the side BC of a triangle ABC such that ∠ ADC = ∠ BAC. Show that CA^2 = CB.CD.

14. Sides AB and AC and median AD of a triangle ABC are respectively proportional to sides PQ and PR and median PM of another triangle PQR. Show that Δ ABC ~ Δ PQR.

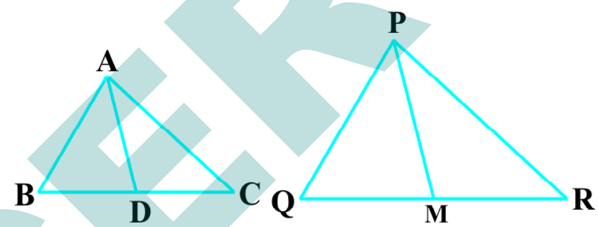


Fig. 6.41

15. A vertical pole of length 6 m casts a shadow 4 m long on the ground and at the same time a tower casts a shadow 28 m long. Find the height of the tower.

16. If AD and PM are medians of triangles ABC and PQR, respectively where Δ ABC ~ Δ PQR, prove that $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$.

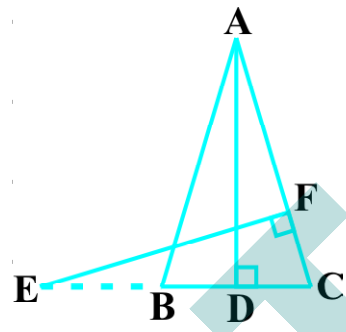
6.5 Summary

In this chapter you have studied the following points :

1. Two figures having the same shape but not necessarily the same size are called similar figures.
2. All the congruent figures are similar but the converse is not true.
3. Two polygons of the same number of sides are similar, if (i) their corresponding angles are equal and (ii) their corresponding sides are in the same ratio (i.e., proportion).
4. If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides in distinct points, then the other two sides are divided in the same ratio.
5. If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, then the line is parallel to the third side.
6. If in two triangles, corresponding angles are equal, then their corresponding sides are in the same ratio and hence the two triangles are similar (AAA similarity criterion).
7. If in two triangles, two angles of one triangle are respectively equal to the two angles of the other triangle, then the two triangles are similar (AA similarity criterion).

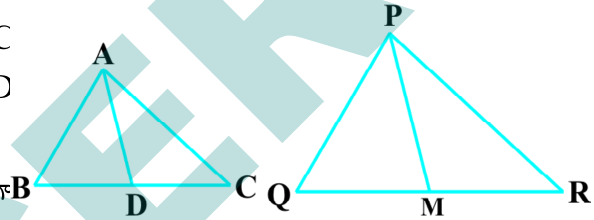
AP SCERT

11. పటం 6.40 లో చూపినట్లు AB = AC గా గల సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AB = AC మరియు AD ⊥ BC మరియు EF ⊥ AC అయ్యే విధంగా CB ని E వరకు పొడిగించగా, Δ ABD ~ Δ ECF అని నిరూపించండి.



పటం 6.40

12. ఇచ్చిన పటం ΔABCలోని భుజాలు AB, BC మరియు మధ్యగత రేఖ AD లకు వరుసగా Δ PQRలో భుజాలు PQ, QR మరియు మధ్యగత రేఖ PMలు అనుపాతంలో ఉన్న, Δ ABC ~ Δ PQR అని చూపుము (పటం 6.41 చూడండి).



పటం 6.41

13. ∠ ADC = ∠ BAC అయ్యే విధంగా ΔABCలో BC భుజంపై ఒక బిందువు D కలదు అయిన $CA^2 = CB.CD$ అని చూపుము.

14. ΔABC లోని భుజాలు AB, AC మధ్యగత రేఖ AD వరుసగా Δ PQRలో భుజాలు PQ మరియు PR మరియు మధ్యగత రేఖ PMలు అనుపాతంలో ఉన్న, Δ ABC ~ Δ PQR అని చూపుము.

15. నిటారుగా ఉన్న 6 మీ. పొడవు గల ఒక స్తంభం 4 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరిచిన, అదే సమయంలో 28 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరిచే భవనం ఎత్తు ఎంత?

16. AD మరియు PMలు వరుసగా ΔABC మరియు Δ PQR లలో మధ్యగత రేఖలు మరియు Δ ABC ~ Δ PQR అయిన $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ అని నిరూపించుము.

6.5 సారాంశం

మనం ఈ అధ్యాయములో, క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నాము :

1. ఒకే ఆకారం కలిగిఉండి ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉండనవసరం లేని పటాలను సరూప పటాలు అంటారు.
2. అన్ని సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు కానీ విపర్యయం సత్యము కాదు.
3. సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి. మరియు (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండాలి. (అనుపాతంలో ఉండాలి).
4. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.
5. ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా నుండును.
6. రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా ఉంటాయి. (అనుపాతంలో ఉంటాయి) ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు (కో .కో.కో.సరూపకత) అగును.
7. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (కో.కో.సరూపకత) అగును.

AP SCERT

8. If in two triangles, corresponding sides are in the same ratio, then their corresponding angles are equal and hence the triangles are similar (SSS similarity criterion).
9. If one angle of a triangle is equal to one angle of another triangle and the sides including these angles are in the same ratio (proportional), then the triangles are similar (SAS similarity criterion).

A NOTE TO THE READER

If in two right triangles, hypotenuse and one side of one triangle are proportional to the hypotenuse and one side of the other triangle, then the two triangles are similar. This may be referred to as the RHS Similarity Criterion.

If you use this criterion in Example 2, Chapter 8, the proof will become simpler.

AP SCERT

8. రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజంలోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో ఉన్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము. ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.భు.భు.సరూపకత) అగును.

9. ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి ఉన్న భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (అనుపాతంలో) ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.కో.భు. సరూపకత) అగును.

పాఠకులకు ఒక గమనిక

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజంలోని కర్ణము మరియు ఒక భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని కర్ణము మరియు ఒక భుజమునకు అనుపాతంలో ఉన్న, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. దీనిని లం.క. భు. (RHS) సరూపకత నియమంగా సూచిస్తాం.

ఈ నియమాన్ని అధ్యాయం 8 లో ఉదాహరణ 2 వ సమస్యకు వర్తింప చేసిన సాధన సులభం అగును.

AP SCERT

L1L8B1

7 COORDINATE GEOMETRY

7.1 Introduction

In Class IX, you have studied that to locate the position of a point on a plane, we require a pair of coordinate axes. The distance of a point from the y-axis is called its ***x*-coordinate**, or **abscissa**. The distance of a point from the x-axis is called its ***y*-coordinate**, or **ordinate**. The coordinates of a point on the x-axis are of the form $(x, 0)$, and of a point on the y-axis are of the form $(0, y)$.

Here is a play for you. Draw a set of a pair of perpendicular axes on a graph paper. Now plot the following points and join them as directed: Join the point A(4, 8) to B(3, 9) to C(3, 8) to D(1, 6) to E(1, 5) to F(3, 3) to G(6, 3) to H(8, 5) to I(8, 6) to J(6, 8) to K(6, 9) to L(5, 8) to A. Then join the points P(3.5, 7), Q (3, 6) and R(4, 6) to form a triangle. Also join the points X(5.5, 7), Y(5, 6) and Z(6, 6) to form a triangle. Now join S(4, 5), T(4.5, 4) and U(5, 5) to form a triangle. Lastly join S to the points (0, 5) and (0, 6) and join U to the points (9, 5) and (9, 6). What picture have you got?

Also, you have seen that a linear equation in two variables of the form $ax + by + c = 0$, (a, b are not simultaneously zero), when represented graphically, gives a straight line. Further, in Chapter 2, you have seen the graph of $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, is a parabola. In fact, coordinate geometry has been developed as an algebraic tool for studying geometry of figures. It helps us to study geometry using algebra, and understand algebra with the help of geometry. Because of this, coordinate geometry is widely applied in various fields such as physics, engineering, navigation, seismology and art!

In this chapter, you will learn how to find the distance between the two points whose coordinates are given, and to find the area of the triangle formed by three given points. You will also study how to find the coordinates of the point which divides a line segment joining two given points in a given ratio.

AP SCERT

T7B4E2

నిరూపక జ్యామితి 7

7.1 పరిచయం

ఒక తలంనందు బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించటం కోసం ఒక జత నిరూపక అక్షాలు అవసరమని 9వ తరగతిలో మీరు నేర్చుకున్నారు. y-అక్షం నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని **x – నిరూపకం** (లేదా) **ఆబ్సిస్సా** అని అంటారు. x-అక్షం నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని **y – నిరూపకం** (లేదా) **ఆర్డినేట్** అని అంటారు. x-అక్షం పై ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(x, 0)$ మరియు y-అక్షంపై ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0, y)$ రూపంలో వుంటాయి.

ఇక్కడ మీకోసం ఒక ఆట ఇవ్వబడింది. ఒక గ్రాఫ్ పేపర్ పై ఒక జత లంబ అక్షాలను గీయండి. ఇప్పుడు, మీకు ఇవ్వబడిన బిందువులను దానిపై గుర్తించి, సూచించిన విధంగా వాటిని కలపండి. బిందువు A(4,8) నుండి B(3,9) దాని నుండి C(3,8) దాని నుండి D (1,6) దాని నుండి E(1,5) దాని నుండి F(3,3) దాని నుండి G(6,3) దాని నుండి H(8,5) దాని నుండి I (8,6) దాని నుండి J(6,8) దాని నుండి K(6,9) దాని నుండి L(5,8) దాని నుండి A కి కలపాలి. త్రిభుజం ఏర్పరచడానికి ఇవ్వబడిన బిందువులు P(3.5,7), Q (3,6) మరియు R(4,6) లను ఇప్పుడు కలపండి. ఇంకొక త్రిభుజం ఏర్పరచడానికి, ఇవ్వబడిన బిందువులు X(5.5,7), Y(5,6) మరియు Z(6,6) లను కలపండి. మరొక త్రిభుజం ఏర్పరచడానికి ఇవ్వబడిన బిందువులు S(4,5), T(4.5,4) మరియు U(5,5) లను కలపండి. చివరిగా Sను బిందువులు (0,5) మరియు (0,6) లకు మరియు Uను బిందువులు (9,5) మరియు (9,6) లకు కలపండి. మీరు ఏ చిత్రాన్ని పొందారు?

రెండు చరరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణం $ax + by + c = 0$, (a, bలు ఏక కాలంలో సున్నా కావు) గ్రాఫ్ రూపంలో సూచిస్తే ఒక సరళ రేఖను పొందుతాం. $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ అనేది ఒక పరావలయాన్ని సూచిస్తుందని 2వ అధ్యాయంలో చూశాం. ఇంకా నిరూపక జ్యామితి అనేది బీజీయ గణిత సాధనంగా రేఖా గణిత చిత్రాలను ఆధారంగా చేసుకొని అభివృద్ధి చెందిందని చెప్పవచ్చు. బీజీయ గణితాన్ని ఉపయోగించి జ్యామితిని అధ్యయనం చేయడం మరియు జ్యామితిని ఉపయోగించి బీజీయ గణితం అర్థం చేసుకోవడం జరిగింది. అందువలన, ఈ నిరూపక జ్యామితి అనేది చాల విస్తారంగా, భౌతికశాస్త్రం, ఇంజనీరింగ్, నావిగేషన్, భూకంప శాస్త్రం మరియు కళా రంగాలతోపాటు అనేక రంగాలలో విస్తృతంగా అన్వయించబడుతున్నది.

నిరూపకాలు ఇవ్వబడిన రెండు బిందువుల మధ్యదూరం ఎలా కనుక్కోవాలి మరియు ఇవ్వబడిన మూడు బిందువుల ఆధారంగా త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోవడం ఈ అధ్యాయంలో మీరు నేర్చుకుంటారు. ఇవ్వబడిన రెండు బిందువులను కలపగా ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని ఇచ్చిన నిష్పత్తి ఆధారంగా విభజించే బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనడాన్ని కూడా మీరు అధ్యయనం చేస్తారు.

AP SCERT

7.2 Distance Formula

Let us consider the following situation:

A town B is located 36 km east and 15 km north of the town A. How would you find the distance from town A to town B without actually measuring it. Let us see. This situation can be represented graphically as shown in Fig. 7.1. You may use the Pythagoras Theorem to calculate this distance.

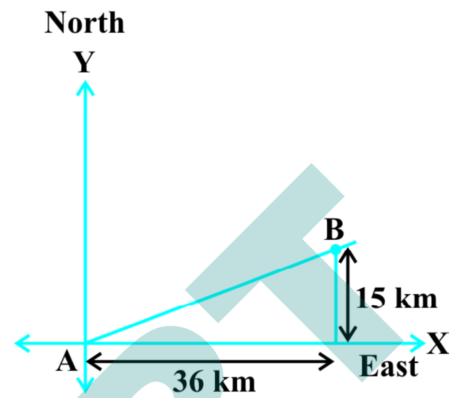


Fig. 7.1

Now, suppose two points lie on the x-axis. Can we find the distance between them? For instance, consider two points A(4, 0) and B(6, 0) in Fig. 7.2. The points A and B lie on the x-axis.

From the figure you can see that OA = 4 units and OB = 6 units.

Therefore, the distance of B from A, i.e., AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 units.

So, if two points lie on the x-axis, we can easily find the distance between them.

Now, suppose we take two points lying on the y-axis. Can you find the distance between them. If the points C(0, 3) and D(0, 8) lie on the y-axis, similarly we find that CD = 8 – 3 = 5 units (see Fig. 7.2).

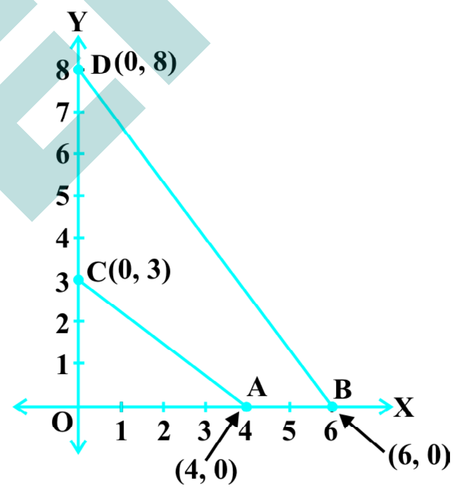


Fig. 7.2

Next, can you find the distance of A from C (in Fig. 7.2)? Since OA = 4 units and OC = 3 units, the distance of A from C, i.e., AC = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 units. Similarly, you can find the distance of B from D = BD = 10 units.

Now, if we consider two points not lying on coordinate axis, can we find the distance between them? Yes! We shall use Pythagoras theorem to do so. Let us see an example.

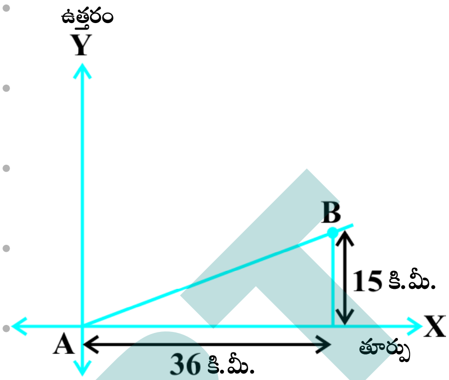
In Fig. 7.3, the points P(4, 6) and Q(6, 8) lie in the first quadrant. How do we use Pythagoras theorem to find the distance between them? Let us draw PR and QS perpendicular to the x-axis from P and Q respectively. Also, draw a perpendicular from P on QS to meet QS at T. Then the coordinates of R and S are (4, 0) and (6, 0), respectively. So, RS = 2 units. Also, QS = 8 units and TS = PR = 6 units.

AP SCERT

7.2 మధ్య దూరానికి సూత్రం

మనం ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సందర్భాన్ని పరిగణిద్దాం.

B అనే పట్టణం A అనే పట్టణానికి తూర్పుగా 36 కి.మీ. మరియు ఉత్తరంగా 15కి.మీ. దూరాలలో వుంది. పట్టణం A నుండి పట్టణం Bకి మధ్యగల దూరాన్ని వాస్తవంగా కొలవకుండానే ఎలా కొలవగలవు. ఎలానో ఇప్పుడు చూద్దాం. ఈ సందర్భాన్ని గ్రాఫ్ రూపంలో పటం 7.1లో చూపినట్లు చూపించవచ్చు. దూరాన్ని కనుగొనటానికి పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.



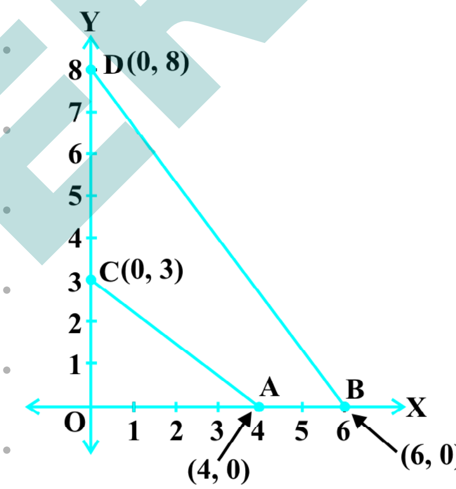
పటం 7.1

ఇప్పుడు, x–అక్షం పై రెండు బిందువుల వున్నాయనుకొందాం. మనం వాటి మధ్య దూరం కనుగొనగలమా? ఉదాహరణకి పటం 7.2లో A(4, 0) మరియు B(6, 0) అనే బిందువులను పరిగణించండి. బిందువులు A మరియు B లు x–అక్షం పై వుంటాయి.

పటం నుండి OA = 4 యూనిట్లు మరియు OB = 6 యూనిట్లని మనం గమనించవచ్చు.

అందువలన A నుండి B యొక్క దూరం, అనగా AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 యూనిట్లు.

కాబట్టి, రెండు బిందువులు x – అక్షం మీద ఉంటే, వాటి మధ్య దూరాన్ని మనం సులభంగా కనుక్కోవచ్చు.



పటం 7.2

ఇప్పుడు, ఆ రెండు బిందువులు y-అక్షం పై ఉన్నాయనుకుందాం. మీరు వాటి మధ్య గల దూరాన్ని కనుక్కోగలరా? బిందువులు C(0, 3) మరియు D(0, 8) y-అక్షం పై వుంటే, అదేవిధంగా CD = 8 – 3 = 5 యూనిట్లని మనం కనుక్కోవచ్చు (పటం 7.2 చూడండి).

తర్వాత, A నుండి C కి గల దూరాన్ని కనుక్కోగలమా (పటం 7.2 లో)? OA = 4 యూనిట్లు మరియు OC = 3 యూనిట్లు కనుక, A నుండి C కి గల దూరం, అనగా AC = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 యూనిట్లు. అదేవిధంగా, B నుండి Dకి గల దూరాన్ని మీరు కనుక్కోగలరు. BD = 10 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు ఏవైనా రెండు బిందువులు నిరూపక అక్షాలపై లేకపోతే, వాటి మధ్య దూరాన్ని మనం కనుక్కోగలమా? అవును! వాటి మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోవటానికి పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని తప్పక ఉపయోగించాలి. ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం.

పటం 7.3లో బిందువులు P(4, 6) మరియు Q(6,8)లు మొదటి పాదంలో ఉన్నాయి. వాటి మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోవటానికి పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని మనం ఎలా ఉపయోగిస్తాం? x–అక్షానికి లంబంగా P మరియు Qలకు అనుగుణంగా PR మరియు QS లంబాలను గీద్దాం. అదేవిధంగా P కి లంబంగా QSను Tవద్ద కలిసేటట్లు గీయండి. అయితే R మరియు Sల నిరూపకాలు (4,0) మరియు (6, 0) లు అవుతాయి. కావున, RS = 2 యూనిట్లు. ఇంకా QS = 8 యూనిట్లు మరియు TS = PR = 6 యూనిట్లు అవుతాయి.

Therefore, QT = 2 units and PT = RS = 2 units.

Now, using the Pythagoras theorem, we have

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

So, $\quad PQ = 2\sqrt{2}$ units

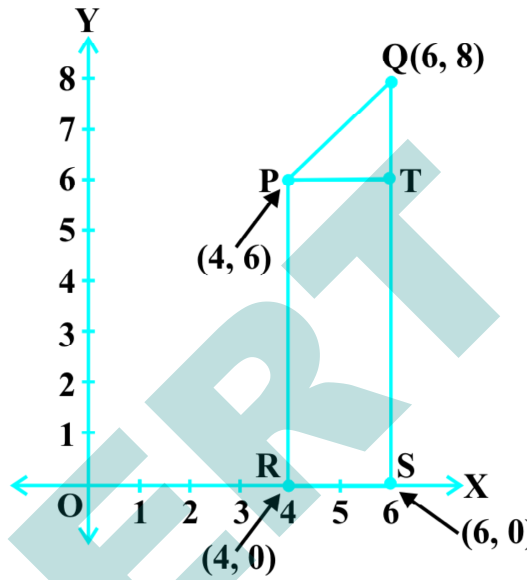


Fig. 7.3

How will we find the distance between two points in two different quadrants?

Consider the points P(6, 4) and Q(–5, –3) (see Fig. 7.4). Draw QS perpendicular to the x-axis. Also draw a perpendicular PT from the point P on QS (extended) to meet y-axis at the point R.

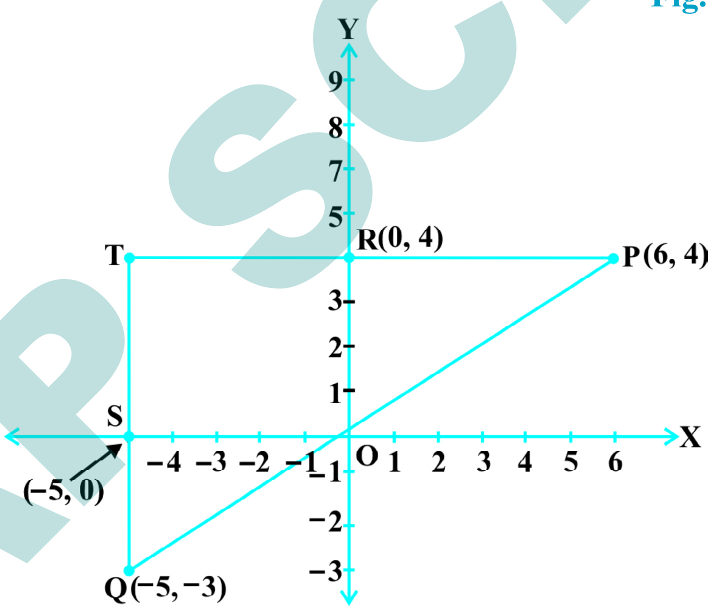


Fig. 7.4

Then PT = 11 units and QT = 7 units. (Why?)

Using the Pythagoras Theorem to the right triangle PTQ, we get

$PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ units.

AP SCERT

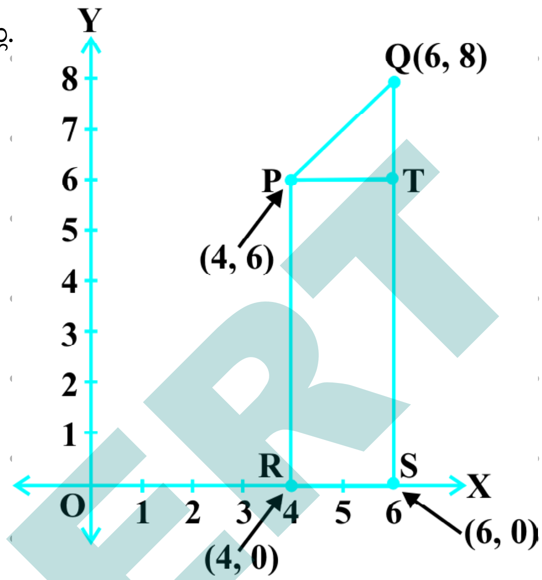
కావున, QT = 2 యూనిట్లు మరియు PT = RS = 2 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించగా,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

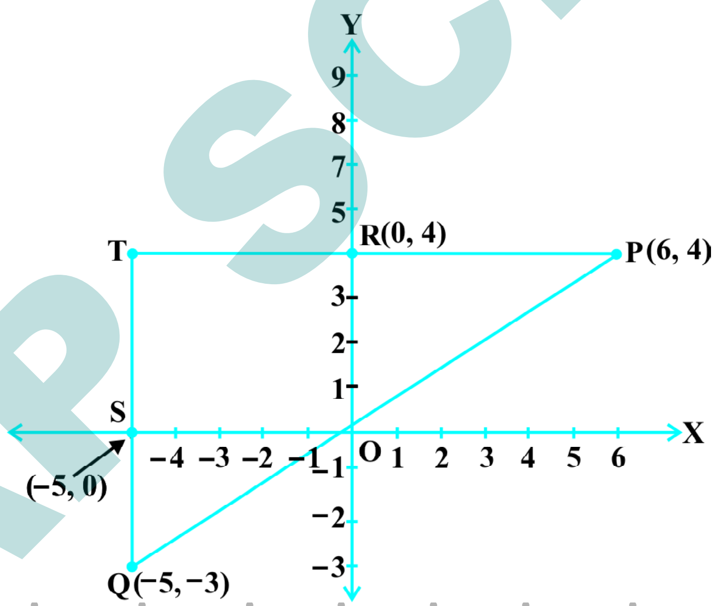
కావున, $PQ = 2\sqrt{2}$ యూనిట్లు



పటం 7.3

రెండు వేర్వేరు పాదాలలో గల రెండు బిందువుల మధ్య దూరం మనం ఎలా కనుగొనగలం?

P(6,4) మరియు Q(−5,−3) బిందువులను తీసుకోండి (పటం 7.4 చూడండి). x−అక్షానికి లంబంగా QSను గీయండి. అదేవిధంగా P నుండి లంబం PTని, y−అక్షం పై బిందువు R ను కలిసేటట్లు (పొడిగించబడిన) QSను గీయండి.



పటం 7.4

అప్పుడు PT = 11 యూనిట్లు మరియు QT = 7 యూనిట్లు (ఎందుకు?)

ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజం PTQ నందు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించగా, $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ యూనిట్లని మనం పొందుతాం.

Let us now find the distance between any two points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$. Draw PR and QS perpendicular to the x-axis. A perpendicular from the point P on QS is drawn to meet it at the point T (see Fig. 7.5).

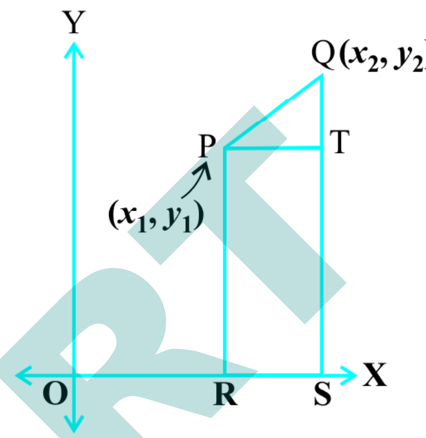


Fig. 7.5

Then, OR = x_1, OS = x_2. So, RS = $x_2 - x_1$ = PT.

Also, SQ = y_2, ST = PR = y_1. So, QT = $y_2 - y_1$.

Now, applying the Pythagoras theorem in Δ PTQ, we get

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Therefore, $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note that since distance is always non-negative, we take only the positive square root. So, the distance between the points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ is

$$\mathbf{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

which is called the **distance formula**.

Remarks :

1. In particular, the distance of a point $P(x, y)$ from the origin O(0, 0) is given by

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. We can also write, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. (Why?)

Example 1 : Do the points (3, 2), (–2, –3) and (2, 3) form a triangle? If so, name the type of triangle formed.

Solution : Let us apply the distance formula to find the distances PQ, QR and PR, where P(3, 2), Q(–2, –3) and R(2, 3) are the given points. We have

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (approx.)}$$

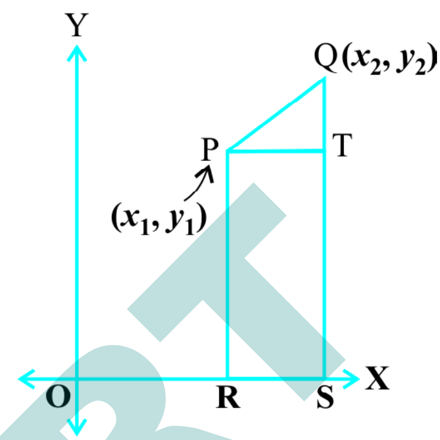
$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (approx.)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (approx.)}$$

Since the sum of any two of these distances is greater than the third distance, therefore, the points P, Q and R form a triangle.

AP SCERT

ఏవైనా రెండు బిందువులు $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ల మధ్య దూరాన్ని మనం ఇప్పుడు కనుక్కొందాం. PR మరియు QS లను x- అక్షానికి లంబంగా గీయండి. బిందువు P నుండి QS పైకి ఏదైనా లంబంను బిందువు T వద్ద కలిసేటట్లు గీయండి (పటం 7.5 ను చూడండి).



పటం 7.5

అప్పుడు, $OR = x_1$, $OS = x_2$. కనుక, $RS = x_2 - x_1 = PT$.

$SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$. కనుక, $QT = y_2 - y_1$.

ΔPTQ లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించగా,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

అందువలన, $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

దూరం ఎప్పుడూ ఋణాత్మకం కాదు కనుక, మనం ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మక వర్గమూలం తీసుకోవాలి. $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ బిందువుల మధ్య దూరం.

$$\mathbf{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

దీనినే **బిందువుల మధ్య దూరం యొక్క సూత్రం** అంటారు.

సూచనలు :

1. మూలబిందువు (0,0) నుండి $P(x, y)$ బిందువుకి గల దూరం

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. దానినే మనం ఇలా $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ అని కూడా రాయవచ్చు. (ఎందుకు?)

ఉదాహరణ 1 : (3,2), (−2,−3) మరియు (2,3) బిందువులు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయా? ఒకవేళ త్రిభుజం ఏర్పడితే అది ఏరకమో రాయండి.

సాధన : ఇక్కడ ఇవ్వబడిన బిందువులు P(3,2), Q (−2,−3) మరియు R (2,3) అయితే, మధ్య దూరం సూత్రాన్ని ఉపయోగించి PQ, QR మరియు PRల మధ్య దూరం కనుగొందాం.

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (సుమారుగా)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (సుమారుగా)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (సుమారుగా)}$$

ఏవైనా రెండు బిందువుల మధ్య దూరాల మొత్తం మూడవ బిందువు దూరానికంటే ఎక్కువ వుండవలెను. కావున, అప్పుడే బిందువులు P, Q మరియు R లు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

AP SCERT

Also, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, by the converse of Pythagoras theorem, we have $\angle P = 90°$.

Therefore, PQR is a right triangle.

Example 2 : Show that the points (1, 7), (4, 2), (–1, –1) and (– 4, 4) are the vertices of a square.

Solution : Let A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) and D(– 4, 4) be the given points. One way of showing that ABCD is a square is to use the property that all its sides should be equal and both its digonals should also be equal. Now,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

Since, AB = BC = CD = DA and AC = BD, all the four sides of the quadrilateral ABCD are equal and its diagonals AC and BD are also equal. Thereore, ABCD is a square.

Alternative Solution : We find the four sides and one diagonal, say, AC as above. Here $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. Therefore, by the converse of Pythagoras theorem, $\angle D = 90°$. A quadrilateral with all four sides equal and one angle 90° is a square. So, ABCD is a square.

Example 3 : Fig. 7.6 shows the arrangement of desks in a classroom. Ashima, Bharti and Camella are seated at A(3, 1), B(6, 4) and C(8, 6) respectively. Do you think they are seated in a line? Give reasons for your answer.

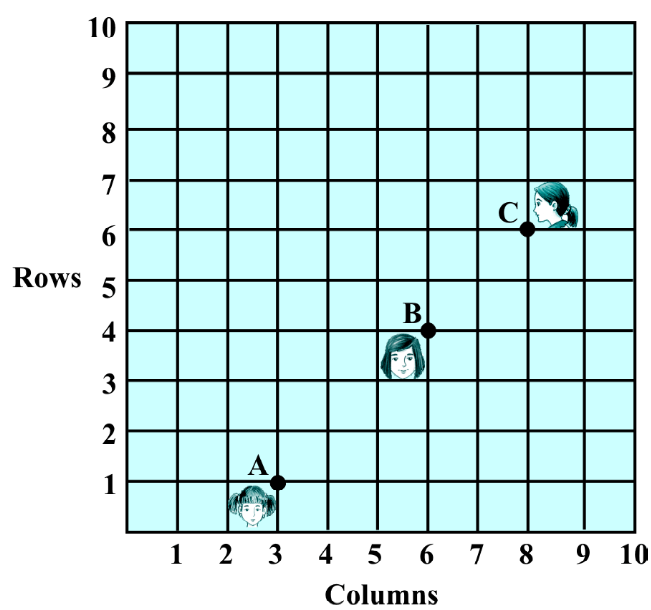


Fig. 7.6

AP SCERT

అదేవిధంగా $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యయ సిద్ధాంతం ఆధారంగా $\angle P = 90°$. కావున, PQR ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2 : (1, 7), (4, 2), (–1, –1) మరియు (–4,4) అనేవి చతురస్ర శీర్షాలని చూపండి.

సాధన : A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) మరియు D(– 4, 4) ఇచ్చిన బిందువులు అనుకోండి.

ABCD ఒక చతురస్రం అని చూపడానికి, వాటి అన్ని భుజాలు సమానం మరియు రెండు కర్ణాలు సమానం అని చూపడం ఒక విధానం. ఇప్పుడు,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

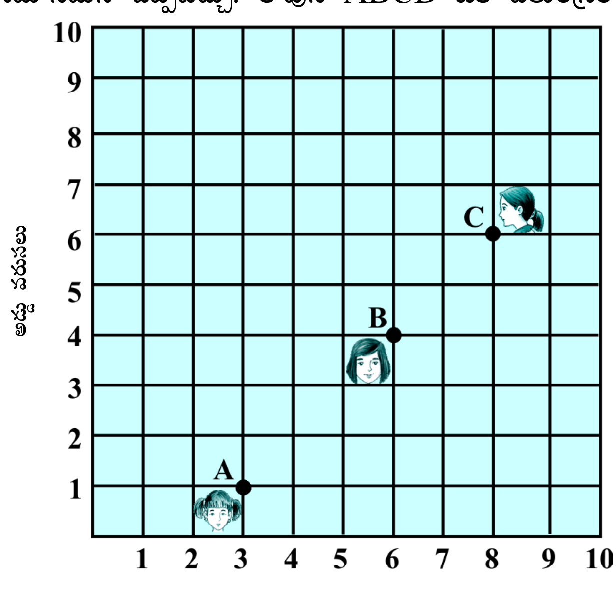
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

ఈ విధంగా AB = BC = CD = DA మరియు AC = BD. కావున, చతురస్రం ABCD లోని నాలుగు భుజాలు సమానం మరియు వాటి రెండు కర్ణాలు AC మరియు BD కూడా సమానమని చెప్పవచ్చు. కావున ABCD ఒక చతురస్రం అని చెప్పవచ్చు.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి : పైవిధంగా నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం AC పొడవు కనుక్కోండి. ఇక్కడ $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ అయితే పైథాగరస్ విపర్యయ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\angle D = 90°$. ఒక చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాలు సమానం మరియు ఒక కోణం 90° అయితే అది చతురస్రం అవుతుంది. కనుక, ABCD ఒక చతురస్రం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 3 : ఒక తరగతి గదిలో బెంచీలను అమర్చిన విధానం పటం 7.6 లో చూపబడింది. ఆషిమా, భారతి, కామెల్లాలు వరుసగా A(3, 1), B(6, 4) మరియు C(8, 6) ల వద్ద కూర్చొన్నారు. అయితే వారు ఒకే వరుసలో కూర్చొన్నారని మీరు భావిస్తున్నారా? మీ జవాబుకి కారణాలు తెలపండి.



పటం 7.6

Solution : Using the distance formula, we have

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Since, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, we can say that the points A, B and C are collinear. Therefore, they are seated in a line.

Example 4 : Find a relation between x and y such that the point (x, y) is equidistant from the points (7, 1) and (3, 5).

Solution : Let $P(x, y)$ be equidistant from the points A(7, 1) and B(3, 5).

We are given that AP = BP. So, $AP^2 = BP^2$

i.e., $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

i.e., $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

i.e., $x - y = 2$

which is the required relation.

Remark : Note that the graph of the equation $x - y = 2$ is a line. From your earlier studies, you know that a point which is equidistant from A and B lies on the perpendicular bisector of AB. Therefore, the graph of $x - y = 2$ is the perpendicular bisector of AB (see Fig. 7.7).

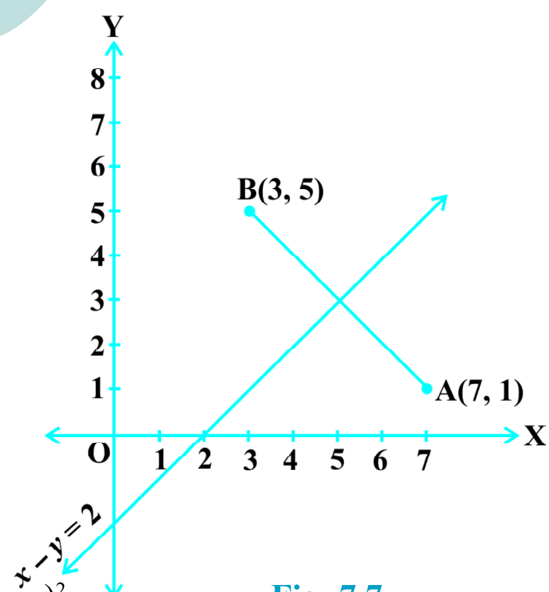


Fig. 7.7

Example 5 : Find a point on the y-axis which is equidistant from the points A(6, 5) and B(– 4, 3).

Solution : We know that a point on the y-axis is of the form $(0, y)$. So, let the point $P(0, y)$ be equidistant from A and B. Then

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

i.e., $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

i.e., $4y = 36$

i.e., $y = 9$

సాధన : మధ్య దూరం సూత్రాన్ని ఉపయోగించి,

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

కనుక $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, A, B మరియు C బిందువులు సరేఖీయాలని మనం చెప్పగలం.

కావున, వారు ఒకే వరుసలో కూర్చున్నారని చెప్పగలం.

ఉదాహరణ 4 : బిందువు $P(x, y)$ అనేది బిందువులు (7, 1) మరియు (3, 5)లకు సమాన దూరంలో ఉంటే x మరియు yల మధ్య గల సంబంధాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : బిందువు $P(x, y)$ అనేది (7, 1) మరియు B(3, 5) బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉందనుకోండి. AP = BP అని ఇవ్వబడింది. కాబట్టి $AP^2 = BP^2$ అగును.

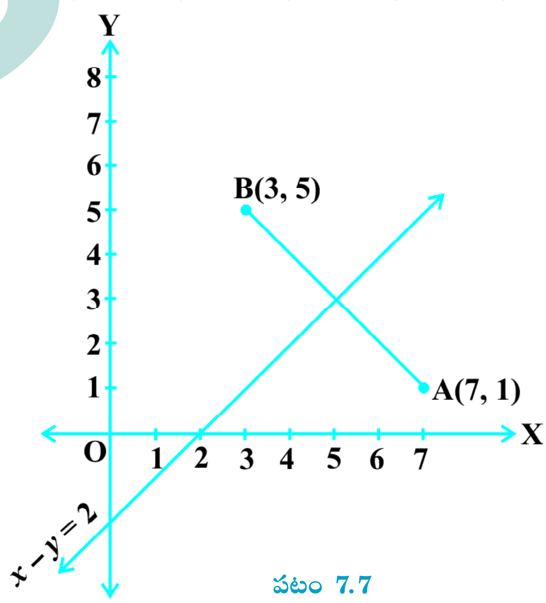
i.e., $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

i.e., $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

i.e., $x - y = 2$

ఇదే కావలసిన సంబంధం.

సూచన : గ్రాఫ్ సమీకరణం $x - y = 2$, ఒక రేఖను సూచిస్తుందని గమనించండి. ఇంతకు ముందు మీరు నేర్చుకొన్నట్లు, A మరియు Bలకు సమాన దూరంలో కల బిందువు AB యొక్క లంబరేఖపై ఉంటుంది. కావున $x - y = 2$ యొక్క గ్రాఫ్ ABని లంబ సమద్విఖండన చేస్తుంది (పటము 7.7 చూడండి).



పటం 7.7

ఉదాహరణ 5 : A (6, 5) మరియు B(–4, 3) బిందువులకు సమాన దూరంలో y – అక్షంపై ఉండే బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన : y – అక్షంపై ఉండే బిందువు $(0, y)$ రూపంలో ఉంటుందని మీకు తెలుసు. కావున బిందువు $(0, y)$ అనేది బిందువులు A మరియు Bలకు సమాన దూరంలో ఉంది.

అప్పుడు, $(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

అనగా, $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

అనగా, $4y = 36$

అనగా, $y = 9$

AP SCERT

So, the required point is (0, 9).

Let us check our solution : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

Note : Using the remark above, we see that (0, 9) is the intersection of the y-axis and the perpendicular bisector of AB.

EXERCISE 7.1

1. Find the distance between the following pairs of points :

(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) (a, b), (– a, – b)

2. Find the distance between the points (0, 0) and (36, 15). Can you now find the distance between the two towns A and B discussed in Section 7.2.

3. Determine if the points (1, 5), (2, 3) and (– 2, – 11) are collinear.

4. Check whether (5, – 2), (6, 4) and (7, – 2) are the vertices of an isosceles triangle.

5. In a classroom, 4 friends are seated at the points A, B, C and D as shown in Fig. 7.8. Champa and Chameli walk into the class and after observing for a few minutes Champa asks Chameli, "Don't you think ABCD is a square?" Chameli disagrees. Using distance formula, find which of them is correct.

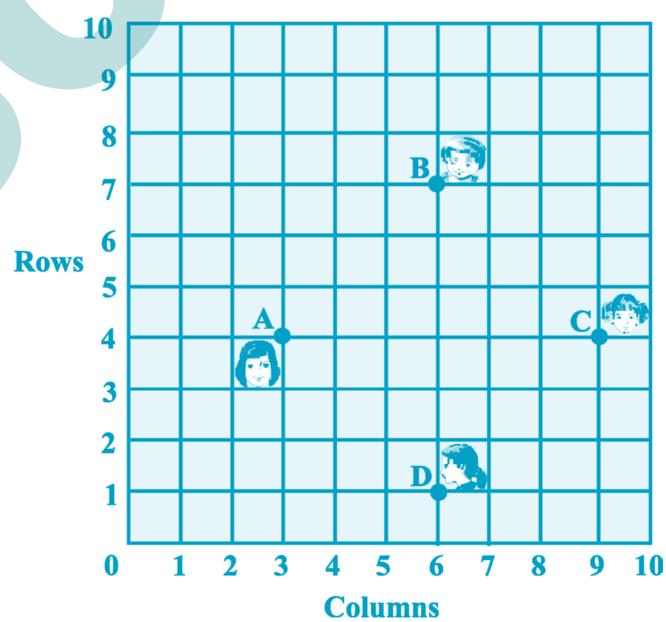


Fig. 7.8

6. Name the type of quadrilateral formed, if any, by the following points, and give reasons for your answer:

(i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. Find the point on the x-axis which is equidistant from (2, –5) and (–2, 9).

8. Find the values of y for which the distance between the points P(2, – 3) and Q(10, y) is 10 units.

AP SCERT

కనుక, కావలసిన బిందువు (0, 9).

మన సమాధానాన్ని సరిచూసుకుందాం: $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

గమనిక: పై సూచన ప్రకారం బిందువు (0, 9) అనేది y-అక్షం మరియు ABని లంబ సమద్విఖండనల ఖండన బిందువు చేస్తుంది.

అభ్యాసం 7.1

1. కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల జతల మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోండి.

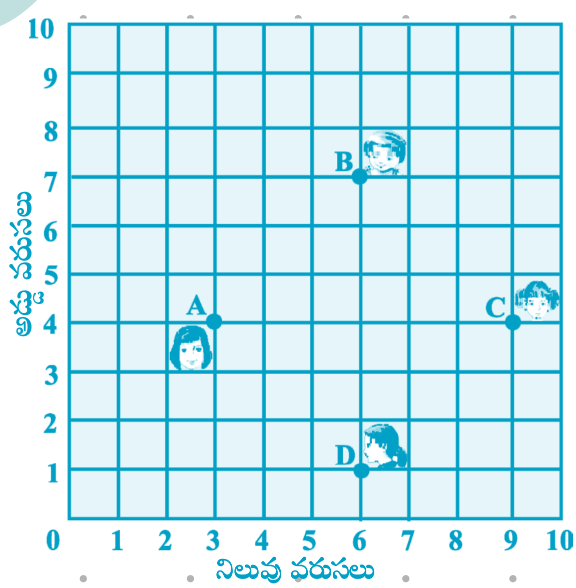
   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. బిందువులు (0, 0) మరియు (36, 15) ల మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోండి. సెక్షన్ 7.2 లో చర్చించినట్లు A మరియు B పట్టణాల మధ్య దూరాన్ని మీరు కనుక్కోగలరా?

3. బిందువులు (1, 5), (2, 3) మరియు (– 2, – 11) లు సరేఖీయాలని నిర్ధారించండి.

4. బిందువులు (5, – 2), (6, 4) మరియు (7, – 2) లు సమద్విబాహు శీర్షాలు అవుతాయో లేదో పరిశీలించండి.

5. పటంలో 7.8లో చూపినట్లు ఒక తరగతి గదిలో నలుగురు స్నేహితులు A, B, C మరియు D స్థానాల్లో కూర్చున్నారు. తరగతిలో అటూ ఇటూ తిరుగుతూ కొన్ని నిమిషాలు పరిశీలించిన తర్వాత చంప చమేలీని ఇలా అడిగింది. "ABCD ఒక చతురస్రం అవుతుందని నీవు భావించడం లేదా?" అందుకు చమేలీ ఒప్పుకోలేదు. బిందువుల మధ్య దూరమునకు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, ఎవరి సమాధానం సరైనదో తెలపండి.



పటం 7.8

6. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులతో ఏర్పడే చతుర్భుజం ఏ రకమైనదో ? దాని పేరును తెలపండి. మీ సమాధానానికి సరైన కారణం చెప్పండి.

   (i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

   (ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

   (iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. x – అక్షంపై వుంటూ బిందువులు (2, –5) మరియు (–2, 9) లకు సమాన దూరంలో గల బిందువును కనుక్కోండి.

8. బిందువులు P(2, – 3) మరియు Q (10, y) ల మధ్య దూరం 10 యూనిట్లు అయితే y విలువను కనుక్కోండి.

AP SCERT

9. If Q(0, 1) is equidistant from P(5, –3) and R(x, 6), find the values of x. Also find the distances QR and PR.

10. Find a relation between x and y such that the point (x, y) is equidistant from the point (3, 6) and (– 3, 4).

7.3 Section Formula

Let us recall the situation in Section 7.2. Suppose a telephone company wants to position a relay tower at P between A and B is such a way that the distance of the tower from B is twice its distance from A. If P lies on AB, it will divide AB in the ratio 1 : 2 (see Fig. 7.9). If we take A as the origin O, and 1 km as one unit on both the axis, the coordinates of B will be (36, 15). In order to know the position of the tower, we must know the coordinates of P. How do we find these coordinates?

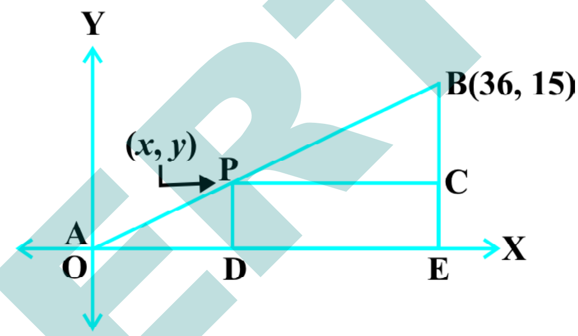


Fig. 7.9

Let the coordinates of P be (x, y). Draw perpendiculars from P and B to the x-axis, meeting it in D and E, respectively. Draw PC perpendicular to BE. Then, by the AA similarity criterion, studied in Chapter 6, Δ POD and Δ BPC are similar.

Therefore , $\frac{\text{OD}}{\text{PC}} = \frac{\text{OP}}{\text{PB}} = \frac{1}{2}$, and $\frac{\text{PD}}{\text{BC}} = \frac{\text{OP}}{\text{PB}} = \frac{1}{2}$

So, $\frac{x}{36 - x} = \frac{1}{2}$ and $\frac{y}{15 - y} = \frac{1}{2}$.

These equations give $x = 12$ and $y = 5$.

You can check that P(12, 5) meets the condition that OP : PB = 1 : 2.

Now let us use the understanding that you may have developed through this example to obtain the general formula.

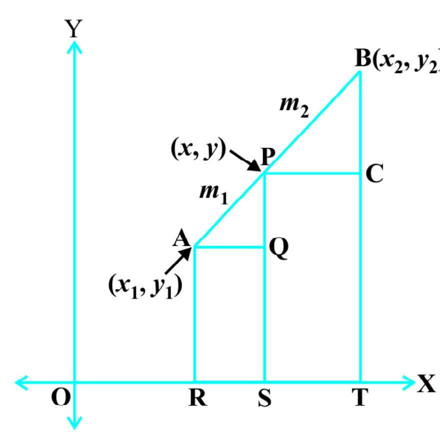


Fig. 7.10

Consider any two points A(x_1, y_1) and B(x_2, y_2) and assume that P (x, y) divides AB internally in the ratio $m_1 : m_2$, i.e., $\frac{\text{PA}}{\text{PB}} = \frac{m_1}{m_2}$ (see Fig. 7.10).

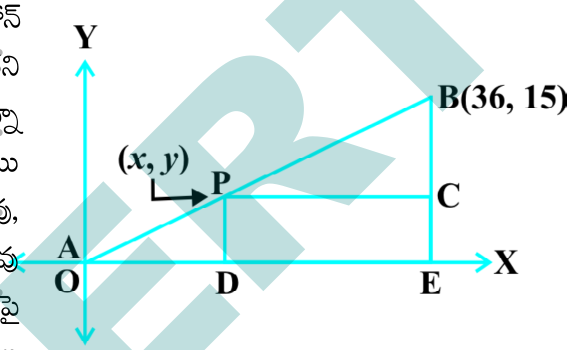
APSCERT

9. Q(0, 1) అనే బిందువు P(5, –3) మరియు R(x, 6) బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉంటే x విలువను కనుక్కోండి. QR మరియు PRల దూరాలను కూడా కనుక్కోండి.

10. (x, y) బిందువు, (3, 6) మరియు (– 3, 4) లకు సమాన దూరంలో బిందువు (x, y) ఉండేటట్లు x మరియు y ల మధ్య గల సంబంధాన్ని కనుక్కోండి.

7.3 విభజన సూత్రం

7.2 విభాగంలోని సందర్భాన్ని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఒక టెలిఫోన్ కంపెనీ టవర్‌ని A మరియు Bల మధ్య ఏర్పాటు చేయాలనుకొన్నారని అనుకొందాం. ఆ టవర్‌ను వారు A నుండి Bకి గల దూరం కన్నా రెట్టింపు దూరంలో P నుండి B మధ్య వుండే విధంగా ఏర్పాటు చేద్దామనుకొన్నారు. P అనే బిందువు AB రేఖపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువు, రేఖను 1:2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది (పటం 7.9 చూడండి). A బిందువు మూల బిందువు 'O' వద్ద ఉన్నదనుకుంటే మరియు రెండు అక్షాలపై 1కి.మీ. దూరాన్ని 1 యూనిట్‌గా తీసుకొనిన, బిందువు B నిరూపకాలు (36,15) అవుతాయి. టవర్ యొక్క స్థానాన్ని తెలుసుకోవాలంటే P బిందువు నిరూపకాలను మనం తప్పక తెలుసుకోవాలి. మరి ఈ నిరూపకాలను మనం ఎలా తెలుసుకుంటాం?



పటం 7.9

బిందువు P యొక్క నిరూపకాలను (x, y) అనుకుందాం. P నుండి మరియు B నుండి వరుసగా x–అక్షంపైకి D మరియు E వద్ద కలిసేలా లంబాలను గీయండి. P నుండి C వద్దకు BEకి లంబంగా వుండేలా ఒక రేఖ PC ను గీయండి. 6వ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న కో.కో. సరూపత నియమం ద్వారా Δ POD మరియు Δ BPCలు సరూప త్రిభుజాలవుతాయి.

అందువల్ల , $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$, మరియు $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

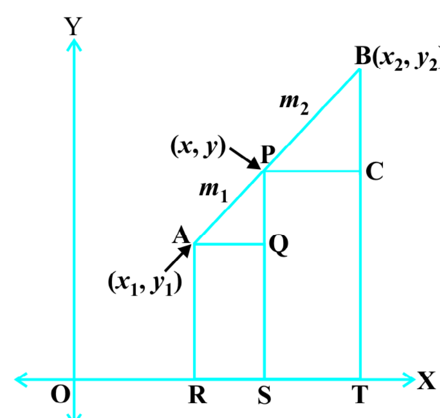
కాబట్టి, $\frac{x}{36 - x} = \frac{1}{2}$ మరియు $\frac{y}{15 - y} = \frac{1}{2}$.

ఈ సమీకరణాల ద్వారా $x = 12$ మరియు $y = 5$ అని తెలుస్తున్నది.

బిందువు P(12, 5) రేఖను OP : PB = 1 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందన్న నియమాన్ని మీరు సరిచూడవచ్చు.

కావున, ఇప్పుడు దీనిని మనం అర్థం చేసుకొని, ఈ ఉదాహరణ నుండి ఒక సాధారణ సూత్రాన్ని అభివృద్ధి పరచవచ్చు.

ఏవైనా రెండు బిందువులు A(x_1, y_1) మరియు B(x_2, y_2) అనుకొంటే, బిందువు P (x, y) అనేది ABని అంతరంగా m_1 : m_2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొనిన, $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (పటం 7.10 చూడండి).



పటం 7.10

Draw AR, PS and BT perpendicular to the x-axis. Draw AQ and PC parallel to the x-axis. Then, by the AA similarity criterion,

$$\Delta \text{PAQ} \sim \Delta \text{BPC}$$

Therefore, $$\frac{\text{PA}}{\text{BP}} = \frac{\text{AQ}}{\text{PC}} = \frac{\text{PQ}}{\text{BC}} \qquad (1)$$

Now,
$$\text{AQ} = \text{RS} = \text{OS} - \text{OR} = x - x_1$$
$$\text{PC} = \text{ST} = \text{OT} - \text{OS} = x_2 - x$$
$$\text{PQ} = \text{PS} - \text{QS} = \text{PS} - \text{AR} = y - y_1$$
$$\text{BC} = \text{BT} - \text{CT} = \text{BT} - \text{PS} = y_2 - y$$

Substituting these values in (1), we get

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Taking $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, we get $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

Similarly, taking $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, we get $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

So, the coordinates of the point P(x, y) which divides the line segment joining the points A(x_1, y_1) and B(x_2, y_2), internally, in the ratio $m_1 : m_2$ are

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

This is known as the **section formula**.

This can also be derived by drawing perpendiculars from A, P and B on the y-axis and proceeding as above.

If the ratio in which P divides AB is $k : 1$, then the coordinates of the point P will be

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

Special Case : The mid-point of a line segment divides the line segment in the ratio 1 : 1. Therefore, the coordinates of the mid-point P of the join of the points A(x_1, y_1) and B(x_2, y_2) is

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Let us solve a few examples based on the section formula.

AP SCERT

AR, PS మరియు BT లను x-అక్షం పైకి లంబంగా గీయండి. AQ మరియు PC లను x-అక్షానికి సమాంతరంగా వుండేలా గీయండి. అప్పుడు కో.కో. సరూపత నియమం నుండి

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

అందువల్ల, $$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad (1)$$

ఇప్పుడు, $$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

పై విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$ అని పొందుతాము.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$, తీసుకొనగా $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ ని పొందుతాము.

అదేవిధంగా, $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$, తీసుకొనగా $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ ని పొందుతాము.

కాబట్టి $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు $P(x, y)$ నిరూపకాలు $\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$ .... (2)

ఇదే **విభజన సూత్రం.**

y–అక్షం పైకి A, P మరియు B ల నుండి లంబరేఖలను గీసి కూడా పై పద్ధతి ద్వారా ఈ సూత్రాన్ని రాబట్టవచ్చు. AB రేఖను P బిందువు $k : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తున్నట్లయితే అప్పుడు P బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

ప్రత్యేక సందర్భం: ఒక రేఖాఖండం యొక్క మధ్య బిందువు, ఆ రేఖా ఖండాన్ని 1:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అందువల్ల ఆ బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడే రేఖ మధ్య బిందువు P నిరూపకాలు.

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

ఇప్పుడు, విభజన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

AP SCERT

Example 6 : Find the coordinates of the point which divides the line segment joining the points (4, – 3) and (8, 5) in the ratio 3 : 1 internally.

Solution : Let P(x, y) be the required point. Using the section formula, we get

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3 + 1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3 + 1} = 3$$

Therefore, (7, 3) is the required point.

Example 7 : In what ratio does the point (– 4, 6) divide the line segment joining the points A(– 6, 10) and B(3, – 8)?

Solution : Let (– 4, 6) divide AB internally in the ratio $m_1 : m_2$. Using the section formula, we get

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

Recall that if $(x, y) = (a, b)$ then $x = a$ and $y = b$.

So, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{and} \quad 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

Now, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ gives us}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

i.e., $$7m_1 = 2m_2$$

i.e., $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

You should verify that the ratio satisfies the y-coordinate also.

Now, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad \text{(Dividing throughout by } m_2\text{)}$$

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

ఉదాహరణ 6 : బిందువులు $(4, -3)$ మరియు $(8, 5)$ లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని $3 : 1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

సాధన : కావలసిన బిందు నిరూపకాలు $P(x, y)$ అనుకొందాం. విభజన సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా,

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = 3 \text{ అని పొందుతాం.}$$

అందువలన, కావలసిన బిందువు $(7, 3)$ అగును.

ఉదాహరణ 7 : బిందువులు $A(-6, 10)$ మరియు $B(3, -8)$ లను కలిపే రేఖాఖండం, బిందువు $(-4,6)$ ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

సాధన : AB రేఖాఖండమును బిందువు $(-4,6)$ అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అని అనుకుందాం. విభజన సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \text{ అని పొందుతాం.} \qquad (1)$$

కావున $(x, y) = (a, b)$ అయితే $x = a$ మరియు $y = b$ అని గుర్తు తెచ్చుకోండి.

కావున, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ మరియు $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

ఇప్పుడు, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$

$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$ ని ఇస్తుంది.

అనగా, $7m_1 = 2m_2$

అనగా, $m_1 : m_2 = 2 : 7$

ఈ నిష్పత్తి y - నిరూపకాన్ని కూడా సంతృప్తి పరుస్తుందా అని పరిశీలించాలి.

ఇప్పుడు, $\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ (m_2 చే అన్ని పదాలను భాగించగా)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

Therefore, the point (– 4, 6) divides the line segment joining the points A(– 6, 10) and B(3, – 8) in the ratio 2 : 7.

Alternatively : The ratio $m_1 : m_2$ can also be written as $\frac{m_1}{m_2} : 1$, or k : 1. Let (– 4, 6) divide AB internally in the ratio k : 1. Using the section formula, we get

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \qquad (2)$$

So, $$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

i.e., $$-4k - 4 = 3k - 6$$

i.e., $$7k = 2$$

i.e., $$k : 1 = 2 : 7$$

You can check for the y-coordinate also.

So, the point (– 4, 6) divides the line segment joining the points A(– 6, 10) and B(3, – 8) in the ratio 2 : 7.

Note : You can also find this ratio by calculating the distances PA and PB and taking their ratios provided you know that A, P and B are collinear.

Example 8 : Find the coordinates of the points of trisection (i.e., points dividing in three equal parts) of the line segment joining the points A(2, – 2) and B(– 7, 4).

Solution : Let P and Q be the points of trisection of AB i.e., AP = PQ = QB (see Fig. 7.11).

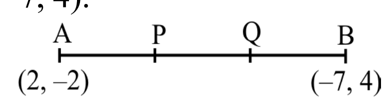


Fig. 7.11

Therefore, P divides AB internally in the ratio 1 : 2. Therefore, the coordinates of P, by applying the section formula, are

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ i.e., } (-1, 0)$$

Now, Q also divides AB internally in the ratio 2 : 1. So, the coordinates of Q are

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ i.e., } (-4, 2)$$

AP SCERT

అందువలన, బిందువులు $A(-6, 10)$ మరియు $B(3, -8)$ లను కలిపే రేఖాఖండంను, $(-4,6)$ బిందువు అనునది $2:7$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి : నిష్పత్తి $m_1 : m_2$ ని $\frac{m_1}{m_2} : 1$, లేదా $k : 1$గా కూడా రాయవచ్చు. బిందువు $(-4, 6)$ ABను అంతరంగా $k : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకోండి. విభజన సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \qquad (2)$$

కావున, $$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

i.e., $$-4k-4 = 3k-6$$

i.e., $$7k = 2$$

i.e., $$k : 1 = 2 : 7$$

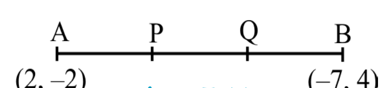
దీనిని y-నిరూపకానికి కూడా మీరు సరిచూడవచ్చు.

కావున, బిందువులు $A(-6, 10)$ మరియు $B(3, -8)$లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని $(-4, 6)$ బిందువు $2:7$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

గమనిక : A, P మరియు B లు సరేఖీయాలు కనుక PA మరియు PBల మధ్య దూరాలను కనుగొనటం ద్వారా కూడా వాటి నిష్పత్తిని కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ 8 : $A(2, -2)$ మరియు $B(-7, 4)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని (అనగా మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించే) త్రిథాకరించే బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

సాధన : AB రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు P మరియు Q అనుకొనిన



పటం 7.11

$AP = PQ = QB$ (పటం 7.11 చూపినట్లు) అందువల్ల AB రేఖాఖండాన్ని బిందువు P అంతరంగా $1:2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

కావున, విభజన సూత్రం నుండి P యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$

అనగా $(-1, 0)$ P యొక్క నిరూపకాలు అవుతాయి.

Q కూడా ABని అంతరంగా విభజించే నిష్పత్తి $2:1$. కావున, Q యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$,

అనగా $(-4, 2)$

AP SCERT

Therefore, the coordinates of the points of trisection of the line segment joining A and B are (– 1, 0) and (– 4, 2).

Note : We could also have obtained Q by noting that it is the mid-point of PB. So, we could have obtained its coordinates using the mid-point formula.

Example 9 : Find the ratio in which the *y*-axis divides the line segment joining the points (5, – 6) and (–1, – 4). Also find the point of intersection.

Solution : Let the ratio be k : 1. Then by the section formula, the coordinates of the point which divides AB in the ratio k : 1 are $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

This point lies on the *y*-axis, and we know that on the *y*-axis the abscissa is 0.

Therefore, $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

So, $$k = 5$$

That is, the ratio is 5 : 1. Putting the value of $k = 5$, we get the point of intersection as $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$.

Example 10 : If the points A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) and D(p, 3) are the vertices of a parallelogram, taken in order, find the value of p.

Solution : We know that diagonals of a parallelogram bisect each other.

So, the coordinates of the mid-point of AC = coordinates of the mid-point of BD

i.e., $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

i.e., $$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

so, $$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

i.e., $$p = 7$$

కావున A మరియు B లను కలిపే రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు (−1, 0) మరియు (−4, 2).

గమనిక : ఇది PB యొక్క మధ్య బిందువు Q అని గుర్తించడం ద్వారా మనం దానిని పొందవచ్చును. కాబట్టి దాని నిరూపకాలను మధ్య బిందువు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కూడా పొందవచ్చు.

ఉదాహరణ 9 : బిందువులు (5, – 6) మరియు (–1, – 4)లతో ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని y–అక్షం ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి. ఆ ఖండన బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

సాధన : బిందువు $k : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకోండి. విభజన సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా, ABని $k : 1$నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

ఈ బిందువు y-అక్షంపై ఉంటుంది మరియు y-అక్షం యొక్క ప్రథమ నిరూపకం '0' అని మనకు తెలుసు.

కావున, $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

కనుక, $$k = 5$$

కావున నిష్పత్తి 5 : 1 అవుతుంది. $k = 5$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా, ఆ ఖండన బిందువు నిరూపకాలు $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ అవుతాయి.

ఉదాహరణ 10 : బిందువులు A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) మరియు D(p, 3)లు వరుసగా సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలైతే, p విలువను కనుక్కోండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి, AC మధ్య బిందువు నిరూపకాలు = BD మధ్య బిందువు నిరూపకాలు.

అనగా, $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

అనగా, $$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

కావున, $$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

అనగా, $$p = 7$$

EXERCISE 7.2

1. Find the coordinates of the point which divides the join of (–1, 7) and (4, –3) in the ratio 2 : 3.

2. Find the coordinates of the points of trisection of the line segment joining (4, –1) and (–2, –3).

3. To conduct Sports Day activities, in your rectangular shaped school ground ABCD, lines have been drawn with chalk powder at a distance of 1m each. 100 flower pots have been placed at a distance of 1m from each other along AD, as shown in Fig. 7.12. Niharika runs $\frac{1}{4}$ th the distance AD on the 2nd line and posts a green flag. Preet runs $\frac{1}{5}$ th the distance AD on the eighth line and posts a red flag. What is the distance between both the flags? If Rashmi has to post a blue flag exactly halfway between the line segment joining the two flags, where should she post her flag?

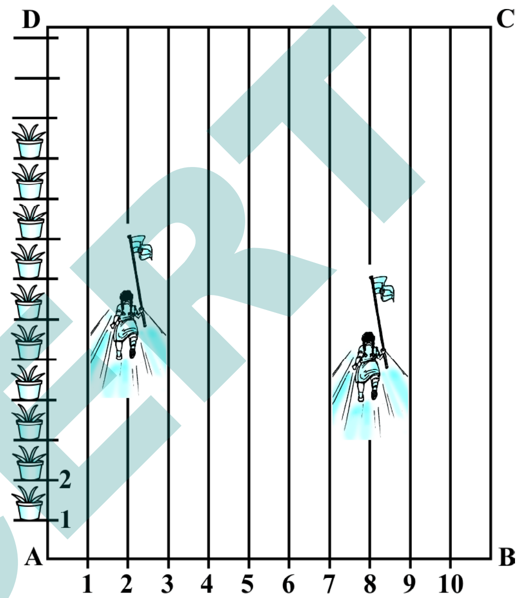


Fig. 7.12

4. Find the ratio in which the line segment joining the points (– 3, 10) and (6, – 8) is divided by (– 1, 6).

5. Find the ratio in which the line segment joining A(1, – 5) and B(– 4, 5) is divided by the x-axis. Also find the coordinates of the point of division.

6. If (1, 2), (4, y), (x, 6) and (3, 5) are the vertices of a parallelogram taken in order, find x and y.

7. Find the coordinates of a point A, where AB is the diameter of a circle whose centre is (2, – 3) and B is (1, 4).

8. If A and B are (– 2, – 2) and (2, – 4), respectively, find the coordinates of P such that $AP = \frac{3}{7}AB$ and P lies on the line segment AB.

9. Find the coordinates of the points which divide the line segment joining A(– 2, 2) and B(2, 8) into four equal parts.

10. Find the area of a rhombus if its vertices are (3, 0), (4, 5), (– 1, 4) and (– 2, – 1) taken in order. [**Hint :** Area of a rhombus = $\frac{1}{2}$ (product of its diagonals)]

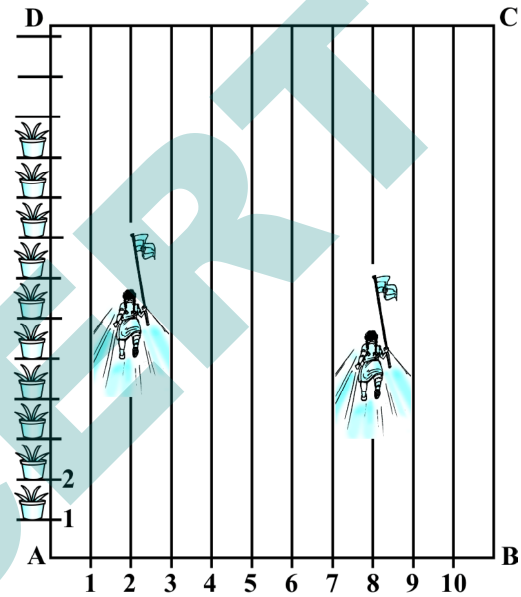
AP SCERT

అభ్యాసం 7.2

1. బిందువులు $(-1,7)$ మరియు $(4,-3)$లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని 2:3 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

2. $(4,-1)$ మరియు $(-2,-3)$లచే ఏర్పడే రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

3. పాఠశాల క్రీడా దినోత్సవం సందర్భంగా, దీర్ఘచతురస్రాకారంలో గల ఆటస్థలం ABCD లో ఒక్కొక్క రేఖ మధ్య ఒక మీటరు దూరం ఉండునట్లు కొన్ని రేఖలు సున్నంతో గీయబడ్డాయి. పటం 7.12 లో చూపినట్లు మధ్యదూరం 1 మీ. ఉండునట్లు 100 పూలకుండీలు AD రేఖపై ఉంచబడ్డాయి. నిహారిక రెండవ లైనులో AD లో $\frac{1}{4}$ వ వంతు దూరాన్ని పరుగెత్తి అక్కడ ఆకుపచ్చ జెండాను ఉంచింది. ప్రీత్ AD లో $\frac{1}{5}$ వ వంతు దూరాన్ని పరిగెత్తి ఎనిమిదవ లైనులో ఎర్రజెండాను ఉంచాడు. ఆ రెండు జెండాల మధ్య గల దూరం ఎంత? ఆ రెండు జెండాల మధ్య దూరంలో సగానికి నీలం రంగు జెండాను రష్మీ ఉంచాలంటే ఆమె ఆ జెండాను ఎక్కడ ఉంచాలి?



పటం 7.12

4. బిందువులు $(-3,\ 10)$ మరియు $(6,-8)$ లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని బిందువు $(-1,\ 6)$ ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుగొనండి.

5. $A(1,\ -5)$ మరియు $B\ (-4,\ 5)$ లతో ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని x–అక్షం ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి. ఆ విభజన బిందువు నిరూపకాలను కూడా కనుక్కోండి.

6. బిందువులు $(1,\ 2)$, $(4,\ y)$, $(x,\ 6)$ మరియు $(3,\ 5)$ లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలైతే x మరియు విలువలను కనుక్కోండి.

7. AB వ్యాసంగా గల ఒక వృత్త కేంద్రం $(2,\ -3)$ మరియు బిందువు B నిరూపకాలు $(1,\ 4)$ అయితే బిందువు A నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

8. బిందువు A మరియు B నిరూపకాలు వరుసగా $(-2,\ -2)$ మరియు $(2,-4)$ అయితే AB రేఖాఖండం పై $AP = \frac{3}{7}AB$ అయ్యేవిధంగా P బిందువు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

9. $A\ (-2,\ 2)$ మరియు $B(2,\ 8)$ లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజించే బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

10. బిందువులు $(3,\ 0)$, $(4,\ 5)$, $(-1,\ 4)$ మరియు $(-2,\ -1)$ వరుసగా రాంబస్ శీర్షాలు అయితే దాని వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. [**సూచన :** రాంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (కర్ణాల లబ్ధం)]

7.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. The distance between $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ is $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. The distance of a point $P(x, y)$ from the origin is $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. The coordinates of the point $P(x, y)$ which divides the line segment joining the points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ internally in the ratio $m_1 : m_2$ are $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

4. The mid-point of the line segment joining the points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ is $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

A NOTE TO THE READER

Section 7.3 discusses the Section Formula for the coordinates (x, y) of a point P which divides internally the line segment joining the points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ in the ratio $m_1 : m_2$ as follows :

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

Note that, here, $PA : PB = m_1 : m_2$.

However, if P does not lie between A and B but lies on the line AB, outside the line segment AB, and $PA : PB = m_1 : m_2$, we say that P divides externally the line segment joining the points A and B. You will study Section Formula for such case in higher classes.

AP SCERT

7.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ కింది విషయాలను నేర్చుకున్నారు:

1. రెండు బిందువులు $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ ల మధ్య దూరం $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. మూల బిందువు నుండి బిందువు $P(x, y)$ కు గల మధ్య దూరం $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని బిందువు $P(x, y)$, $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తే ఏర్పడే P బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

4. బిందువులు $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ లను కలపగా ఏర్పడే రేఖాఖండం మధ్య బిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

పాఠకులకు ఒక గమనిక

7.3 విభాగంలో చర్చించినట్లు విభజన సూత్రం ఆధారంగా $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు Pయొక్క నిరూపకాలు (x, y) ఈ క్రిందివిధంగా వుంటాయి.

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

ఇక్కడ $PA : PB = m_1 : m_2$ అని గమనించండి.

అయితే P అనేది A మరియు Bల మధ్య లేకపోతే అది AB రేఖాఖండం బయట AB రేఖపై ఉంటుంది మరియు $PA : PB = m_1 : m_2$ అవుతుంది. బిందువులు A మరియు B లచే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని బిందువు P బాహ్యంగా విభజిస్తుంది అని చెప్పవచ్చు. అలాంటి సందర్భంలో విభజన సూత్రం పై తరగతులలో నేర్చుకుంటారు.

AP SCERT

PROOFS IN MATHEMATICS A1

A1.1 Introduction

The ability to reason and think clearly is extremely useful in our daily life. For example, suppose a politician tells you, 'If you are interested in a clean government, then you should vote for me.' What he actually wants you to believe is that if you do not vote for him, then you may not get a clean government. Similarly, if an advertisement tells you, 'The intelligent wear *XYZ* shoes', what the company wants you to conclude is that if you do not wear *XYZ* shoes, then you are not intelligent enough. You can yourself observe that both the above statements may mislead the general public. So, if we understand the process of reasoning correctly, we do not fall into such traps unknowingly.

The correct use of reasoning is at the core of mathematics, especially in constructing proofs. In Class IX, you were introduced to the idea of proofs, and you actually proved many statements, especially in geometry. Recall that a proof is made up of several mathematical statements, each of which is logically deduced from a previous statement in the proof, or from a theorem proved earlier, or an axiom, or the hypotheses. The main tool, we use in constructing a proof, is the process of deductive reasoning.

We start the study of this chapter with a review of what a mathematical statement is. Then, we proceed to sharpen our skills in deductive reasoning using several examples. We shall also deal with the concept of negation and finding the negation of a given statement. Then, we discuss what it means to find the converse of a given statement. Finally, we review the ingredients of a proof learnt in Class IX by analysing the proofs of several theorems. Here, we also discuss the idea of proof by contradiction, which you have come across in Class IX and many other chapters of this book.

A1.2 Mathematical Statements Revisited

Recall, that a 'statement' is a meaningful sentence which is not an order, or an exclamation or a question. For example, 'Which two teams are playing in the

AP SCERT

గణితంలో నిరూపణలు A1

AP SCERT

A1.1 పరిచయం

తర్కించగల మరియు స్పష్టంగా ఆలోచించగల సామర్థ్యం మన రోజువారీ జీవితంలో చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, 'స్వచ్ఛమైన ప్రభుత్వం మీకు కావాలంటే, మీరు నాకే ఓటు వేయాలి' అని ఒక రాజకీయ నాయకుడు మీకు చెప్పాడనుకోండి. నిజానికి మీరు నమ్మాలని ఆయన కోరుకుంటున్నది ఏమిటంటే, మీరు ఆయనకు ఓటు వేయకపోతే, మీకు స్వచ్ఛమైన ప్రభుత్వం రాకపోవచ్చు అని. అదేవిధంగా, ఒక ప్రకటన మీకు, 'తెలివైన వారు XYZ షూస్ ధరిస్తారు' అని చెబితే, మీరు XYZ షూలను ధరించకపోతే, మీరు తగినంత తెలివితేటలు కలిగి లేరు అని కంపెని నిర్ధారించాలనుకుంటున్నది. పై రెండు వ్యాఖ్యలు సామాన్య ప్రజలను తప్పుదోవ పట్టించేలా ఉన్నాయని మీరే గమనించగలరు. కాబట్టి, తార్కిక ప్రక్రియను సరిగ్గా అర్థం చేసుకుంటే, మనకు తెలియకుండానే అలాంటి ఉచ్చులలో పడము.

ముఖ్యంగా నిరూపణలను చేయడంలో తార్కికం యొక్క సరైన ఉపయోగం గణితంలో ప్రధానమైనది, 9వ తరగతిలో, మీరు నిరూపణల ఆలోచనకు పరిచయం చేయబడ్డారు మరియు ముఖ్యంగా నిరూపణలను చేయడంలో మీరు నిజానికి అనేక ప్రవచనాలను, ముఖ్యంగా జ్యామితిలో నిరూపించారు. ఒక నిరూపణ అనేక గణిత ప్రవచనాలతో రూపొందించబడుతుందని గుర్తుంచుకోండి, వీటిలో ప్రతి ఒక్కటి తార్కికంగా నిరూపణలోని మునుపటి ప్రవచనం నుండి లేదా ముందుగా నిరూపించబడిన సిద్ధాంతం నుండి లేదా పరికల్పనల నుండి సాధించబడుతుంది. నిరూపణను చేయడంలో మనము ఉపయోగించే ప్రధాన సాధనం, గణిత తార్కిక ప్రక్రియ.

మనము ఈ అధ్యాయం యొక్క అధ్యయనాన్ని గణిత ప్రవచనం అంటే ఏమిటి అనే సమీక్షతో ప్రారంభిద్దాము. తరువాత, మనము అనేక ఉదాహరణలను ఉపయోగించి గణిత తార్కికంలో మన నైపుణ్యాలకు పదును పెడదాము. మనము వ్యతిరేక ప్రవచన భావనను తెలుసుకుందాం. మరియు ఇచ్చిన ప్రవచనం యొక్క విరుద్ధతను కనుగొందాము. అప్పుడు, ఇచ్చిన ప్రవచనం యొక్క విపర్య ప్రవచనం కనుగొనడం అంటే ఏమిటో మనము చర్చిస్తాము. చివరగా, మనము అనేక సిద్ధాంతాల నిరూపణలను విశ్లేషించడం ద్వారా 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్న నిరూపణ యొక్క అంశాలను సమీక్షిస్తాము. ఇక్కడ, మనము 9వ తరగతి మరియు ఈ పుస్తకంలోని అనేక ఇతర అధ్యాయాలలో మీరు చూసిన విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ ఆలోచనను కూడా చర్చిస్తాము.

A1.2 గణిత ప్రవచనాల పున:పరిశీలన

'ప్రవచనం' అనేది అర్థవంతమైన వాక్యం, ఇది ఒక ఆజ్ఞ లేదా ఆశ్చర్యార్థకం లేదా ప్రశ్న కాదు. ఉదాహరణకు,

Cricket World Cup Final?' is a question, not a statement. 'Go and finish your homework' is an order, not a statement. 'What a fantastic goal!' is an exclamation, not a statement.

Remember, in general, statements can be one of the following:

- *always true*
- *always false*
- *ambiguous*

In Class IX, you have also studied that in mathematics, **a statement is acceptable only if it is either always true or always false**. So, ambiguous sentences are not considered as mathematical statements.

Let us review our understanding with a few examples.

Example 1 : State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

(i) The Sun orbits the Earth.

(ii) Vehicles have four wheels.

(iii) The speed of light is approximately 3×10^5 km/s.

(iv) A road to Kolkata will be closed from November to March.

(v) All humans are mortal.

Solution :

(i) This statement is always false, since astronomers have established that the Earth orbits the Sun.

(ii) This statement is ambiguous, because we cannot decide if it is always true or always false. This depends on what the vehicle is — vehicles can have 2, 3, 4, 6, 10, etc., wheels.

(iii) This statement is always true, as verified by physicists.

(iv) This statement is ambiguous, because it is not clear which road is being referred to.

(v) This statement is always true, since every human being has to die some time.

Example 2 : State whether the following statements are true or false, and justify your answers.

(i) All equilateral triangles are isosceles.

(ii) Some isosceles triangles are equilateral.

(iii) All isosceles triangles are equilateral.

(iv) Some rational numbers are integers.

AP SCERT

'క్రికెట్ వరల్డ్‌కప్ ఫైల్‌లో ఏ రెండు టీమ్‌లు ఆడుతున్నాయి?' అనేది ఒక ప్రశ్న, ప్రవచనం కాదు. 'వెళ్లి మీ హోంవర్క్ పూర్తి చేయండి' అనేది ఒక ఆజ్ఞ, ప్రవచనం కాదు. 'ఎంత అద్భుతమైన గోల్!' ఒక ఆశ్చర్యార్థకం, ప్రవచనం కాదు.

గుర్తుంచుకోండి, సాధారణంగా, ప్రవచనాలు క్రింది వాటిలో ఒకటి కావచ్చు:

- *ఎల్లప్పుడూ నిజం*
- *ఎల్లప్పుడూ తప్పు*
- *అస్పష్టంగా ఉంది*

9వ తరగతిలో, మీరు గణితంలో, **ఒక ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ నిజం లేదా ఎల్లప్పుడూ తప్పుగా ఉంటే మాత్రమే ఆమోదయోగ్యమైనదని** కూడా అధ్యయనం చేసారు. కాబట్టి, అస్పష్టమైన వాక్యాలు గణిత శాస్త్ర ప్రవచనాలుగా పరిగణించబడవు.

కొన్ని ఉదాహరణలతో మన అవగాహనను సమీక్షించుకుందాం.

ఉదాహరణ 1 : కింది ప్రవచనాలు ఎల్లప్పుడూ సత్యమా, ఎల్లప్పుడూ అసత్యమా లేదా అస్పష్టంగా ఉన్నాయో లేదో పేర్కొనండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

(i) సూర్యుడు భూమి చుట్టూ తిరుగుతున్నాడు.

(ii) వాహనాలకు నాలుగు చక్రాలు ఉంటాయి.

(iii) కాంతి వేగం సుమారుగా 3×10^5 కిమీ/సె.

(iv) నవంబర్ నుండి మార్చి వరకు కలకత్తా రహదారి మూసివేయబడుతుంది.

(v) మానవులందరూ మరణించేవారే.

సాధన :

(i) ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ అసత్యం, ఎందుకంటే ఖగోళ శాస్త్రవేత్తలు సూర్యుని చుట్టూ భూమి తిరుగుతుందని నిర్ధారించారు.

(ii) ఈ ప్రవచనం అస్పష్టంగా ఉంది, ఎందుకంటే ఇది ఎల్లప్పుడూ సత్యం లేదా ఎల్లప్పుడూ అసత్యం అని మనము నిర్ణయించలేము. ఇది వాహనం అనే దానిపై ఆధారపడి ఉంటుంది – వాహనాలు 2, 3, 4, 6, 10, మొదలైన చక్రాలను కలిగి ఉంటాయి.

(iii) భౌతిక శాస్త్రవేత్తలచే ధృవీకరించబడినట్లుగా, ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

(iv) ఈ ప్రవచనం అస్పష్టంగా ఉంది, ఎందుకంటే ఏ రహదారిని సూచిస్తున్నారో స్పష్టంగా తెలియదు.

(v) ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం, ఎందుకంటే ప్రతి మానవుడు కొంత కాలం తరువాత చనిపోవలసి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 2 : కింది ప్రవచనాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా పేర్కొనండి మరియు మీ సమాధానాలు సమర్థించండి.

(i) అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు.

(ii) కొన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజాలు సమబాహు త్రిభుజాలుగా ఉంటాయి.

(iii) అన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజాలు సమబాహు త్రిభుజాలుగా ఉంటాయి.

(iv) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలు.

AP SCERT

(v) Some rational numbers are not integers.
(vi) Not all integers are rational.
(vii) Between any two rational numbers there is no rational number.

Solution :

(i) This statement is true, because equilateral triangles have equal sides, and therefore are isosceles.
(ii) This statement is true, because those isosceles triangles whose base angles are 60° are equilateral.
(iii) This statement is false. Give a counter-example for it.
(iv) This statement is true, since rational numbers of the form $\frac{p}{q}$, where p is an integer and $q = 1$, are integers (for example, $3 = \frac{3}{1}$).
(v) This statement is true, because rational numbers of the form $\frac{p}{q}$, p, q are integers and q does not divide p, are not integers (for example, $\frac{3}{2}$).
(vi) This statement is the same as saying 'there is an integer which is not a rational number'. This is false, because all integers are rational numbers.
(vii) This statement is false. As you know, between any two rational numbers r and s lies $\frac{r+s}{2}$, which is a rational number.

Example 3 : If $x < 4$, which of the following statements are true? Justify your answers.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

Solution :

(i) This statement is false, because, for example, $x = 3 < 4$ does not satisfy $2x > 8$.
(ii) This statement is false, because, for example, $x = 3.5 < 4$ does not satisfy $2x < 6$.
(iii) This statement is true, because it is the same as $x < 4$.

Example 4 : Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements:

(i) If the diagonals of a quadrilateral are equal, then it is a rectangle.
(ii) A line joining two points on two sides of a triangle is parallel to the third side.
(iii) $\sqrt{p}$ is irrational for all positive integers p.
(iv) All quadratic equations have two real roots.

AP SCERT

(v) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలు కావు.

(vi) అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.

(vii) ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్య లేదు.

సాధన :

(i) ఈ ప్రవచనం సత్యం, ఎందుకంటే సమబాహు త్రిభుజాలు సమాన భుజాలను కలిగి ఉంటాయి మరియు అందువల్ల సమద్విబాహు త్రిభుజాలు.

(ii) ఈ ప్రవచనం సత్యం, ఎందుకంటే ఏ సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క భూ కోణాలు $60°$ ఉంటాయో అది సమబాహు త్రిభుజం.

(iii) ఈ ప్రవచనం అసత్యం దీనికి ప్రత్యుదాహరణను ఇవ్వండి.

(iv) ఇచ్చిన ప్రవచనం సత్యం, ఎందువలననగా అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉంటాయి p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q = 1$ (ఉదాహరణ, $3 = \frac{3}{1}$).

(v) ఈ ప్రవచనం సత్యం, ఎందువలననగా అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉంటాయి p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q అనేది p ని భాగించదు. ఇలాంటివి పూర్ణసంఖ్యలు కాదు. (ఉదాహరణకు, $\frac{3}{2}$).

(vi) అకరణీయ సంఖ్య కాని పూర్ణ సంఖ్య ఉంటుంది అనేది అసత్యం, అందువలన అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు.

(vii) ఇచ్చిన ప్రవచనం అసత్యం. మీకు తెలిసినట్లుగా r మరియు s లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే $\frac{r+s}{2}$ అనేది రెండిటి మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్య.

ఉదాహరణ 3 : $x < 4$ అయితే, కింది వాటిలో ఏది నిజం? మీ సమాధానాలు సమర్థించండి.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

సాధన :

(i) ఈ ప్రవచనం తప్పు, ఎందుకంటే, ఉదాహరణకు, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ ని సంతృప్తిపరచదు.

(ii) ఈ ప్రవచనం తప్పు, ఎందుకంటే, ఉదాహరణకు, $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ ని సంతృప్తిపరచదు.

(iii) ఈ ప్రవచనం నిజం, ఎందుకంటే $x < 4$ వలె ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 4 : క్రింది ప్రవచనాలను తగిన కారణాలతో మళ్లీ చెప్పండి, తద్వారా అవి నిజమైన ప్రవచనాలుగా మారతాయి:

(i) చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు సమానంగా ఉంటే, అది దీర్ఘచతురస్రం.

(ii) త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖ మూడవ భుజమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

(iii) p యొక్క అన్ని ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్యలకు $\sqrt{p}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య

(iv) అన్ని వర్గ సమీకరణాలు రెండు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటాయి.

Solution :

(i) If the diagonals of a parallelogram are equal, then it is a rectangle.

(ii) A line joining the mid-points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

(iii) $\sqrt{p}$ is irrational for all primes p.

(iv) All quadratic equations have at most two real roots.

Remark : There can be other ways of restating the statements above. For instance, (iii) can also be restated as '$\sqrt{p}$ is irrational for all positive integers p which are not a perfect square'.

EXERCISE A1.1

1. State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

(i) All mathematics textbooks are interesting.

(ii) The distance from the Earth to the Sun is approximately 1.5×10^8 km.

(iii) All human beings grow old.

(iv) The journey from Uttarkashi to Harsil is tiring.

(v) The woman saw an elephant through a pair of binoculars.

2. State whether the following statements are true or false. Justify your answers.

(i) All hexagons are polygons. (ii) Some polygons are pentagons.

(iii) Not all even numbers are divisible by 2. (iv) Some real numbers are irrational.

(v) Not all real numbers are rational.

3. Let a and b be real numbers such that $ab \neq 0$. Then which of the following statements are true? Justify your answers.

(i) Both a and b must be zero. (ii) Both a and b must be non-zero.

(iii) Either a or b must be non-zero.

4. Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true.

(i) If $a^2 > b^2$, then $a > b$. (ii) If $x^2 = y^2$, then $x = y$.

(iii) If $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, then $x = 0$. (iv) The diagonals of a quadrilateral bisect each other.

A1.3 Deductive Reasoning

In Class IX, you were introduced to the idea of deductive reasoning. Here, we will work with many more examples which will illustrate how **deductive reasoning** is

AP SCERT

సాధన :

(i) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు సమానంగా ఉంటే, అది దీర్ఘచతురస్రం.

(ii) త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖ మూడవ భుజమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

(iii) p అనేది ఏదేని ప్రధాన సంఖ్య అయితే $\sqrt{p}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(iv) అన్ని వర్గ సమీకరణాలు గరిష్టంగా రెండు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటాయి.

సూచన : పైన పేర్కొన్న ప్రవచనాలను మళ్లీ చెప్పడానికి ఇతర మార్గాలు ఉండవచ్చు. ఉదాహరణకు, (iii)ను p అనేది 'ఖచ్చితమైన వర్గం కాని అన్ని ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్య లకు '$\sqrt{p}$' ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

అభ్యాసం A1.1

1. కింది ప్రవచనాలు ఎల్లప్పుడూ సత్యమా, ఎల్లప్పుడూ అసత్యమా లేదా అస్పష్టంగా ఉన్నాయో లేదో తెలియజేయండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

(i) అన్ని గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు ఆసక్తికరంగా ఉంటాయి.

(ii) భూమి నుండి సూర్యునికి దూరం సుమారు 1.5×10^8 కి.మీ.

(iii) మానవులందరూ వృద్ధులవుతారు.

(iv) ఉత్తరకాశీ నుండి హర్సిల్ వరకు ప్రయాణం అలసటనిస్తుంది.

(v) ఆ స్త్రీ ఒక జత బైనాక్యులర్ల ద్వారా ఏనుగును చూసింది.

2. కింది ప్రవచనాలు సత్యమో, అసత్యమో పేర్కొనండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

(i) అన్ని షడ్భుజులు బహుభుజులు. (ii) కొన్ని బహుభుజులు పంచభుజులు.

(iii) అన్ని సరి సంఖ్యలు 2 తో భాగించబడవు. (iv) కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు కరణీయ సంఖ్యలు.

(v) అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.

3. a మరియు b వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $ab \neq 0$. అప్పుడు కింది ప్రవచనాలలో ఏది సత్యం? మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

(i) a మరియు b రెండూ తప్పనిసరిగా శూన్యం అయి ఉండాలి.

(ii) a మరియు b రెండూ తప్పనిసరిగా శూన్యేతరంగా ఉండాలి. (iii) a లేదా b తప్పనిసరిగా శూన్యం కాదు.

4. కింది ప్రవచనాలను తగిన షరతులతో మళ్లీ చెప్పండి, తద్వారా అవి నిజమవుతాయి.

(i) $a^2 > b^2$, అయితే $a > b$ అవుతుంది. (ii) $x^2 = y^2$, అయితే అప్పుడు $x = y$ అవుతుంది.

(iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, అయితే $x = 0$ అవుతుంది.

(iv) చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

A 1.3 నిగమన తర్కం

9వ తరగతిలో, మీకు నిగమన తర్కం ఆలోచన పరిచయం చేయబడింది. ఇక్కడ, మనము చాలా ఎక్కువ ఉదాహరణలతో మనము నిజమని భావించి ఇచ్చిన ప్రవచనాల నుండి తీర్మానాలను చేయడములో **నిగమన తర్కం** ఎలా ఉపయోగపడుతుందో వివరిస్తుంది.

AP SCERT

used to **deduce** conclusions from given statements that we assume to be true. The given statements are called 'premises' or 'hypotheses'. We begin with some examples.

Example 5 : Given that Bijapur is in the state of Karnataka, and suppose Shabana lives in Bijapur. In which state does Shabana live?

Solution : Here we have two premises:

(i) Bijapur is in the state of Karnataka (ii) Shabana lives in Bijapur

From these premises, we deduce that Shabana lives in the state of Karnataka.

Example 6 : Given that all mathematics textbooks are interesting, and suppose you are reading a mathematics textbook. What can we conclude about the textbook you are reading?

Solution : Using the two premises (or hypotheses), we can deduce that you are reading an interesting textbook.

Example 7 : Given that $y = -6x + 5$, and suppose $x = 3$. What is y?

Solution : Given the two hypotheses, we get $y = -6(3) + 5 = -13$.

Example 8 : Given that ABCD is a parallelogram, and suppose AD = 5 cm, AB = 7 cm (see Fig. A1.1). What can you conclude about the lengths of DC and BC?

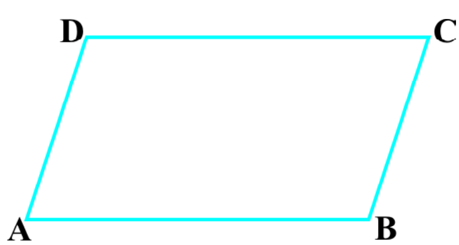


Fig. A1.1

Solution : We are given that ABCD is a parallelogram. So, we deduce that all the properties that hold for a parallelogram hold for ABCD. Therefore, in particular, the property that 'the opposite sides of a parallelogram are equal to each other', holds. Since we know AD = 5 cm, we can deduce that BC = 5 cm. Similarly, we deduce that DC = 7 cm.

Remark : In this example, we have seen how we will often need to find out and use properties hidden in a given premise.

Example 9 : Given that $\sqrt{p}$ is irrational for all primes p, and suppose that 19423 is a prime. What can you conclude about $\sqrt{19423}$?

Solution : We can conclude that $\sqrt{19423}$ is irrational.

In the examples above, you might have noticed that we do not know whether the hypotheses are true or not. We are **assuming** that they are true, and then applying

ఇచ్చిన ప్రవచనాలను 'ప్రిమిసెస్' లేదా 'పరికల్పనలు' అంటారు. మనము ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 5 : బీజాపూర్, కర్ణాటక రాష్ట్రంలో ఉంది మరియు షబానా బీజాపూర్లో నివసిస్తున్నారని అనుకుందాం. షబానా ఏ రాష్ట్రంలో నివసిస్తున్నది?

సాధన : ఇక్కడ మనకు రెండు పరికల్పనలు ఉన్నాయి:

(i) బీజాపూర్ కర్ణాటక రాష్ట్రంలో ఉంది (ii) షబానా బీజాపూర్లో నివసిస్తున్నారు

ఈ పరికల్పనల నుండి, షబానా కర్ణాటక రాష్ట్రంలో నివసిస్తుందని మనము సంగ్రహించగలం.

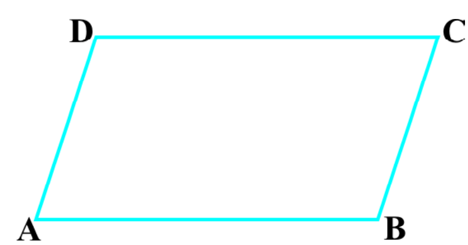
ఉదాహరణ 6 : అన్ని గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు ఆసక్తికరంగా ఉంటాయని ఇవ్వబడింది మరియు మీరు గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని చదువుతున్నారని అనుకుందాం. మీరు చదువుతున్న పాఠ్యపుస్తకం గురించి మనము ఏమి చెప్పగలం?

సాధన : రెండు పరికల్పనలను ఉపయోగించి, మీరు ఆసక్తికరమైన పాఠ్యపుస్తకాన్ని చదువుతున్నారని మనము సంగ్రహించగలం.

ఉదాహరణ 7 : $y = -6x + 5$, మరియు $x = 3$ అనుకుందాం. y విలువ ఎంత?

సాధన : రెండు పరికల్పనలను బట్టి, మనకు $y = -6(3) + 5 = -13$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 8 : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం, మరియు AD = 5 సెం.మీ., AB = 7 సెం.మీ. (పటం A.1.1 చూడండి) అనుకుందాం. DC మరియు BC పొడవుల గురించి మీరు ఏమి నిర్ధారించగలరు?



పటం A1.1

సాధన : ABCD అనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. సమాంతర చతుర్భుజానికి వర్తించే అన్ని ధర్మాలు ABCD కి వర్తిస్తాయి. ముఖ్యంగా 'సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానాలు: AD = 5 సెం.మీ., కాబట్టి BC = 5 సెం.మీ. అదే విధంగా DC = 7 సెం.మీ. అవుతుంది.

సూచన: ఈ ఉదాహరణలో, ఇచ్చిన పరికల్పనలో దాగి ఉన్న లక్షణాలను మనం తరచుగా ఎలా కనుగొనాలి మరియు ఉపయోగించాలి అని మనము చూశాము.

ఉదాహరణ 9 : అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు p కు $\sqrt{p}$ కరణీయ సంఖ్య, మరియు 19423 అనేది ప్రధాన సంఖ్య అయితే $\sqrt{19423}$ గురించి మీరు ఏమి చెప్పవచ్చు?

సాధన : $\sqrt{19423}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

పై ఉదాహరణలలో, పరికల్పన నిజమో కాదో మనకు తెలియదని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. అవి నిజమని మనము **ఊహిస్తున్నాము**, ఆపై నిగమన తార్కికాన్ని వర్తింపజేస్తున్నాము.

deductive reasoning. For instance, in Example 9, we haven't checked whether 19423 is a prime or not; we assume it to be a prime for the sake of our argument. What we are trying to emphasise in this section is that given a particular statement, how we use deductive reasoning to arrive at a conclusion. What really matters here is that we use the correct process of reasoning, and this process of reasoning does not depend on the trueness or falsity of the hypotheses. However, it must also be noted that if we start with an incorrect premise (or hypothesis), we may arrive at a wrong conclusion.

EXERCISE A1.2

1. Given that all women are mortal, and suppose that A is a woman, what can we conclude about A?
2. Given that the product of two rational numbers is rational, and suppose a and b are rationals, what can you conclude about ab?
3. Given that the decimal expansion of irrational numbers is non-terminating, non-recurring, and $\sqrt{17}$ is irrational, what can we conclude about the decimal expansion of $\sqrt{17}$?
4. Given that $y = x^2 + 6$ and $x = -1$, what can we conclude about the value of y?
5. Given that ABCD is a parallelogram and $\angle B = 80°$. What can you conclude about the other angles of the parallelogram?
6. Given that PQRS is a cyclic quadrilateral and also its diagonals bisect each other. What can you conclude about the quadrilateral?
7. Given that $\sqrt{p}$ is irrational for all primes p and also suppose that 3721 is a prime. Can you conclude that $\sqrt{3721}$ is an irrational number? Is your conclusion correct? Why or why not?

A1.4 Conjectures, Theorems, Proofs and Mathematical Reasoning

Consider the Fig. A1.2. The first circle has one point on it, the second two points, the third three, and so on. All possible lines connecting the points are drawn in each case.

The lines divide the circle into mutually exclusive regions (having no common portion). We can count these and tabulate our results as shown :

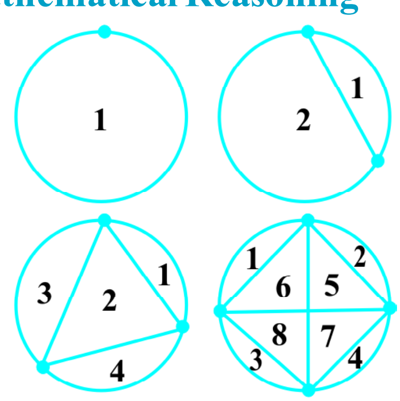


Fig. A1.2

AP SCERT

ప్రస్తుతానికి, ఉదాహరణ 9 లో, మనము 19423 అనేది ప్రధాన సంఖ్యా కాదా అని సరిచూడ లేదు. మనము ఈ వాదన కొరకు ఇది ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా భావిస్తాము. మనము ఈ విభాగంలో నొక్కిచెప్పడానికి ప్రయత్నిస్తున్నది ఏమిటంటే, ఒక నిర్దిష్ట ప్రవచనం ఇవ్వబడింది, మనము ముగింపుకు రావడానికి నిగమన తార్కికతను ఎలా ఉపయోగిస్తాము. ఇక్కడ నిజంగా ముఖ్యమైనది ఏమిటంటే, మనము సరైన తార్కిక ప్రక్రియను ఉపయోగిస్తాము మరియు ఈ తార్కిక ప్రక్రియ పరికల్పన యొక్క సత్యం లేదా అసత్యంపై ఆధారపడి ఉండదు. అయినప్పటికీ, మనం తప్పు పరికల్పనతో ప్రారంభించినట్లయితే, మనం తప్పు నిర్ణయానికి రావచ్చని కూడా గమనించాలి.

అభ్యాసం A1.2

1. స్త్రీలందరూ మరణించేవారే అని ఇవ్వబడినది మరియు A ఒక స్త్రీ అని అనుకుందాం, మనం A గురించి ఏమని చెప్పగలం?

2. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్దం ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఇవ్వబడినది a మరియు b లు అకరణీయ సంఖ్యలు, మీరు ab గురించి ఏమి చెప్పగలరు?

3. కరణీయ సంఖ్యల యొక్క దశాంశ రూపము అంతము కాని ఆవర్తిత దశాంశము మరియు $\sqrt{17}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అయితే $\sqrt{17}$ యొక్క దశాంశ రూపము గురించి ఏమి చెప్పవచ్చు?

4. $y = x^2 + 6$ మరియు $x = -1$, అయినందున y విలువ గురించి మనం ఏమి తేల్చవచ్చు?

5. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు $\angle B = 80°$. అయితే సమాంతర చతుర్భుజంలో మిగిలిన కోణముల గురించి ఏమి చెప్పగలరు?

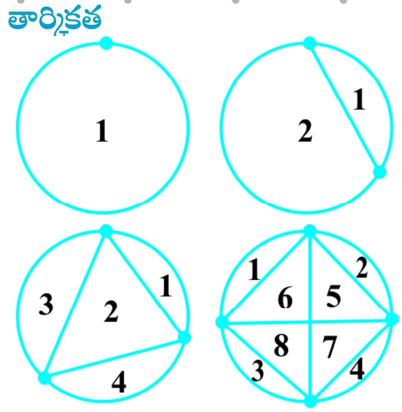
6. PQRS ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం మరియు దాని కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. ఆ చతుర్భుజం గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

7. అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు p కు $\sqrt{p}$ కరణీయ సంఖ్య , మరియు 3721 అనేది ప్రధాన సంఖ్య అయితే $\sqrt{3721}$ గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? మీ యొక్క తార్కిక ఆలోచన సరైనదేనా ? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

A 1.4 పరికల్పనలు, సిద్ధాంతములు, నిరూపణలు మరియు గణిత తార్కికత

పటం A1. 2 ను పరిశీలించినట్లయితే మొదటి వృత్తం మీద ఒక బిందువు రెండవ వృత్తం మీద రెండు బిందువులు మూడవ వృత్తం మీద మూడు బిందువులు మొదలగునవిగా కలవు.

ప్రతి సందర్భంలోనూ అన్ని బిందువులను కలుపుతూ సాధ్యమయ్యే రేఖలు గీయబడినవి. ఈ వృత్తాన్ని పరస్పర వర్జిత ప్రాంతాలు (ఉమ్మడి–ప్రాంతము లేని) వాటిగా విడగొడతాయి. ఇప్పుడు ఈ ప్రాంతాలను మనము ఒక పట్టికలో వేసి లెక్కించి చూద్దాం:



పటం A1.2

AP SCERT

Number of points	Number of regions
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

Some of you might have come up with a formula predicting the number of regions given the number of points. From Class IX, you may remember that this intelligent guess is called a '*conjecture*'.

Suppose your conjecture is that given 'n' points on a circle, there are 2^{n-1} mutually exclusive regions, created by joining the points with all possible lines. This seems an extremely sensible guess, and one can check that if $n = 5$, we do get 16 regions. So, having verified this formula for 5 points, are you satisfied that for any n points there are 2^{n-1} regions? If so, how would you respond, if someone asked you, how you can be sure about this for $n = 25$, say? To deal with such questions, you would need a proof which shows beyond doubt that this result is true, or a counter-example to show that this result fails for some 'n'. Actually, if you are patient and try it out for $n = 6$, you will find that there are 31 regions, and for $n = 7$ there are 57 regions. So, $n =$ 6, is a counter-example to the conjecture above. This demonstrates the power of a counter-example. You may recall that in the Class IX we discussed that to **disprove a statement, it is enough to come up with a single counter-example**.

You may have noticed that we insisted on a proof regarding the number of regions in spite of verifying the result for $n = 1, 2, 3, 4$ and 5. Let us consider a few more examples. You are familiar with the following result (given in Chapter 5): $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. To establish its validity, it is not enough to verify the result for $n = 1, 2, 3,$ and so on, because there may be some 'n' for which this result is not true (just as in the example above, the result failed for $n = 6$). What we need is a proof which establishes its truth beyond doubt. You shall learn a proof for the same in higher classes.

AP SCERT

బిందువుల సంఖ్య	ప్రాంతాల సంఖ్య
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

మీలో కొందరు వృత్తంపై బిందువులు సంఖ్యను బట్టి ప్రాంతాల సంఖ్యను అంచనా వేసే సూత్రానికి అవగాహనకు వచ్చి ఉండవచ్చు. 9వ తరగతి నుండి, మీరు ఈ తెలివైన ఊహనే 'పరికల్పన' అంటారని అని గుర్తుంచుకోండి.

ఒక వృత్తం పై 'n' బిందువులు ఇచ్చిన, సాధ్యమయ్యే అన్ని బిందువులును కలపడం ద్వారా పరస్పరం ప్రత్యేకమైన ప్రాంతాలు 2^{n-1} ఉన్నాయి అనేది మీ అంచనా అనుకుందాం. ఇది చాలా అరుదైన అంచనాగా అనిపిస్తుంది మరియు $n = 5$ అయితే, మనకు 16 ప్రాంతాలు లభిస్తాయో లేదో సరిచూడవచ్చు. కాబట్టి, 5 బిందువులకు ఈ సూత్రాన్ని ధృవీకరించిన తర్వాత, మీరు ఏదైనా n బిందువుకు 2^{n-1} ప్రాంతాలు ఉన్నాయా? అలా అయితే సంతృప్తి చెందారా? $n = 25$కు కూడా మీరు దీనిని ఎలా చెప్పగలరు? అటువంటి ప్రశ్నలను ఎదుర్కోవటానికి, మీరు ఈ ఫలితం నిజమని నిస్సందేహంగా చూపించే నిరూపణ లేదా కొన్ని 'n' విలువలను ఈ ఫలితం పైవన్నీ చూపించడానికి సరియగు ప్రత్యుదాహరణ అవసరం. మీరు ఓపికగా ప్రయత్నించినట్లయితే ఇది $n = 6$, విలువకు మీరు 31 ప్రాంతాలు ఉన్నాయని మరియు $n = 7$ కు 57 ప్రాంతాలు ఉన్నాయని కనుగొంటారు. కాబట్టి, $n = 6$ అనేది మీ పరికల్పనకు ప్రత్యుదాహరణ. 9వ తరగతిలో మనము చర్చించుకున్న విషయం మీకు గుర్తుండే ఉంటుంది ఒక **ప్రవచనాన్ని ఖండించడానికి, ఒక్క ప్రత్యుదాహరణ ఇస్తే సరిపోతుంది.**

$n = 1, 2, 3, 4$ మరియు 5 లకు ప్రాంతాల సంఖ్యను కనుగొనే నిరూపణ చేయుటను మీరు గుర్తించవచ్చు. మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం. కింది ఫలితం మీకు బాగా తెలుసు (అధ్యాయం 5లో ఇవ్వబడింది): $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. ఈ ఫలితాన్ని నిర్ధారించడానికి $n = 1, 2, 3$ కు సరిచూస్తే సరిపోదు (పై ఉదాహరణలో వలె, $n = 6$ కోసం ఫలితం విఫలమైంది). మనకు కావలసింది ఒక్క సందేహం కూడా లేకుండా దాని సత్యాన్ని స్థాపించేదే నిరూపణ. మీరు దాని కోసం ఒక పద్ధతిని నేర్చుకోవాలి, దీనిని మనము పై తరగతులలో నేర్చుకుంటాము.

Now, consider Fig. A1.3, where PQ and PR are tangents to the circle drawn from P.

You have proved that PQ = PR (Theorem 10.2). You were not satisfied by only drawing several such figures, measuring the lengths of the respective tangents, and verifying for yourselves that the result was true in each case.

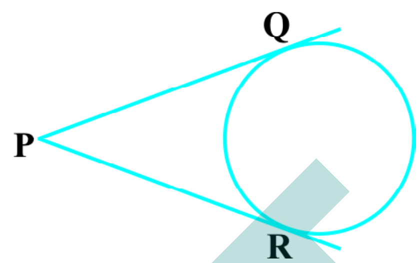


Fig. A1.3

Do you remember what did the proof consist of ? It consisted of a sequence of statements (called **valid arguments**), each following from the earlier statements in the proof, or from previously proved (and known) results independent from the result to be proved, or from axioms, or from definitions, or from the assumptions you had made. And you concluded your proof with the statement PQ = PR, i.e., the statement you wanted to prove. This is the way any proof is constructed.

We shall now look at some examples and theorems and analyse their proofs to help us in getting a better understanding of how they are constructed.

We begin by using the so-called 'direct' or 'deductive' method of proof. In this method, we make several statements. Each is **based on previous statements**. If each statement is logically correct (i.e., a valid argument), it leads to a logically correct conclusion.

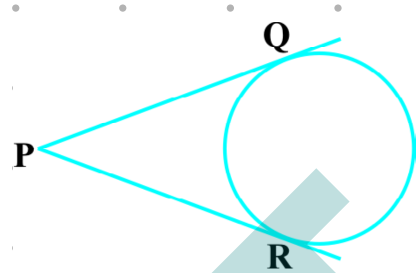
Example 10 : The sum of two rational numbers is a rational number.

Solution :

S.No.	Statements	Analysis/Comments
1.	Let x and y be rational numbers.	Since the result is about rationals, we start with x and y which are rational.
2.	Let $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ and $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ where m, n, p and q are integers.	Apply the definition of rationals.
3.	So, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	The result talks about the sum of rationals, so we look at $x + y$.

ఇప్పుడు, పటం A1.3 ని పరిగణించండి, ఇక్కడ PQ మరియు PR లు బాహ్య బిందువు P నుండి వృత్తానికి గీసిన స్పర్శ రేఖలు.

మీరు PQ = PR (సిద్ధాంతము 10.2) అని నిరూపించారు. ఇలాంటివి పటాలు గీయడం ద్వారా సంబంధిత స్పర్శ రేఖలు పొడవులను కొలవడం, మరియు ఫలితాన్ని మీరే సరిచూసుకొని ప్రతి సందర్భంలో ప్రవచనం సత్యం అని తృప్తిపడలేము.



పటం A1.3

నిరూపణ ఏమి కలిగి ఉందో మీకు గుర్తుందా? ఇది ఒక ప్రవచనాల క్రమాన్ని కలిగి ఉంటుంది. (చెల్లుబాటు అయ్యే వాదనలు అని పిలుస్తారు), మనం నిరూపించవలసిన ప్రవచనం గతంలో నిరూపించబడిన (మరియు తెలిసిన) ఫలితాల నుండి స్వతంత్ర ఫలితం నిరూపించబడటానికి, లేదా సిద్ధాంతాల నుండి, లేదా నిర్వచనాల నుండి లేదా మీరు కలిగి ఉన్న అంచనాల నుండి సాధించినది మరియు మీరు మీ నిరూపణను PQ = PR అనే ప్రవచనంతో ముగించండి. ఏదైనా నిరూపణ నిర్మించబడిన మార్గం ఇది.

మనము ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు మరియు సిద్ధాంతాలను పరిశీలిస్తాము మరియు వాటి నిరూపణలను విశ్లేషిస్తాము అవి ఎలా నిర్మించబడ్డాయో బాగా అర్థం చేసుకోవడంలో మనకు సహాయపడతాయి.

మనము నిరూపణ యొక్క 'ప్రత్యక్ష' లేదా 'తార్కిక' పద్ధతిని ఉపయోగించడం ద్వారా ప్రారంభిస్తాము. ఈ పద్ధతిలో, మనము అనేక ప్రవచనాలు చేస్తాము. ప్రతి ఒక్కటి **మునుపటి ప్రవచనం పై ఆధారపడి** ఉంటుంది. ప్రతి ప్రవచనం తార్కికంగా సరైనది (అంటే, చెల్లుబాటు అయ్యే వాదన), ఇది తార్కికంగా సరైన ముగింపు.

ఉదాహరణ 10 : రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

సాధన :

క్ర.సం.	ప్రవచనాలు	విశ్లేషణ/వ్యాఖ్యలు
1.	x మరియు y లు అకరణీయ సంఖ్యలు.	ఫలితం అనేది అకరణీయ సంఖ్యల గురించి కాబట్టి మనము x, y లు అకరణీయ సంఖ్యలతో ప్రారంభిస్తాము.
2.	$x=\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ మరియు $y=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ అనుకొనుము. ఇక్కడ m, n, p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు.	అకరణీయ సంఖ్యల నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించగా,
3.	కావున, $x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$	$x+y$ ఈ ఫలితం రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం గురించి తెలియ జేస్తుంది.

4.	Using the properties of integers, we see that $mq + np$ and nq are integers.	Using known properties of integers.
5.	Since $n \neq 0$ and $q \neq 0$, it follows that $nq \neq 0$.	Using known properties of integers.
6.	Therefore, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ is a rational number	Using the definition of a rational number.

Remark : Note that, each statement in the proof above is based on a previously established fact, or definition.

Example 11 : Every prime number greater than 3 is of the form $6k + 1$ or $6k + 5$, where k is some integer.

Solution :

S.No.	Statements	Analysis/Comments
1.	Let p be a prime number greater than 3.	Since the result has to do with a prime number greater than 3, we start with such a number.
2.	Dividing p by 6, we find that p can be of the form $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, or $6k + 5$, where k is an integer.	Using Euclid's division lemma.
3.	But $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, and $6k + 3 = 3(2k + 1)$. So, they are not primes.	We now analyse the remainders given that p is prime.
4.	So, p is forced to be of the form $6k + 1$ or $6k + 5$, for some integer k.	We arrive at this conclusion having eliminated the other options.

Remark : In the above example, we have arrived at the conclusion by eliminating different options. This method is sometimes referred to as the **Proof by Exhaustion**.

AP SCERT

4.	పూర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలను ఉపయోగించి, $mq + np$ మరియు nq పూర్ణ సంఖ్యలుగా అని చూస్తాము.	పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క తెలిసిన ధర్మాన్ని ఉపయోగించడం.
5.	$n \neq 0$ మరియు $q \neq 0$, కాబట్టి $nq \neq 0$.	పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క తెలిసిన ధర్మాన్ని ఉపయోగించడం.
6.	అందువలన, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య	అకరణీయ సంఖ్యల నిర్వచనం, ఉపయోగించడం ద్వారా

సూచన: పైన పేర్కొన్న నిరూపణలోని ప్రతి ప్రవచనం గతంలోనే స్థాపించబడిన వాస్తవం లేదా నిర్వచనం ఆధారంగా ఉందని గమనించండి.

ఉదాహరణ 11 : 3 కంటే ఎక్కువ ఉన్న ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య $6k + 1$ లేదా $6k + 5$ రూపంలో ఉంటుంది, ఇక్కడ k అనేది ఏదైనా పూర్ణసంఖ్య.

సాధన :

క్ర.సం	ప్రవచనాలు	విశ్లేషణ/వ్యాఖ్యలు
1.	p అనేది 3 కంటే ఎక్కువ అయిన ప్రధాన సంఖ్య అనుకొనుము	ఫలితం 3 కంటే ఎక్కువ ప్రధాన సంఖ్యతో సంబంధం కలిగి ఉన్నది కాబట్టి, మనం అలాంటి సంఖ్యతోనే ప్రారంభిస్తాము.
2.	p ని 6 తో భాగిస్తే, p అనేది $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, లేదా $6k + 5$, ఇక్కడ k అనేది పూర్ణ సంఖ్య.	యూక్లిడ్ భాగహార నియమంను ఉపయోగించడం.
3.	కానీ $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, మరియు $6k + 3 = 3(2k + 1)$. కాబట్టి, అవి ప్రధాన సంఖ్యలు కావు.	p ప్రధాన సంఖ్య కాబట్టి శేషములను విశ్లేషణ చేస్తాము.
4.	కాబట్టి, కొన్ని పూర్ణ సంఖ్యల k కోసం $p = 6k + 1$ లేదా $6k + 5$ రూపంలో ఉండాలి.	మనము ఇతర ఎంపికలను తొలగించడం ద్వారా ఈ నిర్ణయానికి వచ్చాము.

సూచన : పై ఉదాహరణలో, మనము వివిధ ఎంపికలను తొలగించడం ద్వారా ముగింపుకు వచ్చాము. ఈ పద్ధతిని కొన్నిసార్లు **'శోషణం ద్వారా నిరూపణ'** అని పిలుస్తారు.

AP SCERT

Theorem A1.1 ***(Converse of the Pythagoras Theorem) :*** *If in a triangle the square of the length of one side is equal to the sum of the squares of the other two sides, then the angle opposite the first side is a right angle.*

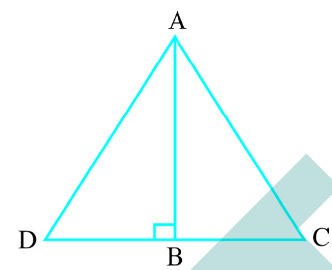


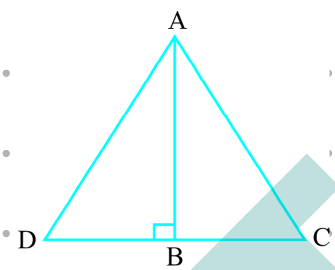
Fig. A1.4

Proof :

S.No.	Statements	Analysis
1.	Let ΔABC satisfy the hypothesis $AC^2 = AB^2 + BC^2$.	Since we are proving a statement about such a triangle, we begin by taking this.
2.	Construct line BD perpendicular to AB, such that BD = BC, and join A to D.	This is the intuitive step we have talked about that we often need to take for proving theorems.
3.	By construction, ΔABD is a right triangle, and from the Pythagoras Theorem, we have $AD^2 = AB^2 + BD^2$.	We use the Pythagoras theorem, which is already proved.
4.	By construction, BD = BC. Therefore, we have $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	Logical deduction.
5.	Therefore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$.	Using assumption, and previous statement.
6.	Since AC and AD are positive, we have AC = AD.	Using known property of numbers.
7.	We have just shown AC = AD. Also BC = BD by construction, and AB is common. Therefore, by SSS, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.	Using known theorem.
8.	Since $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, we get $\angle ABC = \angle ABD$, which is a right angle.	Logical deduction, based on previously established fact.

APSCERT

సిద్ధాంతం A1.1 *(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యం) :* ఒక త్రిభుజంలో పెద్ద భుజం పొడవు యొక్క వర్గం ఇతర రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం అయితే, పెద్ద భుజం ఎదురుగా ఉండే కోణం లంబ కోణం.



పటం A1.4

నిరూపణ :

క్ర.సం	ప్రవచనాలు	విశ్లేషణ
1.	దత్తాంశం ΔABC లో $AC^2 = AB^2 + BC^2$.	మనము అటువంటి త్రిభుజం గురించి ఒక ప్రవచనం నిరూపణ చేస్తున్నందున, మనము దీనిని తీసుకోవడం ద్వారా ప్రారంభిస్తాము.
2.	$BD = BC$ అయ్యేటట్లు BD లంబాన్ని AB పై నిర్మించి A ను D ని కలపాలి.	ఇది మనము మాట్లాడిన సహజమైన దశ, ఇది సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి మనం తరచుగా తీసుకోవలసి ఉంటుంది.
3.	నిర్మాణం ద్వారా ΔABD ఒక లంబకోణ త్రిభుజం మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి, మనకు $AD^2 = AB^2 + BD^2$ అని తెలుసు.	ఇప్పటికే నిరూపితమైన పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని మనం. ఉపయోగిస్తున్నాము.
4.	నిర్మాణం ద్వారా, $BD = BC$ కాబట్టి, మనకు $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	నిగమన తర్కం
5.	అందువలన $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$.	అంచనా వేయడం మరియు ముందు ప్రవచనాన్ని ఉపయోగించడం ద్వారా
6.	AC మరియు AD లు ధనాత్మకాలు కావున, $AC = AD$.	సంఖ్యల యొక్క తెలిసిన ధర్మాన్ని ఉపయోగించడం.
7.	మనము ఇప్పుడే $AC = AD$ అని చూపించాము. అలాగే నిర్మాణం ద్వారా $BC = BD$ మరియు AB ఉమ్మడి భుజం కాబట్టి భు భు భు సర్వసమానత్వం ద్వారా $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.	తెలిసిన సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించడం.
8.	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ కాబట్టి, సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం $\angle ABC = \angle ABD$ ఇది లంబకోణానికి సమానం	నిగమన తర్కం, గతంలో నేర్చుకున్న వాస్తవం ఆధారంగా.

AP SCERT

Remark : Each of the results above has been proved by a sequence of steps, all linked together. Their order is important. Each step in the proof follows from previous steps and earlier known results. (Also see Theorem 6.9.)

EXERCISE A1.3

In each of the following questions, we ask you to prove a statement. List all the steps in each proof, and give the reason for each step.

1. Prove that the sum of two consecutive odd numbers is divisible by 4.
2. Take two consecutive odd numbers. Find the sum of their squares, and then add 6 to the result. Prove that the new number is always divisible by 8.
3. If $p \geq 5$ is a prime number, show that $p^2 + 2$ is divisible by 3.

   [**Hint:** Use Example 11].
4. Let x and y be rational numbers. Show that xy is a rational number.
5. If a and b are positive integers, then you know that $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, where q is a whole number. Prove that HCF (a, b) = HCF (b, r).

   [**Hint :** Let HCF $(b, r) = h$. So, $b = k_1h$ and $r = k_2h$, where k_1 and k_2 are coprime.]
6. A line parallel to side BC of a triangle ABC, intersects AB and AC at D and E respectively.

   Prove that $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

A1.5 Negation of a Statement

In this section, we discuss what it means to 'negate' a statement. Before we start, we would like to introduce some notation, which will make it easy for us to understand these concepts. To start with, let us look at a statement as a single unit, and give it a name. For example, we can denote the statement 'It rained in Delhi on 1 September 2005' by p. We can also write this by

p: It rained in Delhi on 1 September 2005.

Similarly, let us write

q: All teachers are female.

r: Mike's dog has a black tail.

s: $2 + 2 = 4$.

t: Triangle ABC is equilateral.

This notation now helps us to discuss properties of statements, and also to see how we can combine them. In the beginning we will be working with what we call 'simple' statements, and will then move onto 'compound' statements.

AP SCERT

సూచన : పైన పేర్కొన్న ప్రతి ఫలితాలు ఒకదానితో ఒకటి అనుసంధానించబడిన దశల క్రమం ద్వారా నిరూపించబడ్డాయి. వాటి క్రమం ముఖ్యం. నిరూపణలోని ప్రతి దశ మునుపటి దశలు మరియు ముందుగా తెలిసిన ఫలితాలను అనుసరిస్తుంది. (సిద్ధాంతము 6.9 కూడా చూడండి.)

అభ్యాసం A 1.3

క్రింది ప్రతి ప్రశ్నలో, ఒక ప్రవచనాన్ని నిరూపించమని మిమ్మల్ని అడుగుతున్నాము. ప్రతి నిరూపణలోని అన్ని దశల జాబితా తయారు చేయండి మరియు ప్రతి దశకు గల కారణాన్ని ఇవ్వండి.

1. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం 4 చే భాగించబడుతుందని నిరూపించండి.
2. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలను తీసుకోండి. వాటి వర్గాల మొత్తాన్ని కనుగొని, దానికి 6 కలపగా ఫలిత సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ 8తో భాగించబడుతుందని నిరూపించండి.
3. $p \geq 5$ ప్రధాన సంఖ్య అయితే, $p^2 + 2$ అనేది 3 చే భాగించబడుతుందని చూపండి.
   [**సూచన:** ఉదాహరణ 11 ఉపయోగించుకొనండి].
4. x మరియు y లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన xy ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని చూపించండి.
5. a మరియు b ధన పూర్ణ సంఖ్యలు, q పూర్ణ సంఖ్య మరియు $a = bq + r$, అయితే $0 \leq r < b$, అని మీకు తెలుసు. HCF (a, b) = HCF (b, r) అని నిరూపించండి.
   [**సూచన:** HCF $(b, r) = h$ అనుకొనిన, $b = k_1 h$ మరియు $r = k_2 h$, ఇక్కడ k_1 మరియు k_2 పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు]
6. ΔABC లో BC కి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ AB, AC లను D మరియు E ల వద్ద వరుసగా ఖండిస్తే $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అని నిరూపించండి.

A 1.5 వ్యతిరేక ప్రవచనం

ఈ విభాగంలో 'వ్యతిరేక ప్రవచనం' అంటే ఏమిటో మనము చర్చిస్తాము. ఈ భావనలు ప్రారంభించడానికి ముందు, వీటిని సులభంగా అర్థం చేసుకునేలా కొంత సంజ్ఞామానాన్ని పరిచయం చేసుకుందాం. ఇది ప్రారంభించడానికి ఒక ప్రవచనంను ఒక ప్రమాణంగా తీసుకొని పేరు పెడదాం. ఉదాహరణకు '1 సెప్టెంబర్ 2005న ఢిల్లీలో వర్షం కురిసింది' అనే ప్రవచనంతో సూచిద్దాం. దీనినే క్రిందివిధంగా కూడా రాయవచ్చు.

p: 1 సెప్టెంబర్ 2005న ఢిల్లీలో వర్షం కురిసింది.

అదేవిధంగా, మనం ఇలా రాద్దాం

q: ఉపాధ్యాయులందరూ స్త్రీలే.

r: మైక్ కుక్కకు నల్లటి తోక ఉంది.

s: $2 + 2 = 4$.

t: ΔABC సమబాహు త్రిభుజం.

ఈ సంజ్ఞామానం ఇప్పుడు ప్రవచనాల లక్షణాలను చర్చించడానికి మరియు చూడటానికి కూడా మనకు సహాయపడుతుంది మనము వాటిని ఎలా కలపవచ్చు. ప్రారంభంలో మనం 'సరళ' ప్రవచనాలతో పని చేస్తాము ఆపై 'సంక్లిష్ట' ప్రవచనాలకు వెళదాం.

AP SCERT

Now consider the following table in which we make a new statement from each of the given statements.

Original statement	New statement
p: It rained in Delhi on 1 September 2005	$\sim p$: It is false that it rained in Delhi on 1 September 2005.
q: All teachers are female.	$\sim q$: It is false that all teachers are female.
r: Mike's dog has a black tail.	$\sim r$: It is false that Mike's dog has a black tail.
s: $2 + 2 = 4$.	$\sim s$: It is false that $2 + 2 = 4$.
t: Triangle ABC is equilateral.	$\sim t$: It is false that triangle ABC is equilateral.

Each new statement in the table is a *negation* of the corresponding old statement. That is, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ and $\sim t$ are negations of the statements p, q, r, s and t, respectively. Here, $\sim p$ is read as 'not p'. The statement $\sim p$ negates the assertion that the statement p makes. Notice that in our usual talk we would simply mean $\sim p$ as 'It did not rain in Delhi on 1 September 2005.' However, we need to be careful while doing so. You might think that one can obtain the negation of a statement by simply inserting the word 'not' in the given statement at a suitable place. While this works in the case of p, the difficulty comes when we have a statement that begins with 'all'. Consider, for example, the statement q: All teachers are female. We said the negation of this statement is $\sim q$: It is false that all teachers are female. This is the same as the statement 'There are some teachers who are males.' Now let us see what happens if we simply insert 'not' in q. We obtain the statement: 'All teachers are not female', or we can obtain the statement: 'Not all teachers are female.' The first statement can confuse people. It could imply (if we lay emphasis on the word 'All') that all teachers are male! This is certainly not the negation of q. However, the second statement gives the meaning of $\sim q$, i.e., that there is at least one teacher who is not a female. So, be careful when writing the negation of a statement!

So, how do we decide that we have the correct negation? We use the following criterion.

Let p be a statement and $\sim p$ its negation. Then $\sim p$ is false whenever p is true, and $\sim p$ is true whenever p is false.

AP SCERT

ఇప్పుడు కింది పట్టికను పరిగణించండి, దీనిలో మనము ఒక్కొక్క దత్త ప్రవచనం నుండి కొత్త ప్రవచనమును వ్రాస్తాము.

వాస్తవ ప్రవచనం	కొత్త ప్రవచనం
p : సెప్టెంబర్ 1, 2005న ఢిల్లీలో వర్షం కురిసింది.	$\sim p$: సెప్టెంబర్ 1, 2005న ఢిల్లీలో వర్షం కురిసిందనేది తప్పు.
q: ఉపాధ్యాయులందరూ స్త్రీలే.	$\sim q$: ఉపాధ్యాయులందరూ స్త్రీలే అనేది తప్పు.
r: మైక్ కుక్కకు నల్లటి తోక ఉంది.	$\sim r$: మైక్ కుక్కకు నల్లటి తోక ఉందనేది తప్పు.
s: $2 + 2 = 4$	$\sim s$: $2 + 2 = 4$ అనేది తప్పు.
t: ΔABC సమబాహు త్రిభుజం.	$\sim t$: ΔABC సమబాహు త్రిభుజం అనేది తప్పు.

పట్టికలోని ప్రతి కొత్త ప్రవచనం సంబంధిత పాత ప్రవచనం యొక్క వ్యతిరేకం. అంటే, $\sim p, \sim q, \sim r, \sim s$ మరియు $\sim t$ అనేవి వరుసగా p, q, r, s మరియు t, అనే ప్రవచనాల యొక్క వ్యతిరేకం. ఇక్కడ, $\sim p$ అనేది 'pకాదు' అని చదవబడుతుంది. $\sim p$ ప్రవచనం p అనే ప్రవచనాన్ని నిరాకరిస్తుంది. మన సాధారణ మాటలలో మనం $\sim p$ అంటే '1 సెప్టెంబర్ 2005న ఢిల్లీలో వర్షం పడలేదు' అని అర్థం చేసుకోవచ్చని గమనించండి. అయితే, అలా చేసేటప్పుడు మనం జాగ్రత్తగా ఉండాలి. తగిన స్థలంలో ఇచ్చిన ప్రవచనంలో 'కాదు' అనే పదాన్ని చేర్చడం ద్వారా ఎవరైనా ప్రవచనం యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనం పొందవచ్చని మీరు అనుకోవచ్చు. ఇది p, విషయంలో పని చేస్తున్నప్పుడు, మనకు 'అన్ని'తో ప్రారంభమయ్యే ప్రవచనం ఉన్నప్పుడు ఇబ్బంది వస్తుంది. ఉదాహరణకు qఅనే ప్రవచనాన్ని పరిగణించండి: ఉపాధ్యాయులందరూ స్త్రీలే. మనము ఈ ప్రవచనం యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనం $\sim q$: ఉపాధ్యాయులందరూ స్త్రీలే అన్నది తప్పు. 'మగవారు కొందరు ఉపాధ్యాయులు ఉన్నారు' అనే ప్రవచనం కూడా ఇదే. ఇప్పుడు మనం q లో 'కాదు' అని చొప్పించినట్లయితే ఏమి జరుగుతుందో చూద్దాం. 'అందరు ఉపాధ్యాయులు స్త్రీలు కాదు' లేదా 'అందరు ఉపాధ్యాయులు స్త్రీలు కాదు అను ప్రవచనంను పొందవచ్చు. మొదటి ప్రవచనం ప్రజలను గందరగోళానికి గురి చేస్తుంది. ఇది (మనం 'అందరూ' అనే పదానికి ప్రాధాన్యత ఇస్తే) ఉపాధ్యాయులందరూ మగవారేనని సూచించవచ్చు! ఇది ఖచ్చితంగా q యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనం కాదు. అయితే, రెండవ ప్రవచనం $\sim q$ కి సమాన అర్థాన్ని ఇస్తుంది, అంటే స్త్రీ కాని కనీసం ఒక ఉపాధ్యాయుడుకూడా ఉంటాడు. కాబట్టి, ప్రవచనం యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనం వ్రాసేటప్పుడు జాగ్రత్తగా ఉండండి!

కాబట్టి, మనకు సరైన వ్యతిరేక ప్రవచనం ఉందని ఎలా నిర్ణయించుకోవాలి? మనము ఈ క్రింది ప్రమాణం ఉపయోగిస్తాము.

p ఒక ప్రవచనం మరియు $\sim p$ దాని వ్యతిరేకం. అప్పుడు p సత్యం అయినప్పుడల్లా $\sim p$ అసత్యం మరియు p అసత్యం అయినప్పుడల్లా $\sim p$ సత్యమవుతుంది.

APSCERT

For example, if it is true that Mike's dog has a black tail, then it is false that Mike's dog does not have a black tail. If it is false that 'Mike's dog has a black tail', then it is true that 'Mike's dog does not have a black tail'.

Similarly, the negations for the statements s and t are:

s: $2 + 2 = 4$; negation, $\sim s$: $2 + 2 \neq 4$.

t: Triangle ABC is equilateral; negation, $\sim t$: Triangle ABC is not equilateral.

Now, what is $\sim(\sim s)$? It would be $2 + 2 = 4$, which is s. And what is $\sim(\sim t)$? This would be 'the triangle ABC is equilateral', i.e., t. In fact, **for any statement p, $\sim(\sim p)$ is p**.

Example 12 : State the negations for the following statements:

(i) Mike's dog does not have a black tail.
(ii) All irrational numbers are real numbers.
(iii) $\sqrt{2}$ is irrational.
(iv) Some rational numbers are integers.
(v) Not all teachers are males.
(vi) Some horses are not brown.
(vii) There is no real number x, such that $x^2 = -1$.

Solution :

(i) It is false that Mike's dog does not have a black tail, i.e., Mike's dog has a black tail.
(ii) It is false that all irrational numbers are real numbers, i.e., some (at least one) irrational numbers are not real numbers. One can also write this as, 'Not all irrational numbers are real numbers.'
(iii) It is false that $\sqrt{2}$ is irrational, i.e., $\sqrt{2}$ is not irrational.
(iv) It is false that some rational numbers are integers, i.e., no rational number is an integer.
(v) It is false that not all teachers are males, i.e., all teachers are males.
(vi) It is false that some horses are not brown, i.e., all horses are brown.
(vii) It is false that there is no real number x, such that $x^2 = -1$, i.e., there is at least one real number x, such that $x^2 = -1$.

Remark : From the above discussion, you may arrive at the following **Working Rule** for obtaining the negation of a statement :

(i) First write the statement with a 'not'.
(ii) If there is any confusion, make suitable modification , specially in the statements involving 'All' or 'Some'.

AP SCERT

ఉదాహరణకు, మైక్ కుక్కకు నల్ల తోక ఉందనేది నిజమైతే, మైక్ కుక్కకు నల్ల తోక లేదనేది అబద్ధం. 'మైక్ కుక్కకు నల్ల తోక ఉంది' అనేది అబద్ధమైతే, ' మైక్ కుక్కకు నల్ల తోక లేదు' అనేది నిజం.

అదేవిధంగా, ప్రవచనాలు s మరియు t యొక్క వ్యతిరేకతలు :

s: $2 + 2 = 4$; వ్యతిరేక ప్రవచనం, $\sim s$: $2 + 2 \neq 4$.

t: త్రిభుజం ABC సమబాహు త్రిభుజం వ్యతిరేక ప్రవచనం, $\sim t$: త్రిభుజం ABC సమబాహు త్రిభుజం కాదు.

ఇప్పుడు, $\sim(\sim s)$? అంటే ఏమిటి? ఇది $2 + 2 = 4$ అవుతుంది, అంటే s. మరియు $\sim(\sim t)$అంటే ఏమిటి ? ఇది త్రిభుజం ABC 'సమబాహు త్రిభుజం' అనగా, t. నిజానికి, **ఏదైనా ప్రవచనం p కోసం, $\sim(\sim p)$ అనేది 'p'నే అవుతుంది.**

ఉదాహరణ 12 : కింది ప్రవచనాలకు వ్యతిరేక ప్రవచనాలను పేర్కొనండి:

(i) మైక్ కుక్కకు నల్లటి తోక లేదు.

(ii) అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు.

(iii) $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య.

(iv) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణసంఖ్యలు.

(v) ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులు కాదు.

(vi) కొన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగులోఉండవు.

(vii) $x^2 = -1$ అయ్యేవిధంగా వాస్తవ సంఖ్య x లేదు.

సాధన :

(i) మైక్ కుక్కకు నల్లటి తోక లేదనేది అసత్యం, అంటే మైక్ కుక్కకు నలుపు తోక ఉంది.

(ii) అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు అనేది అసత్యం అంటే కొన్ని (కనీసం ఒక) కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు. దీనిని 'అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు' అని కూడా వ్రాయవచ్చు.

(iii) $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అనేది అసత్యం. అంటే $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య కాదు.

(iv) కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలు అనేది అసత్యం, అనగా, ఏ అకరణీయ సంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

(v) ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులన్నది అసత్యం అంటే ఉపాధ్యాయులందరూ పురుషులే.

(vi) కొన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగులో లేవనేది అసత్యం. అంటే, అన్ని గుర్రాలు గోధుమ రంగులో ఉన్నాయి.

(vii) $x^2 = -1$అయ్యేవిధంగా వాస్తవ సంఖ్య x లేదనేది అసత్యం, అంటే, కనీసం ఒక వాస్తవ సంఖ్య x అన్నా $x^2 = -1$ అయ్యేవిధంగా ఉంటుంది.

సూచన: పై చర్చ నుండి, ప్రవచనం యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనంను పొందడం కోసం మీరు క్రింది ఉపయోగపడే సూత్రంకు చేరుకోవచ్చు.

(i) ముందుగా ప్రవచనం 'కాదు'తో రాయండి.

(ii) ఏదైనా గందరగోళం ఉంటే, ప్రత్యేకంగా 'అన్నీ' లేదా 'కొన్ని'తో కూడిన ప్రవచనాలకు తగిన సవరణలు చేయండి.

AP SCERT

EXERCISE A1.4

1. State the negations for the following statements :

(i) Man is mortal.

(ii) Line l is parallel to line m.

(iii) This chapter has many exercises.

(iv) All integers are rational numbers.

(v) Some prime numbers are odd.

(vi) No student is lazy.

(vii) Some cats are not black.

(viii) There is no real number x, such that $\sqrt{x} = -1$.

(ix) 2 divides the positive integer a.

(x) Integers a and b are coprime.

2. In each of the following questions, there are two statements. State if the second is the negation of the first or not.

(i) Mumtaz is hungry.
Mumtaz is not hungry.

(ii) Some cats are black.
Some cats are brown.

(iii) All elephants are huge.
One elephant is not huge.

(iv) All fire engines are red.
All fire engines are not red.

(v) No man is a cow.
Some men are cows.

A1.6 Converse of a Statement

We now investigate the notion of the converse of a statement. For this, we need the notion of a 'compound' statement, that is, a statement which is a combination of one or more 'simple' statements. There are many ways of creating compound statements, but we will focus on those that are created by connecting two simple statements with the use of the words 'if' and 'then'. For example, the statement 'If it is raining, then it is difficult to go on a bicycle', is made up of two statements:

p: It is raining

q: It is difficult to go on a bicycle.

Using our previous notation we can say: If p, then q. We can also say 'p implies q', and denote it by $p \Rightarrow q$.

Now, supose you have the statement 'If the water tank is black, then it contains potable water.' This is of the form $p \Rightarrow q$, where the hypothesis is p (the water tank is black) and the conclusion is q (the tank contains potable water). Suppose we interchange the hypothesis and the conclusion, what do we get? We get $q \Rightarrow p$, i.e., if the water in the tank is potable, then the tank must be black. This statement is called the **converse** of the statement $p \Rightarrow q$.

AP SCERT

అభ్యాసం A1.4

1. క్రింది ప్రవచనాలకు వ్యతిరేక ప్రవచనాలను పేర్కొనండి :

(i) మనిషి మరణించవలసిన వాడే.

(ii) l రేఖ m కి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

(iii) ఈ అధ్యాయంలో అనేక అభ్యాసాలు ఉన్నాయి.

(iv) అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు.

(v) కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలు.

(vi) ఏ విద్యార్థి సోమరి కాదు.

(vii) కొన్ని పిల్లులు నల్లగా ఉండవు.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ అయ్యేటట్లు x, కు ఏ వాస్తవ సంఖ్య లేదు.

(ix) a అనే ధన పూర్ణ సంఖ్యను 2 భాగిస్తుంది.

(x) a మరియు b పూర్ణసంఖ్యలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు.

2. కింది ప్రతి ప్రశ్నలో, రెండు ప్రవచనాలు ఉంటాయి. రెండవది మొదటి దానికి వ్యతిరేకమా కాదా అని పేర్కొనండి.

(i) ముంతాజ్ కు ఆకలిగా ఉంది.
ముంతాజ్ కు ఆకలిగా లేదు .

(ii) కొన్ని పిల్లులు నల్లగా ఉంటాయి.
కొన్ని పిల్లులు గోధుమ రంగులో ఉంటాయి.

(iii) అన్ని ఏనుగులు పెద్దవి.
ఒక్క ఏనుగు పెద్దది కాదు.

(iv) అన్ని అగ్నిమాపక యంత్రాలు ఎరుపు రంగులో ఉంటాయి.
అన్ని అగ్నిమాపక యంత్రాలు ఎరుపు రంగులో ఉండవు.

(v) ఏ మనిషి ఆవు కాదు.
కొందరు పురుషులు ఆవులు.

A 1.6 ప్రవచనం యొక్క విపర్యం

మనము ఇప్పుడు ప్రవచనం యొక్క విపర్యం యొక్క భావనను పరిశీలిస్తాము. దీని కోసం, మనకు ఒక 'సంయుక్త' ప్రవచన భావన అవసరం అంటే, ఒకటి లేదా ఎక్కువ 'సరళమైన' ప్రవచనాల కలయికతో కూడిన ప్రవచనం. సంయుక్త ప్రవచనాలను రూపొందించడానికి అనేక మార్గాలు ఉన్నాయి, కానీ మనము 'అయితే' అనే పదంతో కలపటం ద్వారా రెండు సరళ ప్రవచనాలు ఏర్పరచే వాటిపై దృష్టి సారిద్దాం. ఉదాహరణకు, 'వర్షం పడితే అప్పుడు సైకిల్ పై వెళ్లడం కష్టం' అనేది రెండు ప్రవచనాలు కలయిక

p: వర్షం పడుతోంది.

q: సైకిల్ పై వెళ్లడం కష్టం.

మన మునుపటి సంజ్ఞామానాన్ని ఉపయోగించి మనం ఇలా చెప్పవచ్చు: p అయితే, q మరియు దీనిని p ఇంప్లైస్ q అంటారు. దానిని $p \Rightarrow q$ ద్వారా సూచించవచ్చు.

ఇప్పుడు, 'వాటర్ ట్యాంక్ నల్లగా ఉంటే, అది తాగునీరు కలిగి ఉంటుంది' అనే ప్రవచనం ఉందనుకోండి. ఇది $p \Rightarrow q$ రూపంలో ఉంటుంది, ఇక్కడ పరికల్పన p (వాటర్ ట్యాంక్ నలుపు రంగులో ఉంటుంది) మరియు ముగింపు q (ట్యాంక్లో తాగునీరు ఉంటుంది). పరికల్పన మరియు ముగింపును పరస్పరం మార్చాము అనుకోండి, మనకు ఏమి లభిస్తుంది? మనకు $q \Rightarrow p$ (ట్యాంక్‌లో తాగునీరు ఉంటుంది). పరికల్పన మరియు ముగింపును పరస్పరం మార్చాము అనుకోండి, మనకు ఏమి లభిస్తుంది? మనకు $q \Rightarrow p$ వస్తుంది, అంటే, ట్యాంకులోని నీరు త్రాగదగినది, అయితే అప్పుడు ట్యాంక్ నల్లగా ఉండాలి, దీనిని $p \Rightarrow q$ యొక్క **విపర్యం** అంటారు .

AP SCERT

In general, the **converse** of the statement $p \Rightarrow q$ is $q \Rightarrow p$, where p and q are statements. Note that $p \Rightarrow q$ and $q \Rightarrow p$ are the converses of each other.

Example 13 : Write the converses of the following statements :

(i) If Jamila is riding a bicycle, then 17 August falls on a Sunday.

(ii) If 17 August is a Sunday, then Jamila is riding a bicycle.

(iii) If Pauline is angry, then her face turns red.

(iv) If a person has a degree in education, then she is allowed to teach.

(v) If a person has a viral infection, then he runs a high temperature.

(vi) If Ahmad is in Mumbai, then he is in India.

(vii) If triangle ABC is equilateral, then all its interior angles are equal.

(viii) If x is an irrational number, then the decimal expansion of x is non-terminating non-recurring.

(ix) If $x - a$ is a factor of the polynomial $p(x)$, then $p(a) = 0$.

Solution : Each statement above is of the form $p \Rightarrow q$. So, to find the converse, we first identify p and q, and then write $q \Rightarrow p$.

(i) p: Jamila is riding a bicycle, and q: 17 August falls on a Sunday. Therefore, the converse is: If 17 August falls on a Sunday, then Jamila is riding a bicycle.

(ii) This is the converse of (i). Therefore, its converse is the statement given in (i) above.

(iii) If Pauline's face turns red, then she is angry.

(iv) If a person is allowed to teach, then she has a degree in education.

(v) If a person runs a high temperature, then he has a viral infection.

(vi) If Ahmad is in India, then he is in Mumbai.

(vii) If all the interior angles of triangle ABC are equal, then it is equilateral.

(viii) If the decimal expansion of x is non-terminating non-recurring, then x is an irrational number.

(ix) If $p(a) = 0$, then $x - a$ is a factor of the polynomial $p(x)$.

Notice that we have simply written the converse of each of the statements above without worrying if they are true or false. For example, consider the following statement: If Ahmad is in Mumbai, then he is in India. This statement is true. Now consider the converse: If Ahmad is in India, then he is in Mumbai. This need not be true always – he could be in any other part of India.

AP SCERT

సాధారణంగా, ప్రవచనం $p \Rightarrow q$ యొక్క **విపర్యం** , $q \Rightarrow p$ ఇక్కడ p మరియు qలు ప్రవచనాలు. $p \Rightarrow q$ మరియు $q \Rightarrow p$ ఒకదానికొకటి విపర్యం అని గమనించండి.

ఉదాహరణ 13 : కింది ప్రవచనాలకు విపర్య ప్రవచనాలను వ్రాయండి:

(i) జమీలా సైకిల్ నడుపుతుంటే, ఆగస్టు 17 ఆదివారం వస్తుంది.

(ii) ఆగస్ట్ 17 ఆదివారం అయితే, జమీలా సైకిల్ నడుపుతోంది.

(iii) పౌలిన్ కోపంగా ఉంటే, ఆమె ముఖం ఎర్రగా మారుతుంది.

(iv) ఒక వ్యక్తి విద్యలో డిగ్రీని కలిగి ఉంటే, ఆమె బోధించడానికి అనుమతించబడుతుంది.

(v) ఒక వ్యక్తికి వైరల్ ఇన్ఫెక్షన్ ఉంటే, అప్పుడు అతను అధిక వేడిని కలిగి ఉంటాడు.

(vi) అహమ్మద్ ముంబైలో ఉంటే, అతను భారతదేశంలో ఉంటాడు.

(vii) ABC త్రిభుజం సమబాహు త్రిభుజం అయితే, దాని అంతర కోణాలన్నీ సమానంగా ఉంటాయి.

(viii) x కరణీయ సంఖ్య అయితే, x యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతం కాని ఆవర్తితం కాని దశాంశం.

(ix) బహుపది $p(x)$ యొక్క కారణాకం $x - a$ అయితే, $p(a)=0$ అగును.

సాధన : పై ప్రతి ప్రవచనం $p \Rightarrow q$ రూపంలో ఉంటుంది. కాబట్టి విపర్య ప్రవచనం కనుగొనడానికి, మనం మొదట p మరియు q లను గుర్తించి ఆపై $q \Rightarrow p$ అని రాస్తాము.

(i) p: జమీలా సైకిల్ నడుపుతోంది మరియు, q: 17 ఆగస్టు ఆదివారం వస్తుంది. కాబట్టి విపర్య ప్రవచనం ఏమిటంటే: ఆగస్టు 17 ఆదివారం వస్తే, జమీలా సైకిల్ తొక్కుతోంది.

(ii) ఇది (i). యొక్క విపర్యం . దీని యొక్క విపర్యం పైన (i) లో ప్రవచనంగా ఇవ్వబడినది.

(iii) పౌలిన్ ముఖం ఎర్రగా మారితే, ఆమె కోపంగా ఉంటుంది.

(iv) ఒక వ్యక్తికి బోధించడానికి అనుమతిస్తే, ఆమెకు విద్యలో డిగ్రీ ఉంటుంది.

(v) ఒక వ్యక్తి అధిక వేడిని కలిగి ఉంటే, అతనికి వైరల్ ఇన్ఫెక్షన్ ఉంటుంది.

(vi) అహమ్మద్ భారతదేశంలో ఉంటే, అతను ముంబైలో ఉంటాడు.

(vii) ABC త్రిభుజం యొక్క అన్ని అంతర్గత కోణాలు సమానంగా ఉంటే, అది సమబాహు త్రిభుజంగా ఉంటుంది.

(viii) x యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతం కాని ఆవర్తితం కాని దశాంశం అయితే, x అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(ix) $p(a) = 0$ అయితే, $x - a$ అనేది బహుపది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం.

పైన పేర్కొన్న ప్రతి ప్రవచనాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా అని ఆలోచించకుండా మనము వాటి విపర్యాలను వ్రాసినట్లు గమనించండి. ఉదాహరణకు, ఈ ప్రవచనం ను గమనించండి : అహ్మద్ ముంబైలో ఉంటే, అతను భారతదేశంలో ఉంటాడు. ఈ ప్రవచనం సత్యం. ఇప్పుడు విపర్య ప్రవచనంను గమనించండి: అహ్మద్ భారతదేశంలో ఉంటే, అతను ముంబైలో ఉంటాడు. ఇది ఎల్లప్పుడూ సత్యం కానవసరం లేదు – అతను భారతదేశంలోని మరే ఇతర ప్రాంతంలో అయినా ఉండవచ్చు.

In mathematics, especially in geometry, you will come across many situations where $p \Rightarrow q$ is true, and you will have to decide if the converse, i.e., $q \Rightarrow p$, is also true.

Example 14 : State the converses of the following statements. In each case, also decide whether the converse is true or false.

(i) If n is an even integer, then $2n + 1$ is an odd integer.

(ii) If the decimal expansion of a real number is terminating, then the number is rational.

(iii) If a transversal intersects two parallel lines, then each pair of corresponding angles is equal.

(iv) If each pair of opposite sides of a quadrilateral is equal, then the quadrilateral is a parallelogram.

(v) If two triangles are congruent, then their corresponding angles are equal.

Solution :

(i) The converse is 'If $2n + 1$ is an odd integer, then n is an even integer.' This is a false statement (for example, $15 = 2(7) + 1$, and 7 is odd).

(ii) 'If a real number is rational, then its decimal expansion is terminating', is the converse. This is a false statement, because a rational number can also have a non-terminating recurring decimal expansion.

(iii) The converse is 'If a transversal intersects two lines in such a way that each pair of corresponding angles are equal, then the two lines are parallel.' We have assumed, by Axiom 6.4 of your Class IX textbook, that this statement is true.

(iv) 'If a quadrilateral is a parallelogram, then each pair of its opposite sides is equal', is the converse. This is true (Theorem 8.1, Class IX).

(v) 'If the corresponding angles in two triangles are equal, then they are congruent', is the converse. This statement is false. We leave it to you to find suitable counter-examples.

EXERCISE A1.5

1. Write the converses of the following statements.

(i) If it is hot in Tokyo, then Sharan sweats a lot.

(ii) If Shalini is hungry, then her stomach grumbles.

(iii) If Jaswant has a scholarship, then she can get a degree.

(iv) If a plant has flowers, then it is alive.

(v) If an animal is a cat, then it has a tail.

AP SCERT

గణితంలో, ముఖ్యంగా జ్యామితిలో, మీరు $p \Rightarrow q$ సత్యమయ్యే సందర్భాలను ఎదుర్కొంటారు మరియు మీరు విపర్య ప్రవచనం అంటే $q \Rightarrow p$, కూడా సత్యమా కాదా అని నిర్ణయించుకోవాలి.

ఉదాహరణ 14 : కింది ప్రవచనాల విపర్య ప్రవచనంలను పేర్కొనండి. ప్రతి సందర్భంలో, విపర్య ప్రవచనం సత్యమా అసత్యమా అని నిర్ణయించు.

(i) n అనేది సరి పూర్ణ సంఖ్య అయితే, $2n + 1$ అనేది బేసి పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

(ii) వాస్తవ సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతమయితే, ఆ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య.

(iii) ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు సమాంతర రేఖలను ఖండిస్తే , ఏర్పడే సదృశ్య కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి.

(iv) చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాల జతలు సమానంగా ఉంటే, ఆ చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

(v) రెండు త్రిభుజాలు సర్వ సమానంగా ఉంటే, వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

సాధన :

(i) **విపర్య ప్రవచనం:** '$2n + 1$ బేసి పూర్ణ సంఖ్య అయితే, n అనేది సరి పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.' ఇది ఒక అసత్య ప్రవచనం. (ఉదాహరణకు, $15 = 2(7) + 1$, మరియు 7 బేసి సంఖ్య)

(ii) **విపర్య ప్రవచనం:** 'వాస్తవ సంఖ్య అకరణీయం అయితే , దాని దశాంశ విస్తరణ అంతమౌతుంది. ఇది అసత్య ప్రవచనం, ఎందుకంటే అకరణీయ సంఖ్య అంతం కాని ఆవర్తిత దశాంశం కూడా అవుతుంది.

(iii) **విపర్య ప్రవచనం:** 'తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను, సదృశ్య కోణాల జతలు సమానంగా ఉండే విధంగా ఖండిస్తే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరం రేఖలు' మీ 9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంలోని స్వీకృతం 6.4 ద్వారా సత్యమని స్వీకరించబడినది.

(iv) **విపర్య ప్రవచనం:** ' ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజం అయితే, దాని ఎదురెదురు భుజాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి'. ఇది సత్యం. (9వ తరగతి సిద్ధాంతము 8.1)

(v) **విపర్య ప్రవచనం:** 'రెండు త్రిభుజాలలోని సదృశ్య కోణాలు సమానంగా ఉంటే, ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు'. ఇది అసత్యం. దీనిని నిరూపించటానికి ఉపయోగించే ప్రత్యుదాహరణను కనుగొనుటను మీకే వదిలిస్తున్నాము.

అభ్యాసం A1.5

1. కింది ప్రవచనాల విపర్యాలను వ్రాయండి.

(i) టోక్యోలో వేడిగా ఉంటే, శరణ్‌కి ఎక్కువగా చెమటలు పడతాయి.

(ii) షాలిని ఆకలితో ఉంటే, ఆమె కడుపు మండుతుంది.

(iii) జశ్వంత్‌కు స్కాలర్‌షిప్ ఉంటే, ఆమె డిగ్రీ పొందగలరు.

(iv) ఒక మొక్కలో పువ్వులు ఉంటే, అది సజీవంగా ఉంటుంది.

(v) పిల్లి ఒక జంతువు అయితే, దానికి తోక ఉంటుంది.

AP SCERT

2. Write the converses of the following statements. Also, decide in each case whether the converse is true or false.

(i) If triangle ABC is isosceles, then its base angles are equal.

(ii) If an integer is odd, then its square is an odd integer.

(iii) If $x^2 = 1$, then $x = 1$.

(iv) If ABCD is a parallelogram, then AC and BD bisect each other.

(v) If a, b and c, are whole numbers, then $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(vi) If x and y are two odd numbers, then $x + y$ is an even number.

(vii) If vertices of a parallelogram lie on a circle, then it is a rectangle.

A1.7 Proof by Contradiction

So far, in all our examples, we used direct arguments to establish the truth of the results. We now explore 'indirect' arguments, in particular, a very powerful tool in mathematics known as 'proof by contradiction'. We have already used this method in Chapter 1 to establish the irrationality of several numbers and also in other chapters to prove some theorems. Here, we do several more examples to illustrate the idea.

Before we proceed, let us explain what a *contradiction* is. In mathematics, a contradiction occurs when we get a statement p such that p is true and $\sim p$, its negation, is also true. For example,

p: $x = \frac{a}{b}$, where a and b are coprime.

q: 2 divides both 'a' and 'b'.

If we assume that p is true and also manage to show that q is true, then we have arrived at a contradiction, because q implies that the negation of p is true. If you remember, this is exactly what happened when we tried to prove that $\sqrt{2}$ is irrational (see Chapter 1).

How does proof by contradiction work? Let us see this through a specific example.

Suppose we are given the following :

All women are mortal. A is a woman. Prove that A is mortal.

Even though this is a rather easy example, let us see how we can prove this by contradiction.

- Let us assume that we want to establish the truth of a statement p (here we want to show that p : 'A is mortal' is true).

AP SCERT

2. కింది ప్రవచనాల విపర్యాలను వ్రాయండి. అలాగే, ప్రతి సందర్భంలోనూ విపర్యం సత్యమా, అసత్యమా అని నిర్ణయించండి.

(i) ABC త్రిభుజం సమద్విబాహు అయితే, దాని భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి.

(ii) ఒక పూర్ణ సంఖ్య బేసి అయితే, దాని వర్గం కూడా బేసి పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

(iii) $x^2 = 1$ అయితే, $x = 1$.

(iv) ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అయితే, AC మరియు BDలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

(v) a, b మరియు c పూర్ణాంకాలు అయితే, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(vi) x మరియు y రెండు బేసి సంఖ్యలు అయితే, $x + y$ అనేది సరి సంఖ్య.

(vii) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు వృత్తం మీద ఉంటే, అది దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది.

A 1.7 విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ

ఇప్పటివరకు, మన అన్ని ఉదాహరణలలో, సత్యము అని నిరూపించడానికి మనము ప్రత్యక్ష పద్ధతిని ఉపయోగించి ఫలితాలు రాబట్టాము. మనము ఇప్పుడు 'పరోక్ష' వాదనలను అన్వేషిస్తాము, ప్రత్యేకించి, ' విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణం 'గణితంలో చాలా శక్తివంతమైన గణిత సాధనం అంటారు. మనము ఇప్పటికే ఈ పద్ధతిని అధ్యాయం 1లో కరణీయ సంఖ్యల నిరూపణలో ఉపయోగించాము మరియు ఇతర అధ్యాయాలలో కూడా సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించాము. ఇక్కడ ఈ భావనను వివరించడానికి మరిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

మనము కొనసాగే ముందు, *విరుద్ధం* అంటే ఏమిటో చూద్దాం. గణితశాస్త్రంలో, p అనేది సత్యం మరియు $\sim p$ దాని వ్యతిరేక ప్రవచనం కూడా సత్యం. క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలిస్తే,

p: $x = \frac{a}{b}$, ఇక్కడ a, b లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు.

q: 'a' మరియు 'b'లను 2 భాగిస్తుంది.

మనం p సత్యమని భావిస్తే q కూడా సత్యమని నిరూపించగలిగితే మనము విరుద్ధతకు చేరుకుంటాము. ఎందుకంటే p యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనం సత్యమని q సూచిస్తుంది. మనము $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించడానికి ప్రయత్నించినప్పుడు ఇదే జరిగింది అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి (అధ్యాయం 1 పరిశీలించండి).

విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ ఎలా పని చేస్తుంది? దీన్ని ఒక నిర్దిష్ట ఉదాహరణ ద్వారా చూద్దాం:

మనకు ఈ క్రింది వాటిని ఇచ్చారని అనుకుందాం :

స్త్రీలందరూ మరణించేవారే. A ఒక స్త్రీ. A మరణించేది అని నిరూపించండి.

ఇది చాలా సులభమైన ఉదాహరణ అయినప్పటికీ, విరుద్ధత ద్వారా దీనిని ఎలా నిరూపించవచ్చో చూద్దాం.

- మనం p అనే ప్రవచనం యొక్క సత్యాన్ని స్థాపించాలనుకుంటున్నామని అనుకుందాం (ఇక్కడ మనం p : 'A 'మరణించేది' సత్యం అని నిరూపించాలనుకుంటున్నాము).

AP SCERT

- So, we begin by assuming that the statement is not true, that is, we assume that the negation of p is true (i.e., A is not mortal).
- We then proceed to carry out a series of logical deductions based on the truth of the negation of p. (Since A is not mortal, we have a counter-example to the statement 'All women are mortal.' Hence, it is false that all women are mortal.)
- If this leads to a contradiction, then the contradiction arises because of our faulty assumption that p is not true. (We have a contradiction, since we have shown that the statement 'All women are mortal' and its negation, 'Not all women are mortal' is true at the same time. This contradiction arose, because we assumed that A is not mortal.)
- Therefore, our assumption is wrong, i.e., p has to be true. (So, A is mortal.)

Let us now look at examples from mathematics.

Example 15 : The product of a non-zero rational number and an irrational number is irrational.

Solution :

Statements	Analysis/Comment
We will use proof by contradiction. Let r be a non-zero rational number and x be an irrational number. Let $r = \frac{m}{n}$, where m, n are integers and $m \neq 0$, $n \neq 0$. We need to prove that rx is irrational.	
Assume rx is rational.	Here, we are assuming the negation of the statement that we need to prove.
Then $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, where p and q are integers.	This follow from the previous statement and the definition of a rational number.
Rearranging the equation $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, and using the fact that $r = \frac{m}{n}$, we get $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$.	

AP SCERT

- కాబట్టి, మనము ప్రవచనం సత్యం కాదని భావించడం ద్వారా ప్రారంభిస్తాము, అంటే, మనము p యొక్క విలోమం సత్యమని భావిస్తాము. (అంటే, A మరణించేది కాదు).
- మనము సత్యం ఆధారంగా గణిత తార్కిక శ్రేణిని కొనసాగించడానికి ముందుకు వెళ్తాము p యొక్క విలోమం. (A మృత్యురాలు కాదు కాబట్టి, మనకు ప్రత్యుదాహరణ 'స్త్రీలందరూ మరణించేవారే.' అందుచేత, స్త్రీలందరూ మరణించేవారే అనేది అసత్యం)
- మన తప్పు భావన కారణంగా ప్రవచనం విరుద్ధతకు దారితీస్తే, p సత్యం కాదని చెప్పవచ్చు. ('స్త్రీలందరూ మరణించేవారు' అనే ప్రకటన మరియు దాని వ్యతిరేఖ ప్రవచనం, 'అందరూ స్త్రీలు మరణించేవారు కాదు' అదే సమయంలో సత్యం. ఈ విరుద్ధత మనము ఊహించిన ఈ వ్యతిరేఖ భావన A మరణించేవారు కాదు నుండి వచ్చినది.)
- కాబట్టి, మన భావన తప్పు, అంటే p సత్యమై ఉండాలి. (కాబట్టి, A మరణించేవారు.)

ఇప్పుడు గణితం నుండి ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 15 : శూన్యేతర అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం కరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

సాధన :

ప్రవచనాలు	విశ్లేషణ /వ్యాఖ్యానించడం
మనము 'విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ'ను ఎంచుకున్నాము. r అనేది శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య, x అనేది కరణీయ సంఖ్య. $r=\frac{m}{n}$ అనుకొనుము, ఇక్కడ m, nలు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $m \neq 0$, $n \neq 0$. మనము rx అనేది కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించాలి.	
rx అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనుము.	ఇక్కడ ప్రవచనము యొక్క విలోమాన్ని నిరూపించాలి అని మనము భావిస్తున్నాము.
$rx=\frac{p}{q}$ అనుకొనుము ఇక్కడ $p, q \in Z$ మరియు $q \neq 0$.	ఇది మునుపటి ప్రవచనము మరియు అకరణీయ సంఖ్య నిర్వచనాన్ని అనుసరిస్తుంది.
$r=\frac{m}{n}$ అను నిజాన్ని ఉపయోగించి, $rx=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ను ఉంది. $x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{mq}$ ను రాబడతాము.	

AP SCERT

Since np and mq are integers and $mq \neq 0$, x is a rational number.	Using properties of integers, and definition of a rational number.
This is a contradiction, because we have shown x to be rational, but by our hypothesis, we have x is irrational.	This is what we were looking for — a contradiction.
The contradiction has arisen because of the faulty assumption that rx is rational. Therefore, rx is irrational.	Logical deduction.

We now prove Example 11, but this time using proof by contradiction. The proof is given below:

Statements	Analysis/Comment
Let us assume that the statement is note true.	As we saw earlier, this is the starting point for an argument using 'proof by contradiction'.
So we suppose that there exists a prime number $p > 3$, which is not of the form $6n + 1$ or $6n + 5$, where n is a whole number.	This is the negation of the statement in the result.
Using Euclid's division lemma on division by 6, and using the fact that p is not of the form $6n + 1$ or $6n + 5$, we get $p = 6n$ or $6n + 2$ or $6n + 3$ or $6n + 4$.	Using earlier proved results.
Therefore, p is divisible by either 2 or 3.	Logical deduction.
So, p is not a prime.	Logical deduction.
This is a contradiction, because by our hypothesis p is prime.	Precisely what we want!
The contradiction has arisen, because we assumed that there exists a prime number $p > 3$ which is not of the form $6n + 1$ or $6n + 5$.	
Hence, every prime number greater than 3 is of the form $6n + 1$ or $6n + 5$.	We reach the conclusion.

AP SCERT

np మరియు mq పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $mq \neq 0$, కాబట్టి x అనేది అకరణీయ సంఖ్య.	పూర్ణ సంఖ్యలు ధర్మాలు, అకరణీయ సంఖ్య నిర్వచనం నుండి.
దత్తాంశం ప్రకారం x కరణీయ సంఖ్య కాని మనము x అకరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించాము. ఇది విరుద్ధం.	ఇది మనము వెతుకుతున్నది – ఒక విరుద్ధం.
rx అకరణీయ అనే తప్పు ఊహ కారణంగా విరుద్ధతకు దారి తీసింది. అందువలన, rx కరణీయ సంఖ్య.	నిగమన తార్కికం.

మనము ఇప్పుడు ఉదాహరణ 11ని నిరూపిస్తాము, కానీ ఈసారి విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను ఉపయోగిస్తున్నాము. నిరూపణ క్రింద ఇవ్వబడింది:

ప్రవచనాలు	విశ్లేషణ /వ్యాఖ్యానించడం
ఈ ప్రవచనం నిజమేనని అనుకుందాం.	మనం ఇంతకు ముందు చూసినట్లుగా, ఇది 'విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ' కు ప్రారంభం.
$p > 3$ ప్రధాన సంఖ్య అయితే, అది $6n + 1$ లేదా $6n + 5$, రూపంలో ఉండదు, ఇక్కడ n అనేది పూర్ణాంకం	ఇది ఫలిత ప్రవచనం యొక్క విపర్యం.
యూక్లిడ్ యొక్క భాగాహార నియమాన్ని ఉపయోగించి p ను 6 చే భాగిస్తే , మనకు తెలిసిన భావన నుండి $6n + 1$ లేదా $6n + 5$ రూపంలో ఉండదు మరియు $p = 6n$ లేదా $6n + 2$ లేదా $6n + 3$ లేదా $6n + 4$.	ముందుగా నిరూపించబడిన ఫలితాలను ఉపయోగించడం.
కాబట్టి, p అనేది 2 లేదా 3 చే భాగించబడుతుంది.	నిగమన తార్కికం.
కాబట్టి, p అనేది ప్రధాన సంఖ్య కాదు.	నిగమన తార్కికం.
ఇది ఒక విరుద్ధం, ఎందుకంటే దత్తాంశం ప్రకారం p ఒక ప్రధానసంఖ్య	ఖచ్చితంగా మనకు కావలసినది!
విరుద్ధత ఏర్పడింది, ఎందుకంటే $6n + 1$ లేదా $6n + 5$ రూపంలో లేని ప్రధాన సంఖ్య $p > 3$ ఉందని మనము అనుకున్నాము.	
అందువల్ల, 3 కంటే ఎక్కువ ఉన్న ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య $6n + 1$ లేదా $6n + 5$ రూపంలో ఉంటుంది.	మనము సారాంశమును చేరుకున్నాము.

Remark : The example of the proof above shows you, yet again, that there can be several ways of proving a result.

Theorem A1.2 : *Out of all the line segments, drawn from a point to points of a line not passing through the point, the smallest is the perpendicular to the line.*

Proof :

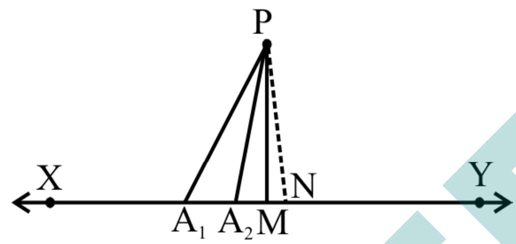


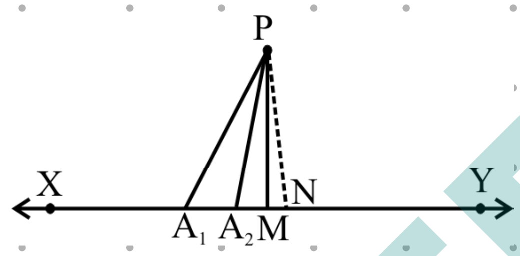
Fig. A1.5

Statements	Analysis/Comment
Let XY be the given line, P a point not lying on XY and PM, PA_1, PA_2, . . . etc., be the line segments drawn from P to the points of the line XY, out of which PM is the smallest (see Fig. A1.5).	Since we have to prove that out of all PM, PA_1, PA_2, . . . etc., the smallest is perpendicular to XY, we start by taking these line segments.
Let PM be not perpendicular to XY	This is the negation of the statement to be proved by contradiction.
Draw a perpendicular PN on the line XY, shown by dotted lines in Fig. A1.5.	We often need constructions to prove our results.
PN is the smallest of all the line segments PM, PA_1, PA_2, . . . etc., which means PN < PM.	Side of right triangle is less than the hypotenuse and known property of numbers.
This contradicts our hypothesis that PM is the smallest of all such line segments.	Precisely what we want!
Therefore, the line segment PM is perpendicular to XY.	We reach the conclusion.

సూచన : పైన ఉన్న ఉదాహరణ యొక్క నిరూపణను ఫలితాన్ని చూసిన తరువాత ఈ ప్రవచనాన్ని నిరూపించడానికి అనేక పద్ధతులు కలవు అని తెలుస్తుంది.

సిద్ధాంతం A1.2 : *రేఖ మీద లేని ఒక బిందువు నుండి రేఖ మీదనున్న బిందువులకు గీచిన అన్ని రేఖా ఖండాలలో, చిన్నది రేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.*

నిరూపణ :



పటం A 1.5

ప్రవచనాలు	విశ్లేషణ /వ్యాఖ్యానించడం
XY అనేది ఒక రేఖ, P బిందువు XY రేఖపై లేని బిందువు PM, PA_1, PA_2, . . . మొదలైనవి, P బిందువు నుండి XY, రేఖపై గీచిన రేఖా ఖండాలు అందులో PM అనేది అతిచిన్న రేఖాఖండం (పటం. A1.5).	మనము P బిందువు నుండి XY రేఖకు గీచిన PM, PA_1, PA_2, . . . మొదలైన రేఖా ఖండాలలో PM అతి చిన్నది XY కి లంబంగా ఉంటుంది.
PM అనేది XY కు లంబంగా లేదు అనుకొనుము.	ఇది విరుద్ధత ద్వారా నిరూపించవలసిన ప్రవచనం యొక్క విలోమం
XY రేఖపై లంబం PN ని గీయండి, ఇది పటం 1.5 A లో బిందువులు ద్వారా చూపబడింది.	మన ఫలితాలను నిరూపించుకోవడానికి మనకు తరచుగా నిర్మాణాలు అవసరం.
PM, PA_1, PA_2, . . . మొదలైన రేఖా ఖండాలలో PN అతి చిన్న రేఖాఖండం కావున PN < PM.	లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక భుజము కర్ణము కన్నా చిన్నది. ఇది విరుద్ధత
అటువంటి అన్ని రేఖా ఖండాలలో లో PM చిన్నది అనే మన దత్తాంశమునకు ఇది విరుద్ధంగా ఉంది.	ఖచ్చితంగా మనకు కావలసినది!
కాబట్టి, PM రేఖా ఖండం XY కి లంబంగా ఉంటుంది.	మనము సారాంశమును చేరుకున్నాము.

EXERCISE A1.6

1. Suppose $a + b = c + d$, and $a < c$. Use proof by contradiction to show $b > d$.
2. Let r be a rational number and x be an irrational number. Use proof by contradiction to show that $r + x$ is an irrational number.
3. Use proof by contradiction to prove that if for an integer a, a^2 is even, then so is a. [**Hint :** Assume a is not even, that is, it is of the form $2n + 1$, for some integer n, and then proceed.]
4. Use proof by contradiction to prove that if for an integer a, a^2 is divisible by 3, then a is divisible by 3.
5. Use proof by contradiction to show that there is no value of n for which 6^n ends with the digit zero.
6. Prove by contradiction that two distinct lines in a plane cannot intersect in more than one point.

A1.8 Summary

In this Appendix, you have studied the following points :

1. Different ingredients of a proof and other related concepts learnt in Class IX.
2. The negation of a statement.
3. The converse of a statement.
4. Proof by contradiction.

AP SCERT

అభ్యాసం A1.6

1. $a + b = c + d$, మరియు $a < c$ అనుకుందాం. $b > d$ అని చూపించడానికి విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను చేయండి.
2. r అనేది కరణీయ సంఖ్య మరియు x అకరణీయ సంఖ్య. $r + x$ అకరణీయ సంఖ్య అని చూపించడానికి విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను చేయండి.
3. ప్రతి పూర్ణసంఖ్య a కు a^2 సరిసంఖ్య అవుతుందని చూపించడానికి విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను చేయండి.
   [**సూచన :** a సరిసంఖ్య కాదు అని అనుకుందాం, అంటే అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు n కు ఇది $2n + 1$ రూపంలో ఉంది, ఆపై కొనసాగండి.]
4. పూర్ణసంఖ్య a కు a^2 అనేది 3 చే భాగించబడితే, a అనేది 3 చే భాగించబడుతుంది అని చూపించడానికి విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను చేయండి.
5. 6^n సున్నాతో ముగిసే n విలువ లేదు అని చూపించడానికి విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను చేయండి.
6. ఒక తలములో రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకటి కంటే ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించుకోవని విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణను చేయండి.

A 1.8 సారాంశం

ఈ అనుబంధంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేసారు :

1. 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్న నిరూపణలో దశలు మరియు ఇతర సంబంధిత భావనలు.
2. ఒక ప్రవచనము యొక్క విలోమము.
3. ఒక ప్రవచనము యొక్క విపర్యము.
4. విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ.

AP SCERT

ANSWERS/HINTS

EXERCISE 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) LCM = 182; HCF = 13 (ii) LCM = 23460; HCF = 2 (iii) LCM = 3024; HCF = 6
3. (i) LCM = 420; HCF = 3 (ii) LCM = 11339; HCF = 1 (iii) LCM = 1800; HCF = 1
4. 22338

7. 36 minutes

EXERCISE 2.1

1. (i) No zeroes (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

EXERCISE 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
   (iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$
2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

EXERCISE 3.1

1. (i) Required pair of linear equations is
   $x + y = 10$; $x - y = 4$, where x is the number of girls and y is the number of boys.
   To solve graphically draw the graphs of these equations on the same axes on graph paper.
   Girls = 7, Boys = 3.

AP SCERT

సమాధానాలు / సూచనలు

అభ్యాసం 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) క.సా.గు= 182; గ.సా.భా=13 (ii) క.సా.గు= 23460; గ.సా.భా = 2 (iii) క.సా.గు= 3024; గ.సా.భా= 6

3. (i) క.సా.గు= 420; గ.సా.భా= 3 (ii) క.సా.గు= 11339; గ.సా.భా = 1 (iii) క.సా.గు= 1800; గ.సా.భా = 1

4. 22338 **7.** 36 నిమిషాలు

అభ్యాసం 2.1

1. (i) శూన్యాలు లేవు (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

అభ్యాసం 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

అభ్యాసం 3.1

1. (i) కావలసిన రేఖీయ సమీకరణాల జత

$x + y = 10; x - y = 4$, ఇక్కడ x అనేది బాలికల సంఖ్య మరియు y అనేది అబ్బాయిల సంఖ్య.

ఈ సమీకరణాల గ్రాఫ్‌లను, గ్రాఫ్ పట్టికలను సాధించుటకు గ్రాఫ్ పై ఒకే అక్షాలపై గీయాలి

బాలికల సంఖ్య = 7, బాలుర సంఖ్య = 3.

AP SCERT

(ii) Required pair of linear equations is

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, where x and y represent the cost (in ₹) of a pencil and of a pen respectively.

To solve graphically, draw the graphs of these equations on the same axes on graph paper.

Cost of one pencil = ₹ 3, Cost of one pen = ₹ 5

2. (i) Intersect at a point (ii) Coincident (iii) Parallel

3. (i) Consistent (ii) Inconsistent (iii) Consistent

(iv) Consistent (v) Consistent

4. (i) Consistent (ii) Inconsistent (iii) Consistent (iv) Inconsistent

The solution of (i) above, is given by $y = 5 - x$, where x can take any value, i.e., there are infinitely many solutions.

The solution of (iii) above is $x = 2$, $y = 2$, i.e., unique solution.

5. Length = 20 m and breadth = 16 m.

6. One possible answer for the three parts:

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. Vertices of the triangle are (–1, 0), (4, 0) and (2, 3).

EXERCISE 3.2

1. (i) $x = 9$, $y = 5$ (ii) $s = 9$, $t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

where x can take any value, i.e., infinitely many solutions.

(iv) $x = 2$, $y = 3$ (v) $x = 0$, $y = 0$ (vi) $x = 2$, $y = 3$

2. $x = -2$, $y = 5$; $m = -1$

3. (i) $x - y = 26$, $x = 3y$, where x and y are two numbers ($x > y$); $x = 39$, $y = 13$.

(ii) $x - y = 18$, $x + y = 180$, where x and y are the measures of the two angles in degrees; $x = 99$, $y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, where x and y are the costs (in ₹) of one bat and one ball respectively; $x = 500$, $y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$, where x is the fixed charge (in ₹) and y is the charge (in ₹ per km); $x = 5$, $y = 10$; ₹ 255.

(v) $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$, where x and y are numerator and denominator of the fraction; $\frac{7}{9}$ ($x = 7$, $y = 9$).

(vi) $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$, where x and y are the ages in years of Jacob and his son; $x = 40$, $y = 10$.

AP SCERT

(ii) కావలసిన జత రేఖీయ సమీకరణాలు

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, ఇక్కడ x –పెన్సిల్ ధర, y – కలం ధరను (₹ లలో) సూచించవచ్చు. గ్రాఫ్ ద్వారా సాధించుటకు, ఈ సమీకరణాల గ్రాఫ్‌లను ఒకే అక్షాలపై గీయండి.

పెన్సిల్ ధర = ₹ 3, పెన్ను ధర = ₹ 5

2. (i) ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. (ii) ఏకీభవించును (iii) సమాంతరాలు

3. (i) సంగతములు (ii) అసంగతములు (iii) సంగతములు

(iv) సంగతములు (v) సంగతములు

4. (i) సంగతములు (ii) అసంగతములు (iii) సంగతములు (iv) అసంగతములు

పైన ఉన్న (i) యొక్క సాధన $y = 5 - x$, ద్వారా ఇవ్వబడింది, ఇక్కడ x ఏదైనా విలువకావచ్చు, అనగా, అనంతమైన సాధనలు వచ్చును.

పై (iii) యొక్క సాధన $x = 2, y = 2$, అనగా, ఏకైక సాధన.

5. పొడవు = 20 మీ మరియు వెడల్పు = 16 మీ.

6. మూడు భాగాలకు సాధ్యమయ్యే ఒక సమాధానం:

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. త్రిభుజం యొక్క శీర్షాలు $(-1, 0)$, $(4, 0)$ మరియు $(2, 3)$.

అభ్యాసం 3.2

1. (i) $x = 9, \; y = 5$ (ii) $s = 9, \; t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

ఇక్కడ x కు అనంత విలువలు తీసుకోవచ్చు, కనుక సాధనలు అనంతం.

(iv) $x = 2, \; y = 3$ (v) $x = 0, \; y = 0$ (vi) $x = 2, \; y = 3$

2. $x = -2, \; y = 5; \; m = -1$

3. (i) $x - y = 26, \; x = 3y$, ఇక్కడ x మరియు y లు రెండు సంఖ్యలు $(x > y)$; $x = 39, y = 13$.

(ii) $x - y = 18, \; x + y = 180$, ఇక్కడ x మరియు y అనేవి రెండూ డిగ్రీలలోని కోణాల కొలతలు; $x = 99, \; y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, ఇక్కడ x మరియు y అనేవి వరుసగా ఒక బ్యాటు వెల, ఒక బంతి యొక్క వెల (₹ లో); $x = 500, y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105, \; x + 15y = 155$, ఇక్కడ x అనేది స్థిర రవాణా ఖర్చు (₹లో) మరియు y అనేది కి.మీ. కు రవాణా ఖర్చులు (కి.మీ. కి ₹ లలో); $x = 5, \; y = 10$; ₹ 255.

(v) $11x - 9y + 4 = 0, \; 6x - 5y + 3 = 0$, ఇక్కడ x మరియు y అనేవి భిన్నం యొక్క లవం, హారం $\frac{7}{9}$ $(x = 7, \; y = 9)$.

(vi) $x - 3y - 10 = 0, x - 7y + 30 = 0$, ఇక్కడ x మరియు y అనేవి జాకబ్, అతని కుమారుడు యొక్క వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో); $x = 40, y = 10$.

AP SCERT

EXERCISE 3.3

1. (i) $x = \frac{19}{5},\ y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2,\ y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

   (iv) $x = 2,\ y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, where x and y are the numerator and denominator of the fraction; $\frac{3}{5}$.

   (ii) $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, where x and y are the ages (in years) of Nuri and Sonu respectively. Age of Nuri (x) = 50, Age of Sonu (y) = 20.

   (iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$, where x and y are respectively the tens and units digits of the number; 18.

   (iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, where x and y are respectively the number of ₹ 50 and ₹ 100 notes; $x = 10$, $y = 15$.

   (v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, where x is the fixed charge (in ₹) and y is the additional charge (in ₹) per day; $x = 15$, $y = 3$.

EXERCISE 4.1

1. (i) Yes (ii) Yes (iii) No (iv) Yes

   (v) Yes (vi) No (vii) No (viii) Yes

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, where x is breadth (in metres) of the plot.

   (ii) $x^2 + x - 306 = 0$, where x is the smaller integer.

   (iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, where x (in years) is the present age of Rohan.

   (iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, where u (in km/h) is the speed of the train.

EXERCISE 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

   (iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. Numbers are 13 and 14.
4. Positive integers are 13 and 14.
5. 5 cm and 12 cm
6. Number of articles = 6, Cost of each article = ₹ 15

AP SCERT

అభ్యాసం 3.3

1. (i) $x = \frac{19}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2$, $y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2$, $y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, ఇక్కడ x మరియు y అనేవి భిన్నం యొక్క లవం, హారంలు $\frac{3}{5}$.

(ii) $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, ఇక్కడ x మరియు y అనేది వరుసగా నూరి మరియు సోనూ యొక్క వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) నూరి వయస్సు $(x) = 50$, సోనూ వయస్సు $(y) = 20$.

(iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$, ఇక్కడ x మరియు y లు వరుసగా పదులు మరియు స్థాన విలువలు అంకె; 18.

(iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, ఇక్కడ x మరియు y లు వరుసగా ₹ 50 మరియు ₹ 100 నోట్స్; $x = 10$, $y = 15$.

(v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, ఇక్కడ x అనేది స్థిర ఖర్చు (₹లలో) మరియు y అనేది అదనపు ఖర్చు (₹ లలో) రోజుకు; $x = 15$, $y = 3$.

అభ్యాసం 4.1

1. (i) అవును (ii) అవును (iii) కాదు (iv) అవును

(v) అవును (vi) కాదు (vii) కాదు (viii) అవును

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, ఇక్కడ x అనేది స్థలము యొక్క వెడల్పు (మీటర్లలో).

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, ఇక్కడ x అనేది చిన్న పూర్ణాంకం.

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, ఇక్కడ x అనేది (సంవత్సరాల్లో) రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు.

(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, ఇక్కడ u అనేది (కి.మీ/గం లో) రైలు వేగం.

అభ్యాసం 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. సంఖ్యలు 13 మరియు 14. **4.** ధన పూర్ణ సంఖ్యలు 13 మరియు 14.

5. 5సెం.మీ మరియు 12సెం.మీ **6.** వస్తువుల సంఖ్య = 6, ప్రతి వస్తువు ఖరీదు = ₹ 15

AP SCERT

EXERCISE 4.3

1. (i) Real roots do not exist (ii) Equal roots; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) Distinct roots; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm\ 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. Yes. 40 m, 20 m **4.** No **5.** Yes. 20 m, 20 m

EXERCISE 5.1

1. (i) Yes. 15, 23, 31, . . . forms an AP as each succeeding term is obtained by adding 8 in its preceding term.

(ii) No. Volumes are V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \cdots$ (iii) Yes. 150, 200, 250, . . . form an AP.

(iv) No. Amounts are 10000 $\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \cdots$

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1. 50, – 1.75, – 2.0

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) No (ii) Yes. $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) Yes. $d = -2$; – 9.2, –11.2, – 13.2 (iv) Yes. $d = 4$; 6, 10, 14

(v) Yes. $d = \sqrt{2}$; $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) No

(vii) Yes. $d = -4$; – 16, – 20, – 24 (viii) Yes. $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) No (x) Yes. $d = a$; $5a, 6a, 7a$

(xi) No (xii) Yes. $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) No (xiv) No (xv) Yes. $d = 24$; 97, 121, 145

EXERCISE 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

AP SCERT

అభ్యాసం 4.3

1. (i) వాస్తవ మూలాలు లేవు (ii) సమాన మూలాలు; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) విభిన్న మూలాలు; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm\, 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. అవును. 40 మీ, 20 మీ **4.** సాధ్యం కాదు **5.** అవును. 20 మీ, 20 మీ

అభ్యాసం 5.1

1. (i) అవును. 15, 23, 31, . . . AP శ్రేఢిలో ముందు పదంకు8 కలిపిన తర్వాత సంఖ్యా పదం వచ్చును.

(ii) కాదు ఘన ఘన పరిమాణాల విలువల సంఖ్య V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \cdots$

(iii) అవును. 150, 200, 250, . . . AP శ్రేఢిగా ఏర్పడుతుంది.

(iv) కాదు, మొత్తం సొమ్ము వరుసగా $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \cdots$

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1. 50, – 1.75, – 2.0

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) కాదు (ii) అవును. $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) అవును. $d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) అవును. $d = 4;$ 6, 10, 14

(v) అవును. $d = \sqrt{2};\ 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) కాదు

(vii) అవును. $d = -4;$ – 16, – 20, – 24 (viii) అవును. $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) కాదు (x) అవును. $d = a; 5a, 6a, 7a$

(xi) కాదు (xii) అవును. $d = \sqrt{2};\ \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii)కాదు (xiv) కాదు (xv) అవును. $d = 24;$ 97, 121, 145

అభ్యాసం 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

AP SCERT

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16th term **5.** (i) 34 (ii) 27

6. No **7.** 178 **8.** 64

9. 5th term **10.** 1 **11.** 65th term

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. 20th term from the last term is 158.

18. –13, –8, –3 **19.** 11th year **20.** 10

EXERCISE 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16$, $S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$ (iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$

(iv) $d = -1$, $a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5$, $a_n = 34$

(vii) $n = 6$, $d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7$, $a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. By putting $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ in the formula $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, we get a quadratic equation $4n^2 + 5n - 636 = 0$. On solving, we get $n = -\frac{53}{4}, 12$. Out of these two roots only one root 12 is admissible.

5. $n = 16$, $d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, $S = 6973$ **7.** Sum = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 వ పదం
5. (i) 34 (ii) 27
6. కాదు
7. 178
8. 64
9. 5 వ పదం
10. 1
11. 65 వ పదం
12. 100
13. 128
14. 60
15. 13
16. 4, 10, 16, 22, . . .
17. చివరి పదం నుండి 20 వ పదం158.
18. –13, –8, –3
19. 11వ సంవత్సరం
20. 10

అభ్యాసం 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. $a = 9, d = 8, S = 636$ లను సూత్రం $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ లో ప్రతిక్షేపించగా లభించు వర్గ సమీకరణం $4n^2 + 5n - 636 = 0$. దీన్ని సాధించగా సాధన $n = -\frac{53}{4}, 12$. లభిస్తుంది. ఈ రెండు మూలాల్లో ఒక మూలం 12 మాత్రమే ఆమోదయోగ్యమైనది.

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$
6. $n = 38, S = 6973$
7. మొత్తం = 1661
8. $S_{51} = 5610$
9. n^2
10. (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

AP SCERT

11. $S_1 = 3, S_2 = 4$; $a_2 = S_2 - S_1 = 1$; $S_3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = -1$,
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15$; $a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$.

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. Values of the prizes (in ₹) are 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 cm

19. 16 rows, 5 logs are placed in the top row. By putting S = 200, $a = 20$, $d = -1$ in the formula $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, we get, $41n - n^2 = 400$. On solving, $n = 16, 25$. Therefore, the number of rows is either 16 or 25. $a_{25} = a + 24d = -4$

i.e., number of logs in 25th row is – 4 which is not possible. Therefore $n = 25$ is not possible. For $n = 16$, $a_{16} = 5$. Therefore, there are 16 rows and 5 logs placed in the top row.

20. 370 m

EXERCISE 5.4 (Optional)*

1. 32nd term **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 cm

4. 35 **5.** 750 m^3

EXERCISE 6.1

1. (i) Similar (ii) Similar (iii) Equilateral

(iv) Equal, Proportional **3.** No

EXERCISE 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm

2. (i) No (ii) Yes (iiii) Yes

9. Through O, draw a line parallel to DC, intersecting AD and BC at E and F respectively.

EXERCISE 6.3

1. (i) Yes. AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) Yes. SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) No (iv) Yes. SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) No (vi) Yes. AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14. Produce AD to a point E such that AD = DE and produce PM to a point N such that PM = MN. Join EC and NR.

15. 42 m

AP SCERT

11. $S_1 = 3, S_2 = 4;\ a_2 = S_2 - S_1 = 1;\ S_3 = 3,\ a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15;\ a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. బహుమతుల విలువలు (₹లో) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 సెం.మీ

19. 16 వరుసలు, 5 చెక్క దుంగలను పై వరుసలో ఉంచినారు. $S = 200, a = 20, d = -1$ లను సూత్రం

$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ లో ప్రతిక్షేపించగా మనకు $41n - n^2 = 400$ లభిస్తుంది. సాధనలో, $n = 16, 25$. అందువల్ల, రెండు వరుసల్లో ఏదోకటి సంఖ్య 16 లేదా 25. $a_{25} = a + 24\ d = -4$ అనగా, 25 వ వరుసలో ఉన్న చెక్క దుంగల సంఖ్య -4 ఇది సాధ్యం కాదు. అందువల్ల $n = 25$ సాధ్యం కాదు. $n = 16, a_{16} = 5$. అందువలన, 16 వరుసలు మరియు పై వరుసలో 5 చెక్క దుంగలు ఉంచబడతాయి.

20. 370 మీ.

అభ్యాసం 5.4 (ఐచ్ఛికం)*

1. 32వ పదం **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 సెం.మీ.

4. 35 **5.** 750 మీ^{3}

అభ్యాసం 6.1

1. (i) సరూపాలు (ii) సరూపాలు (iii) సమబాహు

(iv) సమానం, అనుపాతం **3.** కాదు

అభ్యాసం 6.2

1. (i) 2 సెం.మీ (ii) 2.4 సెం.మీ

2. (i) కాదు (ii) అవును (iiii) అవును

9. O ద్వారా, DC కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీచిన, ఇది వరుసగా E మరియు F ల వద్ద AD మరియు BC లను ఖండించును

అభ్యాసం 6.3

1. (i) అవును. AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) అవును. SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) కాదు (iv) అవును. SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) కాదు (vi) అవును. AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14. AD ని పొడిగించగా E వద్ద AD = DE, PM ని పొడిగించగా N వద్ద PM = MN అగును. EC మరియు NR ని కలపాలి.

15. 42 మీ.

AP SCERT

EXERCISE 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km **3.** No **4.** Yes **5.** Champa is correct.

6. (i) Square (ii) No quadrilateral (iii) Parallelogram

7. (– 7, 0) **8.** – 9, 3 **9.** ± 4, $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

EXERCISE 7.2

1. (1, 3) **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ m; 5th line at a distance of 22.5 m **4.** 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6$, $y = 3$ **7.** (3, – 10)

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 sq. units

AP SCERT

అభ్యాసం 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 కి.మీ **3.** కాదు **4.** అవును **5.** చంపా సరిగా చెప్పింది

6. (i) చతురస్రం (ii) చతుర్భుజం కాదు (iii) సమాంతర చతుర్భుజం

7. (– 7, 0) **8.** – 9, 3 **9.** ± 4, QR $= \sqrt{41}$, PR $= \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

అభ్యాసం 7.2

1. (1, 3)| **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$మీ. 22.5 మీ దూరంలో 5వ లైను వద్ద **4.** 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6,\ y = 3$ **7.** (3, – 10)

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$, $(0,5)$, $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 చదరపు యూనిట్లు

AP SCERT

EXERCISE A1.1

1. (i) Ambiguous (ii) True (iii) True (iv) Ambiguous
(v) Ambiguous

2. (i) True (ii) True (iii) False (iv) True (v) True

3. Only (ii) is true.

4. (i) If $a > 0$ and $a^2 > b^2$, then $a > b$.
(ii) If $xy \geq 0$ and $x^2 = y^2$, then $x = y$.
(iii) If $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ and $y \neq 0$, then $x = 0$.
(iv) The diagonals of a parallelogram bisect each other.

EXERCISE A1.2

1. A is mortal

2. *ab* is rational

3. Decimal expansion of $\sqrt{17}$ is non-terminating non-recurring.

4. $y = 7$

5. $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6. PQRS is a rectangle.

7. Yes, because of the premise. No, because $\sqrt{3721} = 61$ which is not irrational. Since the premise was wrong, the conclusion is false.

EXERCISE A1.3

1. Take two consecutive odd numbers as $2n + 1$ and $2n + 3$ for some integer n.

EXERCISE A1.4

1. (i) Man is not mortal.
(ii) Line l is not parallel to line m.
(iii) The chapter does not have many exercises.
(iv) Not all integers are rational numbers.
(v) All prime numbers are not odd.
(vi) Some students are lazy.
(vii) All cats are black.
(viii) There is at least one real number x, such that $\sqrt{x} = -1$.

AP SCERT

అభ్యాసం A1.1

1. (i) అస్పష్టమైన (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) అస్పష్టమైన
   (v) అస్పష్టమైన
2. (i) సత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) సత్యం (v) సత్యం
3. కేవలం (ii) మాత్రమే సత్యం.
4. (i) $a > 0$ మరియు $a^2 > b^2$ అయితే, అప్పుడు $a > b$.
   (ii) $xy \geq 0$ మరియు $x^2 = y^2$ అయితే, అప్పుడు $x = y$.
   (iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ మరియు $y \neq 0$ అయితే, అప్పుడు $x = 0$.
   (iv) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

అభ్యాసం A1.2

1. A అనే స్త్రీ మరణించేదే. 2. ab అనేది అకరణీయ సంఖ్య
3. $\sqrt{17}$ దశాంశ విస్తరణ అంతం కాని, ఆవర్తనం కాని దశాంశం.
4. $y = 7$ 5. $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 180°$
6. PQRS అనేది దీర్ఘచతురస్రం.
7. అవును, ప్రతిపాదన సరిగా లేదు, ఎందుకంటే $\sqrt{3721} = 61$ ఇది కరణీయం కాదు. ప్రతిపాదన తప్పు కాబట్టి, నిర్ధారణ కూడా తప్పే.

అభ్యాసం A1.3

1. ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య 'n' కు రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలను $2n + 1$ మరియు $2n + 3$ గా తీసుకోండి.

అభ్యాసం A1.4

1. (i) మనిషి చిరంజీవి.
   (ii) l రేఖ m రేఖకు సమాంతరంగా ఉండదు.
   (iii) అధ్యాయంలో ఎక్కువ అభ్యాసాలు లేవు.
   (iv) అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.
   (v) అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలు కావు.
   (vi) కొంతమంది విద్యార్థులు సోమరులు.
   (vii) అన్ని పిల్లులు నల్లగా ఉంటాయి.
   (viii) $\sqrt{x} = -1$, అగునట్లు కనీసం ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయినా ఉంటుంది.

AP SCERT

(ix) 2 does not divide the positive integer a.

(x) Integers a and b are not coprime.

2. (i) Yes (ii) No (iii) No (iv) No (v) Yes

EXERCISE A1.5

1. (i) If Sharan sweats a lot, then it is hot in Tokyo.

(ii) If Shalini's stomach grumbles, then she is hungry.

(iii) If Jaswant can get a degree, then she has a scholarship.

(iv) If a plant is alive, then it has flowers.

(v) If an animal has a tail, then it is a cat.

2. (i) If the base angles of triangle ABC are equal, then it is isosceles. True.

(ii) If the square of an integer is odd, then the integer is odd. True.

(iii) If $x = 1$, then $x^2 = 1$. True.

(iv) If AC and BD bisect each other, then ABCD is a parallelogram. True.

(v) If $a + (b + c) = (a + b) + c$, then a, b and c are whole numbers. False.

(vi) If $x + y$ is an even number, then x and y are odd. False.

(vii) If a parallelogram is a rectangle, its vertices lie on a circle. True.

EXERCISE A1.6

1. Suppose to the contrary $b \leq d$.

3. See Example 10 of Chapter 1.

6. See Theorem 5.1 of Class IX Mathematics Textbook.

AP SCERT

(ix) 2 అనేది ధన పూర్ణ సంఖ్య 'a' ను భాగించదు.

(x) a మరియు b అనేవి పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు కావు.

2. (i) అవును (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) కాదు (v) అవును

అభ్యాసం A1.5

1. (i) శరణ్ కు చాలా చెమటలు పడితే, అప్పుడు టోక్యోలో వేడిగా ఉన్నట్లు.

(ii) షాలిని కడుపు మండుతుంటే అప్పుడు ఆకలి వేస్తుంది.

(iii) జస్వంత్ డిగ్రీ పొందగలిగితే, అప్పుడు ఆమెకు స్కాలర్ షిప్ వస్తుంది.

(iv) ఒక మొక్క సజీవంగా ఉంటే, దానికి పువ్వులు ఉంటాయి.

(v) ఒక జంతువుకు తోక ఉంటే, అప్పుడు అది పిల్లి అవుతుంది.

2. (i) ఒకవేళ త్రిభుజం ABC యొక్క భూ కోణాలు సమానంగా ఉన్నట్లయితే, అప్పుడు అది సమద్విబాహు త్రిభుజం అవుతుంది. సత్యం.

(ii) ఒక పూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గం బేసి సంఖ్య అయితే, అప్పుడు ఆ పూర్ణ సంఖ్య, బేసి సంఖ్య అగును. సత్యం.

(iii) ఒకవేళ $x = 1$, అయితే, అప్పుడు $x^2 = 1$. సత్యం.

(iv) ఒకవేళ AC మరియు BD ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటే, అప్పుడు ABCD అనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. సత్యం.

(v) ఒకవేళ $a + (b + c) = (a + b) + c$ అయితే, అప్పుడు a, b మరియు c లు పూర్ణాంకాలు. అసత్యం.

(vi) $x + y$ అనేది సరి సంఖ్య అయితే, అప్పుడు x మరియు y బేసి సంఖ్యలు. అసత్యం.

(vii) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్రం అయితే, దాని శీర్షాలు ఒక వృత్తం మీద ఉంటాయి. సత్యం.

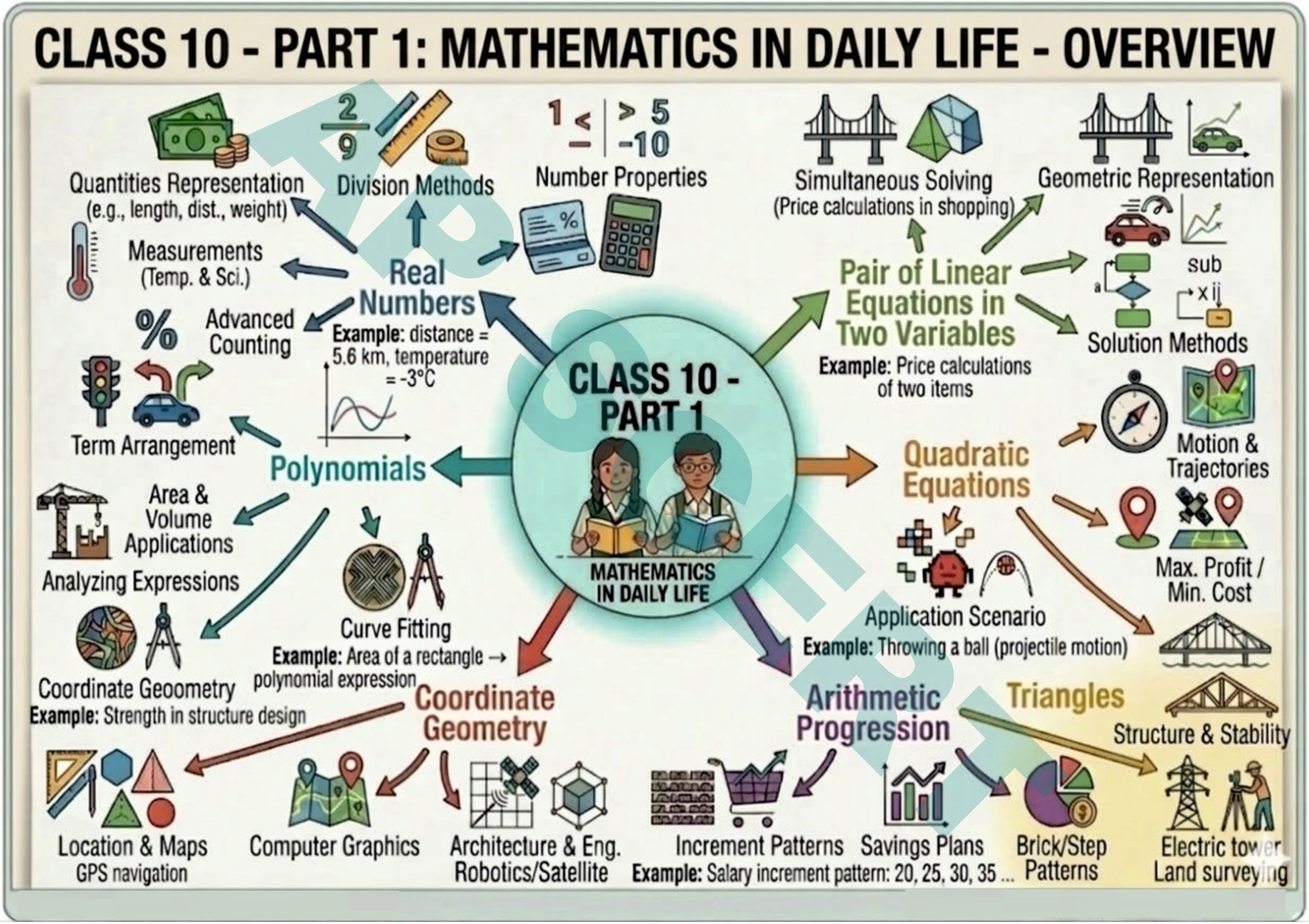
అభ్యాసం A1.6

1. దీనికి విరుద్ధంగా $b \le d$ అనుకుందాం.

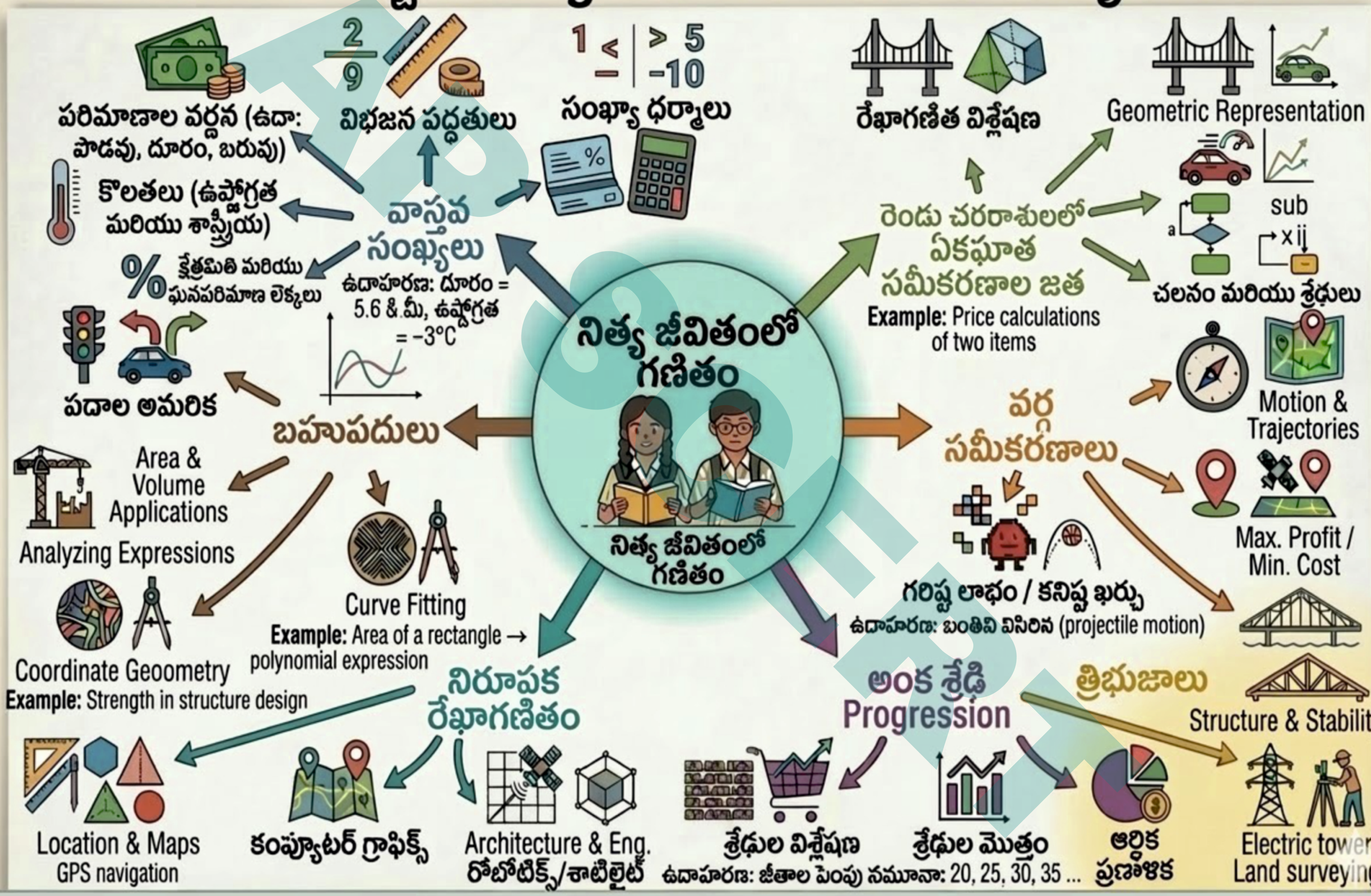
3. 1వ అధ్యాయంలోని ఉదాహరణ 10 చూడండి.

6. తొమ్మిదో తరగతి గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని సిద్ధాంతం 5.1 చూడండి.

AP SCERT


CLASS 10 - PART 1: MATHEMATICS IN DAILY LIFE - OVERVIEW
CLASS 10 - PART 1
MATHEMATICS IN DAILY LIFE
Real Numbers
Example: distance = 5.6 km, temperature = -3°C
Quantities Representation (e.g., length, dist., weight)
Division Methods
Number Properties
Measurements (Temp. & Sci.)
Advanced Counting
Polynomials
Term Arrangement
Area & Volume Applications
Analyzing Expressions
Curve Fitting
Example: Area of a rectangle → polynomial expression
Coordinate Geometry
Example: Strength in structure design
Coordinate Geometry
Location & Maps
GPS navigation
Computer Graphics
Architecture & Eng.
Robotics/Satellite
Pair of Linear Equations in Two Variables
Example: Price calculations of two items
Simultaneous Solving (Price calculations in shopping)
Geometric Representation
Solution Methods
Quadratic Equations
Motion & Trajectories
Max. Profit / Min. Cost
Application Scenario
Example: Throwing a ball (projectile motion)
Arithmetic Progression
Increment Patterns
Savings Plans
Brick/Step Patterns
Example: Salary increment pattern: 20, 25, 30, 35 ...
Triangles
Structure & Stability
Electric tower
Land surveying
AP SCERT

తరగతి 10 - పార్ట్ 1: నిత్య జీవితంలో గణితం - ఏకీకృత సారాంశం



AP SCERT

FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence.

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- **Constitution of India,**
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.

AP SCERT